arXiv:2601.06192v1 [math.CT] 8 Jan 2026

高阶范畴语境中的意识

Renaud Gauthier *

2026年1月13日

摘要

我们给出了 Segal 范畴 $\mathcal{X}$ 的两种表示，用以建模自然现象。第一种基于微观可逆性的概念，产生一个由范畴构成的长序列 Σ，作为 $\mathcal{X}$ 的一个分解；第二种则以意识的概念为推动力，给出了在 Σ 的范畴之上的、群胚上余纤维化的分次范畴。我们证明这两种表示互为对偶。

1 引言

在 [RG2] 中，我们考察了导出堆的 Segal 托普斯 $\mathbf{dSt}(k) = \mathbf{dAff}_{\mathcal{C}}^{\sim,\tau}$ 中的动力学。导出堆最初在 [RG] 中引入，旨在为自然现象建模。然而，这仅基于一个对称幺半模型范畴 $\mathcal{C} = \mathbf{s}k\text{-}\mathbf{Mod}$，其中 k 是一个交换环。正如在 [RG4] 中所做的，我们应当考虑所有参与描述自然现象的基底对称幺半模型范畴 $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_N$，由此得到 $\prod_{1\leq i\leq N} \mathbf{dAff}_{\mathcal{C}_i}^{\sim,\tau_i} = \mathcal{X} \in \mathbf{SeT}$，即一个 Segal 托普斯。接下来，假设为了全面描述普遍现象，我们需要考虑 P 个世界，每个世界都有其自身的 Segal 托普斯 $\mathcal{X}_j$，用于为局部现象建模，$1 \leq j \leq P$。那么，从 $\mathcal{X} = \prod_{1\leq j\leq P} \mathcal{X}_j \in \mathbf{SeT}$ 出发，便能涵盖所有现象。

*2020 数学主题分类：18N60、81P10、81P45。关键词：Segal 托普斯、微观可逆性、信息论、格罗滕迪克构造、意识

现在，我们希望将这样的对象（或者更一般地说，将其动力学 $\delta^\infty\mathcal{X}$ 与 $\delta^\infty\mathcal{X} = \text{colim}_n\, \delta^n\mathcal{X}$ 和 $\delta\mathcal{X} = \mathbb{R}\text{Hom}(\mathcal{X},\ \mathcal{X})$ 联系起来，并将它们与我们称为存在的基态 Ω 的东西关联起来，因为自然现象必定源自其中。事实上，自然现象发生于 $\mathcal{X}$，其动力学发生于 $\delta^n\mathcal{X}, n \geq 1$，更一般地说也包括超自然现象。因此，综合考虑所有事物，$\text{colim}\, \delta^n\mathcal{X} = \delta^\infty\mathcal{X} := \mathbb{1}$ 对所有现象作出了完整描述，也就是对 Ω 的一种呈现。因此，我们试图将 $\delta^\infty\mathcal{X} = \mathbb{1}$ 与 Ω 联系起来。遗憾的是，后者在形而上学上被定义为不含任何概念，尤其不含任何点；而 1 本身却是一个高度结构化的对象。因此，我们目前寻求一种更“平滑”的点无关形式体系，以便从 Ω 的视角呈现 1；这也引出了流体范畴这一概念，我们将在本文中对其加以定义。这个概念从根本上建立在微观可逆性之上。按照这一原理，彼此极为接近的事件在实际应用中无法区分，因此，例如，邻域所具有的流体性质，便体现为其中的点通过微观可逆性彼此等价。

更准确地说，要建立 1 与 Ω 之间所期望的联系，首先需要进行一种解构，这里的解构是指 [RG3], ，也就是一种信息论分解。因此，首先要聚焦于对 1 的解构 $dec\mathbb{1}$。完成这一步后，我们会发现，在无限连续体 Ω 中，没有任何事物真正孤立存在，因此要描述它，采用点无关的形式体系乃是必然之举。然而，1（因而也包括 $d\mathbb{1} = dec\mathbb{1}$）是基于点的形式体系所构建的对象，这种形式体系涵盖了能够被孤立出来的单个事件。要在 d1 与 Ω 之间建立关系，就需要将二者置于同等基础之上；这意味着要以点无关的方式分解 d1。这将促使我们引入流体范畴这一概念，以描述 1 的恰当分解；由此显而易见，d1 内部的动力学体现为信息的连续流。我们认为，这种流动性是现象的根本自然属性。

流体范畴是对某个结构化对象（如 d1）进行（渐进式）分解，使其转变为与 Ω 具有相同性质的对象；之所以需要这一渐进过程，是因为这种遍布于 Ω 内部的统一性，在局部表现为 1 层级上的微观可逆性，或者说表现为 d1 上的微观可逆性。因此，必须逐步将 d1 转变为与点无关的对象。

具体而言，我们将通过由微观可逆性诱导的无点邻域逐步覆盖 $d\mathbb{1}$ ，最终得到 $d\mathbb{1}$ 的与点无关的表示。令 ϵ 从理论上度量微观可逆性信息，我们将用大小为 ϵ 的邻域覆盖 $\mathsf{d1}$，在这些邻域内，所有点关于微观可逆性都是等价的，从而得到 $\mathsf{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 对 $\mathsf{d1}$ 的一个覆盖。我们将通过加厚映射 δ 迭代这一现象，由此产生一个长序列：

$$\mathrm{d}\mathbb{1} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \mathrm{d}\mathbb{1}[p\epsilon] \xrightarrow{\delta} \mathrm{d}\mathbb{1}[(p{+}1)\epsilon] \xrightarrow{\delta} \cdots$$

它由一个逐步推进的分级过渡构成：从 $\mathsf{d1}$ 开始，在这一层我们只处理基于点的形式体系中的普通范畴；再到一个余极限，在那里无点邻域完全覆盖 $\mathsf{d1}$，整个序列则提供了对 $\mathsf{d1}$ 的点无关分解。正是在这个极限中，陈述 $\mathsf{d}\mathbb{1} = \Omega$ 才有了明确定义。从范畴到这一无限连续体的长序列，定义了我们所称的流体范畴。

另一方面，我们可以聚焦于意识，主张 Ω 是纯粹意识，其中一部分在向物理领域过渡时丢失了，而这一过渡由重构 $rec : \Omega \to \mathbb{1}$所运作。这个过程引入了遮蔽，纯粹意识因此受到污染，于是剩下的便是通常意义上的意识——对现实的不完美把握。如果读者对看似不精确的纯粹意识概念感到不适，我们也可以等价地从我们的视角出发：我们这一层次的意识显然受到了遮蔽的污染，而当这些遮蔽逐步移除后，意识便会得到澄清。从这一立场来看，移除所有遮蔽会产生一种我们称为纯粹的意识。现在，我们先前关于 $\mathsf{1}$ 是点基的难题依然存在，因此形如 $rec\Omega = r\Omega = \mathbb{1}$ 的陈述必须在点无关形式体系中加以解释。为此，我们重新利用在 $\mathsf{d1}$ 上完成的基于微观可逆性的分解工作，如今为了 $\mathsf{1}$ 而将其写成重构形式。完成这一步后，我们将意识纳入其中。对于 $\mathbb{1} \in \mathsf{Cat}$ 的每个聚焦点 a，都考虑所有可能的意识。它们表现为光滑的塔 T_a，即以 $a \in \mathbb{1}$为基底的锥形对象，其截面表示相对于 a的局部意识，并在极限处终止于 Ω。然而，由于微观可逆性是一种自然现象，我们必须将其纳入考量。因此，塔不仅存在于 $\mathbb{1} \in \mathsf{Cat}$ 的点 a 之上，也存在于厚点之上

$\mathbb{1}[p\epsilon]$ 对于 $p \geq 1$ （与某个核心点 a 等价的点的邻域，其所需的微观可逆性迭代次数少于 p），从而得到加厚塔。对于每个 p，我们都有一个函子 χ_p ： $\mathbb{1}[p\epsilon] \to$ 群胚范畴，该函子将一个厚点 U 关联到 $\mathcal{T}_U = \{T_U\}$，即 T_U 一个加厚塔。这些函子共同提供了一个将 1 分解为演化意识之塔的棱柱分解。对每个函子施行格罗滕迪克构造，可以得到一个在 1 上群胚上余纤维化的分次范畴，并将其呈现为一个流体范畴。我们主张，基于微观可逆性的形式体系与另一个基于意识的形式体系彼此具有对偶性。这一对偶性的直接结果是，我们所理解的意识表现为纯粹意识上的一个特定滤子。

与其他作品的关系

大多数围绕意识概念展开的科学著作都以人文主义视角撰写，并且在很大程度上是建构性的。正如 [MM], 中所指出的，高层语境中的事物会在心智的局部层面得到映射，这意味着，要接触意识，完全可以研究神经网络；从这一视角出发，已有大量出版物借助同伦论、动机、代数拓扑等工具...

...一份（当然并不详尽的）重要出版物清单包括 [MnMi], [BB], [G], [M], [MM], [Mi], [T], [V], [CMnMi]¸[SKRKA], [KS], [KS2]。提及这些著作，是为了说明我们如今运用同伦论及其他高阶范畴思想来处理意识概念，并非什么新鲜事。不过，我们真正关注的是意识形而上学，以及理解我们所说的意识如何从纯粹意识中产生。从这一视角出发，我们采取普遍性的观点，关注自然现象如何从存在的基态中实现，而不是仅仅将自然科学作为背景。我们还可以提及[C] ，它暗指存在的基态、自然现象与全知识宇宙之间的对偶性； $\mathcal{K}$ 我们将对此作简要讨论。

符号

我们用 μR 表示微观可逆性这一术语，用 $\delta\Phi$表示 δ形式体系，用 $\mathbb{K}\Phi$表示 $\mathbb{K}$形式体系。 $\mathcal{K}$ 表示全知识宇宙，Ω表示存在的基态。 $\mathbb{K}$代表意识。

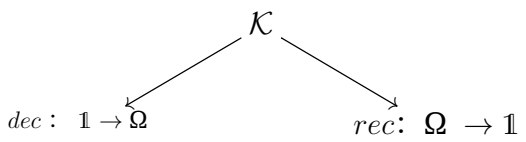
2 δ-形式体系 - 流体范畴

2.1 背景

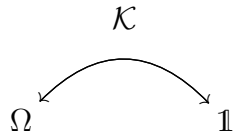
在引言中，我们给出了两个方程 $r\Omega = \mathbb{1}$ 和 $d\mathbb{1} = \Omega$，它们应当在点无关形式体系中理解。接下来的部分工作将围绕着把自然现象发生的 1 转化为其点无关的实例化展开。沿着这一思路，回顾一下，在 [RG3] 中，我们引入了 IRVs，即对感兴趣的概念（推测为 1 的对象）进行渐进式、几何化且完备的信息理论分解。 IRVs 是一个范畴中的对象，我们将该范畴记为 $\mathcal{G}_0'$；另有一个与之同构的范畴$\mathcal{G}_0$，其对象是反向的 IRVs，可视为从 Ω 中的信息比特重构概念。 IRVs 及其逆本身都是映射，因此有 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{G}_0 \subset \mathrm{Map}(\Omega, 1)$，以及 $\mathrm{Ob}\ \mathcal{G}_0' \subset \mathrm{Map}(1, \Omega)$。在 [RG3]的那个阶段，我们还提到，要形成 IRVs，必须设身处地，从一位无所不包的源的视角出发；这位源拥有一个可供其支配的、涵盖一切知识的宇宙 $\mathcal{K}$，以便构造 IRVs，因为它们是完备的，这就预设了能够获取所有信息。由于构造 IRVs 时用到了$\mathcal{K}$ 的全部内容，论证认为， $\mathcal{K}$中的信息必然会被用于生成对象，而这些对象各自拥有一个 IRV，因此可以写成:

$$\mathcal{G}_0' \doteq \mathcal{K} \doteq \mathcal{G}_0$$

并且，由于有 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{G}_0 \subset \mathrm{Map}(\Omega, 1)$ 和 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{G}_0' \subset \mathrm{Map}(1, \Omega)$，因此可以将上述 $\mathcal{K}$ 表示示意如下:



这里的 rec/dec 映射按 IRV 风格理解即可。例如，简洁地表示如下：



(1)

这个简单的启发式表述表明，Ω 并非源，这与人们直觉上的想法不同。源本身在信息论角度上被表示为 $\mathcal{K}$。事实上，它被定义为一切存在之物的起源，并以存在为特征；存在即纯能量，也就是说，它具有动态属性（[RG5]），如上图所示——前提是我们暂且接受 $\mathcal{K}$ 是源的一个特征。为说明这一点，能量也是信息（[J1], [J2], [Lt], [S1], [S2]），或者等价地说，是知识，因此源本身可以表示为 $\mathcal{K}$。在 [RG3] 中，我们将 $\mathcal{G}_0'$ 或 $\mathcal{G}_0$ 称为自然现象的基态时，应从动态意义上理解；例如，$\mathrm{Ob}\,\mathcal{G}_0 \subset \mathrm{Map}(\Omega,\ 1)$ 这一事实就是一例。在那篇论文中，我们展示了结构化对象及其分解同时共存，并由 IRVs 在这些表征之间搭起桥梁，因此我们可以认为 IRVs 本身通过其基态分解，对自然现象作出一种双重表征，这也就是 $\mathcal{G}_0$ 和 $\mathcal{G}_0'$ 名称的由来。在此称 Ω 为**存在的基态**，是为了与另一侧的 1（1）相对照。请注意，上方的图（1）表明，Ω 与 1 同时存在；它们在源 $\mathcal{K}$这一层面共存。

2.2 微观可逆性

2.2.1 微观可逆性关系

众所周知，存在这样一种物理概念：**微观可逆性**[L], [B], ，我们将其简称为 μR。我们用 $\sim$ 表示刻画 μR 的关系。写作 $a \sim b$ 时，我们的确是指 a 和 b 可以互换。这种关系具有自反性和对称性。在 Ω 层面上，由于缺少参照点，它是传递的。

严格来说，对于箭头 $a \xrightarrow{f} b$，物理上的微观可逆性意味着 f有一个左逆 $a \xleftarrow{f^{-1}} b$。我们认为， μR 的根本自然并非局部

动态流的可逆性，而是源于信息论层面对现象的底层统一，我们将其称为（抽象）μR。

2.2.2 μR 与信息论

正如我们接下来要论证的，应用 μR时，这体现为信息层面的考量。 μR存在一种相对概念：范畴 $\mathcal{C}$ 中的 a 和 b 对象，如果对于所有$c \in \mathcal{C}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,\ a) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,\ b)$对所有 $f\colon a \to b$都是同构，那么它们就是 $\mathcal{C}$-μR 的。我们称a 和 b 微可逆，当且仅当对于它们可被视为对象的所有范畴$\mathcal{C}$ ，它们都是 $\mathcal{C}$-微可逆的。要让所有这些范畴处于同等地位，我们必须在信息论层面上进行讨论。无论如何，以这种方式识别对象是Ω的一个特征，而这一概念最初正是从Ω中得来的。

从Ω这类完全解构环境（按信息论意义而言）的视角来看，可以清楚地识别出在绝对意义上彼此接近的事件，无论其维度或特征如何。正如刚才所说，Ω中的所有“点”都是传递等价的，因为它是一个无限连续体；因此，严格来说，并不需要微观可逆性的物理概念。当Ω以其持久的点基特征显现于自然领域1（或等价地，d1）时，Ω的这种全局等价仅能在极小尺度上局部观测到，而这正是我们所说的微观可逆性。由于 μR 是Ω中信息论对象等价关系的一种局部显现，我们认为 μR 由信息论内容决定。

2.2.3 μR-邻域的构造

1 和 d1 体现的只是 μR 这样的事物，而不是像 Ω 中那样的全局等价，这意味着这些空间被视为点基空间，原因在于 μR 相对于固定的关注点 a而言是一种局部现象。目前我们聚焦于 d1 的点基形态。d1 在环境视域 Ω（[RG3]）中呈现为原始解构形式下的 1。将 Ω 视为相对视景，最终便能让我们过渡到陈述 $\mathrm{d}\mathbb{1} = \Omega$；原因在于，在 Ω 的局部范围内，d1 的对象会依据 μR观察哪些是邻近事件，并不断重复这一过程，直到 d1 以完全点无关的形式体系呈现出来，

此时便完整呈现 $\mathsf{d}\mathbb{1} = \Omega$。我们用 ϵ 表示定义 μR的信息论大小，可将其视为量子截断。换句话说，在自然领域中，若 $d(a,\ b) < \epsilon$，那么事件 a 和 b在μR 看来便无法区分，其中 d 衡量的是信息含量。我们用 $\nu_\epsilon(a)$表示点 $a \in \mathsf{d1}$ 的邻域，在此范围内，所有点依据 μR都与 a 等价；也就是说，所有满足 $d(a,\ b) < \epsilon$的点 b 。我们将其视为一个**增厚点** a。因此，对于核心点 a而言， $\nu_\epsilon(a)$中的点就是从信息论角度而言最接近 a的概念，因为 μR 是一个信息论概念。

2.2.4 关于 μR-邻域的其他说明

由于自然领域中的现象是动态的，因此通过时间观察 μR ，所以 $\nu_\epsilon(a)$中除 a之外的点是预先存在的，尚未发生。与 [RG2]不同，后者使用微分矩阵定义 q-变形，且未纳入高阶态射；如今，在解构化设置 d1 中，借助 $\mathbb{1} = \delta^\infty \mathcal{X}$ 考虑所有信息，包括高阶态射，因此这些邻域涵盖一切。同理，正如我们将看到的，Ω 对应纯粹意识；由于其中不存在遮蔽， $\nu_\epsilon(a)$中的点对应于相对于其中心 a的完全觉知区域。

2.3 μR-覆盖 $\mathbf{d}\mathbb{1}$

2.3.1 ϵ-覆盖 $\mathbf{d}\mathbb{1}$

在本小节中，我们论证可以用形如 $\nu_\epsilon(a)$的无点邻域覆盖基于点的对象 d1，从而将 d1 局部浸入 Ω。拥有这一覆盖的直接结果是，我们可以谈论 Ω 中的点，而不与 Ω 中没有点这一事实相矛盾，只需援引关系 $\mathsf{d}\mathbb{1} = \Omega$。在局部范围内，可以聚焦于视景 Ω 内 d1 的点$a \in$。

Ω 中的全局等价通过 d1 中的 ϵ-局部 μR 体现。上文用 $\nu_\epsilon(a)$ 表示 μR-等价点的小邻域。这些

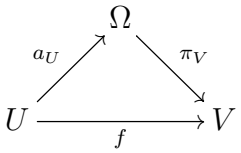
d1 的厚点提供了对其的覆盖。我们可以写作:

$$\mathrm{d}\mathbb{1} \doteq \bigcup_{a \in \mathrm{d}\mathbb{1}} \nu_\epsilon(a) := \mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$$

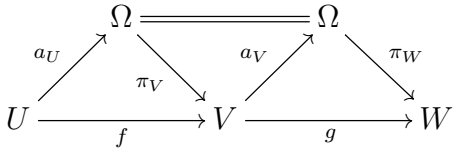
w这里，$\mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 是 d1 的所有厚点的集合，与 μR 相符。

2.3.2 $\mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 范畴

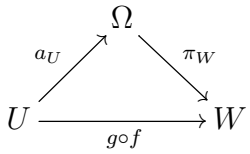
我们如下将 $\mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 转化为一个范畴。聚焦于各个厚点，首先，给定点 $a \in$ d1 沉浸于 Ω 中，而在 Ω 内，我们有一个解构对象的完美排列。这使我们能够填充 ϵ-邻域 $\nu_\epsilon(a)$。它们是 d1 到 Ω 的 ϵ-沉浸，各自构成独立的世界。因此，从点 a 的视角来看，某个元素 $U = \nu_\epsilon(a)$（属于 $\mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$）的核心所能注意到的唯一事件，是$U$ 由 μR产生的事件。对于 V 另一个与 U 不同的 $\mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 厚点而言，让 U 中的元素自发地移动到 V 是没有意义的。因此，$\mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 中两个不同厚点之间的任何态射，都必须相对于被视为视景的无限连续体 Ω 来定义。在 Ω 中，可以聚焦于一个厚点或另一个厚点；它们都是 Ω 内定义明确的区域。聚焦的这种变化定义了 $\mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 的对象之间的态射。可以用下图表示:



其中 a_U 将在后文正式定义。目前，我们沿着视景这一思路，将其视为从 U 到 Ω 的包含映射。 π_V 相当于从 Ω 向下投影到 V。这个定义足够简单，因此我们可以看出，显然存在恒等映射和映射的复合。由于我们有 $a_U \circ \pi_U = id_\Omega$，因此存在态射的复合，我们用图示表示为:



压缩为：



中间以 $\pi_V \circ a_V$ 锯齿连接 Ω 与 V，其含义已得到理解。尽管厚点是 $\mathbf{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 的对象，但仍将 Ω 放在这个三角图表的顶端，是为了强调：当邻域的大小不断增长——正如我们接下来将要做的那样——在极限中，我们将在与点无关的设定下使用 $\Omega = \mathbf{d}1$。目前，U 和 V 只是 $\mathbf{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 的对象，而 Ω 是环境视域。尽管如此，与单纯使用 d1 相比，我们还是略有改进：因为在写作 $\mathbf{d}\mathbb{1} \doteq \mathbf{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 时，现在可以改为使用 $\mathbf{d}\mathbb{1}[\epsilon]$；它仍以点为物理基底，但其对象$\epsilon$邻域是通过 μR 定义的，而这正是 Ω 的自然。此举是将 d1 转变为与点无关的对象 $\mathbf{d}\mathbb{1} = \Omega$ 的第一步。

2.4 δ形式体系

2.4.1 δ映射

如果可以在视景 Ω 中的单个点 $a \in$d1 层面上考察 μR，那么对于 μR，也可以形式化地考察 $\nu_\epsilon(a)$ 中与 a 等价的点。然而，在自然现象层面上，μR 并不具有传递性。这意味着，如果 $a \sim b$，且 $b \sim c$，以至于 a 和 c 的解构后信息论内容相差超过 ϵ，那么 $a \sim c$ 就不成立，因为 ϵ 衡量的是自然领域中 μR 的截断值。这意味着，相对于 a，$\nu_\epsilon(a)$ 中与 μR 等价、且位于 $\nu_\epsilon(a)$ 之外的点，仅作为纯粹的潜在性而存在。我们可以通过对邻域引入分级来形式化地说明这一事实：在这一分级中，$\nu_\epsilon(a) = \nu_\epsilon(a)^{(0)}$ 是零阶邻域，因为其中的点可通过 μR 立即被 a 访问；而对于 $b \in \nu_\epsilon(a)$，$b \neq a$，$(\nu_\epsilon(b) - \nu_\epsilon(a))$ 中的一些点尚不能通过 μR 被 a 访问，因此相对于 a，这些点被定义为一阶，我们将其记作 $(\nu_\epsilon(b) - \nu_\epsilon(a))^{(1)}$。因此：

$$\begin{aligned}\nu_\epsilon(b) &= (\nu_\epsilon(b) - \nu_\epsilon(a)) \cup (\nu_\epsilon(a) \cap \nu_\epsilon(b)) \\ &= (\nu_\epsilon(b) - \nu_\epsilon(a))^{(1)} \cup (\nu_\epsilon(b) - \nu_\epsilon(a))^{(0)} \cup (\nu_\epsilon(a) \cap \nu_\epsilon(b)) \\ &= (\nu_\epsilon(b) - \nu_\epsilon(a))^{(1)} \cup (\nu_\epsilon(a) \cap \nu_\epsilon(b))\end{aligned}$$

因为 $(\nu_\epsilon(b) - \nu_\epsilon(a))^{(0)} = \emptyset$。现在，将 μR 形式化地应用于 $\nu_\epsilon(a)$ 的所有点，我们得到一个更大的 a 邻域，记作

$$\begin{aligned}\nu_{2\epsilon}(a) &= \bigcup_{b\in\nu_\epsilon(a)} \nu_\epsilon(b) \in \mathrm{d}\mathbb{1}[2\epsilon] \\ &= \nu_\epsilon(a) \cup (\bigcup_{b\in\nu_\epsilon(a),\, b\neq a} \nu_\epsilon(b) - \nu_\epsilon(a))^{(1)}\end{aligned}$$

请注意，$\nu_{2\epsilon}(a) - \nu_\epsilon(a)$中的点相对于 a而言是一阶的。正如我们看到的将 $\mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 视为一个范畴一样，我们将以 $\nu_{2\epsilon}(a)$、$a \in \mathsf{d1}$ 为对象的 $\mathrm{d}\mathbb{1}[2\epsilon]$ 定义为一个范畴。稍后我们将定义其态射。我们刚刚对 ϵ-邻域执行的加厚操作记作 δ:

$$\delta : \mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon] \to \mathrm{d}\mathbb{1}[2\epsilon]$$

显然，这一过程可以重复进行，从而得到一个长序列:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \mathrm{d}\mathbb{1}[p\epsilon] \xrightarrow{\delta} \mathrm{d}\mathbb{1}[(p+1)\epsilon] \xrightarrow{\delta} \cdots$$

其中，$\nu_{p\epsilon}(a) \in \mathrm{d}\mathbb{1}[p\epsilon]$ 可以分解为:

$$\nu_\epsilon(a) \cup (\nu_{2\epsilon}(a) - \nu_\epsilon(a)) \cup \cdots \cup (\nu_{p\epsilon}(a) - \nu_{(p-1)\epsilon}(a))$$

其中 $\nu_{k\epsilon}(a) - \nu_{(k-1)\epsilon}(a)$ 的阶为 $k-1$。

2.4.2 关于有向系统的备注

有向系统中的每个阶段都相当于在环境视域 Ω 内扩大我们的视野，因此在极限中——形式上即为余极限——可以完整地恢复 Ω，正如我们将要证明的那样，即 $\mathrm{colim}_n\, \delta^n \mathrm{d}\mathbb{1} = \Omega = \mathsf{d1}$，这是一个与点无关的陈述。

请注意，通过 δ 从一类厚点跃迁到下一类厚点，为我们提供了一种量子化的有向系统，而这是 μR 强加给我们的。

2.4.3 $p\epsilon$-邻域解释

请注意，与之前一样，任何 $\nu_{p\epsilon}(a)$ 都可以被视为一个以a为中心的厚点，其中的点离中心越远，呈现得就越淡，以此形象地表示 $\nu_{p\epsilon}(a)$ 不同层的分级。我们可以将其想象成

一个以核心点为中心的同心信息论邻域，随着我们逐渐远离核心点 a，图像也逐渐变淡；这也可以解释为：点离 a越远，出现的可能性就越低，因为从信息论角度看，它们与 a的距离更远，因此也就越来越具有假设性。靠近中心的点与 a有着紧密的联系。这幅图也可以视为相对于 a 的概率事件的几何表示。

2.4.4 有向系统的余极限

设有以某点 a 为中心的 $U \in \mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ ，并用 ι 表示给出对象信息内容的映射。注意，当 U 沿着有向系统不断推进并变得非常大时，在极限情况下， $\iota(a) \ll \iota(U)$。此时，我们实际上已无法追踪最初的核心点 a ，也就是说，不再有任何指称对象，由此可知 μR 变成传递的。此外，$\mathrm{colim}\, \delta^n U$ 覆盖 Ω。综合这两个事实可得 $\mathrm{colim}\, \delta^n U = \Omega$。对所有 $U \in \mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 都这样处理，可得:

$$\mathrm{colim}\, \delta^n \mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon] = \Omega \tag{2}$$

采用这种有向系统图景的优点在于，Ω 是惰性的，不具有显性的 information theoretic dynamics，也没有指称对象。然而，写作 $\Omega = \mathrm{colim}\, \delta^n \mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 为我们提供了 Ω 的一种对偶呈现，在其中可以定义相对于点的信息流。实际上，对于一个固定点$a \in \mathrm{d}\mathbb{1}[\epsilon]$，沿着该系统推进的邻域集合 $\nu_{p\epsilon}(a)$ 如下:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \nu_{p\epsilon}(a) \xrightarrow{\delta} \nu_{(p+1)\epsilon}(a) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

借助余极限 Ω，它动态地表示信息从 a 逐渐流出的过程，因为在每个 $\nu_{p\epsilon}(a)$中，距离 a 越近的点与 a 的联系越紧密，而距离越远的点则联系越弱。

2.4.5 流体范畴定义

实际上，我们可以让这个长序列从 $\mathrm{d}\mathbb{1}[0] = \mathrm{d}1$ 开始，它是一个范畴，从而表明该长序列:

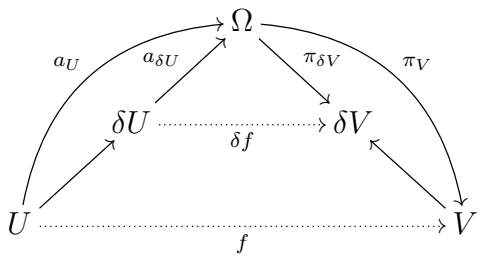
$$\mathrm{d}\mathbb{1} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \mathrm{d}\mathbb{1}[\mathrm{p}\epsilon] \xrightarrow{\delta} \mathrm{d}\mathbb{1}[(\mathrm{p}+1)\epsilon] \xrightarrow{\delta} \cdots$$

提供了一个范畴的 a μR-分解，即 d1。由于我们从 d1 开始，而 d1 是一个（Segal）范畴；并且 $\nu_{p\epsilon}(a)$ 的点在 μR 下等价，因此我们可以将那些邻域视为流体邻域。整个分解的目的，是完整地揭示 d1 的流体特性；在极限中，这一序列的余极限便称为一个**流体范畴**。或者说，这个分解有效地实现了 d1 向环境视域 Ω 的渐进式局部浸入，因此我们将这一分解视为 d1 本身的一种动态呈现。起初 $\mathrm{d}\mathbb{1} \in \mathrm{Cat}$；在余极限 $\operatorname{colim} \delta^n \mathrm{d}1$ 中，其本质是 Ω，而中间的序列则为我们提供了从基于点的形式体系到完全点无关形式体系的过渡。将此与 [RG2] 的工作作一对比：其中 $\mathcal{X}$ 中的动力学发生于 $\delta\mathcal{X} = \mathbb{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$，其中的对象 ψ 只在 $\mathcal{X}$ 的动力学中提供一步，而 $\operatorname{colim} \psi$ 则提供一个流。与此相对，我们在此处理的是流体邻域，动力学中没有显式的离散化，因为它已内置于 $\mathbb{1} = \delta^\infty \mathcal{X}$ 中。在极限中，我们实际上以 d1 的点无关（流体范畴）表示取代了 d1。但在极限中，我们也通过（2）恢复了 Ω。因此，在点无关形式体系中，我们有 $\Omega = \mathrm{d}1$。我们将与此图景相关的形式体系称为 δ-**形式体系**，并将其简称为 $\delta\Phi$。

2.4.6 范畴形式体系

- 范畴 $\mathrm{d}\mathbb{1}[p\epsilon]$

现在回到上面关于每个 $\mathrm{d}\mathbb{1}[p\epsilon]$都是一个范畴的断言。给定余极限 $\delta^n U = \Omega$，我们用 a_U 表示沿有向系统对 $U \in \mathrm{d}1$ 的迭代取余极限，其中 a 是 ascendancy 的缩写。这实际上意味着：我们在视景 Ω 内扩展 U，直到达到严格意义上的 Ω。反过来，从 Ω 的角度聚焦于 U 的过程，我们记作 π_U。为简单起见，我们先从 $p = 1$的情形开始。$f : U \to V$ 在 d1 中诱导出 $\mathrm{d}\mathbb{1}[2\epsilon]$ 中的一个映射，定义如下：



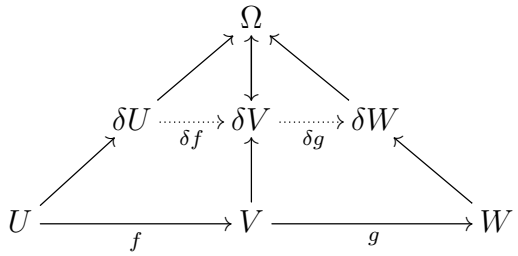
应当如下理解：可以分别通过 μR单独理解 δU 和 δV，即分别利用 δ的逐点应用，从 U 和 V 构造它们。它们是 $\mathbf{d}\mathbb{1}[2\epsilon]$中的对象，源自有向系统中的 $\mathbf{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 。现在，在解构环境中， U、V 和 f 处于同等地位，因此，正如可以加厚 U、 V 等等一样，如果有一个映射 $f\colon U \to V$，通过 μR 也可以将 f加厚为 δf ，使其适合上述图表。准确地说，$\delta(U \cup f \cup V)$ 是一个厚点。由于 f 具有 U和 V之外的分量，这个厚点由构成 δf的各点组成。注意，这意味着 δf 不是单一的态射，而是一个 **加厚态射**。$\mathbf{d}\mathbb{1}[p\epsilon]$ 中的态射一般都以这种方式构造。复合的定义与 $\mathbf{d}\mathbb{1}[\epsilon]$中的相同。

请注意，在这样的图景中， $f = \pi_V \circ a_U$，然而，在 U 和 V 之间，许多这样的映射都满足这种关系。这应当被理解为一个极限陈述。事实上，一旦 U （或者就此而言， V）扩大到从信息论角度看与 Ω 一样大，此时就不再存在从 $\operatorname{colim} \delta^n U$到 $\operatorname{colim} \delta^n V$的映射，原因很简单：二者都是 Ω，我们只剩下它们之间的一个恒等映射。

-δ 函子

回到上面的图表，再次根据上述论证，将 $\delta f = \pi_{\delta V} \circ a_{\delta U}$ 写在极限中。现在我们来论证， δ 是范畴 $\mathbf{d}\mathbb{1}[p\epsilon]$上的一个函子。首先，我们有 $\delta id_U = id_{\delta U}$。要理解原因，只需运用 δ的定义；当这个映射作用于对象 x时，它会根据信息选出与 x最接近的相邻对象，也就是说，这些对象与 x的信息差异最小。因此，从某个厚点 $U \in \mathbf{d}\mathbb{1}[p\epsilon]$出发，在 δid_U 可能表示的所有映射中，$id_{\delta U}$ 在原对象 U上与 id_U 的偏差最小，因此至少有$\delta id = id$。此外，诸如 δf 这样的加厚映射必须符合上图所示的三角图表，而此类图表的复合会得到

$\delta(g \circ f) = \delta g \circ \delta f$ 根据极小性，这可以表示如下：



这在长序列的任意层级上都成立，这表明 δ : $\mathrm{d}\mathbb{1}[p\epsilon] \to \mathrm{d}\mathbb{1}[(p+1)\epsilon]$ 更一般地说是一个函子。

2.5 自然 δ形式体系

2.5.1 对于$\mathbb{1}$的长序列

d1 在解构形式中为 1，这对于在 Ω 内构造μR邻域很有用。然而，我们在自然中观察到的正是 1。对于 d1 的长序列的重构版本为我们给出：

$$\mathbb{1} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \mathbb{1}[\mathrm{p}\epsilon] \xrightarrow{\delta} \mathbb{1}[(\mathrm{p}+1)\epsilon] \xrightarrow{\delta} \cdots$$

δ 对解构范畴 $\mathrm{d}\mathbb{1}[p\epsilon]$ 的作用相同。然而请注意——这一点很重要——从序列上看，这仅仅是 $\delta\Phi$ 对于 d1 的一个重构版本：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{d}\mathbb{1} & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{d}\mathbb{1}[p\epsilon] & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle rec} & & & & \downarrow{\scriptstyle rec} & & \\ \mathbb{1} & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{1}[p\epsilon] & \xrightarrow{\delta} & \cdots \end{array}$$

其中，$\mathbb{1}[p\epsilon]$ 的一个邻域 U 具有 $rec(\nu_{p\epsilon}(a))$ 的形式，其中 a 为某个点。因此，我们将这一重构版本称为自然 $\delta\Phi$。

2.5.2 自然 $\delta\Phi$ 中的同伦波函数

厚点 $U \in \mathbb{1}[\mathrm{p}\epsilon]$ 是 $\mathrm{d}\mathbb{1}[\mathrm{p}\epsilon]$ 的重构厚点，它们仍以某个点 $a \in \Omega$ 为中心，但不再是同心的，

它们更像是强度各异的斑块。现在，如果解构图中的厚点为概率事件提供了直观的几何图像，那么重构图中的厚点既然呈现为斑块，就需要借助概率分布才能完整描述它们。请注意，正是在这个重构的 $\delta\Phi$ 中， [RG2]引入的同伦波函数 ψ_{AG} 才是定义良好的。这有几个原因。首先， $\delta\Phi$ 提供了一个纯净的环境，不受遮蔽影响，事件可以在其中发生并接受纯粹的概率研究。由于 ψ_{AG} 以概率方式定义并描述现象，因此它在自然的 $\delta\Phi$中定义良好。此外， ψ_{AG} 描述动力学，也就是信息流，而自然的 $\delta\Phi$完整地体现了这一点；这又是一个理由，说明应将后者视为定义 ψ_{AG} 的画布。要说明自然的 $\delta\Phi$是讨论 ψ_{AG} 的恰当环境，还可以从后者是一条积分曲线这一点入手。为此，它需要一个初始条件和一个方向向量。厚点$U = \nu_\epsilon$（a）确实提供了一个点 a，而按照 μR，邻近点也代表了最可能发生的后续事件；ψ_{AG} 则对应于这类邻域的一个截面。

2.5.3 重构的流体范畴 $r\mathbb{1}$

谈到动力学，可以这样写：

$$rec\ \delta\Phi := \{\cdots \xrightarrow{\delta} \mathbb{1}[p\epsilon] \xrightarrow{\delta} \mathbb{1}[(p+1)\epsilon] \xrightarrow{\delta} \cdots\} = \mathbb{1} = r\Omega$$

因为自然的 $\delta\Phi$ 实现了从物理系统 1 到其与点无关的版本 $\mathbb{1} = r\Omega$ 的变换。这个序列为 1 提供了动态、流动的表示。不过，原始的 $\delta\Phi$ 最有意义，因为此时邻域会在 Ω 中自然汇集，它使 d1 渐进浸入视景 Ω。迄今为止，自然的 $\delta\Phi$ 对定义同伦波函数 ψ_{AG} 很重要。稍后我们将看到，它对意识形式体系也很重要。

3 $\mathbb{K}$-形式体系 - 意识模型

Ω中的纯知识在自然领域中被重构为各种分量，其中一些被视为属于意识领域，为简洁起见，我们将其记作 $\mathbb{K}$；其余部分则被视为潜在遮蔽，因为它们可能影响 $\mathbb{K}$。因此，这种二分法纯粹是

以人为中心的。请注意，目前我们暂且将 $\mathbb{K}$ 理解为它在日常用语中的含义。

对于 $a \in \mathsf{Ob}\ \mathbf{1}$ 这个具有意识的系统， $\mathbb{1}_{a/} = \{\mathbb{1}_{a/} \xrightarrow{\delta} \mathbb{1}_{a/}[\epsilon] \xrightarrow{\delta} \cdots\}$ 在环境视域 $r\Omega$ 中，它从 a的视角为我们提供了完整的知识；现在我们将把这些知识棱镜式分解为其 $\mathbb{K}$ 分量。为使这一过程形式化，我们如下进行。假设 a 的意识平滑增长，直至在极限处理想地达到 Ω。我们将从 a出发的各种可能的意识路径表示为该点上方的塔，其截面是强度各异的开集，面积也随之变化，这与 $\mathbb{1}[p\epsilon]$中的情形颇为相似；区别在于， $\mathbb{1}[p\epsilon]$ 的厚点包含纯知识，而塔的截面 U 则是不完全知识的区域，因为它们对应于相对于固定点 a的局部 $\mathbb{K}$ 。这些塔从简单的 a开始逐渐增大；沿塔向上移动时，每个截面都表示 a意识的演变。这些塔呈锥形，以 a为底；在锥顶处，没有意识，只有 a 本身。我们使用复数形式的“塔”，因为相对于给定点，$\mathbb{K}$ 有许多不同的可能平滑演变，因此必须考虑不同的塔。可以将这些塔视为局部 $\mathbb{K}$的逆系统，它们向下投影至一点，而 Ω 则是每个塔的极限。

然而，这只是以一个点为基底的。不过，由于 μR这一物理现象，我们实际上应当在厚点 $U = \nu_\epsilon(a) \in \mathbb{1}[\epsilon]$上进行研究；我们将其视为波粒对偶性的一个数学版本。因此，接下来我们研究 $\mathbb{1}[\epsilon]$，并考虑其中的厚点 $U = \nu_\epsilon(a)$。厚点 U 上的塔记作 T_U，它们将在某种意义上成为加厚塔，具体含义稍后说明，其 $\lim T_U = \Omega$。塔的加厚意味着，在 a之上，仍然具有其不断演变的 $\mathbb{K}$的所有可能塔，而每个这样的塔都构成一个加厚塔的核心。其构造方式如下。若 $U = \nu_\epsilon(a)$由 a 经由 μR得到，那么 a 上的塔的截面也必须进行 μR加厚。我们采用与 $\mathbf{d}\mathbb{1}[\epsilon]$ 中厚点定义大致相同的方法，其中 μR 是逐点应用的。对于塔 T_a 在点 a处的截面， μR 会逐点应用于其中的所有点。将这些截面分层后，便得到加厚塔图景。在厚点 $U = \nu_\epsilon(a) \in \mathbb{1}[\epsilon]$之上，可以得到一个加厚塔 T_U。所有这类塔 T_U 构成的集合记作 $\mathcal{T}_U$，并形成一个群胚，其中从一个塔 T_U 到另一个塔T'_U 的态射相当于一次光滑重塑。我们对 $\mathbf{1}$ 中的任意点 a 都这样处理。为强调这些群胚构成

厚点处的一个完整意识系统，我们可以将其记作$\mathbb{K}(U) = \mathcal{T}_U$。根据 μR，在 $\mathbb{1}[\epsilon]$ 上进行研究是自然的。为了完整起见，我们应当研究所有范畴 $\mathbb{1}[p\epsilon]$ ，因此也应当在 $\mathbb{1}[p\epsilon]$的厚点上定义塔。这使我们能够通过利用 $\mathbb{1}[p\epsilon]$ 的厚点上的塔来考察 μR方向上的动力学，其中这些塔对应于 $p > 1$；这些塔是通过重复前文所进行的塔的截面加厚而构造的，从而得到$\mathbb{1}[p\epsilon]$ 上的加厚塔。它们不仅提供核心点 a的光滑 $\mathbb{K}$演化，也提供其μR动力学；正如我们所论证的，这对于对 ψ_{AG}进行概率处理是必要的。或者，相对于 μR而言，塔呈现了 a的纯 μR邻域在意识方面的截断，可将其视为某种滤子。

接下来我们将看到，这可以通过从 $\delta\Phi$ 到 $\mathbb{K}$-形式体系的一个诱导函子来形式化；我们将其视为 $\mathbb{1} \subset r\Omega$ 中纯粹意识到 $\mathbb{K}$的棱柱分解，其中 $\mathbb{K}$由上述定义的带基点的塔表示。稍后我们将看到，可以通过 $\mathbb{K}$-形式体系以某种方式取回 $\delta\Phi$ 。

我们还将证明，塔可以合并，这相当于意识之间存在重叠。这将引出对以下函子的考察：

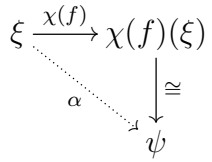
$$\chi_{p,q} : \mathbb{1}[p\epsilon]^q \to \mathrm{Grpd}$$

该函子将任意 $(U_1, \cdots, U_q)$ 关联到合并塔 $T_{U_1} \otimes \cdots \otimes T_{U_q}$，具体含义将在后文明确。对所有 p 和 q 的这些函子分别进行格罗滕迪克构造，我们得到群胚上的余纤维化范畴；它们组成一个长序列，对应于 $\mathbb{K}$ 的完整模型，我们将其称为 **$\mathbb{K}$-形式体系**。

3.1 格罗滕迪克构造

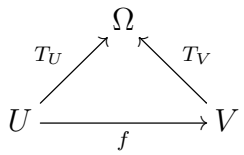
从 [Lu]，回想一下格罗滕迪克构造的运作方式：我们从一个函子 $\chi : \mathcal{C} \to$ 群胚范畴开始，其中范畴为 $\mathcal{C}$。构造一个元素范畴 $\mathcal{C}_\chi$，其对象的形式为 (c, ξ)，其中 $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，且 $\xi \in \chi(c)$；态射的形式为 (f, α)，其中 $f : c \to c'$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，且 $\alpha : \xi \to \psi$，满足 $\xi \in \chi(c)$、$\psi \in \chi(c')$，并定义为一个同构 $\chi(f)(\xi) \to \psi$，

这实际上是以下内容的简写：



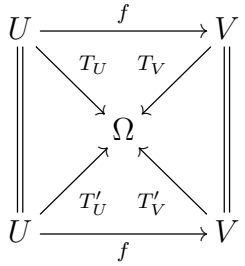
3.2 $\mathcal{T}$-Bun 范畴的构造

我们考虑函子 $\chi : \mathbb{1}[\epsilon] \to \mathbf{Grpd}$，它将 $\mathbb{1}[\epsilon] = \mathcal{C}$的厚点 U 关联到塔的集合 $\mathcal{T}_U \in \mathbf{Grpd}$，其中带有 $\mathcal{T}_U = \{T_U\}$、 T_U 的塔（带 $\lim T_U = \Omega$）被视为一个 $\mathbb{K}$-解析邻域。因此， χ 给出了从 U 作为起点、通过拓展自身意识而抵达 Ω 的所有可能方式。 $\mathcal{T}_U$ 之所以是一个群胚，是因为总能将一个塔 T_U 在同一基底 U上重塑为另一个塔 T'_U。$\mathcal{T}_U$ 是一个群胚；对于 $f:$ 在基底中的 $U \to V$，映射 $\chi f : \mathcal{T}_U \to \mathcal{T}_V$ 是一个函子，它将 $\mathcal{T}_U$ 的对象发送到 $\mathcal{T}_V$ 的对象，也就是说，逐对象而言，它是一个塔态射；该塔态射按截面定义，其方式与 δ-形式体系中定义态射的方式相同，并且最初基于 f。更准确地说， $f : U \to V$ 厚点映射在环境视景$\tilde{}\,\Omega$ 内是良定义的。设 $\chi f :$ $T_U \to T_V$ 在 f 之上，以固定记号。加厚塔 T_U 的每个截面 U都由点组成，其中每个点通过加厚成为一个 μR-邻域的一部分，并映射到一个$\tilde{}$点的 μR-邻域；该点属于将成为 T_V的对象的某个截面 V。这一过程的方式编码于 χf中，即在厚点层面将 f 推广到厚邻域层面的推广。可以用图示表示如下：

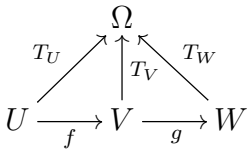


表示映射 $\chi f :\ T_U \to T_V$ 的整个三角形。注意，这正是函子 χf 在 $T_U \in \mathcal{T}_U$ 上的作用方式。对于 $T_U \simeq T'_U \xrightarrow{\chi f} T'_V \simeq T_V$，我们有一个

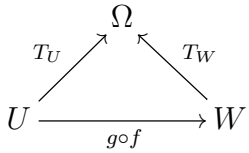
交换图：



其竖直面由重塑 $\phi: T_U \simeq T'_U$和 $\mathcal{X}f(\phi): T_V \simeq T'_V$ 给出。对于复合映射：



它给出：



我们将按照格罗滕迪克构造，由 χ :$\mathbb{1}[\epsilon] \to$ Grpd 构造的 $\mathcal{C}_\chi$ 记作 $\mathcal{T}$-Bun。它是群胚上余纤维化的，定义在 $\mathbb{1}[\epsilon]$ 上，其遗忘函子为 $\mathcal{T}$-Bun $\xrightarrow{\pi}$ $\mathbb{1}[\epsilon]$。其对象形式为 (U, T_U)，其中 $U \in \mathbb{1}[\epsilon]$,$T_U \in \mathcal{T}_U$，使得 $\pi(U, T_U) = U$。

3.3 推广： $\mathcal{T}$-Bun$_p$

我们自然地还有另一类函子 $\chi_p: \mathbb{1}[p\epsilon] \to$Grpd，$U \mapsto \mathcal{T}_U = \{T_U\}$，即定义在 $U \in \mathbb{1}[p\epsilon]$上的 T_U p-加厚塔。对该函子作格罗滕迪克构造，得到一个范畴 $\mathcal{T}$-Bun$_p$，定义在 $\mathbb{1}[p\epsilon]$上且群胚上余纤维化。

3.4 $\mathcal{T}_\cdot$ 作为对称幺半范畴

一旦有了对应于动态演化的意识的塔，我们就会考虑将它们合并。之所以要考虑这种可能性，原因相当明显：塔会不断增大，并且最终都以 Ω 结束，因此显然总会有它们相遇的时刻。塔彼此合并后形成多重塔。

对于 U，$U' \in \mathbb{1}[\mathrm{p}\epsilon]$、$T_U \in \mathcal{T}_U$以及 $T_{U'} \in \mathcal{T}_{U'}$，我们通过 $T_U \otimes T_{U'} = T_U \bigcup T_{U'}$定义它们的合并。将其推广如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_U \otimes \mathcal{T}_{U'} &= \{T_U\} \otimes \{T_{U'}\} \\ &= \{T_U \otimes T_{U'}\} \\ &= \{T_U \cup T_{U'}\} \\ &= \mathcal{T}_U \cup \mathcal{T}_{U'}\end{aligned}$$

现在注意到，塔提供了动态意识；如果 a 是 $U = \nu_{p\epsilon}(a)$ 的核心，那么给定其上的一个塔 T_U，便会得到一条从 U开始、不断增加$\mathbb{K}$的路径，因此 $\mathcal{T}_U = \{T_U\}$为我们提供了 $\mathbb{1}[p\epsilon]$中来自 a 的所有可能感知，这让人想起感知 $\mathbf{Hom}(a, -)$。现在，$\mathbf{Hom}(a, -)$只是一个基于集合的函子，而 $\mathbb{K}(a) = \mathcal{T}_a$ 是一个几何对象，它扩展了 $\mathbf{Hom}(a, -)$，其中 $\mathcal{T}_a = \{T_a\}$、T_a 是一个广义的 $\mathbb{K}$-邻域。我们有 $\mathcal{T}_a \otimes \mathcal{T}_b \doteq \mathbb{K}(a \oplus b)$，因为这个积为树提供了两个足$a$ 和 b，我们将其表示为 $a \oplus b$。

$$\mathbb{K}(a \oplus b) = \mathcal{T}_a \otimes \mathcal{T}_b = \mathbb{K}(a) \otimes \mathbb{K}(b) = \mathbb{K}(a) \cup \mathbb{K}(b)$$

它将以下内容推广为：

$$\mathrm{Hom}(a \oplus b, -) = \mathrm{Hom}(a, -) \oplus \mathrm{Hom}(b, -)$$

总而言之，塔的合并就是将其核心元素的感知相加。

定义了塔上的积之后，我们引入 $\mathcal{T}_\cdot = \oplus_{n \geq 1} \mathcal{T}_n$，其中 $\mathcal{T}_n = \{T_{U_1 \cdots U_n}\} = \cup_{U_1 \cdots U_n} \mathcal{T}_{U_1 \cdots U_n}$且 $T_{U_1 \cdots U_n} = T_{U_1} \otimes \cdots \otimes T_{U_n}$。这里我们假定，给定塔的足 U_1、$\cdots$、U_n 定义在同一个基底 $\mathbb{1}[p\epsilon]$上。形式上，我们有 $\otimes$：$\mathcal{T}_n \times \mathcal{T}_q \to \mathcal{T}_{\leq n+q} = \oplus_{i \leq n+q} \mathcal{T}_i$。张量积的单位元是定义在空厚点上的空塔。根据 $\otimes$的定义，对称性和结合律显而易见，并且我们有左乘和右乘的三角图。这使得 $(\mathcal{T}_\cdot, \otimes)$ 成为一个对称幺半范畴。回到积 $\otimes$，尽管 $\mathcal{T}_n$ 确实是迭代构造的，但给定 $\mathcal{T}_n$的一个一般元素 $T_{U_1 \cdots U_n}$，仍需理解如何将它表示为 $T_{U_1} \otimes \cdots \otimes T_{U_n}$。注意，许多塔都符合条件，即所有在合并之前形如任一 T_{U_i} 的塔，以使得合并之后它们共同重现 $T_{U_1 \cdots U_n}$。因此，我们定义一个类 $[T_{U_1} \cdots T_{U_n}]$，包含所有满足 $\otimes_{1 \leq i \leq n} T'_{U_i} = T_{U_1 \cdots U_n}$的塔 T'_{U_1}、$\cdots$、T'_{U_n}。

3.5 范畴 $\mathcal{T}_q$-Bun$_p$

引入上文的 $\mathcal{T}_q$ 后，我们可以考虑以下函子：

$$\chi_{p,q} : \mathbb{1}[p\epsilon]^q \to \mathrm{Grpd}$$
$$(U_1, \cdots, U_q) \mapsto \mathcal{T}_{U_1 \cdots U_q} = \{T_{U_1 \cdots U_q}\}$$

with $T_{U_1 \cdots U_q} \doteq T_{U_1} \otimes \cdots \otimes T_{U_q}$。给定基底中的 $f = f_1 \times \cdots \times f_q$: $(U_1, \cdots, U_q) \to (U_1', \ldots, U_q')$，函子 $\chi_{p,q}$产生一个群胚映射 $\chi_{p,q}f$，它被恰当地定义为函子，这是因为每个 χf_i 都是函子，而 $\otimes^q$ 是多函子。

对 $\chi_{p,q}$ 作格罗滕迪克构造，得到一个覆盖 $\mathbb{1}[p\epsilon]^q$ 的丛 $\mathcal{T}_q$-Bun$_p$，其对象具有 $((U_1, \cdots, U_q)\ T_{U_1 \cdots U_q})$ 的形式，而从这样的对象到另一个对象 $((U_1', \cdots, U_q')\ T_{U_1' \cdots U_q'})$ 的态射由 (f, α) 给出，其中 f 如上所定义，$\alpha = \otimes_{1 \le i \le q} \alpha_i$, $\alpha_i : \chi_p f_i \xi \cong \psi$, $1 \le i \le q$，对于 $\xi \in \mathcal{T}_{U_i}$, $\psi \in \mathcal{T}_{U_i'}$。遗忘函子表明，$\mathcal{T}_q$-Bun$_p$ 在 $\mathbb{1}[p\epsilon]^q$ 上是群胚上余纤维化的。

3.6 $\mathbb{K}$-形式体系

3.6.1 δ 塔上的映射

将上述定义的所有丛汇集起来，便得到按等级划分、在群胚上余纤维化的范畴丛 $\mathcal{T}_\cdot$-Bun$_\cdot$，即 $\mathcal{T}_\cdot$-Bun$_\cdot = \{\mathcal{T}_q\text{-Bun}_p\}_{p,q}$其中 $\mathcal{T}_q$-Bun$_p \to \mathbb{1}[p\epsilon]^q$ 在群胚上余纤维化。回想一下，在 δ-形式体系中，我们有作用于厚点的 delta 映射 $\cdots \mathbb{1}[p\epsilon] \xrightarrow{\delta} \mathbb{1}[(p+1)\epsilon] \to \cdots$。点之上有塔，它们不过是层叠的 $\mathbb{K}$- 邻域，而这些邻域本身由点构成。如果可以加厚点，就可以加厚点的集合，进而加厚塔的截面，再加厚塔本身；事实上，构造塔时我们已经隐式地用到了这一点。因此，在加厚元素 δU 之上，对于 $U \in \mathbb{1}[p\epsilon]$，可以有位于 $\mathbb{1}[(p+1)\epsilon]$ 之上的加厚塔 δT_U，它们仍以 T_U 为核心。我们可以将其视为具有一个竖直的 $\mathbb{K}$ 维度，以及一个用于表示加厚的水平 μR 维度。因此得到一个映射 δ: $\mathcal{T}$-Bun$_p \to \mathcal{T}$-Bun$_{p+1}$，我们将证明它是函子性的，并且可以进一步将其推广为函子 δ_q：$\mathcal{T}_q$-Bun$_p \to \mathcal{T}_q$-Bun$_{p+1}$，它相对于 $\mathcal{T}_\cdot$上的张量积 $\otimes$ 是等变的。令 $\delta = \oplus_{q \ge 1} \delta_q$，则 $(\mathcal{T}_\cdot\text{-Bun}_\cdot, \otimes, \delta)$ 定义了我们称为 $\mathbb{K}$-形式体系的结构。

顺带一提，每个塔都以 Ω 结束，而 Ω 是不变的，因此对每个塔施加 δ 会使其加厚，但其极限 Ω 除外，因为 Ω 保持不变。可以用以下论证看出确实如此。Ω 是系统 T_U 的一部分（它是该系统的极限），由此可知 $\delta\Omega$ 属于 δT_U，因此存在一个映射 $\Omega = \lim \delta T_U \to \delta\Omega$。如果两者不相等，就存在 $V \in T_U$ 使得 $\delta V = \delta\Omega$，但这样一来便会推出 $V \to \Omega$ 位于 $\lim T_U$ 之外，这是不可能的。

3.6.2 范畴形式体系

-δ 函子

我们证明 δ 是 $\mathcal{T}$-Bun 上的一个函子。考虑 $\mathcal{T}$-Bun$_P$ 在 $\mathbb{1}[p\epsilon]$ 上的情形，(U, T_U) 是其中的一个对象。我们有 $\delta(U, T_U) = (\delta U, \delta T_U)$，$\delta T_U$ 如上所定义。对于态射 $(f, \alpha) : (U, T_U) \to (V, T_V)$，我们有一个与之对应的映射 δf：$\delta U \to \delta V$。对于加厚塔，如果我们在厚点上有这样的加厚映射，那么对加厚开集也可以同样处理，进而对塔的截面也可以如此，最终对塔本身也可以如此。因此，若有一个塔的映射 α：$\chi(f)T_U \to T_V$，我们便可以构造它的延拓 $\delta\alpha$：$\delta(\chi(f)T_U) \to \delta T_V$。具体而言，回顾一下 α 的定义：

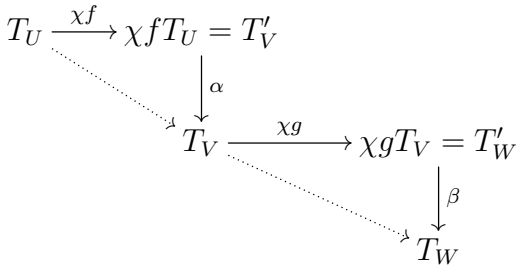
$$\begin{array}{ccc} T_U & \xrightarrow{\chi f} & \chi f(T_U) = T'_V \\ & \searrow & \downarrow \alpha \\ & & T_V \end{array}$$

当我们写作 α 时，实际指的是复合映射 $\alpha \circ \chi f$。上面所有这些映射都是塔的映射。我们可以将这些映射加厚，因此 $\delta\alpha$ 是良定义的。最后，$\delta(f, \alpha) = (\delta f, \delta\alpha)$。由于 δ 是一个函子，$\delta(id, id) = (id, id)$，并且我们还有复合：

$$\begin{aligned} \delta((g, \beta) \circ (f, \alpha)) &= \delta((g \circ f, \beta \circ \alpha)) \\ &= (\delta(g \circ f), \delta(\beta \circ \alpha)) \\ &= (\delta g \circ \delta f, \delta\beta \circ \delta\alpha) \\ &= (\delta g, \delta\beta) \circ (\delta f, \delta\alpha) \\ &= \delta(g, \beta) \circ \delta(f, \alpha) \end{aligned}$$

由于 $\delta(\beta \circ \alpha) = \delta\beta \circ \delta\alpha$，这可由在塔上逐截面进行处理并利用 δ 在邻域上具有函子性这一事实得出，

域。这里 $\beta \circ \alpha$ 是以下内容的简写：



-δ_q 函子 我们
现在证明：

$$\begin{array}{ccc} \delta_q : \mathcal{T}_q\text{-Bun}_p & \dashrightarrow & \mathcal{T}_q\text{-Bun}_{p+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{d}\mathbb{1}[p\epsilon]^q & \xrightarrow[\delta^q]{} & \mathrm{d}\mathbb{1}[(p+1)\epsilon]^q \end{array}$$

如上所述，是一个函子。现在我们可以合并塔了，因此必须谨慎处理合并塔的加厚。对于一个一般的多重塔$T_{U_1\cdots U_q}$，假设可以找到塔 T_{U_1}、$\cdots$、T_{U_q}，使得可以写成$T_{U_1\cdots U_q} = \otimes_{1\le i\le q} T_{U_i}$。我们希望对 $T_{U_1\cdots U_q}$ 的加厚不依赖于这种表示。令 $T'_{U_1}\cdots T'_{U_q}$为类 $[T_{U_1}\cdots T_{U_q}]$中的塔。注意，固定 i 后，如果 T'_{U_i} 和 T_{U_i} 在合并前相似，那么它们的加厚也相同。合并后，$T'_{U_1}\otimes\cdots\otimes T'_{U_q}$和$T_{U_1}\otimes\cdots\otimes T_{U_q}$中的点重合，因此对这些点进行加厚不依赖于表示方式。由此可知，总体而言，加厚时 $\delta T_{U_1\cdots U_q} = \otimes\delta T_{U_i} = \otimes\delta T'_{U_i}$ 不依赖于代表元的选择。因此， δ_q 在对象上定义良好：$\mathcal{T}_q$-Bun$_p$ 。

现在，若 $(U_1,\cdots,U_q)$ 和 $(V_1,\cdots,V_q)$ 是基底中的对象，且 $f_i : U_i \to V_i$ for $1 \le i \le q$，则有 $\delta^q(U_1,\cdots,U_q) = (\delta U_1,\cdots,\delta U_q)$，以及$\delta^q(f_1,\cdots,f_q) = (\delta f_1,\cdots,\delta f_q)$。于是，凭借 δ 本身是函子这一事实， δ^q 是一个函子，而 $\times^q$ 是一个多函子。$\otimes^q$ 也同样如此，因此 $\delta_q := \otimes^q\delta$ with δ on bundles 是一个函子。最后，令 $\delta_\cdot = \oplus_{q\ge1}\delta_q$, δ： $\mathcal{T}_\cdot$-Bun$_p \to \mathcal{T}_\cdot$-Bun$_{p+1}$ ，它在 q中逐级都是函子，由此 $(\mathcal{T}_\cdot$-Bun$_\cdot$, $\otimes, \delta)$ 构成一个范畴定向系统，我们将其定义为 $\mathbb{K}$-形式体系。

4 形式体系的对偶性

4.1 主动／被动形式体系

请注意，按照构造，$\delta\Phi$ 为我们提供了邻域／厚点的量子化水平形变。记作 $\delta\Phi \doteq \mathsf{d}\mathbb{1} = \Omega$ 时，这也可视为将物理空间 d1 渐进浸入环境视域 Ω。相比之下，$\mathbb{K}$-形式体系（简称 $\mathbb{K}\Phi$）为我们提供了邻域的光滑垂直形变，其表现为架设在自然 $\delta\Phi$厚点之上的加厚塔。本质上，$\delta\Phi$ 对应于 d1 在 Ω 内的被动、自发浸入；而 $\mathbb{K}\Phi$ 则呈现了对 1 的主动 $\mathbb{K}$-扩展。它之所以是主动的，是因为它由$\mathbb{K}$生成，其结果是从 $\delta\Phi$的视角将 $\delta\Phi$邻域棱柱分解为其 $\mathbb{K}\Phi$ 分量。

4.2 全局图景

注意，我们根据启发式原则得出：

$$r\Omega \doteq rec\delta\Phi \rightsquigarrow \mathbb{K}\Phi$$

这意味着，惰性空间 Ω 以 $\delta\Phi$-分解的形式动态呈现，而这些分解可以视为流。顺便指出，在单个厚点 $U \in \mathsf{d}\mathbb{1}[p\epsilon]$ 中，包含着 Ω 的全部；原因在于，每个独立的 $\mathsf{d}\mathbb{1}[p\epsilon]$ 都覆盖 Ω，而 $\mathsf{d}\mathbb{1}[p\epsilon] \in$Cat 中的每个对象 U 都与其中的其他所有对象相连。随后，这些 $\delta\Phi$-分解经函子映射到 $\mathbb{K}\Phi$ 中所用的塔。我们将最后这一转换 $\delta\Phi \to \mathbb{K}\Phi$ 视为棱柱分解；人们或许会认为，这会造成信息损失，因为我们将 $\mathbb{1} = r\Omega$ 中的纯知识分解为意识与遮蔽，而这一转换 $\delta\Phi \rightsquigarrow \mathbb{K}\Phi$ 只关注 $\mathbb{K}$ 。反向操作 $\mathbb{K}\Phi \to \delta\Phi$ 则通过格罗滕迪克构造实现。事实上，我们已经看到，函子 $\chi_{p,\ q} : \mathbb{1}[p\epsilon]^q \to$ Grpd 共同定义了 $\mathcal{T}_q$-Bun$_p \to \mathbb{1}[p\epsilon]^q$ 群胚上余纤维化（通过格罗滕迪克构造），因此我们有 $\mathbb{K}\Phi \rightsquigarrow \delta\Phi$。一个自然的问题是，$\mathbb{K}\Phi$ 与 $\delta\Phi$之间是否存在关系。我们将证明 $r\Omega \doteq \mathbb{K}\Phi$，由此表明实际上并不存在信息损失，而且我们具有对偶性 $\delta\Phi \sim \mathbb{K}\Phi$。

注记 4.2.1。此时我们需要明确的一点是，在我们的语境中，“意识”究竟意味着什么。迄今为止，我们一直将其视为日常意义上的觉知，后者可被简单地认为源自存在。但并非所有存在之物都具有觉知。存在是一个首要概念，是 Ω 若有特征的话唯一的特征。我们将（纯）$\mathbb{K}$ 等同于存在，而存在可以用范畴的方式处理。因此，在我们的层次上，我们所谓的（非纯） $\mathbb{K}$ 只是一种与心智相关的交互类型，我们将其称为觉知。如此一来，意识便表现为纯 $\mathbb{K}$的截断。

4.3 对偶图景的呈现

Ω 是惰性的，但可以通过其由$\delta\Phi$提供的覆盖来动态呈现。首先， $\delta\Phi \doteq\Omega$。

另一方面，我们也有 $\mathbb{K}\Phi$。若要有一个对偶性 $\mathbb{K}\Phi \sim \delta\Phi$，就意味着在这一特定情形下，格罗滕迪克构造是一个等价。

4.4 $\mathbb{K}$的和

现在给定 f： 基底 $\mathbb{1}[p\epsilon]$中的 $U \to V$， $\chi_p f$： $\mathcal{T}_U \to \mathcal{T}_V$是一个将单个塔映射到塔的函子。给定基底 $\mathbb{1}[p\epsilon]$中的一条路径 γ ，我们因此得到塔中的路径，称之为线束，并可将它们统记为 $\mathbb{K}(\gamma)$；这些是所有可能与基底中的 γ 相连的线束。利用格罗滕迪克构造，我们得到一个遗忘函子：π： $\mathcal{T}$-$\mathrm{Bun}_p \to \mathbb{1}[p\epsilon]$ ，其态射定义在任意塔之间，而不仅仅是沿着同一条路径、同一束线的塔之间。因此，从启发式角度看，这完整地对应于 $\sum \mathbb{K}(a)$。

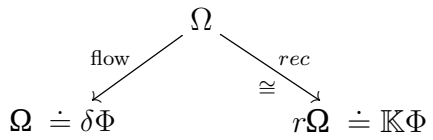
4.5 $r\Omega$之和为 $\mathbb{K}$

接下来我们论证 $r\Omega = \sum \mathbb{K}(a)$。同样，左侧显然有一个包含映射。我们声称这实际上是相等。右侧的和是对$a \in \mathbb{1} \doteq r\Omega$求和。即便对于点 $a \in \mathbb{1}$而言，塔给出的是不完整的 $\mathbb{K}$，问题在于任何塔的截面都

无法覆盖 Ω 的任何区域，但根据定义，所有塔最终都会终止于 Ω，因此最终$\sum \mathbb{K}(a)$会逐 $\mathbb{K}$覆盖 Ω。事实上，所有塔都以 Ω 为˜极限，这是刻意设计的，而且不难看出；即使 U 足以覆盖 $r\Omega$，我们仍可以考察更高的截面，其局部强度˜高于 U的局部强度。因此，最终在极限中，我们考察的是纯粹的$\mathbb{K}$，它无非就是 $r\Omega$。值得强调的是这一视角的转变：从有限塔所提供的点基形式体系，转向指称对象缺席的形式体系，即 Ω；这是一种类似于“不可知之云”的超越性转变。从动态上看，在塔的高处，$\iota(a) \ll \iota(\Omega)$，此时事物不再以某一点为中心，概念逐渐消散，被遮蔽的意识转化为纯粹意识。

4.6 对偶性

总而言之，在 $\delta\Phi$中，μR 支配着动力学，它是一个全局Ω诱导现象，在局部进行测量，最终我们得到 $\mathrm{d}\mathbb{1} \doteq \Omega$（或等价地得到 $\mathbb{1} \doteq r\Omega$）。在事物的 $\mathbb{K}$一侧／重构一侧，我们处理的是自然领域，其中存在遮蔽，因此局部意识如今变得相关，因为全局纯Ω层级的意识已经丧失。在局部工作时，我们最终得到 $\mathbb{K}\Phi \doteq r\Omega$。因此，$\delta\Phi$ 是全局诱导的，$\mathbb{K}\Phi$ 是局部生成的，而二者都恢复 Ω。这构成了一种启发式T对偶：



注4.6.1。 正因为 a 永远无法通过任何塔 T_a达到Ω，即便是在极限中，这也只是一种形式对偶性。然而，作为这种不完备性的后果，实际生活中的 $\mathbb{K}\Phi \subsetneq r\Omega$，或者换言之，$\sum \mathbb{K}(a)$不足以完整地再现Ω。

5 决定论与自由意志

在本研究中，我们论证了 d1 可以浸入 Ω，其思路是从范畴的角度识别彼此接近的事件，这蕴含着 d1 或等价地说 1 所具有的底层决定论图景，自然现象便发生于其中。如果对 1

采用 Segal 范畴 $\delta^{\infty}\mathcal{X}$ 表示，这一点也显而易见。另一方面，在 $\mathbb{K}\Phi$ 中，我们讨论意识，它与自由意志的概念密切相关。公平地说，两者之间的确切联系仍不明朗，远未尘埃落定。就我们的目的而言，我们将自由意志视为从主体的视角出发所产生的自发生成；这里的主体，广义上说，是自由意志所指涉的主体。没有自由意志就不可能有意识，因为那样一来，信息就只会流经主体。反过来说，有意识就意味着自由意志确实存在。如果意识难以定义，那么不将自由意志作为底层假设，问题就更加严重，尽管看起来 $\mathbb{K}$ 是在确定性环境 1 中定义的。

我们认为，心中持有这样的图景实际上并无矛盾，而且这两个概念确实可以并存。论证如下。考虑一个具有自由意志的系统，我们可以用一个范畴 $\mathcal{C}$ 来表示它。它在自然现象领域中的表现可以由一个函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Cat}_{\infty}$ 表示。尤其是，自由意志是 1 中一种相干的表现，因此必须由这样的函子表示。然而，根据在 [RG6], 中详加讨论的 ∞-范畴格罗滕迪克构造（[Lu]），我们有 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathrm{Cat}_{\infty}) \simeq \mathrm{coCartFib}(\mathcal{C})$。因此，任意函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Cat}_{\infty}$ 都对应于一个以 $\mathcal{C}$ 为基底的余笛卡尔纤维化。这是一个映入 $\mathcal{C}$ 的函子，因此完全是决定论的。在这种对偶性中，$\mathcal{C}$ 是一个支点；从这一视角看，这种对偶性的左侧将 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathrm{Cat}_{\infty})$ 呈现为在 $\mathcal{C}$ 之前毫无先例的某种事物的提供者，而它本身是关注的焦点，因此我们处理的是某种可以被解释为以自由意志为基础的事物。正如 [RG6], 中所论证的，这种对偶性通过 $\mathcal{C}$ 提供了一种代数信息流；从某种意义上说，我们有一条守恒律，因此自由意志可以被视为由决定论产生。此外，这种对偶性表明，这一过程是永恒且同时发生的：流入 $\mathcal{C}$ 的信息会生成函子，这些函子对应于 $\mathcal{C}$ 在其环境宇宙中的表现；这些表现又反过来输入以 $\mathcal{C}$ 为基底的余笛卡尔纤维化中，如此无穷延续。

个体的决策过程也源于$\mathcal{C}$内部的动力学，这一点同样编码在这种 Grothendieck 对偶中；外部事件通过余笛卡尔纤维化塑造$\mathcal{C}$，并由此生成函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Cat}_{\infty}$，其中一些会产生内部的 ∞-范畴，也就是自我特征；其中一些与觉知的生成有关。到目前为止，我们认为内在自我是以确定性的方式产生的。随后，这些内部函子会被输入

回余笛卡尔纤维化中，以生成其他函子，其中一些将为自由意志奠定基础。因此，可以认为我们自身的自我是以确定性的方式形成的，而这些新形成的特征能够参与我们的决策过程。还要注意，整个过程的内在机制是确定性的，却难以察觉，因为它源自无数纤维化 $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ，这些纤维化生成内在函子 F : $\mathcal{C} \to \mathrm{Cat}_\infty$ ，进而塑造我们的内在动力学；最终，尤其是在全局层面上，这会导向自由意志。在这一尺度上，内在的确定性机制并不明显。

为了更清楚地说明这种决定论—自由意志对偶性，请回顾 [RG6]：两种理论都可以解构为一个共同的基态，在该基态中，两种理论都处于解构形式；随后，可以将基态重构为余笛卡尔纤维化，此时是决定论的；也可以将其重构为从 $\mathcal{C}$ 到 Cat_∞的函子，而后者涵盖了 $\mathcal{C}$ 具有自由意志的情形。然而，在基态本身中，这些概念处于消解形式，因此也就失去了意义。换言之，归根结底，事物究竟是决定性的还是自发的，并不重要。另一个支持这一表面问题并不重要的论据是：它源于对一个固定范畴 $\mathcal{C}$的认定，而该范畴只是一个参照点；引入指称对象必然会带来对偶性，从而产生潜在的不相容性，决定论/自由意志这一难题就是一个典型例子。这些只是相对的概念。

参考文献

[BB] P.Baudot, D. Bennequin, 熵的同调性质，《Entropy》17(2015), 3253-3318.[B] M. Bellini 等，《运用光的相干态展示量子微观可逆性》，《物理评论快报》129, 170604 (2022).[C] D. Chalmers，《有意识的心灵》，牛津大学出版社，1996年。[CMnMi] N. Combe, Y.I. Manin, M. Marcolli，《几何与信息：经典与量子方面》，arXiv:2107.08006[cs.IT].[RG] R. Gauthier，《Segal 托普斯与自然现象的高阶伽罗瓦理论》，arXiv:1607.00940[math.AG].

[RG2] R. Gauthier, 《Segal 拓扑斯与弦的物理数学》, arXiv:2204.13786[math.CT][RG6] R. Gauthier, 《 ∞阶范畴的格罗滕迪克构造的基态》, arXiv:2405.17135[math.CT].[RG3] R. Gauthier, 《自然现象基态的构造与性质》, arXiv:2502.10968[math.CT].[RG4]R. Gauthier, 《代数几何中的同伦波函数》, arXiv:2503.05099[math.AG].[RG5] R. Gauthier, 《代数几何中的时间-能量不确定性原理》, arXiv:2507.13134[math.AG].[G]M. Gromov, 《结构、学习与能动系统》, 见 http://www.ihes.fr/gromov/PDF/ergobrain.pdf[J1] E.T. Jaynes, 《信息论与统计力学》, 《物理评论》106, 620 (1957).[J2] E.T. Jaynes, 《信息论与统计力学 II》, 《物理评论》108, 171 (1957).[KS] G. Kato, D.C. Struppa, 《意识的层论方法》, 《灵知学期刊》2:1 (1999) 1-3[KS2] G. Kato, D.C. Struppa, 《范畴论与意识》, 东京会议论文集, 1999年6月。[Lt] C. Lent, 《物理系统中的信息与熵》, 载于《计算中的能量极限》, 第1-63页, 施普林格国际出版, 2018年。[L] G.N. Lewis, 《平衡的新原理》, 《美国国家科学院院刊》, 1925年3月, 11(3):179-183.[Lu] J. Lurie, 《高阶拓扑斯理论》, 《数学年刊研究》, 2009年, 普林斯顿大学出版社。[M] Y.I. Manin, 《神经编码与同伦类型：位置场识别的数学模型》, 《莫斯科数学杂志》15 (2015), 741-748.

[MM] D.Y. Manin, Y.I. Manin, 《认知网络：大脑、互联网与文明》，载于《使数学及其哲学更具人文性》，第85–96页，Birkhauser/Springer, 2017年。[MnMi] Y. Manin, M. Marcolli, 《神经信息网络的同伦论与范畴论模型》，Compositionality，第6卷（2024年）。[Mi]M. Marcolli, 《伽马空间与信息》，J. Geom. Phys. 第140卷（2019年），26–55页。[S1] C.E. Shannon, 《通信的数学理论》，贝尔系统技术期刊，第27卷（3）：379–423，1948年。[S2] C.E. Shannon, 《通信的数学理论》，贝尔系统技术期刊，第27卷（4）：623–656，1948年。[SKRKA] D.C. Struppa, M. Kafatos, S. Roy, G. Kato, R.L. Amoroso, 《范畴论：意识的语言》，Noetic Journal 第3卷第3期，2002年7月。[T] G. Tononi, 《意识即整合信息：临时宣言》，Biol. Bull. 第215卷（2008年），216–242页。[V] J.P. Vigneaux, 《广义信息结构及其上同调》，arXiv:1709.0787[cs.IT]

电子邮件地址：rg.mathematics@gmail.com。