arXiv:2601.06136v1 [math.RA] 5 Jan 2026

凯莱-哈密顿定理的几何起源：通过维数关系式的构造性证明

[王晓]清华大学教育学院]
[wang-x20@mails.tsinghua.edu.cn]

2026年1月13日（arXiv预印本）

摘要

我们证明，凯莱-哈密顿定理是一个更基本的维数约束的推论：syzygy $\varepsilon \otimes \varepsilon = 0$，其中 ε 是 m维空间中的列维-奇维塔符号。通过将视角从张量 A 转向通过缩并诱导出 A的不变量的各向同性算子，我们揭示了当这个消失算子作用于 $A^{\otimes m}$时，凯莱-哈密顿恒等式便会出现。该定理的内在张量形式——由不变量系数乘以张量幂构成——源自缩并结构，而非凭空强加$ad\ hoc$。我们对二维空间给出了明确验证，并结合拉普拉斯展开与牛顿-吉拉德恒等式，给出了与维数无关的证明。这一框架阐明了该定理的结构为何取决于环境维数，并提示了向高阶张量推广的可能性；在这类张量中，经典特征多项式方法将会失效。

关键词： 凯莱-哈密顿定理；syzygy；各向同性张量；列维-奇维塔符号；不变量理论；理性力学
2020年数学主题分类： 15A72；15A24；74A99

1 引言

凯莱-哈密顿定理是线性代数中最优雅的结果之一：每个方阵都满足其自身的特征方程。在理性力学中，该定理是张量函数表示理论的基石，使得一般张量多项式能够化简为仅含有限个独立不变量的典范形式 [5, 7, 11]。

凯莱-哈密顿定理的经典表述形式看似简单。对于 m 维欧几里得空间中的二阶张量 A，该定理断言 $p(A) = \mathbf{0}$，其中 $p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{I})$ 是特征多项式。具体而言，在二维和三维中——这两种情形与力学最为相关，分别对应平面问题和空间问题：

- **二维**$(m = 2)$**:**

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)\, A + \det(A)\, \mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{1}$$

- **三维**$(m = 3)$**:**

$$A^3 - \mathrm{tr}(A)\, A^2 + \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}^2(A) - \mathrm{tr}(A^2)\right] A - \det(A)\, \mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{2}$$

请注意，这些方程中的每一项同时都是矩阵方程 和张量恒等式：系数——tr(A)、det(A) 等——都是标量不变量（取值与坐标无关的零阶张量），而矩阵幂 A^k 则是二阶张量。

让我们像侦探勘查犯罪现场的证据那样，更仔细地考察这些方程。

观察 1. 凯莱-哈密顿方程中的每一项都具有如下形式：（不变量）$\times$（张量幂）：一个零阶张量乘以一个二阶张量。这意味着每一项都是关于 A 的各向同性函数 —— 其值完全由 A 的内在几何性质决定，与坐标选择无关。

观察 2. 这里有一个显著的齐次性：在 m 维情形中，每一项关于 A 的总次数都是 m 。例如，在方程 (2) 中， A^3 的次数为 3；tr(A)A^2 的次数为 $1+2=3$； [tr^2(A) $-$tr(A^2)]A 的次数为 $2+1=3$；而 det(A)$\mathbf{I}$ 的次数为 3（因为 det(A) 关于 A 的分量是三次的）。

观察 3. 这并非普通的线性相关关系。在标准的线性相关关系 $\sum c_i v_i = 0$ 中，系数 c_i 是常数。但在这里，“系数” tr(A)、det(A) 等本身是 A 的函数！这种关系类似于“常数变易”——从 $\sum c_i A^i = 0$ 到 $\sum c_i(A) A^i = 0$。此外，这些不变量系数可以通过用各向同性张量缩并 $A^{\otimes k}$ 来生成（矩不变量）。

观察 4. 张量及其不变量具有与坐标无关的内蕴形式。然而，凯莱-哈密顿定理本身并不具有这种普适性：它的长度和结构取决于环境维数 m。在二维中，该关系包含三项；在三维中，包含四项；在 m 维中，包含 $m+1$ 项。这一点颇为奇特——“内蕴”对象 A 满足的关系，其形式竟然取决于维数。

推论。这种对维数的依赖表明，凯莱-哈密顿定理不仅仅是关于 A 的代数恒等式，而是由环境空间施加的约束。因此，我们需要寻找一个能够刻画此类由维数引发的代数关系的概念。

“syzygy”一词源于天文学，最初用于描述天体的排列——一种受引力几何约束的构型。在代数中，Sylvester [8] 引入了这一术语，用以指称不变量之间的多项式关系：这些代数约束并非源自对象本身，而是源自它们所在的环境空间 。希尔伯特合冲定理 [3] 确立了此类关系构成一个有限生成模，这是不变量理论的一项奠基性成果。在理性力学中，syzygy支配着本构关系的结构以及张量多项式的约化。

本文旨在揭示，凯莱-哈密顿定理是**一个更基本的维数关系式所导出的结果**。我们的关键方法是转换视角：我们不再关注张量 A，而是考察通过缩并导出 A不变量的各向同性张量。将“参数”（各向同性算子）与“变量”（张量 A）分离，便得出以下见解：

1. 凯莱-哈密顿方程中的每一项，都是由一个作用于 $A^{\otimes m}$ 的（$2m+2$）阶各向同性张量通过指标缩并导出的。这些各向同性张量是控制指标如何配对的“参数”。

2. **基本 syzygy** 是恒等式 $\varepsilon \otimes \varepsilon = 0$，其中 ε 是 m维空间中的（$m+1$）阶列维-奇维塔符号。这是各向同性张量之间具有常系数的线性关系 ——一种真正的线性相关，而非凯莱-哈密顿方程本身中所见的“变化系数”相关。3. 凯莱-哈密顿定理源自 （或导出自）这一基本 syzygy：当消失算子 $\varepsilon \otimes \varepsilon$ 作用于对称张量积 $A^{\otimes m}$时，所得结果（$\varepsilon \otimes \varepsilon$）： $A^{\otimes m} = 0$ 自然继承了内在的张量形式（不变量 $\times$张量幂），并导出凯莱-哈密顿恒等式。

这一层次结构阐明了一个微妙之处：尽管凯莱-哈密顿定理常被称为“syzygy”，但更准确地说，它是基本 syzygy$\varepsilon \otimes \varepsilon = 0$ 在限制于二阶张量时的一种体现 。该定理之所以著名，是因为矩阵无处不在，而且其结果可以用特征值来解释。然而，其背后的约束——在 m维空间中不可能对超过 m 个方向进行反对称化——与**阶数无关** ，并适用于任意 阶张量。

本文的结构沿着侦探的线索展开。第2节介绍数学预备知识：凯莱-哈密顿定理的显式形式、各向同性张量作为缩并控制因子的作用，以及列维-奇维塔符号作为基本 syzygy 的生成元。第3节给出我们的主要结果：构造性地推导出 $\varepsilon \otimes \varepsilon = 0$ 如何导出凯莱-哈密顿定理，并在二维情形下进行显式验证。第4节讨论其影响及未来方向。

2 数学预备知识

2.1 凯莱-哈密顿定理

设 A 是 m 维欧几里得空间 V 中的二阶张量（等价地说，是一个方阵）。凯莱-哈密顿定理指出， A 满足其特征方程：

$$p(A) = \mathbf{0}, \quad \text{where } p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{I}). \tag{3}$$

对于在力学中相关的二维和三维情形，显式形式分别见公式 **(1)** 和 **(2)**。多项式系数是 A 的**主不变量** 。我们强调，不变量比特征值更为根本：特征值需要求解多项式方程并加以排序，而不变量是张量分量的多项式函数，在正交变换下作为标量变换。它们以“无序”且无坐标的方式编码张量的内在几何信息。

注1。 式(1)–(2) 中的每一项在 A中都是 m 次齐次的。例如，在式(1)中， A^2 的次数为 *2*，$\mathrm{tr}(A)A$ 的次数为 $1+1=2$，而$\det(A)\mathbf{I}$ 的次数为 *2*（因为$\det(A) \sim A_{ij}A_{kl}$） 。等价地，每一项的张量阶数加上两倍的不变量次数等于$2m+2$： 这就是诱导 出每一项的各向同性张量的阶数。这种齐次性并非偶然——它反映了所有项都是由作用于 $A^{\otimes m}$ 的相同 阶数的各向同性算子诱导而来。

2.2 各向同性张量与缩并控制

若张量在所有正交坐标变换下其分量均保持不变，则称其为**各向同性** 张量。根据各向同性张量表示定理， [7, 10], 每个偶数阶各向同性张量都可表示为克罗内克δ符号乘积的线性组合：

$$\mathcal{T}_{i_1 j_1 \cdots i_p j_p} = \sum_{\sigma} c_\sigma \, \delta_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \delta_{i_{\sigma(2)} j_{\sigma(2)}} \cdots \delta_{i_{\sigma(p)} j_{\sigma(p)}}, \tag{4}$$

其中求和遍及 $2p$ 指标的所有不同配对， c_σ 为标量系数。此类独立配对的数量为 $(2p-1)!! = (2p-1)(2p-3)\cdots 3 \cdot 1$。

各向同性张量的物理意义在于其作为**缩并控制器**所发挥的作用。 $2p$阶各向同性张量 $\mathcal{T}$定义了一种对输入张量的指标进行配对和缩并的规则。当 $\mathcal{T}$ 作用于张量积 $A^{\otimes k}$ （其中 $2k \le 2p$）时，会生成一个新张量，其分量是由 A的分量构成的多项式表达式。

关键在于，这种缩并会诱导出各向同性函数：如果 $\mathcal{T}$是各向同性的，且 A 按张量变换，那么 $\mathcal{T}$: $A^{\otimes k}$ （指标按适当方式饱和）也会协变地变换。这是张量分析**商法则** 的推论：在正交变换下保持不变的多线性映射，等价于一个高阶各向同性张量。

2.3 列维-奇维塔符号与基本 syzygy

列维-奇维塔符号 $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ 是 m 维空间中唯一（相差一个符号）的全反对称各向同性张量。其分量由指标排列的奇偶性决定：

$$\varepsilon_{i_1 \cdots i_m} = \begin{cases} +1 & \text{if } (i_1, \ldots, i_m) \text{ is an even permutation of } (1, \ldots, m), \\ -1 & \text{if } (i_1, \ldots, i_m) \text{ is an odd permutation of } (1, \ldots, m), \\ 0 & \text{if any two indices are equal.} \end{cases} \tag{5}$$

第三个条件至关重要。在 m维空间中，每个指标的取值范围为$\{1, 2, \ldots, m\}$。根据**抽屉原理**，任取 $m+1$ 个指标，至少有一个取值重复。因此：

$$\varepsilon_{i_1 \cdots i_{m+1}} \equiv 0 \quad \text{in } m\text{-dimensional space.} \tag{6}$$

这种消失性会传递到张量积。定义 $(2m+2)$ 阶张量：

$$\mathcal{E}^{j_1 \cdots j_{m+1}}_{i_1 \cdots i_{m+1}} := \varepsilon^{j_1 \cdots j_{m+1}} \varepsilon_{i_1 \cdots i_{m+1}} = \delta^{j_1 \cdots j_{m+1}}_{i_1 \cdots i_{m+1}} = \det \begin{pmatrix} \delta^{j_1}_{i_1} & \cdots & \delta^{j_{m+1}}_{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{j_1}_{i_{m+1}} & \cdots & \delta^{j_{m+1}}_{i_{m+1}} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

最右侧的表达式是**广义 Kronecker delta**，即普通克罗内克δ构成的 $(m+1) \times (m+1)$ 行列式。在 m维空间中，这个行列式恒等于零：

$$\delta^{j_1 \cdots j_{m+1}}_{i_1 \cdots i_{m+1}} = 0 \quad (\text{in } m\text{-dimensional space}). \tag{8}$$

这就是**基本 syzygy**——有限维性对各向同性张量施加的最原始约束。它表示在 $(2m+2)$ 阶各向同性张量的基元素之间存在常系数线性相关。不同于

凯莱-哈密顿定理（其中系数取决于 A），这一 syzygy 是算子之间真正的线性关系，不依赖任何特定的张量输入。所有其他维数约束，包括凯莱-哈密顿定理，都是将这一基本恒等式应用于特定张量积后导出的。

3 定理　凯莱-哈密顿定理作为导出的 syzygy

3.1 从变量到参数：商法则

传统的凯莱-哈密顿定理研究方法聚焦于张量 A：研究其特征值和特征多项式，并验证 $p(A) = 0$。我们提出一种互补的视角，将关注点从 A （变量）转向诱导每一项的各向同性张量（参数）。

回顾观察 1–2，方程 (1)–(2) 中的每一项都具有以下性质：

- **齐次，次数为** m 关于 A： A 的总幂次（包括显式幂次以及隐藏在 $\mathrm{tr}(A^k)$ 等不变量中的幂次）恰好为 m。
- **二阶张量**：输出是一个二阶张量（矩阵）。

因此，每一项都定义了一个多线性映射：

$$\underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{m \text{ copies}} \longrightarrow (\text{second-order tensor}). \tag{9}$$

根据张量分析的**商法则**，任何各向同性多重线性映射都等价于一个高阶各向同性张量。具体而言，每一项——视为关于$A^{\otimes m}$的函数——对应一个（$2m+2$）阶各向同性张量 $\mathcal{T}$，该张量诱导出以下缩并模式：

$$(\text{term})_{mn} = \mathcal{T}_{mn\, i_1 j_1 \cdots i_m j_m} A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_m j_m}. \tag{10}$$

这种重新表述将问题分开： A 是任意的（变量），而各向同性张量 $\mathcal{T}$ 则编码了每一项的结构（参数）。凯莱-哈密顿定理由此成为一个关于参数的命题：这些诱导张量的某些线性组合必须对所有 A都产生零映射。

3.2 基本 syzygy 诱导凯莱-哈密顿定理

单独来看，（$2m+2$）阶各向同性张量空间的维数为（$2m+1$）!!，对应于通过克罗内克δ对 $2m+2$ 个指标进行配对的所有不同方式。在维数足够高的空间中，这些配对作为算子是线性无关的。

然而，在 m 维空间中，基本 syzygy (8) 断言，这些算子的某个完全反对称组合为零：

$$\mathcal{E} = \varepsilon \otimes \varepsilon = 0 \quad (\text{as a } (2m+2)\text{-th order tensor in } m \text{ dimensions}). \tag{11}$$

这是一种各向同性张量之间的<style id='1'>常系数线性关系——在算子层面上是真正的 syzygy。

现在，当这个零算子作用于 $A^{\otimes m}$ 时，它会产生：

$$\mathcal{E} : A^{\otimes m} = (\varepsilon \otimes \varepsilon) : A^{\otimes m} = 0. \tag{12}$$

右侧为零并非因为 A 有什么特殊性质，而是因为算子本身 为零。然而，逐项展开这个缩并后，我们得到如下形式的和：

$$\sum_k c_k(A) \cdot A^{m-k} = 0, \tag{13}$$

其中，每个 $c_k(A)$ 都是 A 的不变量（迹或迹的乘积）。系数对 A 的表面依赖源于特定的缩并模式——$(\varepsilon \otimes \varepsilon)$ 的张量结构： $A^{\otimes m}$ 产生了与张量幂相乘的不变量。

命题 1. 凯莱-哈密顿定理是恒等式$(\varepsilon \otimes \varepsilon) : A^{\otimes m} = 0$ 的显式形式，其中指标的指定使其输出为二阶张量。其内在形式——不变量系数乘以张量幂——继承自缩并的张量结构，而非人为设定。

现在，我们针对 $m = 2$ 对这一结论进行显式验证。

3.3 显式验证：二维空间

在二维空间（$m = 2$）中，基本 syzygy 涉及一个作用于 $A \otimes A$ 的 3×3 广义 Kronecker delta。我们按如下方式设置缩并。

设输出指标为（m， n）（即所得二阶张量的自由指标），缩并指标为（i， j）和（b， c）（将与 $A_{ib}A_{jc}$ 饱和）。syzygy 表示为：

$$\delta^{mbc}_{ijn} A_{ib} A_{jc} = 0. \tag{14}$$

我们展开 3×3 行列式：

$$\begin{aligned} \delta^{mbc}_{ijn} &= \det \begin{pmatrix} \delta^m_i & \delta^b_i & \delta^c_i \\ \delta^m_j & \delta^b_j & \delta^c_j \\ \delta^m_n & \delta^b_n & \delta^c_n \end{pmatrix} \\ &= \delta^m_i \delta^b_j \delta^c_n - \delta^m_i \delta^b_n \delta^c_j - \delta^m_j \delta^b_i \delta^c_n + \delta^m_j \delta^b_n \delta^c_i + \delta^m_n \delta^b_i \delta^c_j - \delta^m_n \delta^b_j \delta^c_i. \end{aligned} \tag{15}$$

用 $A_{ib}A_{jc}$缩并每一项：

1. $\delta^m_i \delta^b_j \delta^c_n A_{ib} A_{jc} = A_{mj} A_{jn} = (A^2)_{mn}$
2. $-\delta^m_i \delta^b_n \delta^c_j A_{ib} A_{jc} = -A_{mn} A_{jj} = -\mathrm{tr}(A) A_{mn}$
3. $-\delta^m_j \delta^b_i \delta^c_n A_{ib} A_{jc} = -A_{ii} A_{mn} = -\mathrm{tr}(A) A_{mn}$
4. $\delta^m_j \delta^b_n \delta^c_i A_{ib} A_{jc} = A_{in} A_{mi} = (A^2)_{mn}$
5. $\delta^m_n \delta^b_i \delta^c_j A_{ib} A_{jc} = \delta_{mn} A_{ii} A_{jj} = \mathrm{tr}^2(A) \delta_{mn}$
6. $-\delta^m_n \delta^b_j \delta^c_i A_{ib} A_{jc} = -\delta_{mn} A_{ij} A_{ji} = -\mathrm{tr}(A^2) \delta_{mn}$

将所有项相加：

$$2(A^2)_{mn} - 2\mathrm{tr}(A) A_{mn} + \left[\mathrm{tr}^2(A) - \mathrm{tr}(A^2)\right] \delta_{mn} = 0. \tag{16}$$

除以 2，并注意到在二维中，$\det(A) = \frac{1}{2}[\mathrm{tr}^2(A) - \mathrm{tr}(A^2)]$：

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)\, A + \det(A)\, \mathbf{I} = \mathbf{0}, \tag{17}$$

这正是二维凯莱-哈密顿定理 (1)。 □

注 2。 我们明确验证了二维情形，以说明其机制。三维情形（$m = 3$）可用类似方法处理，其中使用 4×4 广义 *Kronecker delta*，不过组合展开涉及 *24* 项。更重要的是，可以利用广义 *Kronecker delta* 的拉普拉斯展开，结合牛顿-吉拉德恒等式（将幂和 $\mathrm{tr}(A^k)$ 与初等对称多项式 σ_k联系起来），给出一个与维数无关的证明 。这一一般性论证表明， $\delta^{(m+1)}$： $A^{\otimes m}$ 必然导出对于任意 m的凯莱-哈密顿多项式，详见附录 *A*。

4 讨论与展望

我们证明了凯莱-哈密顿定理并非基本恒等式，而是更原始 syzygy $\varepsilon \otimes \varepsilon = 0$的**推论**。推导过程是将这个消失算子作用于 $A^{\otimes m}$；结果的内在张量形式（不变量乘以张量幂）源自缩并结构，而非外部强加。

这一方法论洞见在于将参数与变量区分开来：我们不再研究张量 A 并询问它满足哪些恒等式，而是研究诱导出 A不变量的各向同性算子，并询问它们之间存在哪些线性关系。基本 syzygy $\varepsilon \otimes \varepsilon = 0$ 便是这样一种关系——它具有常系数，且独立于 A。凯莱-哈密顿定理带有依赖于 A的系数，是这种算子层面 syzygy 投影到 $A^{\otimes m}$后呈现的形式。

这一视角与更广泛的不变量理论研究计划相联系。对张量 syzygy 的系统研究可追溯至 Sylvester [8] 和希尔伯特 [3]。在连续介质力学中，史密斯 [6], 斯宾塞 [7], 和郑 [11] 构建了广泛的理论框架，其中凯莱-哈密顿定理发挥着核心作用。我们的方法提供了一个互补视角，与 Lehrer 和张 [4], 的表示论研究相呼应；他们证明了布劳尔代数表示的核由反对称幂等元生成——这是 $\varepsilon \otimes \varepsilon$的代数体现。

基本 syzygy 的关键优势在于其**阶数无关性**。凯莱-哈密顿定理仅适用于二阶张量（矩阵）——三阶张量并不存在“特征多项式”——而 syzygy $\varepsilon \otimes \varepsilon = 0$ 则约束任意阶数的张量。对于压电张量（三阶）和弹性张量（四阶）而言，经典特征值方法完全失效，而 syzygy 框架提供了一种系统确定独立不变量的方法。

我们以一番思考作结。张量因其坐标无关性而备受推崇：以张量形式书写的物理定律具有内在的有效性。然而，关于张量不变量的约束并非普适——它们取决于环境维数 m。凯莱-哈密顿定理在二维中包含三项，在三维中包含四项，而在 m 维中包含 $m + 1$ 项。这种敏感性并非缺陷，而是一种特性：syzygy $\varepsilon \otimes \varepsilon = 0$ 是“维度之声”，通过张量代数发声，将空间几何编码进代数结构之中。

从 $\delta^{(m+1)} = 0$ 推导凯莱-哈密顿定理：一种与维数无关的方法

在本附录中，我们证明缩并 $\delta^{(m+1)}$： $A^{\otimes m} = 0$ 可以导出任意维度 m下的凯莱–哈密顿定理，而无需依赖显式逐项

展开。

A.1 通过广义 Kronecker delta 表示主不变量

张量 A 在 m 维空间中的第 k 个主不变量 σ_k 可表示为：

$$\sigma_k = \frac{1}{k!}\delta^{j_1\cdots j_k}_{i_1\cdots i_k} A^{i_1}_{j_1}\cdots A^{i_k}_{j_k}, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{18}$$

这可以直接验证：广义 Kronecker delta 对所有 k 个 A 进行反对称化，实际上就是对所有 $k \times k$ 阶主子式求和——这正是 σ_k 的定义。特别地：

- $\sigma_1 = \mathrm{tr}(A)$,
- $\sigma_2 = \frac{1}{2}[\mathrm{tr}^2(A) - \mathrm{tr}(A^2)]$,
- $\sigma_m = \det(A)$.

A.2 $m+1$ 阶 Delta 的拉普拉斯展开

考虑 $(m+1) \times (m+1)$ 广义 Kronecker delta $\delta^{p\,j_1\cdots j_m}_{q\,i_1\cdots i_m}$，其中 $(p,\ q)$ 是自由（输出）指标，而 $(j_1,\ \ldots,\ j_m;\ i_1,\ \ldots,\ i_m)$ 将与 $A^{\otimes m}$ 进行缩并。

沿第一列展开（指标 p 与指标 $q,\ i_1,\ \ldots,\ i_m$ 相比）：

$$\delta^{p\,j_1\cdots j_m}_{q\,i_1\cdots i_m} = \delta^p_q \cdot \delta^{j_1\cdots j_m}_{i_1\cdots i_m} + \sum_{r=1}^{m}(-1)^r \delta^p_{i_r} \cdot (m \times m \text{ cofactor}). \tag{19}$$

与 $A^{i_1}_{j_1}\cdots A^{i_m}_{j_m}$ 缩并后，每个余子式都会产生包含 $(A^k)^p_s$ 与低阶缩并相乘的项。递归结构得到：

$$\delta^{p\,j_1\cdots j_m}_{q\,i_1\cdots i_m} A^{i_1}_{j_1}\cdots A^{i_m}_{j_m} = m! \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\sigma_k (A^{m-k})^p_q, \tag{20}$$

其中 $\sigma_0 := 1$。

A.3 与牛顿-吉拉德恒等式的联系

式 (20) 的有效性可通过对 m 进行归纳来确立，利用 **牛顿-吉拉德恒等式**，该恒等式将幂和 $p_k = \mathrm{tr}(A^k)$ 与初等对称多项式σ_k联系起来：

$$k\sigma_k = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\sigma_{k-i}p_i, \quad k \le m. \tag{21}$$

这些恒等式确保拉普拉斯展开得到的系数与特征多项式的系数完全一致。这种对应关系并非偶然：广义 Kronecker delta 和特征多项式都编码了底层向量空间的同一种反对称结构。

A.4 证明的完成

在 m 维 维空间中，抽屉原理迫使 $\delta^{(m+1)} \equiv 0$。应用式 (20)：

$$0 = \delta^{p\,j_1\cdots j_m}_{q\,i_1\cdots i_m} A^{i_1}_{j_1} \cdots A^{i_m}_{j_m} = m! \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \sigma_k (A^{m-k})^p_q. \tag{22}$$

除以 $m!$ 并重新编号：

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sigma_k A^{m-k} = 0, \tag{23}$$

这就是标准形式的凯莱-哈密顿定理：

$$\boxed{A^m - \sigma_1 A^{m-1} + \sigma_2 A^{m-2} - \cdots + (-1)^m \sigma_m I = 0.} \tag{24}$$

至此，我们完成了与维数无关的证明：基本 syzygy $\varepsilon \otimes \varepsilon = 0$（等价地，$\delta^{(m+1)} = 0$）可推出任意 m 的凯莱-哈密顿定理。■

参考文献

[1] J.P. Boehler，关于各向同性标量函数的不可约表示，*ZAMM* **57**（1977）323–327。

[2] R.Brauer，关于与半单连续群相关的代数，《数学年刊》 **38** （1937）857–872。

[3] D. Hilbert，关于代数形式理论，《数学年刊》 **36** （1890）473–534。[4] G.I. Lehrer、R.B. Zhang，正交群不变量理论第二基本定理，《数学年刊》 **176** （2012）2031–2054。[5] R.S. Rivlin、J.L. Ericksen，各向同性材料的应力—变形关系，*J. Rat.Mech. Anal.* **4** （1955）323–425。[6] G.F. Smith，关于对称张量、反对称张量和向量的各向同性函数，*Int. J. Eng. Sci.* **9** （1971）899–916。[7] A.J.M. Spencer，《不变量理论》，载于：A.C. Eringen（编），《连续介质物理学》第1卷，学术出版社，1971。[8] J.J. Sylvester，关于形式微积分原理，《剑桥与都柏林数学杂志》 **8** （1853）62–97。[9] C.C. Wang，关于各向同性函数的新表示定理，*Arch. Rat. Mech.Anal.* **36** （1970）166–223。

[10] H. Weyl，《经典群》，普林斯顿大学出版社，1946年。

[11] Q.S. Zheng，张量函数表示理论——一种研究本构方程的统一不变量方法，应用力学评论**47** （1994）545–587。