数据驱动的流体流动降复杂度建模：一项社区挑战

OliverT.Schmidt*† 和 Aaron Towne*‡加利福尼亚大学圣迭戈分校，美国加利福尼亚州拉霍亚；密歇根大学，美国密歇根州安娜堡

Adrian Lozano-Duran§加州理工学院，美国加利福尼亚州帕萨迪纳

Scott T. M.Dawson¶伊利诺伊理工学院，美国伊利诺伊州芝加哥

Ricardo Vinuesa‖密歇根大学，美国密歇根州安娜堡

arXiv:2601.06183v1 [cs.LG] 7 Jan 2026

我们提出了一项社区挑战，旨在促进对复杂航空航天流动的压缩、预测和传感数据驱动方法进行直接比较。该挑战分为三个赛道，分别针对这些互补能力：压缩（大型数据集的紧凑表示）、预测（根据有限的历史信息预测未来流场状态）和传感（根据有限的测量值推断未测量的流场状态）。在这些赛道中，多个挑战涵盖多样化的流动数据集和应用场景，每项挑战都强调不同的模型要求。挑战面向所有人开放，我们诚邀广泛参与，以全面、均衡地了解哪些方法有效，以及当前方法在哪些方面存在不足。为支持公平比较，我们提供标准化的成功度量指标、评估工具和基线实现，每项挑战均配备一个经典基线和一个机器学习基线。最终评估采用基于保留数据的盲测。我们明确鼓励报告负面结果，并对方法局限性进行细致分析。相关成果将通过AIAA期刊虚拟专辑以及在AIAA会议上的特邀报告进行传播。

*共同第一作者。
†机械与航空航天工程系副教授，美国航空航天学会高级会员。
‡机械工程系副教授，美国航空航天学会高级会员。 §研究生航空航天实验室副教授，美国航空航天学会高级会员。
¶机械、材料与航空航天工程系副教授，美国航空航天学会准会员。
‖航空航天工程系副教授。

目录

I 引言 3 II 挑战 1：压缩 5 II.A 引言.5 II.B 基线方法.5 II.B.1 正交分解（POD）.5 II.B.2 卷积自编码器（CNN-AE）.5 II.C 挑战 1.1：二维湍流边界层速度场的压缩.6 II.C.1 数据.6 II.C.2 基线结果.6 II.D 挑战 1.2：三维湍流边界层速度场的压缩.9 II.D.1 数据.9 II.D.2 基线结果.9 III 挑战 2：预测 11 III.A 引言.11 III.B 基线方法.11 III.B.1 动态模态分解（DMD）.11 III.B.2 长短期记忆网络（LSTM）.12 III.C 挑战 2.1：湍流腔体流预测.12 III.C.1 数据.12 III.C.2 基线结果.13 III.D 挑战 2.2：具有参数变化的俯仰翼型预测.16 III.D.1 数据.16 III.D.2 基线结果.17 IV 挑战 3：传感

唱 1

9IV.A 引言 .19IV.B 基线方法 .19IV.B.1 线性随机估计（LSE） .19IV.B.2 维纳滤波器 .19IV.B.3 多层感知机（MLP） .20IV.B.4 卷积神经网络（CNN） .20IV.C 挑战 3.1：使用稀疏测量对湍流射流进行传感 .21IV.C.1 数据 .21IV.C.2 基线结果 .22IV.D 挑战 3.2：根据壁面应力对湍流边界层进行传感 .23IV.D.1 数据.23IV.D.2 基线结果 .23

V 参与指南 24

I. 引言

通过设计精良的挑战赛推动社区进步，是机器学习领域一项成熟的实践，并已带来重大突破。例如，ImageNet 挑战赛推动了图像识别的发展 [1], GLUE 基准测试与分析平台推动了自然语言理解的发展 [2], CASP 系列挑战赛推动了蛋白质折叠的发展 [3]。在航空航天科学和流体动力学领域，此类工作相对少见，但值得注意的例子包括以机器学习进行翼型设计的 ML4CFD 竞赛 [4], 以及围绕数据驱动湍流建模的协作测试挑战赛 [5], 、“The Well”挑战赛，该挑战赛汇集了大量物理模拟数据，其中许多是流体动力学问题，供机器学习使用 [6], 以及最近为动力系统机器学习建立的通用任务框架 [7]。

本社区挑战面向多个应用驱动场景中的复杂航空航天流动，并将其组织为三项互补能力：压缩、预测和传感。该挑战将标准化评估与源自成熟统计工具、动力系统和机器学习的基线方法相结合。压缩可提供紧凑表示，这不仅对存储至关重要，更重要的是能确保其他方法在处理大型数据集时仍具可行性，并可近实时部署。预测的目标是进行时间预测，即根据有限的历史信息推断未来的流场状态。传感的目标是进行空间预测，即根据有限的测量值推断未测量的状态或派生量。这些任务共同涵盖了分析、设计和控制中的常见运行需求。图1以示意图展示了每种挑战类型。

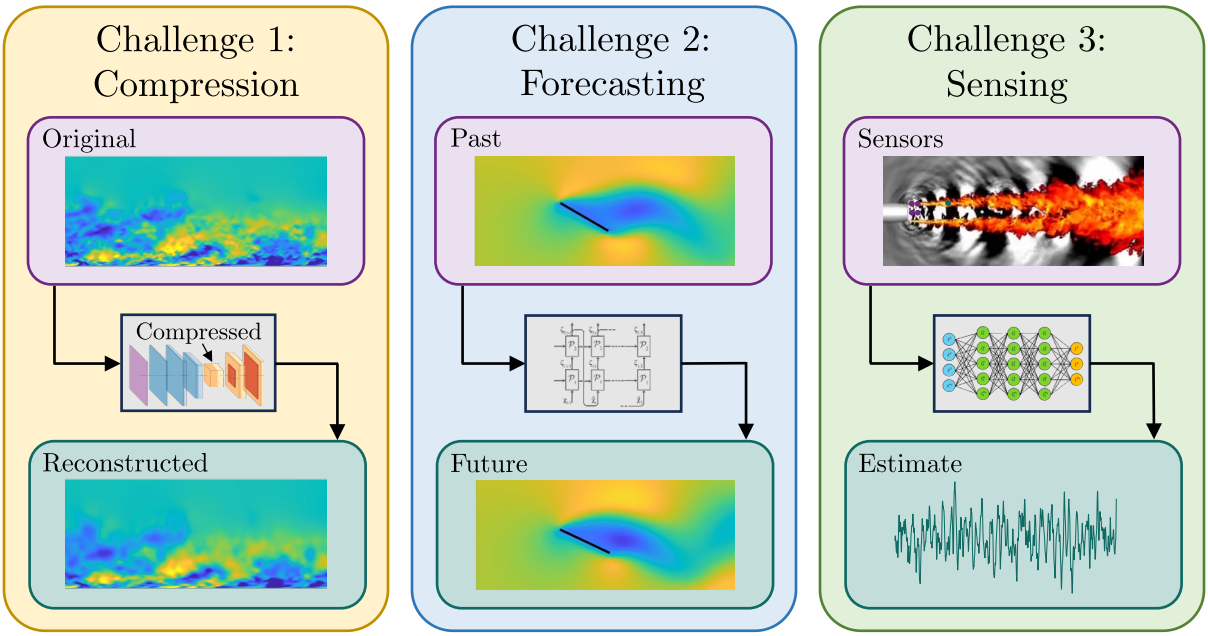


图 1 挑战概览，涵盖压缩、预测和传感这几项核心能力。从概念上讲，每种挑战类型都包括输入数据（紫红色方框）和目标输出数据（蓝绿色方框），并旨在寻找能够完成预期任务的方法（灰色方框）。

本挑战聚焦于纯数据驱动方法。我们的目标是在完全开放、透明的环境中，利用相关示例数据、标准化的成功度量指标和通用基线方法，实现公平比较；比较范围涵盖经典统计或动力学方法以及现代机器学习方法。尽管每项挑战都会指定数据集和度量指标，但只要采用纯数据驱动的方法，参与者完全可以自行选择方法。

为便于开展比较，我们为每项挑战提供了成熟的基线方法，包括一种经典方法和一种机器学习方法，并配以多样的流动数据集。这些数据集主要取自一个公共数据库，该数据库专为评估流体流动降阶复杂度模型而构建 [8]。每个数据集都配有具体挑战，以体现具有代表性的航空航天应用场景。表 1概述了各项挑战、数据集和基线方法。

参与者可　　预计将发布其代码，并通过向留出数据提交结果接受盲测评估　　s

发送给各项挑战指定的联系人。成果传播将包括 *AIAA Journal* 的虚拟专刊，以及在美国航空航天学会会议专题会议上的受邀报告。参与指南详见第 V节，有关挑战的更多信息和定期更新可在以下网页查看： fluids-challenge.engin.umich.edu。

我们的目标是找出具有竞争力的方法、提炼最佳实践，并推动社区加深理解。我们欢迎新颖的架构，也欢迎对成熟方法进行审慎改编或轻量定制。值得注意的是，能够揭示局限性或失效模式的投稿，同样是对社区的宝贵贡献。

表1　三个挑战及其子挑战、数据集和基线方法概述。

挑战	子挑战	Data	基线方法
1. 压缩	1.1 二维湍流边界层 速度场的压缩	高雷诺数湍流的直接数值模拟 边界层	本征正交分解 （POD）
	1.2 三维湍流边界层的压缩 速度场	高雷诺数湍流边界层的 直接数值模拟	卷积自编码器 （CNN-AE）
2. 预测	2.1 湍流腔体流预测	空腔的时间分辨粒子图像测速	动态模态分解 （DMD）
	2.2 基于.....的俯仰翼型预测 参数变化	俯仰翼型的直接数值模拟跨越 俯仰角和频率 cies	长短期记忆网络 （LSTM）
3. 传感	3.1 湍流射流的传感 稀疏测量	轴对称射流的大涡模拟	维纳滤波器（WF）与多层感知机 （MLP）
	3.2 湍流边界层的传感 从壁面应力	低雷诺数湍流的直接数值模拟 边界层	线性随机估计（LSE） & 卷积神经网络 （CNN）

II. 挑战 1：压缩

A. 引言

由于湍流具有混沌特性、分形结构，以及涉及范围广泛的时空尺度，压缩湍流数据是一项根本性挑战。这些特性使得在不损失关键信息的前提下降低数据维度变得困难。因此，有效的压缩必须在紧凑表示与准确重建关键流动特征的能力之间取得平衡。在实时监测或实时流动压缩等实际场景中，压缩和重建所需的实际运行时间与计算成本同样重要。这些考量促使我们探索新颖的建模策略，不仅要优化压缩比和重构保真度，还要提高流程在成本和时间方面的效率。

我们针对湍流边界层提出了两个具有代表性的挑战：(i) 第一个挑战侧重于压缩并重构从流动中提取的二维平面上的速度脉动三个分量；(ii) 第二个挑战将这一任务扩展到流向速度脉动的三维重构。这些场景体现了不同程度的复杂性和空间信息。为评估性能，我们综合考量多项指标，以反映重构精度、压缩比以及压缩和重建的计算成本之间的权衡；其中，重构精度通过归一化均方误差（NMSE）衡量。

B. 基线方法

我们考虑两种基准方法来展示压缩挑战：包含 N 个模态的仅空间POD，以及潜在空间维度为 N 的卷积自编码器（CNN-AE）。

1. 正交分解（*POD*）

本征正交分解（POD）是用于数据压缩的最优线性方法 [9]。本文采用 POD 的仅空间变体 [10, 11]，其中空间离散流场状态 $\boldsymbol{q}(t)$ 由$\tilde{\boldsymbol{q}}(t)$ 近似表示为以下 N 正交模态 $\boldsymbol{\phi}_i$ 及其对应时变系数 $a_i(t)$的线性组合，即：

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\, \boldsymbol{\phi}_i. \tag{1}$$

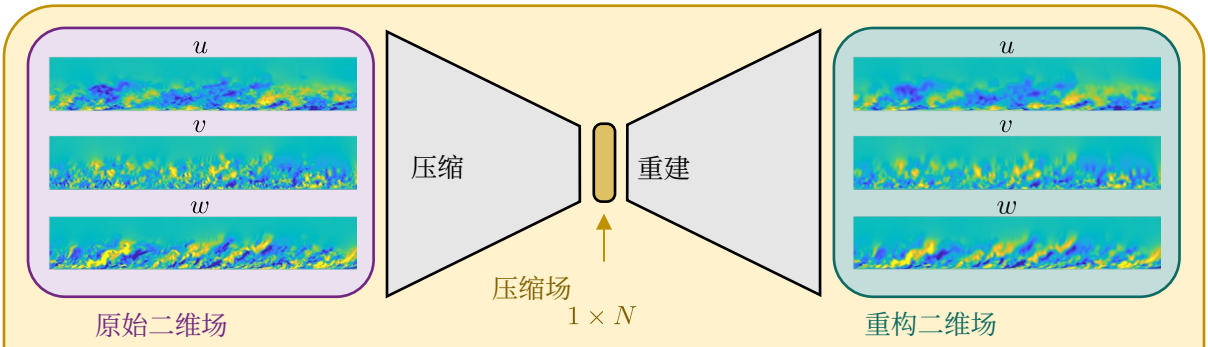
最优空间模态通过对空间相关矩阵 $\boldsymbol{C}_{qq} = E\{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^*\}$进行特征值分解得到。通过将状态 $\boldsymbol{q}$ 投影到每个模态上，可以恢复时间系数，并据此按照（1）重构状态。POD 已广泛用于压缩流体流动，通常作为后续建模工作的起点 [12–14]。

2. 卷积自编码器（*CNN-AE*）

自编码器为 POD [15, 16] 提供了自然的非线性扩展，由编码器和解码器组成。编码器是一个非线性函数 E_θ，它将流场状态 $\boldsymbol{q}$ 映射为潜在表示 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$，在降维空间中捕获输入的关键特征，即 $\boldsymbol{a} = E_\theta(\boldsymbol{q})$。解码器使用另一个非线性函数 D_θ从潜在空间重构流场，即 $\tilde{\boldsymbol{q}} = D_\theta(\boldsymbol{a})$，其中 $\tilde{\boldsymbol{q}}$ 是对原始流场状态 $\boldsymbol{q}$的重构近似。在训练过程中，网络参数 θ 经过优化，以最小化所需的损失函数。

在这里，我们使用一个潜在空间维度为 N 的卷积自编码器（CNN-AE） [17]，对流场数据进行压缩和重建。编码器和解码器均由卷积神经网络构建，使模型能够利用流场中固有的空间相关性，实现更准确、高效的表示与重建。该网络通过最小化均方重构误差进行训练。近年来，自编码器已广泛用于识别流体流动中的特征和低维子空间 [18, 19]。

C. 挑战 1.1：二维湍流边界层速度场压缩



挑战 1.1： 给定湍流边界层速度场的 1000 个平面快照，在满足目标误差水平的前提下，对数据进行压缩，以最大化压缩比并最小化总压缩重构时间。

1. 数据

本挑战使用的数据来自零压力梯度不可压缩湍流边界层的直接数值模拟（DNS）。具体而言，我们使用了参考文献 [8]中描述的 BL2 算例数据。完整数据库包含 7500 个三维流场，每隔 $\Delta t^+ \approx 4$ 采样一次，覆盖 7.4 个涡周转的物理时间。本挑战的训练数据集包含 5,000 个流向–壁面法向（x–y）平面上的快照，摩擦雷诺数范围为 $Re_\tau \approx 480$–1020。每个快照包含 u流向、v壁面法向和w展向速度脉动，网格尺寸为 4000×148。测试集包含从同一数值模拟中抽取的另外 1,000 个快照。

2. 基线结果

通过考察压缩比以及压缩/重构时间（它们随使用保留模态数/潜空间维度不同的压缩器–重构器对所得到的根归一化均方误差（均方根归一化均方误差）而变化），评估各方法在压缩挑战中的表现（N）。归一化均方误差（NMSE）定义为

$$e = \frac{E\left\{\|\tilde{\boldsymbol{q}}(t) - \boldsymbol{q}(t)\|^2\right\}}{E\left\{\|\boldsymbol{q}(t)\|^2\right\}}, \tag{2}$$

其中，期望值是对快照进行时间平均，范数表示对场进行空间积分。

对 11 个案例的三个速度分量进行 POD，保留模态数从 $N = 4$起，逐次按 2 的幂递增，直至 4096。二维卷积神经网络自编码器包含三个通道（每个通道对应一个速度分量），并将其堆叠成一个 4D 数组。编码器由两个卷积块组成，每个卷积块包含一个 3x3 卷积（分别使用 16 和 32 个滤波器）、ReLU 激活和 2x2 最大池化，使空间维度缩小至原来的四分之一。瓶颈层使用全连接层生成大小为 N 的潜向量。解码器使用全连接层重塑潜在表示，随后经过两个转置卷积层（4x4，步幅为 2），再通过一个最终的 3x3 卷积重建 3 通道输出；训练时采用 Adam 优化，训练 100 轮次，并使用均方误差损失函数。

挑战 1.1 的示例结果如图 2所示，该图比较了使用 POD 和 CNN-AE 对湍流速度脉动的三个分量进行压缩和重构的效果。重构后的一个示例 u 如图 3所示。

图 2（a）展示了均方根归一化均方误差与潜在空间维度（或 POD 模态数量）之间的关系。该图说明了降维与重构保真度之间的基本权衡。在较小潜在维度下，较低的均方根归一化均方误差值反映出更有效的压缩方法，能够以紧凑表示捕捉关键的流动特征。尽管潜在空间维度并未被用作

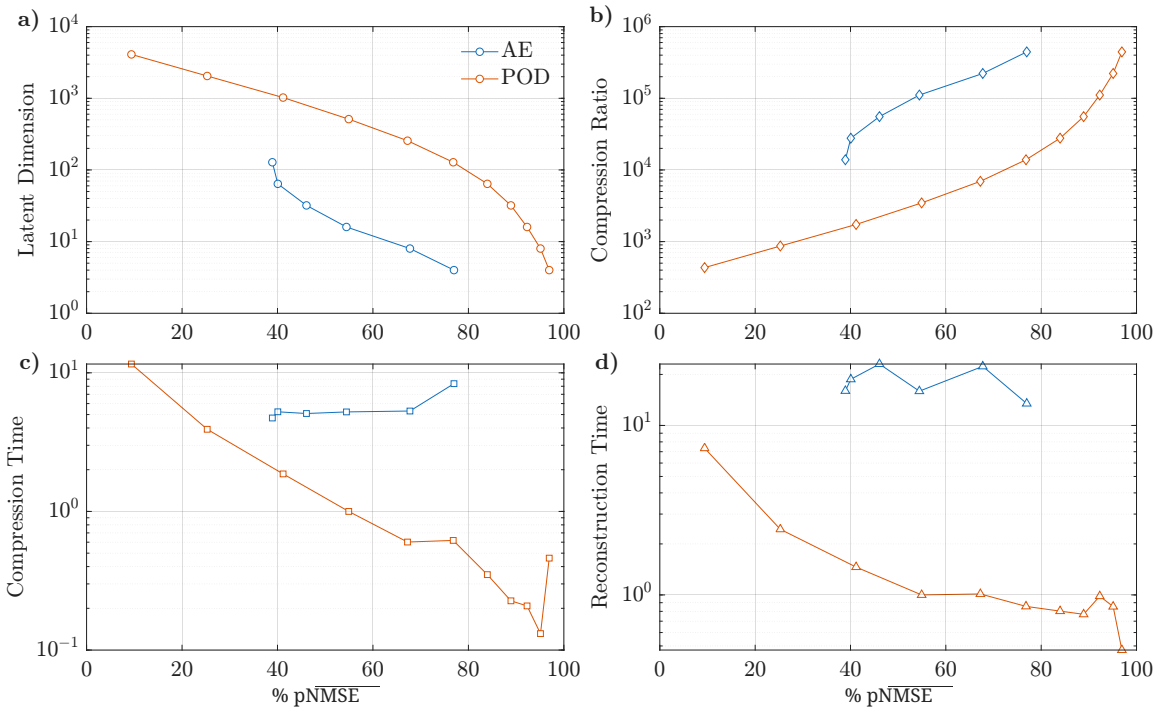


图 2 挑战 1.1：使用二维卷积神经网络自编码器和 POD，在湍流边界层流向速度的二维平面中应用成功压缩指标。压缩和重建时间采用具有 512 个模态的 POD 方法进行归一化。

独立的性能指标（由于不同方法的定义有所不同），但我们仍为 POD（解释为模态数量）和二维卷积神经网络自编码器提供均方根归一化均方误差与潜在维度的关系图，因为这些图能够提供有价值的见解。对于 POD 和二维卷积神经网络自编码器，均方根归一化均方误差均随着潜在维度的增加而持续降低，表明更高的表征容量能够带来更高的重构精度。然而，要达到相当的均方根归一化均方误差，POD 所需的潜在空间规模显著大于二维卷积神经网络自编码器。这凸显了二维卷积神经网络自编码器在表示湍流中复杂非线性结构方面的卓越能力，而 POD 使用的是线性基函数。

图 2（b）显示了均方根归一化均方误差随压缩比的变化关系。在此分析中，我们仅考虑压缩（潜在）表示的大小，不包括与压缩和重建机制相关的额外开销，例如神经网络参数或模态基函数。因此，所报告的压缩比反映了无限数据的渐近极限，此时压缩算法本身的大小相对于数据量变得可以忽略不计。随着压缩程度增加，POD 和二维卷积神经网络自编码器的均方根归一化均方误差均逐渐增大，这反映了数据缩减与重构精度之间预期存在的权衡。对于给定的均方根归一化均方误差，二维卷积神经网络自编码器能够实现显著高于 POD 的压缩比，凸显了其在表示湍流方面的效率。该结果表明，二维卷积神经网络自编码器能够在不牺牲重构保真度的情况下更大幅度地减少数据量，这对于需要高压缩比的应用而言是一项重要优势。

图 2（c）和（d）分别考察均方根归一化均方误差与压缩时间和重构时间之间的关系。为减少硬件差异引入的变异性，压缩时间和重构时间均以每次提交所使用的同一硬件上执行的基准方法为参照进行报告。在本例中，压缩时间和重构时间均根据采用 512 个模态的本征正交分解方法所获得的相应数值进行归一化。对于本征正交分解方法，随着均方根归一化均方误差降低，两种时间均增加，这反映出由于保留模态数量增加，为实现更高精度所需的额外计算开销。相比之下，在所考察的均方根归一化均方误差范围内，二维卷积神经网络自编码器的压缩时间和重构时间通常高于本征正交分解方法，并且无论所需精度如何，均保持相对恒定。

总之，二维卷积神经网络自编码器在压缩比方面优于 POD，在压缩数据规模更小的情况下实现了更高的重构精度。然而，随着潜在空间

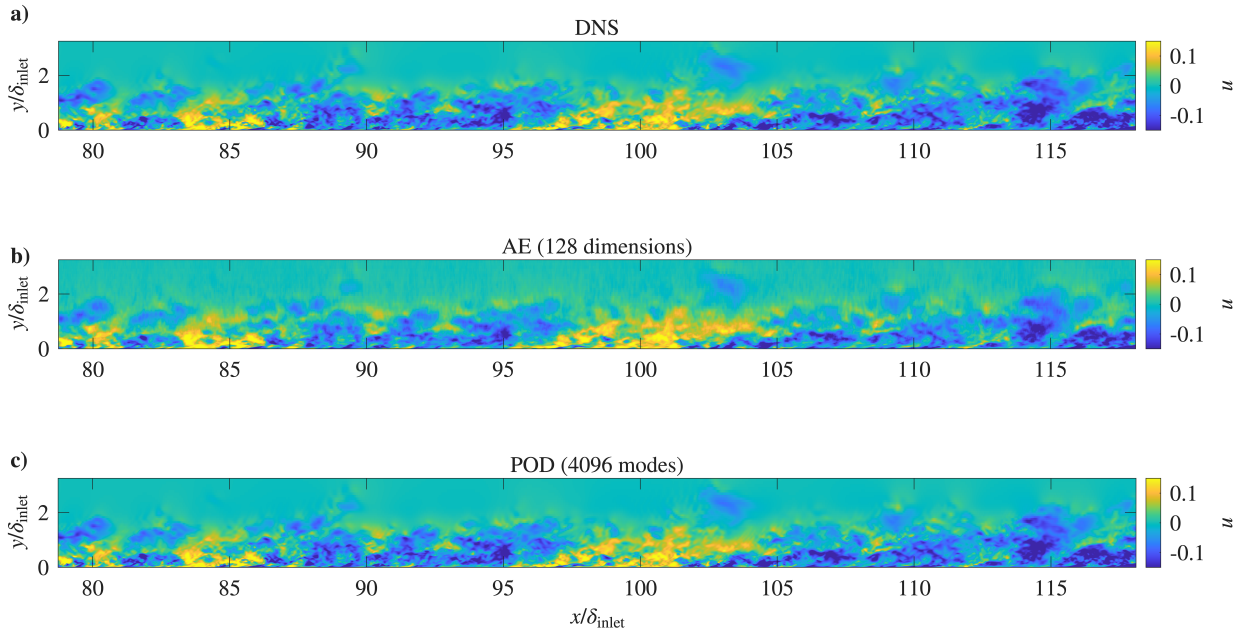
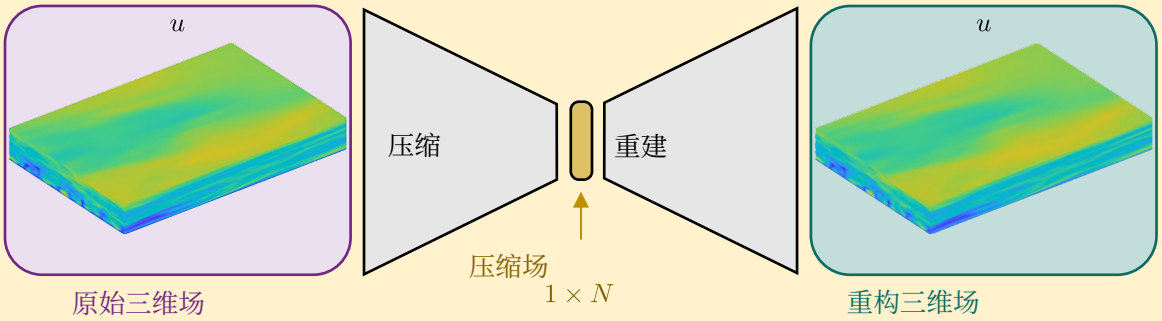


图 3 挑战 1.1：将压缩应用于二维场。流向速度场的示例快照 (a)、使用潜在维度为 128 的二维卷积神经网络自编码器进行重建的结果 (b)，以及使用 4096 个 POD 模态进行重建的结果 (c)。流向 (x) 和壁面法向 (y) 坐标均以数值模拟入口处的边界层厚度 (δ_{inlet}) 进行无量纲化。

维度增加，二维卷积神经网络自编码器呈现出饱和迹象，且误差始终无法低于 40%。相比之下，POD 可将误差降至 10%。POD 还可实现更快的压缩和重建，在所考察的均方根归一化均方误差范围内，其计算效率优于二维卷积神经网络自编码器。值得注意的是，随着目标均方根归一化均方误差降低，二维卷积神经网络自编码器的压缩重构时间仍相对稳定，这表明在更低的均方根归一化均方误差值下，二维卷积神经网络自编码器的效率也可能超过 POD。

D. 挑战1.2：三维湍流边界层速度场的压缩



挑战1.2： 给定湍流边界层的 50 个流向速度体积快照，对数据进行压缩，以在达到目标误差水平的同时，最大化压缩比并最小化压缩重构总时间。

1. 数据

此挑战使用的数据来自同一零压力梯度不可压缩湍流边界层的直接数值模拟 [8]。训练集由 500 个流向速度脉动的体积（三维）快照组成，这些快照取自边界层的一个子区域，其范围为 $Re_\tau \approx 920$–945。每个体积场定义在一个 $256 \times 64 \times 256$网格上，分别对应流向、壁面法向和展向。测试集还包括该体积场的另外 50 个快照。

2. 基线结果

对完整的三维流向速度场进行 POD，设置四种情况，保留的 POD 模态数分别为 $N = 50$、100、200 和 400。三维卷积神经网络自编码器由一个包含五个模块的编码器组成，每个模块都包含一个三维卷积（3x3x3 滤波器，通道数从 16 逐渐增加至 256）、批归一化、ReLU 激活和 2x2x2 平均池化，将空间维度缩减至 $[8, 2, 8]$。瓶颈层使用一个 3x3x3 卷积，生成包含 N 通道的潜在表示。解码器与编码器结构对称，由五个转置卷积模块（4x4x4，步幅为 2）进行上采样，随后经过卷积、批归一化和 ReLU 激活，最后通过一个 3x3x3 卷积输出单通道重建体积。该三维卷积神经网络自编码器使用 Adam 优化进行训练，共训练 650 轮，采用均方误差损失。

挑战1.2 的结果如图 4所示。该图比较了使用 POD 和三维卷积神经网络自编码器压缩并重构流向速度脉动的三维场的效果。三维重构示例 u 如图 5所示。三维情形的结果呈现出与二维情形不同的趋势，三维卷积神经网络自编码器的优势也不那么明显。尽管三维卷积神经网络自编码器的重建误差略低，但其整体表现与 POD 更为相似。例如，在压缩比约为 20%的情况下，三维卷积神经网络自编码器和 POD 的重建误差均约为 10^4。

POD 的一个明显局限是，由于快照法的限制，模态数最多只能达到 500 个。这是因为可用 POD 模态的数量受训练流场数量的限制。相比之下，三维卷积神经网络自编码器不受此限制，因为其潜在维度可以独立于训练样本数量进行增加。

在所有情况下，三维卷积神经网络自编码器和 POD 的压缩重构时间都维持在几秒左右。有趣的是，将潜在维度从 128 增至 12,800，并未显著降低三维卷积神经网络自编码器的重建误差。这表明，当前架构的性能瓶颈不在于潜在维度，而在于卷积层。

需要注意的是，本研究所采用的三维卷积神经网络自编码器架构并未针对该数据集进行优化或专门调优。通过精心设计架构并进行超参数调优，很可能实现显著的性能提升。

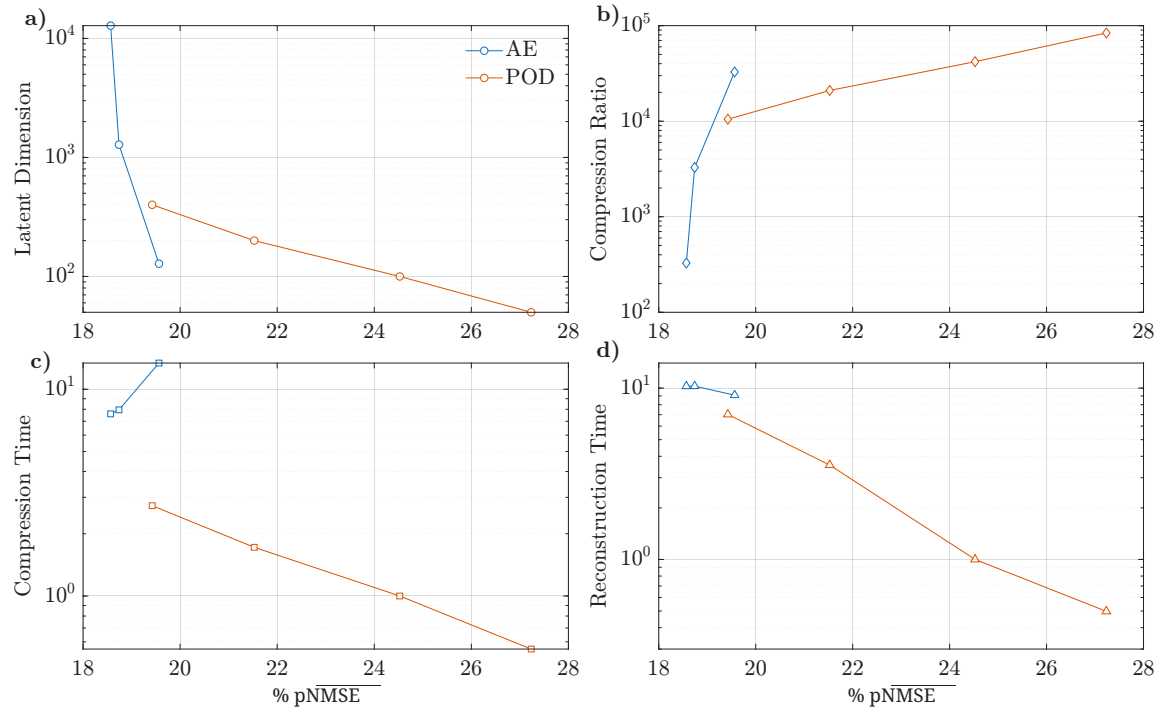


图4 挑战1.2：压缩应用：使用三维卷积神经网络自编码器和 POD 对湍流边界层中流向速度脉动三维场进行压缩的效果指标。压缩和重构时间以采用 100 个模态的本征正交分解方法为基准进行归一化。

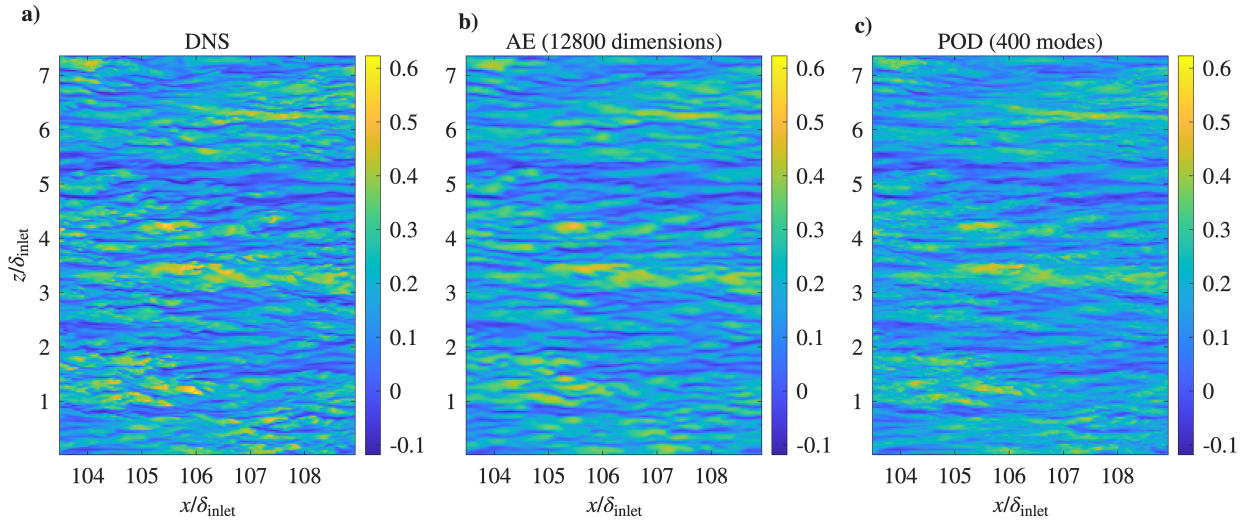


图5 挑战1.2：三维场的压缩应用：从流向速度脉动三维场中提取的二维切片示例（a）、使用潜在维度为 12800 的三维卷积神经网络自编码器进行重建的结果（b），以及使用 400 个 POD 模态进行重建的结果（c）。流向坐标（x）和展向坐标（z）均以数值模拟入口处的边界层厚度（δ_{inlet}）进行无量纲化。

III. 挑战二：预测

A. 引言

流体力学中预测的根本目标，是根据有限长度的过去观测序列预测流场的未来演化。在流动控制、自适应感知和降阶建模等需要准确预判流场状态的应用中，预测发挥着核心作用。

预测流体流动面临独特挑战，源于流体运动复杂、多尺度且往往具有混沌性。即使微小的建模或测量误差也可能随时间迅速增大，从而限制有效预测时域。尽管如此，许多流动都具有可用于预测的相干时空结构或准周期成分。例如，腔体流动呈现与剪切层和腔体内部之间反馈回路相关的 Rossiter 模态，而俯仰翼型则表现出受给定运动学调制的周期性涡脱落。这些时间相关性促使人们开发能够以高效、数据驱动的方式识别并建模主导动力学的方法。

我们提出两项挑战，分别突显预测流体流动所需的不同能力及其面临的困难。首先考虑的数据集是湍流腔体流（§III.C），其特点是宽频湍流中伴有显著的共振音调，可作为短时域可预测性的严格测试。第二项是层流俯仰翼型（§III.D），其流动演化与给定运动学紧密耦合，因此需要采用参数化模型，并纳入已知输入信号，例如瞬时攻角。这两个问题共同构成一组具有代表性的预测基准，用于流体流动的降复杂度建模。

B. 基准方法

1. 动态模态分解（*DMD*）

动态模态分解（DMD）用于近似线性算子 $\boldsymbol{K}$，该算子将状态从一个快照推进到下一个快照，

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_{k+1} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}_k, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{q}_k = \boldsymbol{q}(k\Delta t)$ 表示时间 $t = k\Delta t$的快照，因此，方程 3 表示单个时间步内的传播。存在多种计算 DMD 的算法。这里，我们采用精确动态模态分解算法，该算法以稳健性著称，并能够处理以成对快照形式提供的非序列数据。该过程从两个数据矩阵开始，

$$\boldsymbol{Q}_1^{M-1} = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_{M-1}], \quad \boldsymbol{Q}_2^{M} = [\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3, \ldots, \boldsymbol{q}_{M}], \tag{4}$$

它们既可以由按顺序排列但存在偏移的快照组成，也可以由单独的快照对组成（每对快照之间相隔相同的时间步长，Δt）。下一步是计算奇异值分解（SVD）

$$\boldsymbol{Q}_1^{M-1} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{*}. \tag{5}$$

仅保留最大的 N 个奇异值（以及 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 中对应的列），即可得到秩为 N 的截断结果 $\boldsymbol{U}_N$、$\boldsymbol{\Sigma}_N$、 $\boldsymbol{V}_N$；随后将其分量与移位后的数据矩阵结合，用于构造传播矩阵的近似，

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{U}_N^{*}\boldsymbol{Q}_2^{M}\boldsymbol{V}_N\boldsymbol{\Sigma}_N^{-1}. \tag{6}$$

下文中，我们不明确标示秩截断，并省略下标 N。随后对该矩阵进行特征值分解，

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{D}^{-1}, \tag{7}$$

然后用它来计算 DMD 模态和特征值。给定 $\boldsymbol{D}$ 后，我们继续计算 DMD 模态矩阵，

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{Q}_2^{M}\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{D}. \tag{8}$$

第 i 列 $\boldsymbol{\Phi}$ 对应于第 i 个 DMD 模态，$\boldsymbol{\phi}_i$；而 i 对角元素 $\boldsymbol{\Lambda}$ 在方程（7）中，λ_i给出了该模态的复频率，$\omega_i = \log(\lambda_i)/\Delta t$。由于这些频率是复数，时间动力学通常由振荡分量以及放大率或阻尼率来表征。这一区别使 DMD 模态具有内在的动态特性，不同于 POD 模态；对于 POD 模态，时间动力学通过随时间变化的˜展开系数来表示，以描述特定轨迹。确定 $\boldsymbol{K} \approx \boldsymbol{K}$ 后，原则上可以利用方程（3）

从初始条件 $\boldsymbol{q}_0$出发，逐步推进流场的时间演化。利用方程（3）的线性性质，可将初始条件直接推进至任意所需时刻 t：将其表示为 DMD 模态基底上的展开，并按如下方式演化解

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(k\Delta t) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i \mathrm{e}^{i\omega_i k\Delta t} b_i, \tag{9}$$

其中，解表示为 N 保留的 DMD 模态之和，每个模态都按照其复频率 ω_i演化，并以由 b_i确定的初始振幅和相位为起点。复数初始振幅向量通过求解以下最小二乘回归问题获得

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\Phi}^{+}\boldsymbol{q}_0, \tag{10}$$

这里，最方便的表达方式是使用动态模态分解模态矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^{+}$的伪逆，该伪逆可通过奇异值分解高效求得。

2. 长短期记忆网络

长短期记忆网络 [20] 是一类专门用于学习序列数据中长期时间依赖关系的循环神经网络。它们尤其适用于时间序列预测问题，因为在某个时刻进行预测时，可以利用从许多先前时间步传递而来的信息。与标准前馈架构（例如多层感知机（MLP，它们没有记忆能力）和普通循环神经网络（RNN，它们难以克服梯度消失问题））不同，长短期记忆网络使用门控记忆单元，在较长时间范围内保留并有选择地更新信息，从而改善对动态预测中长期时间依赖关系的学习。除了流场状态 $\boldsymbol{q}_k$之外，长短期记忆网络还维护一个用于预测的隐藏状态 $\boldsymbol{h}_k$，以及一个充当更长期记忆的细胞状态 $\boldsymbol{c}_k$。这些内部状态更新如下

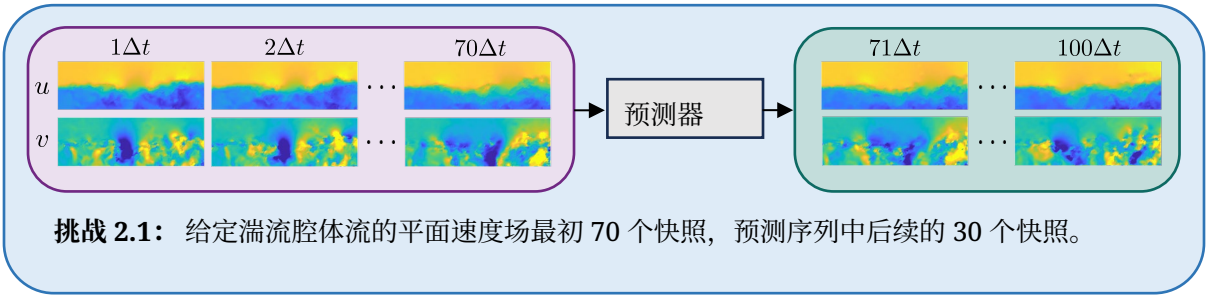
$$(\boldsymbol{h}_{k+1}, \boldsymbol{c}_{k+1}) = f_\theta(\boldsymbol{q}_k, \boldsymbol{h}_k, \boldsymbol{c}_k) \tag{11}$$

预测得到的流场状态表示为

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_{k+1} = g_\theta(\boldsymbol{h}_{k+1}), \tag{12}$$

其中，f_θ 和 g_θ 分别是长短期记忆网络的状态更新映射和读出映射。训练过程中，通过优化网络参数 θ 来最小化预先定义的损失函数；在我们的案例中，该损失函数是预测值的均方误差。长短期记忆网络已成为预测复杂动力系统（ [21, 22], 包括流体流动[23, 24]）的标准选择。

C. 挑战 2.1：湍流腔体流的预测



挑战 2.1： 给定湍流腔体流的平面速度场最初 70 个快照，预测序列中后续的 30 个快照。

1. 数据

本挑战使用 Zhang 等人通过平面时间分辨粒子图像测速（TR-PIV）获得的开放腔体上高雷诺数流动的实验数据 [25]。该案例代表了存在测量噪声条件下复杂的宽带-音调混合湍流中的真实数据。开放腔体的中心平面长深比为 $L/D = 6$，宽深比为$W/D = 3$。85。基于腔体深度的雷诺数为 $\mathrm{Re} = \rho U_\infty D/\mu \approx 3$。$3 \times 10^5$，马赫数为 $M = U_\infty/c_\infty = 0$。6，其中 c_∞为远场

声速。采样率为 $f_s = 16\,\text{kHz}$，视场由 154×51 个点分辨。该数据库包含 16,000 个瞬时流向（u）和壁法向（v）速度快照。有关实验设置的更多细节，请参阅 Zhang 等人的论文 [25]。

代表性快照中的瞬时流向速度场和壁法向速度场如图6（a、b）所示。图 6（b）中的宽带音调功率谱证实了流动明显处于湍流状态，该功率谱是在 $(x, y) = (5,0)$处计算得到的。在湍流背景上叠加着明显的音调峰，对应于 Rossiter 模态。这些模态源于剪切层不稳定波与向上游传播的声波之间的共振。这些声波在尾缘处产生，并与剪切层不稳定性同步，从而完成共振回路 [26]。

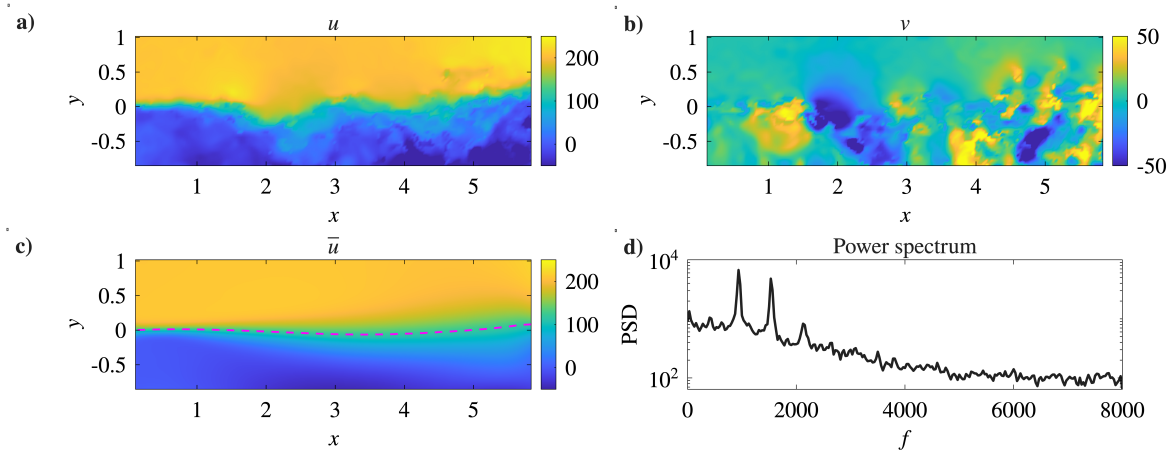


图 6 挑战 2.1：Zhang 等人的实验开放腔流动数据中的瞬时速度场 [25]：（a）流向速度，u；（b）壁法向速度，v；（c）平均流向速度和 120 m/s 等值线（洋红色虚线）；（d）位于 $(x, y) = (5,0)$处的功率谱。速度单位为 m/s。

训练集包含 12,800 个快照，测试集包括剩余的 3,200 个快照。该测试块被划分为 32 个序列，每个序列包含连续的 100 个快照。参与者将获得每个测试序列的前 70 个快照，最后 30 个快照将被隐藏，需进行预测。

为激发对本挑战的兴趣，我们首先通过考察实验装置的特征时间尺度和长度尺度，估计预期能够实现合理预测的时间区间。给定马赫数为 0.6、腔体长度为 0.159 m、测量时间步长为 $\Delta t = \frac{1}{f_s} = 6.25 \times 10^{-5}\,\text{s}$，并假设声速为 343 m/s，我们估计以自由来流速度运动的流体质点将在约 12 个时间步内穿过视场。然而，该流动中的主要能量结构与 Rossiter 循环相关，并与剪切层动力学相联系。作为这些动力学过程的代表性速度尺度，图 6(c) 中以洋红色虚线表示的 120 m/s 等值线紧贴剪切层中心。假设该速度近似等于剪切层中相关结构的对流速度，我们估计流经时间约为 $21\Delta t$。这为合理的可预测性提供了一个粗略的上限，表明超过 ~20 个时间步的预测结果可能会显著劣化。尽管如此，预测方法可能会受益于腔体流动中存在的低频分量，即所谓的离心模态。为考虑其潜在影响，我们允许采用更长的预测时域。

2. 基线结果

作为经典的基准方法，我们采用第III.B.1节所述的动态模态分解（DMD）来预测腔体流动数据。我们使用 $M = 70$ 个连续快照，根据公式4构造两个数据矩阵，例如，$\boldsymbol{Q}_1^{69}$ 和 $\boldsymbol{Q}_2^{70}$，并建立一个DMD模型，使用前70个快照预测接下来的30个快照。需要注意的是，DMD模型不会从大型数据集中“学习”；相反，它基于用于计算模型的数据进行单次预测。对于测试数据的32个片段中的每一个，我们均按照公式（5）–（8）构建一个DMD模型。随后，通过公式 $\boldsymbol{b}$ 计算初始模态振幅10，并将其代入公式9，使系统向前演化30步。我们保留 $N = 25$ 个模态（共 $M - 1 = 69$ 个可用模态），以防止过拟合。

作为基准机器学习方法，我们采用第III.B.2节介绍的LSTM回归神经网络。我们使用MATLAB的标准LSTM实现 [27], ，因为它易于获取、文档完善且可复现。由于直接在物理空间进行预测的计算成本过高，我们转而在POD系数空间中进行预测。具体而言，我们采用标准的仅空间POD进行降维，并将POD系数作为机器学习模型中的潜变量。仅空间POD模态由包含完整训练数据集的数据矩阵计算得到，即公式（4）记法中的 $\boldsymbol{Q}^{12}$,800 1。为简洁起见，我们将完整训练数据矩阵记为 $\boldsymbol{Q}$，并通过经济型奇异值分解（SVD）$\boldsymbol{Q} \approx \boldsymbol{\Phi}_N \boldsymbol{\Sigma}_N \boldsymbol{V}_N^T$对其进行近似，其中 $N = 25$和 $\boldsymbol{\Phi}_N$、 $\boldsymbol{\Sigma}_N$以及 $\boldsymbol{V}_N$分别包含 N个最大奇异值及其对应的左、右奇异向量。左奇异向量 $\boldsymbol{\Phi}$即为POD模态，而右奇异向量 $\boldsymbol{V}$则给出时间POD展开系数 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Sigma}_N \boldsymbol{V}_N^T$，使我们能够用POD模态展开数据，即 $\boldsymbol{Q} \approx \boldsymbol{\Phi}_N \boldsymbol{A}$。将单个快照 $\boldsymbol{q}_k = \boldsymbol{q}(k\Delta t)$在第 k个时刻表示为空间POD模态与时变系数的乘积，即$\tilde{\boldsymbol{q}}_k = \sum_{i=1}^{N} a_i(k\Delta t)\,\boldsymbol{\phi}_i$，我们便可通过预测未来的展开系数 $\boldsymbol{a}(t+\Delta t)$、 $\boldsymbol{a}(t+2\Delta t)$、……，并利用预先计算的模态重构状态，从而预测流场。具体来说，给定测试数据中某次流动实现的 $M = 70$ 个连续快照，我们构造数据矩阵 $\boldsymbol{Q}_1^{70}$，并将数据投影到模态基上，计算其展开系数，即$\boldsymbol{A}_1^{70} = \boldsymbol{\Phi}_N^H \boldsymbol{Q}_1^{70}$。也就是说，我们将新的测试数据序列展开到由训练数据得到的截断模态基中。为了根据由 $M = 70$ 个连续快照组成的片段进行预测，我们构造系数矩阵 $\boldsymbol{A}_1^{70}$，将 $\boldsymbol{A}_1^{69}$ 用作LSTM的输入序列，并将移位后的 $\boldsymbol{A}_2^{70}$用作目标序列。在总计12,800个快照中，这样可以得到由182组移位系数矩阵对构成的训练样本，用于训练LSTM网络。请注意，网络仅训练为根据给定的70个时刻（其中仅使用69个，原因见下文）预测下一个时刻 $\boldsymbol{a}(71\Delta t)$，随后将其应用于包含自身预测结果的移位序列，以生成总计30个预测快照，即挑战所需的其余展开系数$\boldsymbol{a}(72\Delta t)$、……、 $\boldsymbol{a}(100\Delta t)$。这一过程通常称为闭环预测。

网络采用标准 Adam 优化器进行训练，学习率固定为 0.001，共训练 200 轮次，每轮都会打乱数据。我们将小批量大小设为 26，因此每轮训练数据被划分为 7 个小批量，总计迭代 1400 次。状态向量包含两个速度分量。LSTM 的配置包括一个序列输入层、一个包含 128 个隐藏单元的 LSTM层，以及一个全连接输出层。按照最佳实践，系数经过归一化处理，使其具有零均值和单位方差，并使用均方误差作为损失函数 [27]。LSTM 使用长度为 70 个快照的数据序列进行训练，但由于网络必须使用移位后的序列 $\boldsymbol{A}_1^{69}$ 和 $\boldsymbol{A}_2^{70}$ 进行训练，有效输入序列的长度为 69。原则上，LSTM 可以学习涵盖整个 69 步历史的依赖关系，但其有效记忆长度取决于它通过门控机制学到的内容。在推理时，我们使用测试序列中的第 2 至第 70 个快照初始化网络状态，使网络的最后一个输入为时间步 70 的真实快照，而第一个预测步则根据测试序列中的最后一个样本进行预测。这可以降低初始误差及后续误差累积。我们指出，这种做法不同于常规做法（即与训练时一致，预测输入序列的最后一项），这是因为腔体数据具有平稳性，因此长度为 69 的输入序列可以任意移位。

为了对 DMD 和长短期记忆网络预测的完整流场进行定量比较，我们采用归一化均方误差（NMSE），

$$e_k = \frac{E\left\{\|\tilde{\boldsymbol{q}}_k - \boldsymbol{q}_k\|^2\right\}}{E\left\{\|\boldsymbol{q}_k\|^2\right\}}, \tag{13}$$

其中，期望值为集合平均。

DMD 和长短期记忆网络的预测误差如图 7 所示。两种方法的各个测试序列误差（灰色曲线）均呈现较大离散性，这一点从阴影区域所示的标准差带也可看出。对于两种方法，短提前时间内的均值误差都近似单调递增，随后趋于平稳。面板 7(c) 中的直接比较显示，DMD 在第一个预测时间步的精度略高，但此后误差增长更快；在随后的 16 个时间步内，长短期记忆网络的均值误差更低。然而，到提前时间 13 时，即使是长短期记忆网络的预测，其 NMSE 也已超过 1，这表明两种方法在超出这一时间范围后都基本丧失了预测能力。

图8 展示了 u- 和 v-速度分量的参考数据（真实值），以及对应的动态模态分解和 LSTM 预测结果在五个代表性提前时间上的情况。动态模态分解与 LSTM 最明显的区别在于，动态模态分解的预测保留了精细得多的湍流结构，与参考数据十分相似，而 LSTM 的预测则显得明显更平滑。这与两个模型的构建方式一致：动态模态分解的预测位于由 DMD 模态张成的线性子空间中，而这些模态本身是由用于识别模型的快照数据线性组合而成。相比之下，LSTM 在通过截断 POD

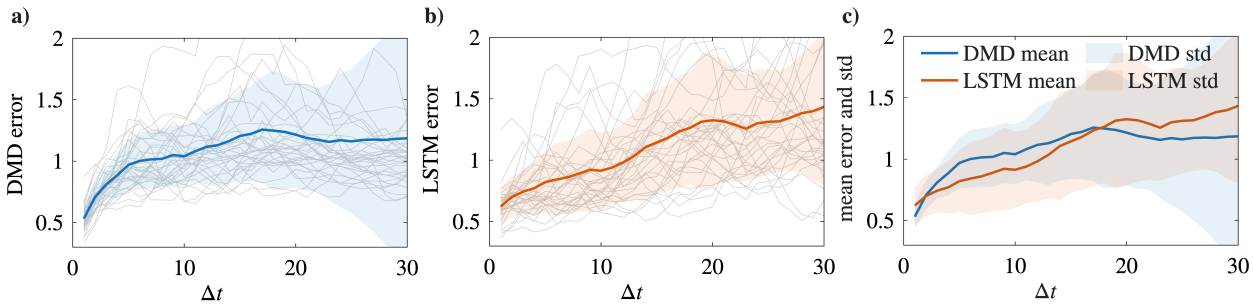


图 7 挑战 2.1：预测结果的预测误差。灰色曲线表示 32 个独立测试序列；粗线表示其均值，阴影带表示标准差。(a) 动态模态分解；(b) 长短期记忆网络；(c) 方法直接比较（平均归一化均方误差及标准差）。

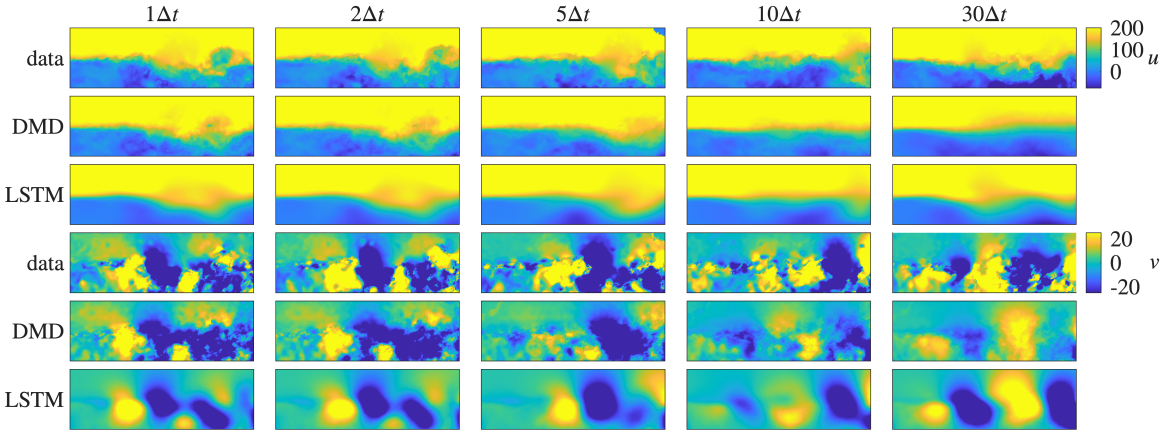
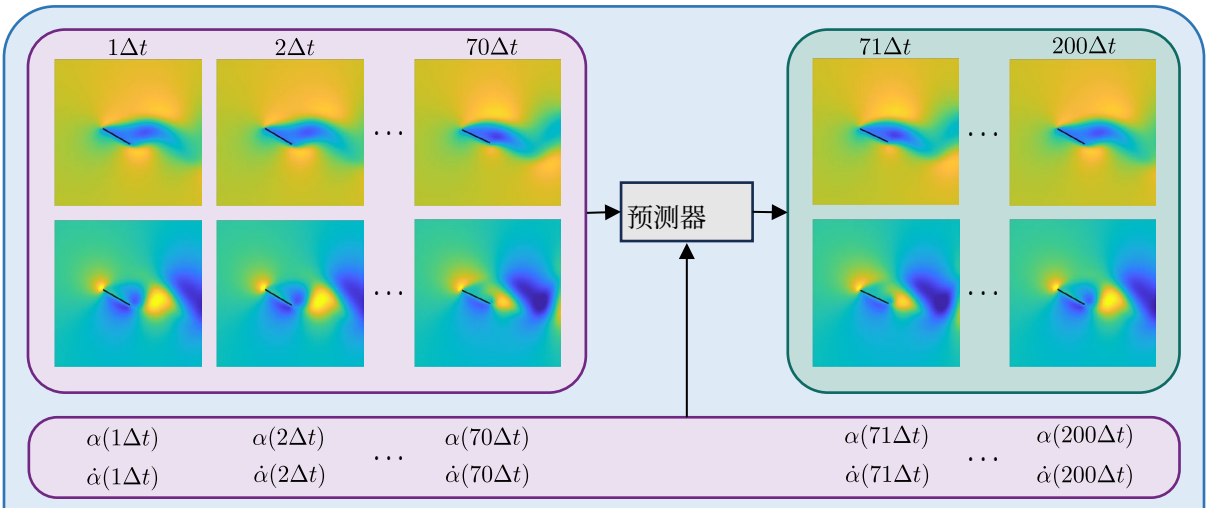


图 8 挑战 2.1：真实值、动态模态分解和长短期记忆网络预测结果的瞬时流场对比。顶部各行显示流向速度 u，底部各行显示壁法向速度 v。预测时域对应于紧接输入序列之后的帧，以及 +2、 +5、 +10 和 +30 个时间步。

表示中运行。请注意，LSTM 并不直接应用于原始流场，而是应用于 POD 展开系数；随后，流动由数量有限的 25 个 POD 模态重构而成。这些模态是经过最优平均的空间结构，因此本质上比原始数据更平滑。换言之，我们利用 POD 进行降维，并将 POD 系数视为由 LSTM 随时间推进的潜变量。总之，尽管动态模态分解的预测呈现出更精细的湍流结构，因此可能被认为更真实地呈现了流动，但图7 表明，平滑得多的 LSTM 预测取得了相当、且往往更低的预测误差。最后补充一点，仅仅增加 LSTM 模型中保留的 POD 模态数量，并不能提高准确性，也无法使预测更接近动态模态分解的预测或真实值。相反，维度更高的潜在空间会增加训练难度，并使收敛更加不稳定。

D. 挑战 2.2：参数变化下的俯仰翼型预测



挑战 2.2： 给定一组俯仰参数（基准攻角和俯仰频率）下，流体流经周期性俯仰翼型时垂直速度的初始 70 个快照，预测后续 130 个快照，适用于样本内和样本外的俯仰参数。

1. 数据

本挑战采用直接数值模拟数据，研究流体流经绕半弦位置作周期性俯仰运动的平板翼型时的流动，其中攻角随时间变化

$$\alpha(t) = \alpha_0 - \alpha_P \sin(2\pi f_P t). \tag{14}$$

雷诺数（基于自由来流速度和弦长）为 100。数值模拟采用浸入边界法 [28, 29], , 数值模拟参数和数值设置与参考文献中相同构型的描述一致。 [8]与第一个预测挑战中的湍流空腔流相比，由于雷诺数较低且处于层流状态，各次数值模拟中的动力学相对简单。该数据集之所以使预测具有挑战性，其特点在于包含不同频率范围内的连续驱动（俯仰），且驱动围绕的基态既可能稳定（对于 $\alpha_0 = 25°$），也可能因自然涡脱落而不稳定（对于$\alpha_0 > 27°$）。自然涡脱落频率约为 $f_N = 0。24$，对于 $\alpha_0 = 30°$，该频率处于所考虑的俯仰频率范围内。

数据集包含翼型周围窗口内采集的瞬时流向（u）和横向（v）速度，如图 9(a) 所示。相较于数值模拟，数据还在x 和 y 方向上按四倍比例降采样，使每个快照的大小为 60×60。仅在初始瞬态消退后采集数据。为开发用于预测该流场演变的模型，我们还假设已知俯仰运动学，其特征由 $\alpha(t)$ 和 $\dot{\alpha}(t)$表示。

训练数据集包含 16 种不同的俯仰曲线，涵盖两个基准攻角 $\alpha_0 \in \{25°, 30°\}$ 和八个俯仰频率 $f_P \in \{0.05, 0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4, 0.5\}$，其中该频率以自由来流速度（$U_\infty$）和翼型弦长（$c$）进行无量纲化。俯仰振幅固定为 $\alpha_P = 5°$。用于测试的数据集包含这些参数，以及训练数据中未涉及的另外 15 种参数组合，如图 9(b) 所示。这些分别称为样本内案例和样本外案例。新增的样本外参数组合包括 α_0 和 f_P 中一个或两者与训练案例不同的情况，还包括一个超出训练所用范围的频率。每个案例包含 800 个快照，采集时间步长为 $\Delta t = 0.1$（以 c 和 U_∞无量纲化）。

与第III.C节所讨论的湍流腔体流示例类似，我们旨在根据初始数据序列，识别能够预测未来速度场的模型。该初始序列（包含 70 个时间步的数据）包括

速度场和翼型运动学（$\alpha(t)$，$\dot{\alpha}(t)$）均包含在内，且预测时间步也提供翼型运动学，如挑战 2.2 示意图所示。预测窗口包含 130 个时间步的数据。

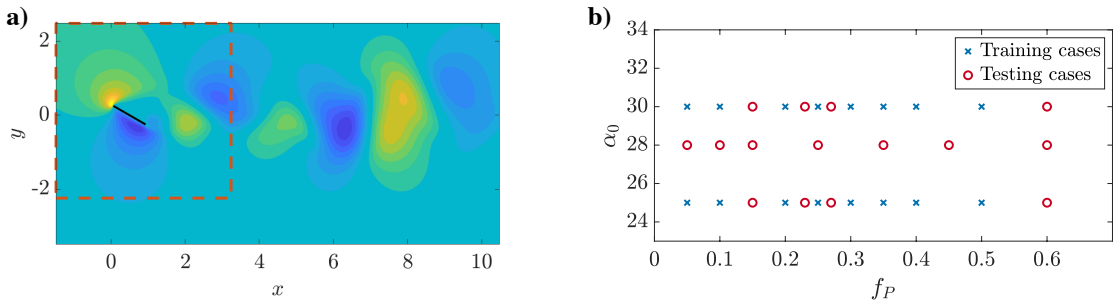


图 9 挑战 2.2：(a) 俯仰翼型数据集的流场快照示例（垂直速度，v）。红色虚线框标示了用于基准问题的计算域子区域。(b) 训练（样本内）和测试（样本外）数据集所用的基准攻角α_0 和俯仰频率。

2. 基线结果

首先，我们使用带控制的动态模态分解训练动力学模型。带控制的动态模态分解是动态模态分解的一种变体，可将已知输入信号纳入假设的离散时间线性动力学中。也就是说，方程（3）修改为以下动力学形式

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_{k+1} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k. \tag{15}$$

这种方法最初是在动态模态分解的背景下于参考文献 [30] 中提出的。此处，输入信号 $\boldsymbol{u}_k$ 由瞬时攻角 $\alpha(k\Delta t)$ 和俯仰角速度 $\dot{\alpha}(k\Delta t)$组成。为降低模型维度，我们将数据投影到按所有俯仰频率下的训练数据拼接后计算得到的前 $r = 20$ 个 POD 模态上。需要强调的是，第 III.C 节 中用于挑战 2.1 的动态模态分解方法会为每个测试序列分别建立模型，而此处我们旨在构建一个可用于不同翼型运动学的单一全局模型。

与第 III.C 节一样，我们还考虑使用一个简单的长短期记忆神经网络来完成这项预测任务。同样，我们将每个训练序列划分为长度为 70 个快照的片段，相邻片段之间重叠 50%，并训练模型预测未来一个时间步长的状态。与 DMD模型相同，我们通过将数据投影到前 20 个 POD 模态上来降低问题的维度。学习率、训练轮次以及单个隐藏层中的 LSTM 模块数量，均与第 III.C 节所用的相同。同样，我们使用式（13）给出的归一化均方误差（NMSE）来量化 DMD模型和 LSTM模型的误差。

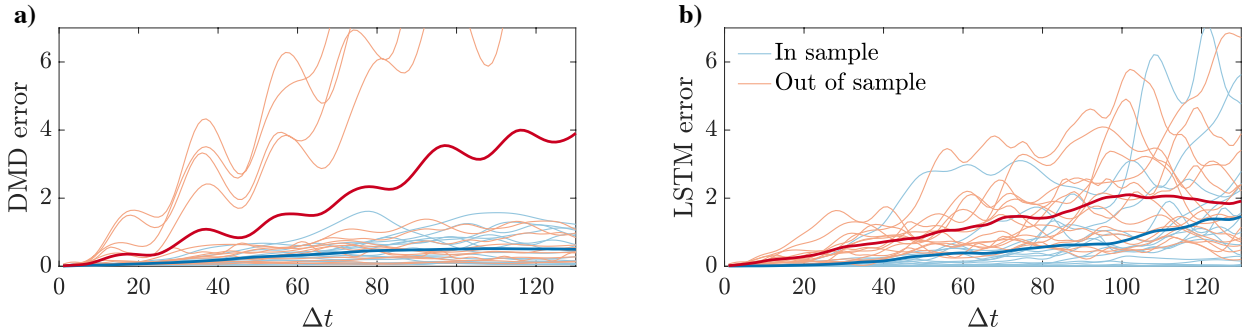


图 10 挑战 2.2：使用 (a) 动态模态分解和 (b) LSTM模型得到的挑战 2.2 预测误差（NMSE）。细线表示各个测试案例，区分为参数组合包含在训练数据集中的案例（蓝色）和未包含在训练数据集中的案例（红色）；粗线表示这两组各自的平均误差。

图 10 展示了 DMD模型和 LSTM模型在整个预测窗口内的误差。误差被划分为参数用于模型训练的案例（样本内），以及参数不同的案例

（样本外）。总体而言，对于样本外案例，LSTM模型的总平均误差较低；但对于样本内案例，其平均误差略高。DMD模型在样本外案例中的较大平均误差主要是由其中四个案例造成的：在这些案例中，DMD模型的误差迅速增长，这些案例对应于$\alpha_0 \in \{25°,\ 30°\}$和 $f_P \in \{0。23,\ 0。27\}$，其数值均接近系统的自然涡脱落频率。对于同样用于训练的样本内参数值，LSTM模型的平均误差在整个预测窗口内持续增长，而DMD模型的误差在大约 80 个时间步后似乎趋于平稳。

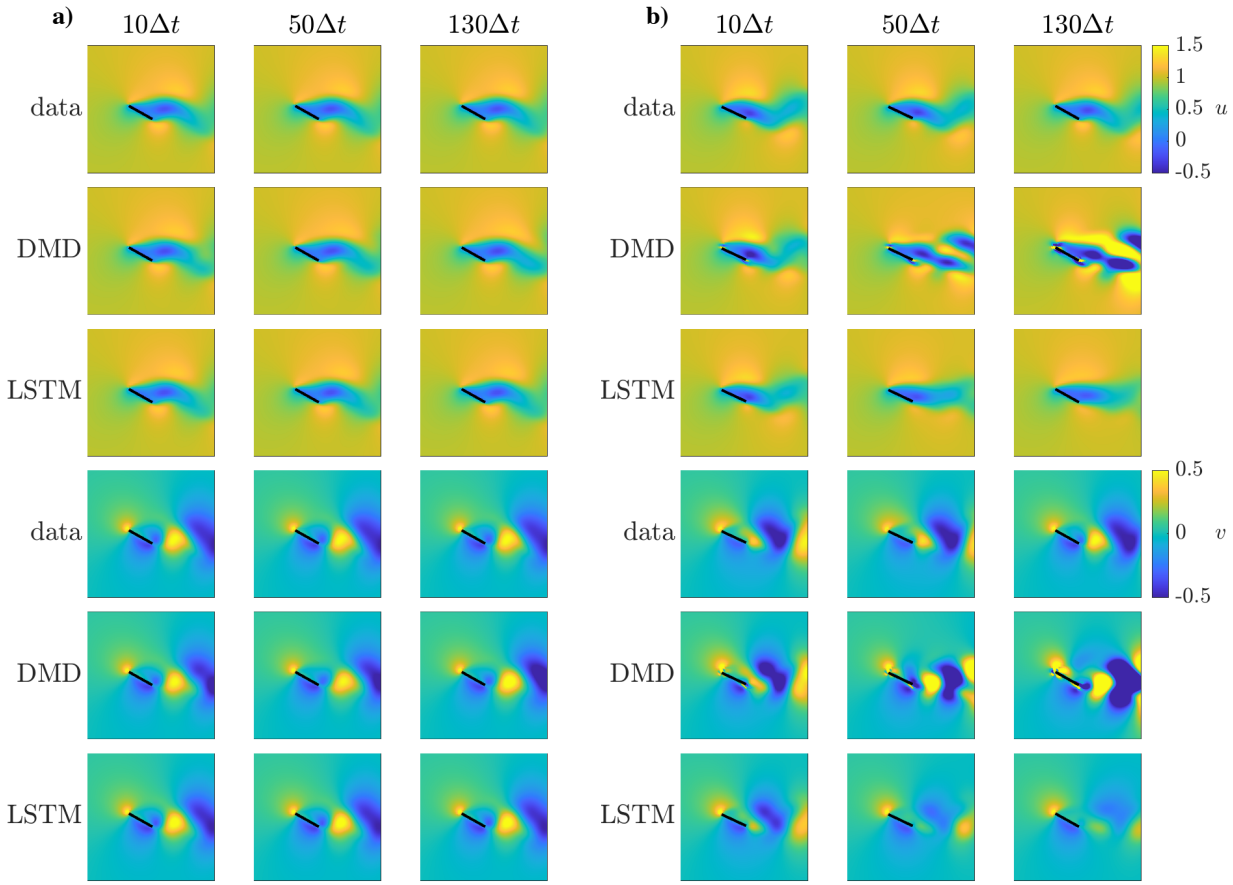


图 11 挑战 2.2 中真实值、动态模态分解和长短期记忆网络预测结果的瞬时流场对比，俯仰参数为 (a) $\alpha_0 = 30°$, $f_P = 0。25$ **和 (b)** $\alpha_0 = 30°$, $f_P = 0。27$。**上排显示流向速度** u，**下排显示壁法向速度** v。**各列分别表示 10、50 和 130 个时间步长后的预测结果。**

图11比较了两种翼型俯仰参数组合下 DMD 和 LSTM 模型对流场的预测结果。图 11(a) 展示了 $\{\alpha_0, f_P\} = \{30°, 0.25\}$这一情形，该参数组合包含在训练集中。此俯仰频率也接近自然涡脱落频率，且观测到涡脱落动力学与俯仰运动发生锁定。因此，响应呈周期性，两种模型都能在整个预测时域内准确捕捉该响应。图 11(b) 展示了 $\{\alpha_0, f_P\} = \{30°, 0.27\}$这一情形，其涡脱落与俯仰运动呈相位锁定，同样表现出周期性动力学。这些翼型运动学参数未包含在训练数据中，因此两种模型的精度都显著下降。DMD模型预测的速度脉动在预测时域内增长过大，不过它似乎捕捉到了流场脉动的正确相位（在 v 分量中最为明显）。请注意，这是图 10(a) 中 DMD模型误差不断增大的四种情形之一。相比之下，LSTM模型预测的速度场脉动在预测时域内似乎逐渐衰减。尽管它同样未能捕捉到正确的周期性动力学，但由此得到的误差较低。

IV. 挑战 3：传感

A. 引言

流体力学中传感的根本目标，是根据局部且往往稀疏的测量数据重构或估计流动状态。在无法实际进行全面直接测量的应用中，传感至关重要。例如，在实验中，粒子图像测速可能只能提供速度数据，而无法提供热力学量，且分辨率有限、视场受限。在实际应用中，可能只能通过少数探针获取测量值，例如安装在气动体表面的几个压力传感器。流体流动，尤其是湍流，对传感提出了独特挑战。湍流具有混沌、多尺度、高维和非线性等特征。这些特征限制了根据有限测量数据推断不可见流动状态的信息，也违背了许多经典状态估计方法所依据的假设。总的来说，流动感测是有效监测、控制、优化和理解流体系统的一项关键能力。

以湍流射流和湍流边界层作为代表性示例，本挑战旨在寻求能够应对这些挑战并改进流动感测的新型数据驱动方法。具体而言，该挑战旨在探究可用传感器数据的两种极限情况。射流挑战采用空间上稀疏但时间分辨的测量值，从而可以利用时间历史来估计当前目标。边界层挑战采用时间上未经分辨、但在壁面上空间分布密集的测量值，从而可以利用空间模式来估计远离壁面的瞬时速度场。鉴于这些不同的极限情况，我们采用两组基准方法：针对射流，使用 Wiener 滤波器和多层感知机；针对边界层，使用线性随机估计和卷积神经网络。

B. 基准方法

1. 线性随机估计（*LSE*）

线性随机估计（LSE）为根据相关但可能含噪的测量值重构目标信号提供了最优线性回归器 [31]。给定测量值向量 $\boldsymbol{y}$（例如剪切应力或压力等壁面量）以及相应的目标信号 $\boldsymbol{z}$（例如速度场），LSE 旨在求得一个线性传递函数 $\boldsymbol{T}$，使得瞬时估计目标

$$\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{y} \tag{16}$$

使期望均方误差最小，$E\left\{\|\tilde{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{z}\|^2\right\}$。最优传递函数为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{C}_{zy}\left(\boldsymbol{C}_{yy} + \boldsymbol{N}\right)^{-1}, \tag{17}$$

其中，$\boldsymbol{C}_{zy}$ 是目标与测量值之间的互相关，$\boldsymbol{C}_{yy}$ 是测量值的自相关，$\boldsymbol{N}$ 是测量值中任意加性噪声的自相关。在实际应用中，通常会先将测量值和目标投影到低维基上，例如本征正交分解（POD），然后再应用线性最小二乘估计。在此框架下，利用根据经验相关性构建的传递函数，将测量量的时间系数线性映射为目标场的时间系数。这种方法在数学上等同于扩展本征正交分解（EPOD）[32, 33]。线性最小二乘估计和EPOD已成功应用于湍流射流 [34], 通道 [35], 以及其他壁面约束流动 [36], ，在此作为线性基准，用于评估更先进的非线性估计器，例如卷积神经网络。

2. Wiener 维纳滤波器

维纳滤波器 [37] 是宽平稳测量 $\boldsymbol{y}$ 与目标 $\boldsymbol{z}$之间的最小均方误差线性估计器。也就是说，我们要寻找一个线性传递函数 $T(\tau)$，使得估计目标

$$\tilde{\boldsymbol{z}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{T}(t-\tau)\boldsymbol{y}(\tau)d\tau \tag{18}$$

使期望均方误差最小。LSE（采用典型形式时）仅使用当前的瞬时测量值来估计当前目标，而维纳滤波器则使用完整的测量历史。传递函数

使误差最小的传递函数在频域中表示为

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\omega) = \boldsymbol{S}_{zy}\left(\boldsymbol{S}_{yy} + \boldsymbol{N}\right)^{-1}, \tag{19}$$

其中， $\boldsymbol{S}_{zy}$ 是目标与测量值之间的互谱密度（CSD）， $\boldsymbol{S}_{yy}$ 是测量值的互谱密度， $\boldsymbol{N}$ 是测量值中加性噪声的互谱密度。时间域传递函数 $\boldsymbol{T}(\tau)$ 通过逆傅里叶变换得到。

到目前为止所述的公式是非因果的，因为要估计当前目标，需要用到未来的测量值，这一点由方程（18）中积分上限为无穷大体现。对于所有数据都能同时获取的后处理任务，这并不是问题。但在其他传感任务中，例如系统监测或闭环控制，无法获取未来数据。若试图通过简单截去传递函数中非因果的（$\tau < 0$）部分来绕过这一要求，就会使估计器失去最优性。

将（19）中的积分限限制为 $(-\infty,\ 0]$，再一次最小化期望均方误差，即可推导出最优因果传递函数。使误差最小的传递函数为

$$\hat{\boldsymbol{T}} = [\boldsymbol{S}_{zy}(\boldsymbol{S}_{yy} + \hat{\boldsymbol{N}})_{-}^{-1}]_{+}(\boldsymbol{S}_{yy} + \hat{\boldsymbol{N}})_{+}^{-1}. \tag{20}$$

此处， $[\cdot]_{\pm}$ 和 $(\cdot)_{\pm}$ 分别对应于通过加性和乘性维纳–霍普夫分解确定的因果的和非因果分量 [38–41]。维纳滤波器与许多其他方法密切相关，包括基于预解算子的估计器和卡尔曼滤波器 [41, 42],，并已应用于各种情况下的流场估计任务，包括通道 [43], 、翼型尾迹 [44], 和射流 [45]。

3. 多层感知机（*MLP*）

多层感知机（MLP） [46] 是最基本的人工神经网络类型。这些网络由两个或更多层的节点组成，每个节点都与前一层和后一层中的每个节点相连接。从概念上讲，该网络表示输入空间与输出空间之间的静态映射。在传感的语境下，多层感知机提供了一个介于测量值 $\boldsymbol{y}$（t）与目标 $\boldsymbol{z}$（t）之间的非线性映射$\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\theta}$，即:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{\theta}\left(\boldsymbol{z}(t)\right). \tag{21}$$

网络参数 θ 再次经过优化，以最小化所需的损失函数；在本例中，该函数为均方估计误差。

为使多层感知机能够像维纳滤波器一样，作为考虑测量历史的估计器，我们将输入重新定义为时延变量，其中包含过去一段时间内的测量值。值得注意的是，除了多层感知机之外，还可以使用循环神经网络或长短期记忆网络等其他先进架构，更优雅地考虑时间历史；此处我们采用多层感知机，以构建尽可能简单的维纳滤波器非线性扩展。理论上，如果网络采用线性激活函数构建，它应当能够复现维纳滤波器。参考文献 [47]中展示了多层感知机用于预测流体流动的若干示例。

4. 卷积神经网络（*CNN*）

卷积神经网络（CNN） [48] 广泛应用于输入域与输出域具有相似结构的场景，从而能够利用数据中的空间相关性 [49]。在流动感测中，结构化输入可以是二维测量值（例如壁面压力或壁面剪切应力分布），结构化输出则可以包括目标壁面法向位置处的流场（例如平面速度场）。与多层感知机类似，卷积神经网络提供了一个非线性映射$\boldsymbol{C}_{\theta}$，将测量值 $\boldsymbol{y}(t)$映射为目标 $\boldsymbol{z}(t)$，即

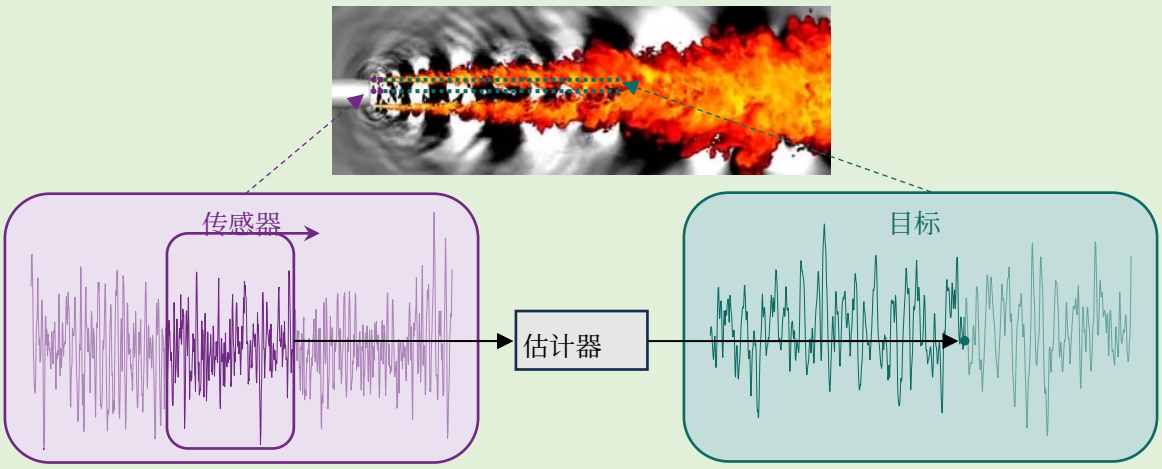
$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}_{\theta}\left(\boldsymbol{z}(t)\right). \tag{22}$$

多层感知机的显著特征是其映射形式如下

$$\boldsymbol{C}_{\theta} = \rho_L \circ \kappa_L \circ \cdots \circ \rho_1 \circ \kappa_1, \tag{23}$$

其中，每个 κ_{ℓ} 都是一个卷积算子，每个 ρ_{ℓ} 都是一个逐点非线性函数。也就是说，卷积神经网络通过反复应用具有共享权重的局部平移等变卷积，从测量数据 $\boldsymbol{y}$ 估计目标$\boldsymbol{z}$。这种结构大幅减少了网络参数 θ 的数量，并利用相邻测量值之间的空间关系，因此当 $\boldsymbol{y}$ 具有空间结构时，卷积神经网络非常有效。有关卷积神经网络及其应用的详细讨论，参见文献 [50],；有关其与用于流动感测的线性最小二乘估计的比较，参见文献 [51]。

C. 挑战 3.1：利用稀疏测量对湍流射流进行传感



挑战 3.1： 根据湍流射流中四个近喷嘴传感器测得的轴对称流向速度时间历程，估计一系列下游目标点处的流向速度。

1. 数据

本挑战采用大涡模拟（LES）数据，研究从轮廓收缩直管喷管 [52]喷出的湍流射流。射流马赫数为 $M_j = U_j/c_j = 0.9$，且射流为等温射流（$T_j/T_\infty = 1.0$），其中 U为平均流向速度，c 为声速，T 为平均温度，下标 j 和 ∞ 分别表示射流出口和自由来流条件。雷诺数为 $Re_j = \rho_j U_j D/\mu_j \approx 1 \times 10^6$，其中 D为喷管出口直径，ρ 为密度，μ 为动力黏度。数值模拟使用可压缩流求解器 CharLES [53], 进行，该求解器采用有限体积法，在非结构网格上求解空间滤波可压缩纳维–斯托克斯方程。此处使用的网格约包含 1600 万个控制体。大涡模拟方法、数值设置以及与测量值的比较详见文献 [52]。完整数据库 [8]包含 10,000 个密度、速度和压力场快照，每隔 0.2 个声学时间单位（tc_∞/D）采样一次。

本挑战中的传感器数据对应于从大涡模拟数据中，在四个探针位置测得的轴对称流向速度：$(x/D,\ r/D) = (0.25,\ 0),\ (0.5,\ 0),\ (0.25,\ 0.5),\ (0.5,\ 0.5)$。为模拟真实传感器的有限尺寸和带宽，每个测量值均定义为高斯加权空间平均，这也起到了滤除真实速度场中高频分量的作用。高斯函数以以上四个位置为中心，方差为 $\sigma/D = 0.1$。由于我们处理的是速度场的轴对称分量，每个具有 $r/D > 0$ 的传感器在物理上都将由一个方位环形传感器实现，其传感器密度足以分离出方位平均。传感器数据将用于估计射流中心线（$r/D = 0$）和唇线（$r/D = 0.5$）上一系列目标位置处的轴对称流向速度。为与传感器保持一致，每个目标也采用相同的高斯加权空间平均定义。目标的流向位置范围为 $x/D \in [0.5, 10]$，间距为 $\Delta x/D = 0.25$。

训练数据由传感器和目标数据的 8,000 个快照组成，而测试数据包含剩余的 2,000 个快照。参与者可以获得传感器测试数据，而目标测试数据将被保留，必须由参与者进行估计。本挑战要求所使用的方法必须是因果的，即只能使用过去和当前的数据来估计目标的当前状态。为适应使用前一段时间历史数据生成当前估计值的方法，在计算估计误差时，将传感器测试数据的前 200 个快照排除在外。

2. 基线结果

为使用 200 个快照的历史数据构建因果维纳滤波器，采用 Welch 方法计算互谱，每个数据块包含 400 个快照，重叠率为 90%，并使用六阶正弦窗 [54]。虽然数据中未明确加入噪声，但我们假设每个测量信号都包含振幅为 0.1% 的白噪声，以正则化传递函数。

同样，构建多层感知机估计器时，以传感器读数的 200 个快照作为输入，来最小化均方误差损失函数。为充分利用可用的训练样本，每个时间块的重叠数设为 199，最终得到 9800 个样本。其中 15% 的训练样本留作验证，因此总计有 8330 个训练样本和 1470 个验证样本。训练前，输入数据和目标数据均减去均值，并除以各自的标准差进行归一化。我们考虑了两种不同的架构，每种架构都包含一个输入层、三个各有 512 个节点的全连接隐藏层，以及一个全连接输出层。第一个多层感知机使用线性激活函数，因此理论上应能复现维纳滤波器。第二个多层感知机使用非线性（双曲正切）激活函数，后接一个 20% 的丢弃层，以提升收敛效果。两种多层感知机的小批量大小均为 64，学习率为 0.0001，并使用 Adam 优化器进行训练。该模型很容易出现过拟合，因此我们采用早停策略，即选择验证损失最低时的迭代结果。

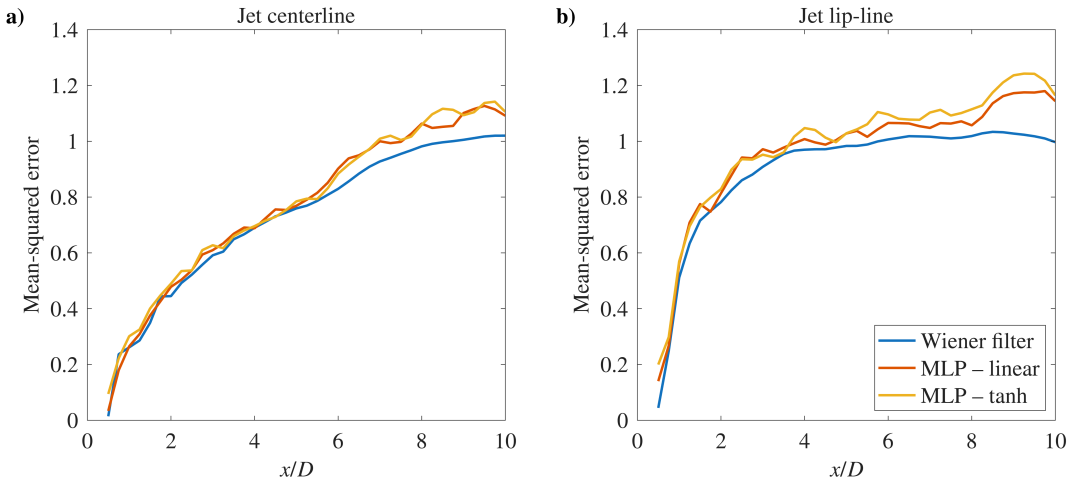


图 12 挑战 3.1：沿射流流向位置 x/D 的归一化均方误差：(a) 中心线和 (b) 唇线；比较维纳滤波器、线性多层感知机和非线性多层感知机。

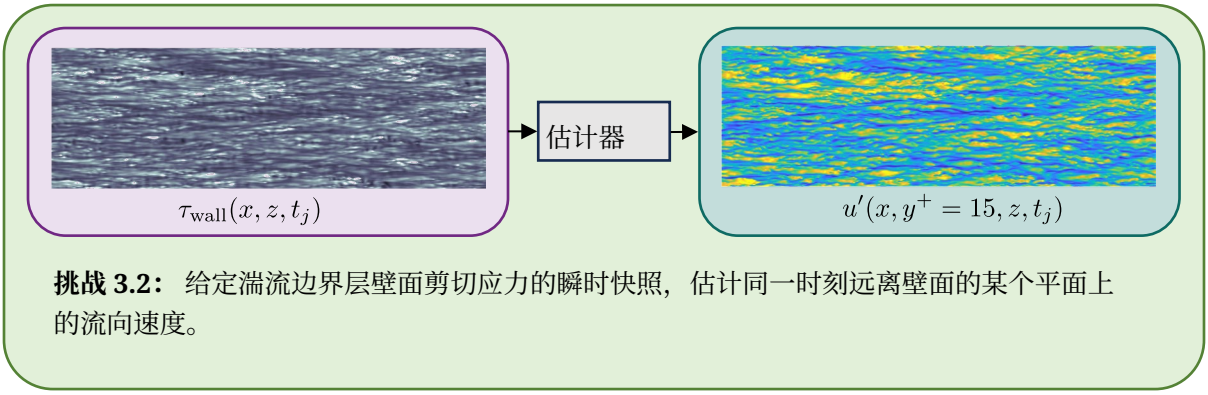
Th估计器的性能使用归一化均方误差（NMSE）进行评估 ，

$$e = \frac{E\left\{\|\tilde{z}(t) - z(t)\|^2\right\}}{E\left\{\|z(t)\|^2\right\}}, \tag{24}$$

其中，期望值为时间平均值。图 12展示了因果维纳滤波器和两个多层感知机的结果，结果随 x/D 变化，分别对应射流中心线 (a) 和唇线 (b)。这些结果有一个显著且可能出乎意料的特点：非线性多层感知机的表现并不优于维纳滤波器，实际上，对于大多数目标，其误差反而更高。这凸显了开发传感算法的必要性，即更有效地利用现有时间序列数据中的模式。同样，线性多层感知机也无法忠实地复现维纳滤波器；也就是说，它对理论维纳滤波器的近似不如使用 Welch 方法计算的互谱密度所得结果准确，如上文所述。

在所有情况下，随着传感器与目标之间的距离增加，误差也会随 x/D 增大。沿唇线的误差高于中心线；前者在所有流向位置上都是湍流，而后者在约 $x/D = 5.5$ 之前位于相对层流的势核内。事实上，对于三种估计器，中心线误差在此位置都存在明显的斜率不连续，之后中心线误差迅速达到与唇线误差相近的量级。

D. 挑战 3.2：利用壁面应力对湍流边界层进行传感



挑战 3.2： 给定湍流边界层壁面剪切应力的瞬时快照，估计同一时刻远离壁面的某个平面上的流向速度。

1. 数据

本挑战使用零压力梯度不可压缩湍流边界层的直接数值模拟（直接数值模拟）数据，具体为参考文献 [8]中描述的 BL1 算例。完整数据库包含 10,000 个三维流场，每 $\Delta t^+ \approx 1.5$ 采样一次，覆盖 26 个涡周转的物理时间。

在此数据库中，本挑战的传感器数据对应于流向-展向（x–z）平面上的流向壁面剪切应力脉动 τ_w，该平面覆盖的摩擦雷诺数范围为 $Re_\tau \approx 000$–000，并采用 507×150 个网格点进行离散。目标数据是在同一 x–z 计算域内、距壁面 $y^+ = 15$ 处的流向速度脉动，其中 $y^+ = yu_\tau/\nu$ 为内尺度壁法向坐标，$u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ 为摩擦速度，τ_w 为平均流向壁面剪切应力，而 ρ 为流体密度。这是实验中的一项重要问题，因为与引入探针测量近壁区的流动相比，实时壁面测量的侵入性较低，尤其是在高雷诺数下。

训练数据由 1,000 个传感器数据和目标数据的快照组成，测试数据则额外包含 250 个快照。参与者可以获得传感器测试数据，但目标测试数据会被保留，必须由参与者进行估计。本挑战要求，仅使用某一时刻的壁面剪切应力传感器读数快照，来估计同一时刻的目标速度场快照。

2. 基线结果

线性最小二乘估计器利用训练数据，近似计算目标与测量值之间的互相关，以及测量值的自相关。虽然直接数值模拟数据未显式添加噪声，但我们假设传感器数据中含有振幅为 0.1% 的白噪声，以对传递函数进行正则化。

卷积神经网络架构由 17 个卷积层组成，每层的步幅均为 1，并采用相同的填充，因此整个网络在变换通道维度的同时保留空间分辨率。前 8 层的滤波器数量从初始的 4 个逐渐增加至 32 个，随后 8 层对称地逐渐减少至 1 个，形成沙漏形层级结构的特征图，从而实现多尺度表征，并进一步重建目标场。所有中间层均采用 tanh 激活，对带符号的流动量进行适当的非线性变换；最后一层则采用线性激活，以生成不受约束的回归输出。训练采用自适应学习率调度，在验证损失趋于平稳时降低学习率，并结合早停和检查点保存。因此，最终部署的模型是验证损失达到最小值时对应的模型，从而在保持良好泛化性能的同时限制过拟合。

图 13（a）和（b）展示了 $y^+ = 15$ 处流向速度脉动的一个快照，即需要传感的目标，以及壁面剪切应力，即来自直接数值模拟的传感器读数。图 13（c-f）展示了由线性最小二乘估计和卷积神经网络生成的目标速度场相应估计结果，以及与直接数值模拟结果的差异。尽管两种估计结果都显示出近壁条带结构的存在，但线性最小二乘估计得到的场显著低估了其幅度。此外，卷积神经网络估计的场包含了直接数值模拟场中更多的小尺度结构。

式中 NMSE 的值 24是两种方法旨在最小化的指标，在测试数据上的平均值分别为：LSE 估计器为 0.912，CNN 估计器为 0.239。

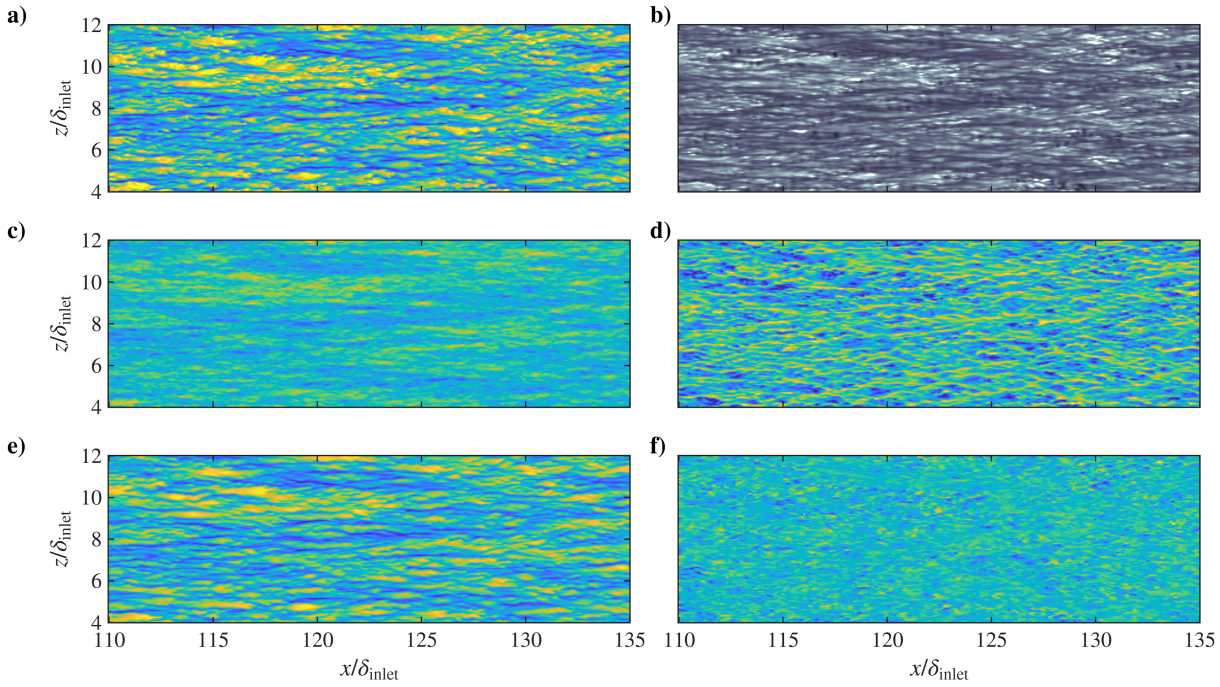


图 13 挑战 3.2：目标场、传感器场和误差场的快照。(a) 来自直接数值模拟的 $y^+ = 15$ 处流向速度脉动；(b) 来自直接数值模拟的壁面剪切应力；(c) LSE 对速度场的估计；(d) LSE 与直接数值模拟速度场之差；(e) CNN 对速度场的估计；(f) CNN 与直接数值模拟速度场之差。

V. 参与指南

这一挑战的目标——促进对用于湍流压缩、预测和传感的数据驱动方法进行直接比较——只有通过广泛的社区参与才能实现。挑战面向所有希望参与的人开放，我们诚邀您加入。参与指南概述如下；更多详细信息以及定期更新，请参阅挑战网页：fluids-challenge.engin.umich.edu。

数据。 挑战所需的所有数据均可通过网页获取，数据以一系列 HDF5 文件的形式提供。每项挑战均提供训练数据。此外，还提供预测和感知挑战中测试方法所需的输入数据，即初始条件和/或参数，以及传感器测量值。为确保盲测，部分测试数据将予以保留，详情见下文。

代码。 该网站还为每项挑战提供基线方法的示例代码。除了帮助您复现本文中包含的基线结果外，这些代码还可作为提交至挑战的方法模板。每种基准方法都有一个主驱动脚本，用于读取训练数据（以及适用时的输入测试数据）、执行该方法（通过调用相应工具目录中的其他函数），并输出结果文件。我们希望您为提交至挑战的每种方法发布开源代码，并遵循相同的结构；无法运行或不符合规定格式的代码将不予接受。代码可以使用任何语言编写；事实上，我们在基线方法中使用了多种语言（包括 MATLAB 和 Python），以强调这一点。我们还为每项挑战提供评估脚本，用于计算每种提交方法的性能指标，具体如下所述。

盲测。 为确保比较公平，我们将使用盲测来评估每种方法。每种方法的主驱动脚本（如上所述）必须输出一个结果文件，其中包含与示例基准代码相同的信息，例如感知挑战中的估计目标值。您需要将这些结果文件发送给相关挑战的联系人（POC，详情请参阅网页）。对于预测和感知挑战，结果文件严格来说只包含数据，即分别为对未来流场状态和目标的预测结果。对于压缩挑战，结果文件将包含编码器和解码器本身。随后，联系人将执行评估函数；该函数会读取结果文件和必要的（未提供的）测试数据，并写入一个指标文件，然后将其发送回您。

AIAA期刊虚拟专辑和受邀演讲。除上述介绍的开源代码外，本次挑战的最终成果还将包括AIAA Journal中的一个虚拟专题合集（类似于特刊）。具体而言，对于每项完成的挑战，您都应提交一篇论文，介绍所提出的方法并报告其结果；这些结果应如联系人提供的指标文件所载，并与提供的基线结果进行比较。您也可以选择性地加入与相应挑战类型相关的其他测试问题的结果。如果您对同一项挑战应用了不止一种方法，则应将这些方法纳入同一份投稿，并在与基准方法进行比较的基础上，对各种方法进行适当的比较和对照。如果您完成了多项挑战，则应提交多篇论文。每篇投稿都将经过标准的AIAA期刊审稿流程，并应遵循所有AIAA期刊指南。鉴于预期的内容范围，我们预计论文篇幅会相对简短。投稿能否发表并不取决于方法的性能。事实上，我们鼓励报告负面结果，以便对可用方法及当前最新技术水平进行均衡而全面的综述。相反，审稿流程将重点关注陈述质量以及对挑战要求的遵守情况。最后，在挑战结束时，我们将撰写一篇综述文章，总结挑战的投稿情况及其结果。此外，我们将在AIAA SciTech和/或航空会议期间举办专题会议，届时将邀请部分参与者介绍其方法和结果。

管理。 挑战网页除了包含上述数据和示例代码外，还提供了本摘要未涵盖的更多详细信息，包括各项挑战的联系人。请填写网页上的调查问卷，表明您有意参与。此举不仅有助于我们做好准备，还会将您加入邮件列表，以确保您收到相关更新。最后，网页还列出了挑战时间表和关键日期，并提供了提交结果的说明。期待收到您的提交！

资金来源

OTS 部分经费由美国空军科学研究办公室拨款（编号 FA9550-22-1-0541）提供，用于支持挑战 2.1。AT 部分经费由美国海军研究办公室拨款（编号 N00014-22-1-2561）提供，用于支持挑战 3.1。STMD 部分经费由美国能源部拨款（编号 DE-SC0025597）提供，用于支持挑战 2.2。ALD 部分经费由美国国家科学基金会拨款（编号 2317254）和美国国家航空航天局拨款（编号 80NSSC23K1498）提供，用于支持挑战1.1和1.2。

致谢

感谢 Junoh Jung 博士提供挑战 3.1 中使用的部分 Wiener–Hopf代码，并感谢 Andrés Botella 教授为挑战 3.2 中使用的 CNN代码所做的贡献。

参考文献

[1] 邓, J.、Dong, W.、Socher, R.、Li, L.-J.、Li, K.和Fei-Fei, L.，《ImageNet：一个大规模分层图像数据库》，*2009年IEEE计算机视觉与模式识别会议*，IEEE，2009年，第248–255页。https://doi.org/10.1109/CVPR.2009. 5206848。[2] Wang, A., Singh, A., Michael, J., Hill, F., Levy, O., and Bowman, S.，《GLUE：自然语言理解的多任务基准与分析平台》，*2018年EMNLP研讨会论文集 BlackboxNLP*：自然语言处理神经网络的分析与解释，2018年，第353–355页。https://doi.org/10.18653/v1/W18-5446。[3] Moult, J.，《CASP十年：蛋白质结构预测的进展、瓶颈与展望》，《结构生物学前沿》，第15卷，第3期，2005年，第285–289页。https://doi.org/10.1016/j.sbi.2005.05.011，序列与拓扑/核酸。[4] Yagoubi, M., Danan, D., Leyli-Abadi, M., Brunet, J.-P., Mazari, J.A., Bonnet, F., Farjallah, A., Cinnella, P., Gallinari, P.,

Schoenauer, M., et al.，《Neurips 2024 ml4cfd 竞赛：利用机器学习开展计算流体力学翼型设计》，arXiv预印本 arXiv:2407.01641，2024年。https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.01641.[5] Rumsey, C., and Coleman, G.，《数据驱动湍流建模：2022年NASA研讨会总结与成果》，高保真大涡模拟（大涡模拟）与直接数值模拟（HiFiLeD）研讨会，2022年，2022年。[6] Ohana, R., McCabe, M., Meyer, L., Morel, R., Agocs, F., Beneitez, M., Berger, M., Burkhart, B., Dalziel, S., Fielding, D., et al.，《The Well：用于机器学习的多样化物理模拟大规模集合》，神经信息处理系统进展，第37卷，2024年，第44989–45037页。[7] Kutz, J. N., Battaglia, P., Brenner, M., Carlberg, K., Hagberg, A., Ho, S., Hoyer, S., Lange, H., Lipson, H., Mahoney, M. W., Noe, F., Welling, M., Zanna, L., Zhu, F., and Brunton, S. L.，《借助通用任务框架加速科学发现》，arXiv:2511.04001，2025年。https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.04001.[8] Towne, A., Dawson, S. T., Brès, G. A., Lozano-Durán, A., Saxton-Fox, T., Parthasarathy, A., Jones, A. R., Biler, H., Yeh, C.-A., Patel, H. D., et al.，《用于流体流动降复杂度建模的数据库》，AIAA Journal，第61卷，第7期，2023年，第2867–2892页。https://doi.org/10.2514/1.J062203.[9] Lumley, J. L.，《湍流中的随机工具》，Academic Press，纽约，1970年。[10] Sirovich, L.，《湍流与相干结构的动力学。I. 相干结构》，应用数学季刊，第45卷，第3期，1987年，第561–571页。https://doi.org/10.1090/qam/910462.[11] Towne, A., Schmidt, O. T., and Colonius, T.，《谱适当正交分解及其与动态模态分解和预解分析的关系》，Journal of Fluid Mechanics，第847卷，2018年，第821–867页。https://doi.org/10.1017/jfm. 2018.283.[12] Berkooz, G., Holmes, P., and Lumley, J. L.，《适当正交分解在湍流分析中的应用》，流体力学年度评论，第25卷，第1期，1993年，第539–575页。https://doi.org/10.1146/annurev.fl.25.010193.002543.[13] Rowley, C. W., and Dawson, S. T.，《流动分析与控制的模型降阶》，流体力学年度评论，第49卷，第1期，2017年，第387–417页。https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010816-060042.[14] Colonius, T., and Towne, A.，《第2章——模态分解》，《湍流的数据驱动分析与建模》，K. Duraisamy 编，湍流计算与分析，Academic Press，2025年，第27–81页。https://doi.org/10.1016/B978-0-32-395043-5.00008-5.[15] Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., and Williams, R. J.，《通过误差反向传播学习表征》，《并行分布式处理：认知的微观结构探索》第1卷：基础，D. E. Rumelhart、J. L. McClelland 和 PDP研究组编，MIT出版社，马萨诸塞州剑桥，1986年，第318–362页。[16] Hinton, G. E., and Salakhutdinov, R. R.，《利用神经网络降低数据维度》，《科学》，第313卷，第5786期，2006年，第504–507页。https://doi.org/10.1126/science.1127647.[17] Masci, J., Meier, U., Cireşan, D., and Schmidhuber, J.，《用于分层特征提取的堆叠卷积自编码器》，第21届国际人工神经网络会议，2011年，第52–59页。https://doi.org/10.1007/978-3-642-21735-7_7.[18] Lee, K., and Carlberg, K. T.，《利用深度卷积自编码器对非线性流形上的动力系统进行模型降阶》，《计算物理学杂志》，第404卷，2020年，第108973页。https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.108973.[19] Solera-Rico, A., Sanmiguel Vila, C., Gómez-López, M., Wang, Y., Almashjary, A., Dawson, S. T., and Vinuesa, R.，《β——用于流体流动降阶建模的变分自编码器与Transformer》，《自然·通讯》，第15卷，第1期，2024年，1361 10 1038 41467 024 45578 4 第 . 页。https://doi.org/ . /s - - - .[20] Hochreiter, S., and Schmidhuber, J.，《长短期记忆》，《神经计算》，第9卷，第8期，1997年，第1735–1780页。https://doi.org/10.1162/neco.1997.9.8.1735.[21] Vlachas, P. R., Byeon, W., Wan, Z. Y., Sapsis, T. P., and Koumoutsakos, P.，《利用长短期记忆网络对高维混沌系统进行数据驱动预测》，《皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》，第474卷，第2213期，2018年，第20170844页。https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0844.[22] Lindemann, B., Müller, T., Vietz, H., Jazdi, N., and Weyrich, M.，《长短期记忆网络用于时间序列预测的调查》，Procedia CIRP，第99卷，2021年，第650–655页。https://doi.org/10.1016/j.procir.2021.03.088.

[23] Hasegawa, K., Fukami, K., Murata, T., and Fukagata, K., “基于机器学习的不同形状钝体周围非定常流动降阶建模”, 理论与计算流体动力学，第34卷，第4期，2020年，第367–383页。https://doi.org/10.1007/s00162-020-00528-w。[24] Rahman, S. M., Pawar, S., San, O., Rasheed, A., and Iliescu, T., “准地转湍流的非侵入式降阶建模框架”，《物理评论E》，第100卷，第5期，2019年，第053306页。https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100. 053306。[25] Zhang, Y., Cattafesta, L. N., and Ukeiley, L., “基于非时间分辨粒子图像测速的谱分析模态方法（SAMMs）”，《流体实验》，第61卷，第11期，2020年，第1–12页。https://doi.org/10.1007/s00348-020-03057-8。[26] Rossiter, J. E., “亚声速和跨声速下矩形空腔上方流动的风洞实验”，RAE技术报告第64037号，1964年。[27] MathWorks, “使用深度学习进行时间序列预测”，https://www.mathworks.com/help/deeplearning/ug/time-series-forecasting-using-deep-learning.html，2024年。访问日期：2025年3月13日。[28] Taira, K., and Colonius, T., “浸入边界法：一种投影方法”，《计算物理学杂志》，第225卷，第2期，2007年，第2118–2137页。https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.03.005。[29] Colonius, T., and Taira, K., “采用零空间方法和多域远场边界条件的快速浸入边界法”，《应用力学与工程中的计算方法》，第197卷，2008年，第2131–2146页。https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.08.014。[30] Proctor, J. L., Brunton, S. L., and Kutz, J. N., “受控动态模态分解”，《SIAM应用动力系统杂志》，第15卷，第1期，2016年，第142–161页。https://doi.org/10.1137/15M1013857。[31] Adrian, R. J., “条件结构的随机估计：综述”，《应用科学研究》，第53卷，第3-4期，1994年，第291–303页。https://doi.org/10.1007/BF00849100。[32] Borée, J., “扩展正交适当分解：分析湍流中相关事件的工具”，《流体实验》，第35卷，第2期，2003年，第188–192页。https://doi.org/10.1007/s00348-003-0656-3。[33] Encinar, M. P., and Jiménez, J., “对数层湍流：壁面视角”，Physical Review Fluids，第4卷，11，2019年，114603 10 1103 4 114603 No. p. . https://doi.org/ . /PhysRevFluids. . .[34] Tinney, C. E., Ukeiley, L. S., and Glauser, M. N., “跨声速射流的低维特征。第2部分：估计与远场预测”，Journal of Fluid Mechanics，第615卷，2008年，第53–92页。https://doi.org/10.1017/S0022112008003601。[35] Guastoni, L., Güemes, A., Ianiro, A., Discetti, S., Schlatter, P., Azizpour, H., and Vinuesa, R., “利用壁面量预测壁面湍流的卷积网络模型”，Journal of Fluid Mechanics，第928卷，2021年，第A27页。https://doi.org/10.1017/jfm.2021.812。[36] Guastoni, L., Balasubramanian, A. G., Foroozan, F., Güemes, A., Ianiro, A., Discetti, S., Schlatter, P., Azizpour, H., and Vinuesa, R., “基于湍流边界层壁面热通量进行速度场预测的全卷积网络”，理论与计算流体动力学，第39卷，2025年，第13页。https://doi.org/10.1007/s00162-024-00732-y。[37] Wiener, N.,《平稳时间序列的外推、插值与平滑》，MIT出版社，马萨诸塞州剑桥，1949年。[38] Hopf, E., “关于线性运算与广义调和函数之间的联系”，《数学年刊》，第114卷，第1期，1937年，第161–186页。https://doi.org/10.1007/BF01594171。[39] Noble, B.,《基于Wiener–Hopf技术求解偏微分方程的方法》，培格曼出版社，1958年。[40] Daniele, V., and Lombardi, G., “Wiener–Hopf标量核与矩阵核的Fredholm因式分解”，《无线电科学》，第42卷，第06期，2007年，第RS6S01:1–19页。https://doi.org/10.1029/2007RS003673。[41] Martini, E., Jung, J., Cavalieri, A. V., Jordan, P., and Towne, A., “通过Wiener–Hopf形式体系进行最优估计与控制的基于预解算子的工具”，Journal of Fluid Mechanics，第937卷，2022年，第A19页。https://doi.org/10.1017/jfm.2022.102。[42] Towne, A., Lozano-Durán, A., and Yang, X., “基于预解算子的时空流动统计量估计”，Journal of Fluid Mechanics，第883卷，2020年。https://doi.org/10.1017/jfm.2019.854。

[43] Arun, R., Bae, H. J., and McKeon, B. J., “面向湍流槽道流速度脉动的实时重建”，Physical Review Fluids，第8卷，2023年，第064612页。https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.8.064612。[44] Jung, J., and Towne, A., “基于预解算子的湍流尾流估计”，arXiv:2507.18837，2025年。https://doi.org/10.48550/ arXiv.2507.18837。[45] Maia, I. A., Jordan, P., Cavalieri, A. V. G., Martini, E., Sasaki, K., and Silvestre, F. J., “受迫湍流射流中随机扰动的实时反应式控制”，Physical Review Fluids，第6卷，第12期，2021年，第123901页。https: // doi.org/10.1103/PhysRevFluids.6.123901。[46] Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., and Williams, R. J., “通过误差传播学习内部表征”，，第ICS-8506号，1985年。[47] Srinivasan, P. A., Guastoni, L., Azizpour, H., Schlatter, P., and Vinuesa, R., “使用深度神经网络预测湍流剪切流”，Physical Review Fluids，第4卷，2019年，第054603页。https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.054603。[48] LeCun, Y., Bottou, L., Bengio, Y., and Haffner, P., “应用于文档识别的基于梯度的学习”，Proceedings of the IEEE，第86卷，1998年，第2278–2324页。https://doi.org/10.1109/5.726791。[49] Long, J., Shelhamer, E., and Darrell, T., “用于语义分割的全卷积网络”，2015年，第3431–3440页。https://doi.org/10.1109/CVPR.2015.7298965。[50] Goodfellow, I., Bengio, Y., and Courville, A.，《深度学习》，麻省理工学院出版社，2016年。[51] Nakamura, T., Fukami, K., and Fukagata, K., “识别线性随机估计与神经网络在流体流动回归中的关键差异”，Scientific Reports，第12卷，第1期，2022年，第3863页。https://doi.org/10.1038/s41598-022-07515-7。[52] Brès, G. A., Jordan, P., Jaunet, V., Le Rallic, M., Cavalieri, A. V. G., Towne, A., Lele, S. K., Colonius, T., and Schmidt, O. T., “喷嘴出口边界层状态对亚声速湍流射流的重要性”，Journal of Fluid Mechanics，第851卷，2018年，第83–124页。https://doi.org/10.1017/jfm.2018.476。[53] Brès, G. A., Ham, F. E., Nichols, J. W., and Lele, S. K., “超声速射流的非结构化大涡模拟”，AIAA Journal，第55卷，第4期，2017年，第1164–1184页。https://doi.org/10.2514/1.J055084。[54] Martini, E., Cavalieri, A. V. G., Jordan, P., and Lesshafft, L., “利用任意信号对常微分方程进行精确频域辨识”，，2020年。https://doi.org/10.48550/arXiv.1907.04787。