arXiv:2601.06107v1 [math.DG] 3 Jan 2026

截面质心位置对仿射超球面中二次曲面的刻画

Alexandre Borentain

摘要

Meyer 和 Reisner 的一个定理通过平行截面质心共线这一性质刻画椭球：若 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个凸体，并且对于每个 n 维子空间 $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$，截面 $(x+M)\cap\Omega$ 的质心共线，那么 Ω 是一个椭球。

我们研究了这一质心共线条件向无界凸集的自然推广。特别地，我们证明，在仿射超球面中，恰有椭球、抛物面和双叶双曲面的一叶满足这一性质。我们还指出了额外的假设条件；在这些条件下，任何具有这一性质的凸超曲面必定是二次曲面。

1 引言与主要结果

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个凸体。Blaschke 的经典定理指出，若对于 Ω 的每一族平行弦，它们的中点都位于同一个超平面内，则 Ω 是一个椭球。Meyer 和 Reisner 后来研究了以下性质：对于每个 n 维子空间 $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$，只要 $(x+M)\cap\Omega$ 有界，截面 $(x+M)\cap\Omega$ 的质心就共线（其中 x 遍历所有与 $\operatorname{int}\Omega$ 相交的平移）。我们将此称为**截面质心共线性** 性质（SCCP）。Meyer 和 Reisner 证明，具有 SCCP 的凸体必为椭球 [11]。

本文研究哪些无界凸集满足 SCCP。具体而言，我们证明，在仿射超球面中，恰好只有椭球、抛物面以及双叶双曲面的一叶满足 SCCP。最后，我们探讨了一些构造，以更好地理解满足 SCCP 的曲面成为仿射超球面的条件。

如果一个曲面的仿射法线交于一点，则称它为仿射超球面。仿射超球面由 T.it.eica [13–15] 提出，后来 Blaschke [2], Calabi [3],Cheng–Yau [6], 等许多学者对其进行了研究。按照仿射平均曲率进行的基本分类可概括如下：仿射平均曲率为正的仿射超球面是椭球；仿射平均曲率为零的仿射超球面是椭圆抛物面；而仿射平均曲率为负的仿射超球面则丰富得多，因为 Cheng 和 Yau 证明，对于任意正规凸锥，都存在一个渐近于其边界的完备双曲仿射超球面 [5,6]。在后一类中识别二次曲面一直颇受关注；例如，Pick 和 Berwald 证明，Pick形式为零意味着该超球面局部是某个二次曲面的开子集；见 [12]。

一个反复出现的主题是平行截面的质心与仿射法向量之间的经典关系。从无穷小角度看，光滑严格凸超曲面上一点处的仿射法线与平行于切平面的截面之质心轨迹相切；因此，当

固定法向方向上的截面形心族共线时，其方向便与仿射法向方向一致。这为质心几何与等仿射曲面理论之间搭建了桥梁，而我们将在下文加以利用。

我们的主要结果是对仿射超球面作如下分类。

定理 1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个边界光滑的严格凸域 $\partial\Omega$，并赋予其 *Blaschke*（等仿射）规范化，使得 $\partial\Omega$ 是一个仿射超球面。假设对于每个n维线性子空间 $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$，只要截面 $(x+M)\cap\Omega$ 有界，当截面与$\operatorname{int}\Omega$相交时，随着平移量 x 遍历所有此类平移，截面 $(x+M)\cap\Omega$ 的质心均共线。那么 $\partial\Omega$ 是以下二次曲面之一：

- 一个椭球，
- 一个抛物面，或
- 双叶双曲面的一叶。

这一结果通过将 Meyer–Reisner [11] 使用的技巧推广到无界情形，并运用 Kim [8,9]关于二次曲面的刻画而得出。我们证明了该定理的一个小扩展：将仿射超球面条件替换为较弱的渐近收敛到锥的假设：

定理 2。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$的严格凸域。假设 Ω的衰退锥为以下情形之一：

(i) $\{0\}$,

(ii) 1维，或

(iii) $(n+1)$维；在此情形下，进一步假设 $\partial\Omega$渐近于一个锥 .

此外，假设 Ω 满足以下条件：
对于每个 n 维线性子空间 $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$，只要 $(x+M)\cap\Omega$ 有界，那么当 x 遍历所有满足 $(x+M)\cap\operatorname{int}\Omega \neq \varnothing$ 的平移时，截面 $(x+M)\cap\Omega$ 的质心共线。

那么 $\partial\Omega$ 是一个二次曲面，更确切地说：

- 在情形 (i) $\partial\Omega$ 是一个椭球；
- 在情形 (ii) $\partial\Omega$ 是一个抛物面；
- 在情形 (iii) $\partial\Omega$ 是双叶双曲面的一叶。

定理 1 应与 Meyer–Reisner 定理 [11] 对照：在他们的设定中，凸集是有界的，因此 $(x+M)\cap\Omega$ 总是有界的。值得注意的是，对于无界凸集，如果 $(y+M)\cap\Omega$ 有界且非空，那么对所有 $x \in \mathbb{R}^{n+1}$，$(x+M)\cap\Omega$ 也有界。

自然会有人问，能否去掉仿射超球假设或渐近收敛到锥这一条件。

问题 3。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是边界为光滑边界 $\partial\Omega$的严格凸域，并假设对于每个$(x+M)\cap\Omega$ 有界的 n 维子空间 $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$，当 $(x+M)\cap\operatorname{int}\Omega \neq \varnothing$ 遍历所有平移时，截面 $(x+M)\cap\Omega$ 的质心共线。是否必有 $\partial\Omega$ 为椭球、抛物面或双叶双曲面的一叶？

组织结构。 本节余下部分中，我们将固定记号，并回顾有关衰退锥、高斯映射和质心线的基础知识。第 2 节中，我们将 Meyer 和 Reisner 的若干引理推广到无界情形，并导出一个体积截函数；该函数的等值集在某个位似变换下确定我们的初始集合。我们将其与 [8] 和 [9]中的工作联系起来，以证明定理 1。第 3 节中，我们利用衰退锥研究质心线的行为，并证明定理 2。最后一节中，我们将讨论完整分类具有 SCCP 的凸超曲面所需解决的其余未决情形。

1.1 符号与基本对象

全文中，$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$上的标准内积，$\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数，$\mathcal{H}^k$表示 k维豪斯多夫测度。$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球面记作 S^n。集合 A 的内部和边界分别记作 $\operatorname{int} A$ 和 ∂A。

定义 1（超平面、截面与质心）。对于 $u \in S^n$ 和 $t \in \mathbb{R}$，定义超平面

$$\Pi(u,t) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} :\ \langle u, x\rangle = t\}.$$

对于任意 $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$，定义截面

$$\Sigma(u,t;X) := \Pi(u,t) \cap X.$$

当 $0 < \mathcal{H}^n$（Σ（u，t；X））$< \infty$时，该截面的质心为

$$\operatorname{cen}(u,t;X) := \frac{1}{\mathcal{H}^n(\Sigma(u,t;X))} \int_{\Sigma(u,t;X)} x \,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) \in \Pi(u,t).$$

定义 2（闵可夫斯基泛函与支撑函数）。对于满足$0 \in \operatorname{int} K$的凸体 $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$，闵可夫斯基泛函为

$$\|x\|_K := \inf\{\lambda > 0 :\ x \in \lambda K\},$$

且支撑函数为

$$h_K(u) := \sup_{y \in K} \langle u, y\rangle \quad (u \in \mathbb{R}^{n+1}).$$

定义 3 (衰退锥**)**。对于凸集（不一定有界）$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$，其衰退锥为

$$\operatorname{rec}(\Omega) := \{d \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x + td \in \Omega\ \ \forall x \in \Omega,\ t \geq 0\}.$$

它是一个闭凸锥，其线性维数记为$\dim \operatorname{rec}(\Omega)$。

1.1.1 向锥收敛

现在我们介绍无界凸超曲面收敛到锥的两种不同概念，这对我们很有用。设 $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个边界光滑的闭严格凸集，∂X 是一个 n 维超曲面，并设 $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是顶点位于原点的闭凸锥的边界，即对所有 $\lambda > 0$，$\lambda C = C$。

对于 $R > 0$，记 $S_R := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} :\ \|x\| = R\}$。

定义 4 (吹胀收敛). 设 $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个内部非空的闭凸集，并固定某个 $x_0 \in X$。 X 的吹胀锥 是 *Painlev´e–Kuratowski* 极限

$$X_\infty := \lim_{t\to\infty} t^{-1}(X - x_0),$$

只要此极限存在。

众所周知，对于闭凸集，此极限总是存在，不依赖于 x_0 的选取，并且与经典的衰退锥 $\mathrm{rec}(X)$ 一致，参见例如 [1, 第 2] 章或 [7]。

定义 5 （渐近收敛）。 我们称 ∂X 与 C 渐近，如果

$$d\big(\partial X \cap S_R,\ C \cap S_R\big) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Calabi 猜想的相关研究 [4] 和 [10] 中采用了这一定义，不应将其与渐近锥混淆；渐近锥与衰退锥等价。

如果 ∂X 渐近收敛到一个锥 $\partial\mathcal{C}$ ，那么这个锥必定是 $\partial\mathrm{rec}(X)$。因此，只要前者存在，渐近极限与吹胀极限就相等。

然而，凸集可能具有定义良好的吹胀锥（等价地，衰退锥），但其边界并不按定义 5 的意义渐近于任何锥。例如， $\mathbb{R}^{n+1}$ 中椭圆抛物面的上图集，其衰退锥等于一条射线。

更一般地，仅有吹胀收敛并不能保证 $\partial X \cap S_R$收敛到 $\mathrm{rec}(X)\cap S_R$。反过来，即使 $\mathrm{rec}(X)$ 是满维的，渐近收敛仍可能不成立：见图 1，其中 $f(x) = e^x$ 的上图集的衰退锥等于第二象限，但 f 的图像并不渐近于该锥的边界。

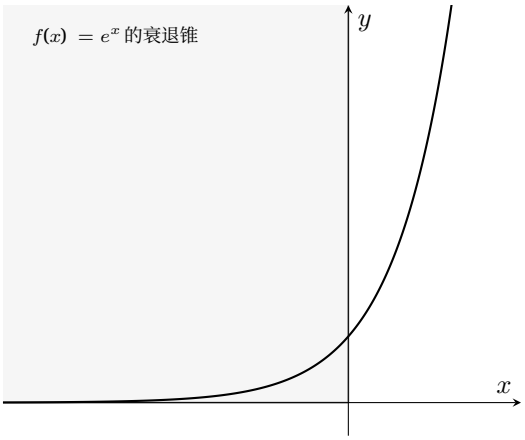

图 1：函数 $f(x) = e^x$。

1.1.2 高斯映射与质心轨迹

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 具有 C^2 严格凸边界 $\partial\Omega$。其（外）欧几里得高斯映射

$$N : \partial\Omega \to S^n, \qquad N(x) = \text{outer unit normal at } x,$$

是良定义的，且是到其像的同胚。像 $U := N(\partial\Omega) \subset S^n$ 将是可容许法向量的集合。

定义 6（质心曲线与质心线）。 固定 $u \in U$。定义

$$I(u) := \{t \in \mathbb{R} : \ 0 < \mathcal{H}^n(\Sigma(u,t;\Omega)) < \infty\},$$

以及 质心曲线

$$\gamma_u \ := \ \{\mathrm{cen}(u,t;\Omega) : \ t \in I(u)\} \ \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

当 γ_u 包含于某条仿射直线 ℓ_u时，我们称 ℓ_u 为方向为 u的质心线。当底层集合很重要时，我们记作 ℓ_u^Ω。

定义 7（切割体积泛函）。 对于 $a \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$，记

$$\begin{aligned} H(a) &:= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \langle a, x\rangle = 1\}, \\ C(a)^+ &:= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \langle a, x\rangle \geq 1\}, \\ C(a)^- &:= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \langle a, x\rangle \leq 1\}, \end{aligned}$$

并且，对于可测的 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$$V(a) := \mathcal{H}^{n+1}\big(\Omega \cap C(a)^-\big).$$

并用 $x(a)$ 表示截面 $H(a) \cap\Omega$的质心。

注意

$$H(a) \cap \Omega = \Sigma\left(\frac{a}{\|a\|}, \frac{1}{\|a\|}\right), \quad \text{and} \quad x(a) = \gamma\left(\frac{a}{\|a\|}, \frac{1}{\|a\|}\right).$$

2 核心引理与分类结果

本节将 [11] 中的两个引理推广到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的无界凸集，并导出一个关键结论：在 SCCP 条件下，由支撑超平面确定的某些截切体积是常数。这将成为分类具有 SCCP 的仿射超球面的主要工具。推广后的证明与原证明几乎完全相同，但为完整起见，我们仍将其列出。

2.1 截切体积泛函的可微性

以下引理是 [11]，中引理 5 的一个变体，适用于由形如 $C(a)^-$ 的半空间所作的截切。

引理 4。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个无界凸集，其 $0 \notin\Omega$ 具有光滑边界。那么，对于满足 $0 < V(a) < \infty$的每个 a， V处均为C^1，并且

$$x(a) = \frac{\nabla V(a)}{\langle a, \nabla V(a)\rangle}.$$

证明。由于 $\Omega \cap C(a)^-$ 是具有非空内部的凸集，且 $0 < V(a) < \infty$，因此它必定是有界的。特别地，$H(a) \cap \Omega$ 是有界的，并且具有有限的 n 维测度。

令 $\mathrm{rec}(\Omega)$ 表示 Ω 的衰退锥。若 $v \in \mathrm{rec}(\Omega) \setminus \{0\}$ 且 $\langle a, v\rangle \le 0$，那么对于任意$x_0 \in \Omega \cap C(a)^-$，都有 $x_0 + tv \in \Omega \cap C(a)^-$对所有 $t \ge 0$成立，因此 $\Omega \cap C(a)^-$将是无界的，矛盾。因此

$$\langle a, v\rangle > 0 \qquad \forall\, v \in \mathrm{rec}(\Omega) \setminus \{0\}. \tag{1}$$

由 $\mathrm{rec}(\Omega)$ 的紧致性 $\cap S^n$，存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\langle a, v\rangle \ge \alpha > 0 \qquad \forall\, v \in \mathrm{rec}(\Omega) \cap S^n. \tag{2}$$

由此可知，存在 $R > 0$ 和 $\varepsilon_0 > 0$，使得对所有满足 $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ 的 ε 以及每个坐标方向 e_j,

$$\Omega \cap C(a + \varepsilon e_j)^- \subset B_R(0). \tag{3}$$

事实上，若 (3) 不成立，则存在序列 $x_k \in \Omega \cap C(a + \varepsilon_k e_j)^-$，其中 $\|x_k\| \to \infty$ 且 $\varepsilon_k \to 0$；归一化后可得到一个方向 $d \in \mathrm{rec}(\Omega) \cap S^n$，满足 $\langle a, d\rangle \le 0$，这与 (1) 矛盾。因此，对于足够小的 ε，所有截集 $\Omega \cap C(a + \varepsilon e_j)^-$ 都位于一个固定的球 $B_R(0)$ 内。

步骤 *1*：坐标方向上的单侧导数。考虑

$$D_j(\varepsilon) := V(a + \varepsilon e_j) - V(a), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

我们计算 $\varepsilon = 0$ 处关于 $j = 1$的导数；其他坐标方向的情形类似，而关于 $\varepsilon < 0$ 的论证与关于 $\varepsilon > 0$ 的相同。

记

$$\Omega_+(\varepsilon) := \{x \in \Omega : \ \langle a, x\rangle > 1,\ \langle a + \varepsilon e_1, x\rangle \le 1\},$$
$$\Omega_-(\varepsilon) := \{x \in \Omega : \ \langle a, x\rangle \le 1,\ \langle a + \varepsilon e_1, x\rangle > 1\},$$

使得

$$D_1(\varepsilon) = |\Omega_+(\varepsilon)| - |\Omega_-(\varepsilon)|.$$

$\Omega_+(\varepsilon)$ 和 $\Omega_-(\varepsilon)$ 都位于超平面 $H(a)$ 与 $H(a + \varepsilon e_1)$ 之间的带状区域内，因此由 (3)，对于 $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$，它们都包含在有界集合 $\Omega \cap \big(C(a)^- \cup C(a + \varepsilon e_1)^-\big) \subset B_R(0)$ 中。

令 P表示到 $H(a)$ 的正交投影，并令 $Q_\varepsilon x$ 表示将 x 沿向量 a 平行投影到 $H(a + \varepsilon e_1)$ 上的投影。那么，对于 $x \in H(a)$，有：

$$\|x - Q_\varepsilon x\| = \frac{|\varepsilon||x_1|}{\|a\| + \varepsilon \frac{a_1}{\|a\|}} \tag{4}$$

定义

$$U(\varepsilon) := H(a) \cap \Omega \cap P\big(H(a + \varepsilon e_1) \cap \Omega\big), \qquad W(\varepsilon) := \{x \in H(a) : \ [x, Q_\varepsilon x] \cap \Omega \ne \emptyset\}.$$

$\Omega_+(\varepsilon)$ 的每个点都位于一条线段 $[x, Q_\varepsilon x]$ 上，其中 $x \in U(\varepsilon)$；反过来，每条这样的线段都会在两个超平面之间截出 $\Omega_+(\varepsilon)$ 的一小片。根据 Fubini定理

$$\frac{\varepsilon}{\|a\| + \varepsilon \frac{a_1}{\|a\|}} \int_{U(\varepsilon) \cap \{x_1 \ge 0\}} x_1 \, d\sigma(x) \ \le\ |\Omega_+(\varepsilon)| \ \le\ \frac{\varepsilon}{\|a\| + \varepsilon \frac{a_1}{\|a\|}} \int_{W(\varepsilon) \cap \{x_1 \ge 0\}} x_1 \, d\sigma(x), \tag{5}$$

对于带有 $x_1 \le 0$ 的 $\Omega_-(\varepsilon)$，也有类似的估计。

由于 $\Omega \cap C(a)^-$ 是紧的，集合 $H(a) \cap \Omega$ 和 $H(a+\varepsilon e_1) \cap \Omega$ 在 $\varepsilon \to 0$时关于豪斯多夫度量收敛，因此

$$U(\varepsilon), W(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{d_H} H(a) \cap \Omega.$$

由于 $H(a) \cap \Omega$ 是紧的，函数 $x \mapsto x_1$ 在这些集合上都有界。将 $\varepsilon \downarrow 0$ 代入 (5)，得到

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{|\Omega_+(\varepsilon)|}{\varepsilon} = \frac{1}{\|a\|} \int_{H(a)\cap\Omega,\ x_1 \ge 0} x_1 \, d\sigma(x).$$

对 $\Omega_-(\varepsilon)$ 采用完全类似的论证（考虑 $x_1 \le 0$），可得

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{|\Omega_-(\varepsilon)|}{\varepsilon} = \frac{1}{\|a\|} \int_{H(a)\cap\Omega,\ x_1 \le 0} x_1 \, d\sigma(x).$$

将两个极限相减，得到

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{D_1(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{\|a\|} \int_{H(a)\cap\Omega} x_1 \, d\sigma(x).$$

对所有坐标方向 e_j 重复同样的计算可知

$$\nabla V(a) = \frac{1}{\|a\|} \int_{H(a)\cap\Omega} x \, d\sigma(x). \tag{6}$$

因此， V 在 a的一个邻域内是 C^1 。

步骤 *2*：质心公式。

将 (6) 与 a 取内积，并在 $H(a)$ 上使用 $\langle a,\ x\rangle = 1$ ，得到

$$\langle a, \nabla V(a)\rangle = \frac{1}{\|a\|} \int_{H(a)\cap\Omega} \langle a, x\rangle \, d\sigma(x) = \frac{1}{\|a\|} \int_{H(a)\cap\Omega} 1 \, d\sigma(x).$$

因此

$$\int_{H(a)\cap\Omega} x \, d\sigma(x) = \|a\| \, \nabla V(a), \qquad \int_{H(a)\cap\Omega} 1 \, d\sigma(x) = \|a\| \, \langle a, \nabla V(a)\rangle .$$

将这两个恒等式相除，得到

$$x(a) = \frac{\nabla V(a)}{\langle a, \nabla V(a)\rangle}.$$

□

2.2 浮体刻画

接下来，我们对 [11] 中的引理 7 作相应调整。

引理 5。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 和 $B \subset \Omega$ 均为无界严格凸集，且满足 $0 \notin$ 内 B。假设对于 B的每个支撑超平面 H， $H \cap \Omega$ 的质心均存在且属于 B。进一步假设，对于满足 $H(a)$ 是 B 的支撑超平面的每个 $a \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 以及 $B \subset C(a)^+$，有

$$0 < V(a) < \infty, \qquad V(a) := \mathcal{H}^{n+1}(\Omega \cap C(a)^+).$$

那么存在一个常数 $c > 0$，使得

$$V(a) = c \qquad \textit{for all such } a.$$

几何预备知识。 设 a 如陈述所述，使得 $H(a)$ 支撑 B，且 $B \subset C(a)^+$。我们记录 B 严格凸性的两个推论。

(i) 唯一接触点。 B 的严格凸性意味着，支撑超平面 $H(a)$ 与 B 仅交于一点，记为 $b(a) \in \partial B$。因此 $H(a) \cap B = \{b(a)\}$，且 $\langle a,\ b(a)\rangle = 1$。

(ii) 支撑参数集的切空间。设

$$\mathcal{S} := \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} :\ B \subset C(a)^+,\ H(a) \text{ supports } B\}.$$

由于 $B = \bigcap_{a\in\mathcal{S}} C(a)^+$，且 a 处的活跃不等式为 $\langle a,\ b(a)\rangle \geq 1$ 在唯一接触点处取等号，故 $\mathcal{S}$ 在 a 处的切空间满足

$$T_a\mathcal{S} \subset \{v \in \mathbb{R}^{n+1} :\ \langle v, b(a)\rangle = 0\}. \tag{7}$$

换言之， $b(a)$ 垂直于实现同一支撑点的参数超曲面。

引理 *5* 的证明。 取满足 $0 < V(a) < \infty$ 的 $a \in \mathcal{S}$。根据假设， $H(a) \cap \Omega$ 的质心位于 B 中；又由于它也位于 $H(a)$ 上，因此必有

$$x(a) = b(a). \tag{8}$$

Inde由严格凸性， $H(a) \cap B = \{b(a)\}$，因此， B 中位于 $H(a)$上的唯一点是 $b(a$).

由引理 4 和 (8)， V 在 a 处的梯度平行于 $b(a)$:

$$\nabla V(a) = \lambda(a)\, b(a) \qquad \text{with} \quad \lambda(a) := \langle a, \nabla V(a)\rangle \neq 0. \tag{9}$$

令 $v \in T_a\mathcal{S}$。利用 (7) 和 (9),

$$D_v V(a) = \langle \nabla V(a), v\rangle = \lambda(a)\ \langle b(a), v\rangle = 0.$$

因此， V 沿 $T_a\mathcal{S}$ 的所有方向导数在 a处均为零。由于 a 是任意的， V 在 $\mathcal{S}$上局部常数。

严格凸体的支撑参数集合 $\mathcal{S}$ 是连通的（因为 ∂B 的高斯映射连续，且满射到外单位法向量集合上）。因此，局部常数意味着全局常数：存在 $\alpha > 0$ 使得

$$V(a) = \alpha \qquad \text{for all } a \in \mathcal{S} \text{ with } 0 < V(a) < \infty.$$

这正是所需的结论。 □

定理 *1* 的证明。 仿射超球面的所有仿射法线要么

(i) 与某个向量 e_{n+1} 平行；或

(ii) 交于同一点。

在情形 (i) 和 (ii) 中，我们均可按以下方式构造 B：

$$B = \begin{cases} \Omega + \lambda e_{n+1} & \text{in case (i)}, \\ \lambda\,\Omega & \text{in case (ii)}, \end{cases}$$

对于 B 的每个法向量为 $u \in U$ 的支撑超平面 P_u，P_u 与 B 之间的接触点 x_0 可写为

$$x_0 = \begin{cases} N^{-1}(u) + \lambda e_{n+1} & \text{in case (i)}, \\ \lambda\, N^{-1}(u) & \text{in case (ii)}, \end{cases}$$

在情形 (i) 中，存在某个 $\lambda > 0$；在情形 (ii) 中，存在某个 $\lambda > 1$，其中 $N^{-1}(u)$ 表示 $\partial\Omega$ 上外法向量为 u 的点。特别地，截面 $P_u \cap \Omega$ 的质心位于质心线 ℓ_u^{Ω} 上，因此根据将 Ω 适当平移或缩放构造出 B 的方式，该质心也位于 B 中。

因此，Ω 和上述 B 满足引理 5 的假设。由此可知，存在常数 $\alpha > 0$，使得对于与 $u \in N(\partial\Omega)$ 对应的所有支撑参数 a，均有 $V(a) = \alpha$。

我们回顾一个定理，它总结了 [8]，中定理 2 和 [9] 中定理 5 的结果。

定理 6. 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中由函数 $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ 的图像定义的光滑凸超曲面，且 $\Phi(x)$ 是与 $f(x)$ 相切的平面。对于 $k \geq 0$，记 $V_x(k)$ 为由 $\Phi(x) + k$ 与 M 之间的区域所围成的体积。对于 $k \geq 1$，记 $V_x^*(k)$ 为由 $k\,\Phi(x)$ 与 M 之间的区域所围成的体积。若对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，$V_x(k)$ 都是常数，则 M 是椭圆抛物面。若对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，$V_x^*(k)$ 都是常数，则 M 是双叶双曲面的一叶。

因此，在情形 (i) 中，$\partial\Omega$ 必须是一个椭圆抛物面；而在情形 (ii) 中，$\partial\Omega$ 是双叶双曲面的一叶。

最后，如果 $\partial\Omega$ 是闭且有界的，则 $\partial\Omega$ 是一个椭球这一结论，正是 Meyer–Reisner 定理 [11]。□

请注意，该证明依赖于质心线彼此平行或相交于一点，因此也依赖于 $\partial\Omega$ 是一个仿射超球面。事实上，由于一个紧 $\partial\Omega$ 的所有质心线都相交于 Ω 的质心，紧仿射超球面的分类意味着 $\partial\Omega$ 必须是一个椭球。根据同一分类，当所有质心线彼此平行时，$\partial\Omega$ 必须是一个抛物面。因此，上述结果在双曲情形下最为有趣。

问题 3 的解决取决于具有 SCCP 的凸超曲面是否必然是一个仿射超球面；这一约化正是接下来几节的动机。

3 As质心线与衰退锥的渐近行为 s

本节分析质心线的渐近行为。我们发现，对于具有 SCCP 的严格凸集，Ω 的质心线与其衰退锥 $\mathrm{rec}(\Omega)$ 的质心线方向相同。此外，若 $\partial\Omega$ 与 $\mathrm{rec}(\Omega)$ 渐近，则 Ω 的质心线与其衰退锥 $\mathrm{rec}(\Omega)$ 的质心线重合。 ∂因此，Ω 必须是仿射超球面，进而是一个二次曲面。

引理 7. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个严格凸的无界集合，并且假设Ω 具有 *SCCP*。令 $\mathcal{C} := \mathrm{rec}(\Omega)$ 为其衰退锥。固定 $u \in U := N(\partial\Omega)$，并将与$\Omega$ 相关的质心线记为 ℓ_u^{Ω}，将与 $\mathcal{C}$相关的质心线记为 $\ell_u^{\mathcal{C}}$。那么

$$\ell_u^{\Omega} \parallel \ell_u^{\mathcal{C}}.$$

证明。 根据 SCCP， ℓ_u 关于 t仿射依赖：

$$\ell_u(t) = q_u + t\, w_u, \qquad t \in I(u),$$

对于某个 $q_u,\ w_u \in \mathbb{R}^{n+1}$。

对于锥 $\mathcal{C} = \Omega$ 的衰退锥，只要截面 $\Sigma(u,\ t;\mathcal{C})$ 的测度有限，其质心就位于一条 $\ell_u^{\mathcal{C}}$ 经过 $\mathcal{C}$ 的顶点的直线上。由于 $\mathcal{C}$ 是锥，随着 t 变化，截面 $\Sigma(u,\ t;\mathcal{C})$ 彼此位似，其质心按线性比例缩放：

$$\ell_u^{\mathcal{C}}(t) = t\, w_u^{\mathcal{C}},$$

对于某个 $w_u^{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^{n+1}$。

现在，令 $R > 0$，并考虑缩放集

$$\Omega_R := \frac{1}{R}\Omega.$$

由于 Ω 是闭凸的，其渐近锥

$$\Omega_\infty := \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\Omega$$

存在且与衰退锥重合：

$$\Omega_\infty = \mathrm{rec}(\Omega) = \mathcal{C}.$$

特别地，对于任意固定的 $t > 0$ 和 $u \in N(\partial\Omega)$，

$$\Omega_R \cap \Pi(u,t) \xrightarrow[R\to\infty]{d_H} \mathcal{C} \cap \Pi(u,t)$$

在超平面 $\Pi(u,\ t)$ 内以豪斯多夫距离收敛。由于每个截面都是 $\Pi(u,\ t)$ 的有界凸子集，且其 n–测度为正且有限，以豪斯多夫距离收敛意味着质心收敛：

$$\ell_u^{\Omega_R}(t) \xrightarrow[R\to\infty]{} \ell_u^{\mathcal{C}}(t) = t\, w_u^{\mathcal{C}}.$$

另一方面，Ω_R 在 t 这一层的截面，正是 Ω 在 R 这一层的截面经过缩放后的结果 t:

$$\Omega_R \cap \Pi(u,t) = \frac{1}{R}\big(\Omega \cap \Pi(u,Rt)\big),$$

因此其质心为

$$\ell_u^{\Omega_R} = \frac{1}{R}\,\ell_u(Rt) = \frac{1}{R}\big(q_u + Rt\, w_u\big) = \frac{1}{R}q_u + t\, w_u.$$

令 $R \to \infty$，我们得到

$$\ell_u^{\Omega_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} t\, w_u.$$

结合这两个极限，我们得到

$$t\,w_u = t\,w_u^{\mathcal{C}} \qquad \text{for all } t > 0,$$

因此 $w_u = w_u^{\mathcal{C}}$。因此，质心线 ℓ_u^{Ω} 的方向向量与 $\ell_u^{\mathcal{C}}$的方向向量重合，一个 d

$$\ell_u^{\Omega} \parallel \ell_u^{\mathcal{C}}. \qquad \square$$

定理 *2* 的证明。如果 rec(Ω) $= \{0\}$，则 Ω 有界，而 Meyer–Reisner 定理 [11]推出 $\partial\Omega$ 是一个椭球。因此设 rec(Ω) $\neq \{0\}$，并记 $\mathcal{C} := \mathrm{rec}(\Omega)$。

根据引理 7，对于每个可容许法向方向 $u \in N(\partial\Omega)$，质心线 ℓ_u^{Ω} 平行于锥 $\mathcal{C}$所对应的质心线 $\ell_u^{\mathcal{C}}$。

情形 *1*：$\dim \mathcal{C} = 1$。此时 $\mathcal{C}$ 是一条射线，因此每条直线 $\ell_u^{\mathcal{C}}$ 的方向都相同。由此，所有质心线 ℓ_u^{Ω} 都互相平行。这意味着 $\partial\Omega$ 的仿射法线也互相平行；因此 $\partial\Omega$ 是一个非真仿射超曲面。由定理 1 可得，$\partial\Omega$ 是一个椭圆抛物面。

情况 *2*：维数 $\mathcal{C} = n+1$ 且 $\partial\Omega$ 渐近于 $\mathcal{C}$。固定 $u \in N(\partial\Omega)$。当 $t \to \infty$ 时，$\partial\Omega$ 渐近收敛到 $\partial\mathcal{C}$，这意味着有界截面 $\Sigma(u,\ t;\Omega)$ 在 $\Pi(u,\ t)$ 内按豪斯多夫距离收敛到 $\Sigma(u,\ t;\ \mathcal{C})$。特别地，质心满足

$$\ell_u^{\Omega}(t) - \ell_u^{\mathcal{C}}(t) \to 0 \qquad (t \to \infty).$$

这迫使 $\ell_u^{\Omega} = \ell_u^{\mathcal{C}}$。因此，所有质心线 ℓ_u^{Ω} 都交于 $\mathcal{C}$的顶点，这意味着 $\partial\Omega$ 的仿射法线交于一点，所以 $\partial\Omega$ 是真仿射超曲面。应用定理 1 可得，$\partial\Omega$ 是双叶双曲面的一叶。

$\square$

4 结论与开放问题

解决问题 3 等同于回答以下二分法是否成立：

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 连通，具有光滑严格凸边界 $\partial\Omega$，并满足 SCCP。是否必然有

$$\bigcap_{u \in N(\partial\Omega)} \ell_u^{\Omega} = \{p\}$$

对于某个 $p \in \mathbb{R}^{n+1}$，否则

$$\ell_{u_1}^{\Omega} \parallel \ell_{u_2}^{\Omega} \qquad \forall u_1, u_2 \in U\ ?$$

有四个子情形，其中两个已经解决，另外两个仍悬而未决。

已知情形

情形 1：满维衰退锥，Ω 渐近于其锥。假设 Ω 具有一个 $(n+1)$ 维的衰退锥 $\mathcal{C} = \Omega$ 的衰退锥，并且 $\partial\Omega$ 渐近于 $\mathcal{C}$。根据定理 2，对于每个 $u \in U$，ℓ_u^{Ω} 质心线 $\mathcal{C}$都与其质心线重合，因此

$$\bigcap_{u \in N(\partial\Omega)} \ell_u^{\Omega} = \{p\},$$

其中 p 是 Ω 的衰退锥的顶点。在这种情况下，$\partial\Omega$ 渐近于一个锥，并与其质心线重合 s.

情况 2：一维衰退锥。如果 dim Ω 的衰退锥 $= 1$，则 Ω 的衰退锥是一个 ra y,

$$\ell^{\Omega}_{u_1} \parallel \ell^{\Omega}_{u_2} \qquad \forall u_1, u_2 \in U,$$

并且根据定理 2 ∂，Ω 是一个抛物面。

未解决的情形

其余 两种情形，据我们所知，尚未解决，并包含了对具有 SCCP 的 ng
凸超 曲面进行分类的核心难题。

情形 3：衰退锥为满维，且 Ω 不与该锥渐近。 假设 Ω 的衰退锥 rec(Ω) 是满维的（$n+1$），但 ∂ Ω 不与 ∂rec(Ω) 渐近。根据程—丘对 Calabi 猜想的证明，存在一个以 rec(Ω) 为渐近对象的双曲仿射超球面 Y，其欧几里得法向量为 u 的点处的仿射法向量与 ℓ^{Ω}_{u} 平行。关键问题在于，这是否能推出 ∂Ω 本身是仿射超球面。若是，则定理 2 适用，这一情形下的分类便告完成。

情形 4：中间维数衰退锥。 最后，假设 rec(Ω) 的维数为 m，且 $1 < m < n+1$。在这种情况下，SCCP 意味着所有质心线 ℓ^{Ω}_{u} 都平行于一个固定的 m 维子空间 V，但这些质心线必然交于同一点或彼此平行，都不是自动成立的。

致谢

感谢 Jacob Ogden 在整个项目过程中给予我的慷慨指导。我们多次进行内容丰富、富有启发性的长谈，他始终如一的支持以及所作出的贡献都弥足珍贵。

参考文献

[1] Alfred Auslender 和 Marc Teboulle。优化与变分不等式中的渐近锥与函数。Springer数学专著。Springer，纽约，2003年。[2] Wilhelm Blaschke。讲义 ¨论微分几何 *II*：仿射微分几何。Springer出版社，柏林，1923年。[3] Eugenio Calabi。完备仿射超曲面 I。数学研讨会，10：19–38，1972年。[4] Eugenio Calabi。完备仿射超曲面 I。载于数学研讨会，第10卷，第19–38页。意大利高等数学研究所、学术出版社，1972年。[5] Shiu-Yuen Cheng 和 Shing-Tung Yau。关于 Monge-Amp`ere 方程 det((∂²u/∂x_i∂x_j)) = f(x, u) 的正则性。纯粹与应用数学通讯，30：41–68，1977年。[6] Shiu-Yuen Cheng 和 Shing-Tung Yau。完备仿射超曲面。第一部分：仿射度量的完备性。纯粹与应用数学通讯，39(6)：839–866，1986年。

[7] Yboon Garc´ıa、Bruno Goicochea、Rub´en L´opez 和 Javier Mart´ınez。集合与映射的地平线与衰退渐近概念：统一方法。优化理论与应用杂志，205(2)：33，2025年。[8] Dong-Soo Kim。欧几里得空间 $\mathbb{E}^{n+1}$ 中的椭球与椭圆双曲面。线性代数及其应用，471：28–45，2015年。[9] Dong-Soo Kim 和 Young Ho Kim。球面与椭圆抛物面的若干刻画 II。线性代数及其应用，438(3)：1356–1364，2013年。[10] An-Min Li、Udo Simon 和 Guosong Zhao。超曲面的整体仿射微分几何，第11卷，德·格鲁伊特数学论丛。Walter de Gruyter，1993年。[11] M. Meyer 和 S. Reisner。通过截面质心位置刻画椭球。几何奉献，31(3)：345–355，1989年。[12] Katsumi Nomizu 和 Takashi Sasaki。仿射微分几何：仿射浸入几何。剑桥大学出版社，1994年。[13] Gheorghe Tzitzeica。论一类新的曲面。法国科学院周报 ´院 ´科学学会，144：1257–1259，1907年。[14] Gheorghe Tzitzeica。论一类新的曲面。巴勒莫数学学会学报，25：180–187，1908年。[15]Gheorghe Tzitzeica。论一类新的曲面，第 2` 部分。巴勒莫数学学会学报，25：210–216，1909年。

数学系，帕德尔福德楼，华盛顿大学，西雅图，
华盛顿州 98195电子邮箱：aboren@uw.edu