arXiv:2601.06269v1 [math.GN] 9 Jan 2026

逼近空间的概率可度量性刻画

E. COLEBUNDERS，R. LOWEN

摘要

可度量化拓扑空间或可度量化一致空间的刻画众所周知。对于拓扑空间，可度量性的一种自然对应概念，可以用逼近空间的概率可度量性来表述。概率可度量化逼近空间的概念基于一个众所周知的具体函子 Γ，该函子由[9], 引入，将关于连续任意 t-范数的概率度量空间范畴映射到逼近空间范畴。对于这类概率可度量化逼近空间，目前仍缺少刻画；本文第一部分解决了这一问题。

对于一致空间，可度量性的一种自然对应概念，可以用一致规范空间的概率可度量性来表述。本文第二部分从另一个具体函子 Λ，出发，该函子由 [7], 描述，将关于连续三角范数的概率度量空间范畴映射到一致规范空间范畴。与函子 Γ 的情形类似，我们得到了对一致规范空间概率可度量性的刻画。

本文最后一节致力于对概率度量空间范畴作出同构描述。这个问题并非新问题。此前尝试对概率度量空间范畴作出同构描述的研究，采用的是（伪）度量族。这些尝试仅在受限情形下得到了表述。我们的同构描述则基于这样的对象：赋有距离族的集合，其中涉及的距离不满足三角不等式，而是满足混合三角条件。

关键词：概率度量空间；逼近空间；局部系统；一致规范空间；一致系统；概率可度量性；概率度量空间范畴；混合三角不等式

数学主题分类：54E70；54E35；54A05；54E15。

1. Introduction

对于许多应用而言，带有压缩映射的逼近空间这一框架相当适用，这一点已在概率论 [1] 、 [2], 超空间[12], 、泛函分析 [17] 以及复杂性分析 [5] [6]的背景下得到展示。Clementino 和 Hofmann 在 [4]中首次建立了逼近空间的松弛代数描述。由此得到的 App 的同构描述，成为幺半拓扑发展的一个重要范例 [8], [3]。在 [9] 和 [7] 中，人们认识到，将概率度量空间与其关联的逼近空间联系起来也颇有成效。本文将沿着这一思路继续探讨。

近期， [9] 的作者介绍了一个具体函子 $\Gamma : \mathbf{ProbMet} \to \mathbf{App}$，它将带有非扩张映射的概率度量空间映至带有压缩映射的逼近空间范畴 [11], [10]。从 [9] 可以清楚看出，在拓扑空间中可概率度量化是可度量化的自然对应概念。与

[9] 我们的研究将考虑相对于某个连续 t-范数 $*$ 的概率度量空间。 $[0,1]$. 函子 Γ 的像由那些可概率度量化的逼近空间构成。借用 [9] 中的说法，ProbMet 经由 Γ 映射所得的对象将被描述为赋有局部系统的集合。在本文第一部分，我们用局部距离刻画 Γ的像；这些局部距离不满足三角不等式，而是满足混合三角条件。

每个度量空间都具有一个底层一致结构，而与之相关的可度量化一致空间理论也已广为人知。作为对应，我们将证明，存在一个自然的具体函子 Λ : ProbMet $\to$UG，它将关于某个连续三角范数 $*$ 上的概率度量空间及其非扩张映射，映至范畴 UG；该范畴的对象是赋有一致系统的集合，态射则是一致压缩映射。ProbMet 经由 Λ 得到的像中的对象由那些概率可度量化的空间构成，它们将被描述为赋有一致系统的基的集合，该基由距离组成。与局部情形一样，其中涉及的距离并不满足三角不等式，而是满足混合三角条件。

本文最后一节致力于对概率度量空间范畴作出同构描述。这个问题并非新问题。此前对概率度量空间范畴进行同构描述的尝试，采用的是（伪）度量族。这些尝试仅针对有限情形提出，例如最小 t-范数 M，或较弱形式的概率度量空间；参见 [14] 或 [15]。我们的同构描述采用这样的对象：赋有一族由单位区间 $]0,1]$ 标记的距离的集合；态射则是逐层非扩张映射。同样，其中涉及的距离并不满足三角不等式，而是满足混合三角条件。

2. Preliminaries

关于概率度量空间的更多信息，请参阅 [15] ；关于其与逼近空间的联系，请参阅 [9] 和 [7]。

在对角线上取值为零的函数 $d\colon X\times X\to[0,\infty]$ 称为**距离**。这一概念不要与点和集合之间的距离混淆；后者在逼近理论中也发挥着重要作用，但本文不会涉及。对称的距离称为**对称距离**。

集合 X 上的**广义度量**（ [11]中的拟度量）是一个映射 $d\colon X\times X\to[0,\infty]$，它在对角线上取值为零，并满足三角不等式。若 d 还是对称的，则称其为**对称广义度量**。

我们回顾一下 [15] 和 [9]中的一些术语。

函数 $\varphi\colon[0,\infty]\to[0,1]$ 称为**距离分布**，如果 φ 是单调的，$\varphi(0)=0$，$\varphi(\infty)=1$，且 φ 在 $]0,\infty[$上左连续。

区间 $[0,1]$ 上的二元运算 $*$ 若满足以下条件，则称为**连续三角范数**：($[0,1],*,1$) 是交换幺半群；它作为从 $[0,1]^2$ 到 $[0,1]$ 的函数相对于通常拓扑是连续的；并且，当 $p\le p'$ 和$q\le q'$ 属于 $[0,1]$.时，满足 $p*q\le p'*q'$

概率度量空间是一个集合 X，配备有一个映射

$$\alpha : X\times X\times[0,\infty]\to[0,1] \tag{1}$$

以及一个连续三角范数 $*$，使得

(P1) $\alpha(x,\ y,\ -)\colon[0,\infty]\to[0,1]$ 是距离分布，(P2) $\alpha(x,\ x,\ -)=\varepsilon_0$，最大的距离分布，(P3) $\alpha(x,\ y,\ r)=\alpha(y,\ x,\ r)$，(P4) $\alpha(x,\ y,\ -)=\varepsilon_0\Rightarrow x=y$,

(P5) $\alpha(y,z,r) * \alpha(x,y,s) \leq \alpha(x,z,r+s)$,
对于所有 x, y, $z \in X$, r, $s \in [0,\infty]$.

概率度量空间之间的映射 $f\colon (X,\ \alpha) \to (Y,\ \beta)$ 是非扩张的，当

$$\alpha(x,x',t) \leq \beta(f(x),f(x'),t), \tag{2}$$

对所有 x, $x' \in X$, $t \in [0,\infty]$.

本文始终假设概率度量空间是相对于某个连续三角范数定义的，我们将其记为 $*$。

由非扩张映射构成的概率度量空间范畴记为 ProbMet。

接下来我们回顾一些来自逼近理论的概念。关于逼近空间的概念和结果的更多细节，请参阅 [11] 或 [10]。我们回顾本文所需的术语和基本结果。

2.1. **定义**。由 X 的各点索引的 $[0,\infty]^X$ 中理想的集合 $(\mathcal{A}(x))_{x\in X}$ 是一个局部系统，如果对所有 $x \in X$ 以下性质均成立：

(A1) $\forall \varphi \in \mathcal{A}(x)$ $\varphi(x) = 0$.(A2) 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \omega < \infty$, $\exists \varphi_\varepsilon^\omega \in \mathcal{A}(x)$ 使得 $\varphi \wedge \omega \leq \varphi_\varepsilon^\omega + \varepsilon$，则 $\varphi \in \mathcal{A}(x)$。(A3) $\forall \varphi \in \mathcal{A}(x)$ $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \omega < \infty$, $\exists (\varphi_z)_{z\in x} \in \prod_{z\in X} \mathcal{A}(z)$ 使得

$$\forall z, y \in X, \varphi(z) \wedge \omega \leq \varphi_x(y) + \varphi_y(z) + \varepsilon.$$

$\mathcal{A}(x)$ 的元素称为局部距离。

2.2. **定义**。由 X 的各点索引的 $[0,\infty]^X$ 中理想基的集合 $(\mathcal{B}(x))_{x\in X}$ 是一个局部基，如果对所有 $x \in X$，性质 (A1) 和 (A3) 均成立。

为了从局部基导出局部系统，我们需要以下饱和运算。给定子集 $\mathcal{B} \subseteq [0,\infty]^X$，我们定义

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \{\varphi \in [0,\infty]^X \mid \forall \varepsilon > 0, \forall \omega < \infty, \exists \varphi_\varepsilon^\omega \in \mathcal{B} \text{ such that } \varphi \wedge \omega \leq \varphi_\varepsilon^\omega + \varepsilon\}, \tag{3}$$

$\mathcal{B}$ 的饱和，并称 $\langle \mathcal{B} \rangle$ 由 $\mathcal{B}$生成。

映射 $f\colon (X, (\mathcal{A}(x))_{x\in X}) \to (Y, (\mathcal{A}'(y))_{y\in Y})$ 是一个压缩映射，如果对每个 $x \in X$ 以及每个 $\varphi' \in \mathcal{A}'(f(x))$，都有

$$\varphi' \circ f \in \mathcal{A}(x). \tag{4}$$

只需在陪域中的局部基上施加该条件。逼近空间范畴 App 的对象是赋有局部系统的集合，态射则是压缩映射。关于 App 的其他同构描述，请参阅相关文献。

3. Probabilistic metrizable approach spaces

本节给出概率可度量化逼近空间的内在刻画。我们从具体函子 [9], [7] 开始

$$\Gamma : \mathsf{ProbMet} \to \mathsf{App}, \tag{5}$$

其中，为每个概率度量空间（X, α, $*$）指定一个逼近空间。在[9] 中，函子通过点与集合之间的距离 δ（x, A）用逼近空间进行了描述。在 [7] 中，函子又等价地通过逼近空间的塔进行了描述，并证明该函子的陪域可以限制为 UAp，即 App 的一致逼近空间子范畴。在 [9]中，还利用可数的局部距离集，以局部系统的形式，给出了从概率度量空间（X, α, $*$）到逼近空间的另一种等价转换。这是我们将在此处采用的函子 Γ 的类似表述。

设（X, α, $*$）为一个概率度量空间。在 3.2 节中，我们证明可为其关联一个底层逼近空间 X，该空间由 x，中的以下局部基定义，

$$\mathcal{B}(x) = \{\varphi_{\lambda,x} \mid 0 < \lambda \leq 1\} \tag{6}$$

with

$$\varphi_{\lambda,x}(y) = \inf\{0 \leq \gamma < \infty \mid \alpha(x, y, \gamma) > 1 - \lambda\}.$$

3.1. **命题**。 对于 $0 \leq \gamma < \infty$ 和 $0 < \lambda \leq 1$，我们有

$$\varphi_{\lambda,x}(y) < \gamma \Leftrightarrow \alpha(x, y, \gamma) > 1 - \lambda. \tag{7}$$

证明。 假设 $\varphi_{\lambda,x}(y) < \gamma$, 那么存在满足 $\alpha(x, y, \mu) > 1 - \lambda$. 的 $\mu < \gamma$。由于 α 单调不减，这意味着 $\alpha(x, y, \gamma) > 1 - \lambda$。

为证明另一个蕴含，假设 $\alpha(x, y, \gamma) > 1 - \lambda$.。 α 的左连续性意味着存在 $\mu < \gamma$，使得 $\alpha(x, y, \mu) > 1 - \lambda$.。这意味着$\varphi_{\lambda,x}(y) \leq \mu < \gamma$.

□

3.2. **命题**。 $\mathcal{B}(x)$ 由 (6) 定义的 $= \{\varphi_{\lambda,x} \mid 0 < \lambda \leq 1\}$ 是X 上的局部基，符合 *2.2* 节中的定义。

证明。 显然，所有 $\varphi_{\lambda,x} \in [0, \infty]^X$.。对每个 λ, x，由 $\alpha(x, x, \gamma) = 1$ 对所有 $\gamma > 0$ 成立这一事实可知，(A1) 得以满足，即 $\varphi_{\lambda,x}(x) = 0$。

接下来证明条件 (A3)。事实上，我们将证明局部混合三角不等式(**LM**)，它显然蕴含 (A3)：对于 $0 < \varepsilon \leq 1$ 和 $0 < \lambda \leq 1$ 且满足

$$(1 - \lambda) * (1 - \lambda) > 1 - \varepsilon.$$

并且对于所有 $x, y, z \in X$，有

$$\varphi_{\varepsilon,x}(z) \leq \varphi_{\lambda,x}(y) + \varphi_{\lambda,y}(z). \tag{8}$$

首先注意到，鉴于 t-范数 $*$ 在 $[0, 1]$ 上的连续性，对于每个$0 < \varepsilon \leq 1$，都存在 $0 < \lambda \leq 1$ 使得

$$(1 - \lambda) * (1 - \lambda) > 1 - \varepsilon.$$

如果 (8) 右侧为 ∞，则无需证明。接下来，任取 γ, γ'，满足 $\varphi_{\lambda,x}(y) < \gamma$且 $\varphi_{\lambda,y}(z) < \gamma'$.。应用 (7)，得到 $\alpha(x, y, \gamma) > 1-\lambda$且 $\alpha(y, z, \gamma') > 1 - \lambda$。由 α的公理（P5），我们得到

$$\alpha(x, z, \gamma + \gamma') \geq \alpha(y, z, \gamma') * \alpha(x, y, \gamma) \geq (1 - \lambda) * (1 - \lambda) > 1 - \varepsilon.$$

再次应用 (7)，得到 $\varphi_{\varepsilon,x}(z) < \gamma + \gamma'$,，由此可得结论 (8)。

□

通过应用 [9]中的结果，很容易看出 Γ 确实是一个函子。这一事实也可由 [7] 推出，因为其中以塔的形式给出的描述与此处所 ներկայաց出的描述是等价的，这是由于集合 $\{\varphi_{\lambda,x} < \rho\}$ 与集合$V_\lambda^\rho{}_{,x}$ [7]一致。不过，我们仍给出一个明确的证明，因为后文还需要这些细节。

3.3. 命题。 Γ : *ProbMet* $\to$ *App* 是一个具体函子，这意味着当 f : *(X, α)* $\to$ *(Y, α′)*为非扩张映射时， $\Gamma(f)$: $\Gamma((X, \alpha)) \to \Gamma((Y, \alpha'))$是一个压缩映射，其中 $\Gamma((X, \alpha))$ 和 $\Gamma((Y, \alpha'))$分别具有由 $\mathcal{B}(x) = \{\varphi_{\lambda,x} \mid 0 < \lambda \leq 1\}$ 和 $\mathcal{B}'(y) = \{\varphi'_{\lambda,y} \mid 0 < \lambda \leq 1\}$ 生成的局部系统（$\mathcal{A}(x)$)$_x$ 和（$\mathcal{A}'(y)$)$_y$，如（6）所示。

证明。 首先注意，在 $\varphi'_{\lambda,f(x)}(f(x')) = \infty$ 的情况下，对于每个 $\gamma < \infty$,$\alpha(f(x)\ f(x')\ \gamma) \not> 1 - \lambda$.。这意味着，对于每个 $\gamma < \infty$, $\alpha(x, x', \gamma) \not> 1 - \lambda$。因此，我们可以得出结论：$\varphi_{\lambda,x}(x') = \infty$.

在有限情形下，应用（7）可得以下等价关系：

$$
\begin{aligned}
f:(X,\alpha)\to(Y,\alpha') \text{ is non-expansive} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t,\ \alpha(x,x',t)\le\alpha'(f(x),f(x'),t)\\
&\Leftrightarrow \quad \forall t,\forall\lambda:\ \ (\alpha(x,x',t)>1-\lambda\Rightarrow\\
&\qquad\ \alpha'(f(x),f(x'),t)>1-\lambda)\\
&\Leftrightarrow \quad \forall t,\forall\lambda:\ \varphi_{\lambda,x}(x')<t\Rightarrow\varphi'_{\lambda,f(x)}(f(x'))<t\\
&\Leftrightarrow \quad \forall\lambda,\ \varphi'_{\lambda,f(x)}(f(x'))\le\varphi_{\lambda,x}(x').
\end{aligned}
$$

显然，最后一行蕴含：

$$\text{if } \varphi'_{\lambda,f(x)}\in\mathcal{B}'(f(x)) \text{ then } \ \varphi'_{\lambda,f(x)}\circ f\in\mathcal{A}(x),$$

并且根据 (4)， $\Gamma(f)$ 是一个压缩映射。 □

为了确定 Γ 对 ProbMet 的像，我们证明以下性质。

3.4. **定理 (定理 3.8 的第一部分)**。设 $(X,\alpha,*)$ 是一个概率度量空间。与之关联的局部基 $\mathcal{B}(x)=\{\varphi_{\lambda,x}\mid 0<\lambda\le 1\}$ 在 x中，如 *(6)* 和 *3.2* 中所述，具有以下性质：

(LS) 对称性：对于每个 $0<\lambda\le 1$ 以及 $x,y\in X$，都有

$$\varphi_{\lambda,x}(y)=\varphi_{\lambda,y}(x).$$

(LD) 稠密性：对于每个 x 和 $0<\lambda\le 1$

$$\varphi_{\lambda,x}=\inf_{\rho<\lambda}\varphi_{\rho,x}.$$

(LT) *t*-范数：对于 $0<\varepsilon\le 1$，$0<\lambda\le 1$ 和 $0<\lambda'\le 1$，

$$(1-\lambda')*(1-\lambda)>1-\varepsilon$$

则对于所有 $x,y,z\in X$，我们有

$$\varphi_{\varepsilon,x}(z)\le\varphi_{\lambda,x}(y)+\varphi_{\lambda',y}(z).$$

(LH) 分离性：

$$x\ne y \ \textit{then}\ \exists\lambda,\ 0<\lambda\le 1,\ \varphi_{\lambda,x}>0.$$

证明。 **(LS)** 由 (P3) 可得，因为对于所有 $x,y,\gamma.$， $\alpha(x,y,\gamma)=\alpha(y,x,\gamma$
(LD) 设 $0<\lambda'\le\lambda\le 1$ 和 $x\in X.$。首先注意，在无穷情形下，当 $\varphi_{\lambda,x}(y)=\infty$ 时，则 $\{\gamma\mid\alpha(x,y,\gamma)>1-\lambda\}=\emptyset$，显然也有 $\{\gamma\mid\alpha(x,y,\gamma)>1-\lambda'\}=\emptyset$，且 $\varphi_{\lambda',x}(y)=\infty.$。在有限情形下，只需应用 *(7)*，即可得出 $\varphi_{\lambda,x}\le\varphi_{\lambda',x}.$

根据前面的观察，我们已经得到 $\varphi_{\lambda,x}\le\inf_{\rho<\lambda}\varphi_{\rho,x}.$ 我们证明反向不等式。令 $y\in X$。在满足 $\varphi_{\lambda,x}(y)=\infty$ 的无穷情形下，无需证明。接下来假设 $\varphi_{\lambda,x}(y)<\gamma<\infty.$ 应用 (7)，我们有 $\alpha(x,y,\gamma)>1-\lambda.$ 于是可以选取 $\rho<\lambda$，使得 $\alpha(x,y,\gamma)>1-\rho.$ 显然，$\varphi_{\rho,x}(y)<\gamma$ 这意味着 $\inf_{\rho<\lambda}\varphi_{\rho,x}(y)<\gamma.$

(LT) 令 $0<\varepsilon\le 1,\ 0<\lambda\le 1$ 和 $0<\lambda'\le 1$ 满足

$$(1-\lambda')*(1-\lambda)>1-\varepsilon.$$

对于任意的 x、y、$z\in X$，如果不等式 $\varphi_{\varepsilon,x}(z)\le\varphi_{\lambda,x}(y)+\varphi_{\lambda',y}(z)$ 的右端为无穷大，则无需证明。接下来假设 $\varphi_{\lambda,x}(y)<\gamma$ 且 $\varphi_{\lambda',y}(z)<\gamma'$。于是有 $\alpha(y,z,\gamma')>1-\lambda'$ 且 $\alpha(x,y,\gamma)>1-\lambda.$。现在应用（P5）

$$\alpha(x,z,\gamma+\gamma')\ge\alpha(y,z,\gamma')*\alpha(x,y,\gamma)\ge(1-\lambda')*(1-\lambda)>1-\varepsilon.$$

最后得到$\varphi_{\varepsilon,\ x}(z) < \gamma + \gamma'$.
(LH) 假设 $x \neq y$. 存在 $0 < \lambda \leq 1$，使得$\varphi_{\lambda,\ x} > 0$ 这可由以下事实推出：根据 **(P4)**，$\exists \gamma > 0$，其中 $\alpha(x,\ y,\ \gamma) \neq 1$，因此 $\exists \lambda$，其中 $\alpha(x,\ y,\ \gamma) \not>$
$1 - \lambda$. □

事实上，t-范数条件 **(LT)** 显然蕴含 3.2 中的局部混合三角条件 **(LM)**，因此 **(LT)** 可视为一种局部强混合三角不等式。

接下来我们考察另一个方向，即如何将一个概率度量空间与逼近空间的某个特定局部基相关联。

3.5.**定义**。设 X 是一个逼近空间，在 x 中具有局部基

$$\mathcal{B}(x) = \{\varphi_{\lambda,x} \mid 0 < \lambda \leq 1\}.$$

对于 $x,\ y \in X$，我们定义 $\beta(x,\ y,\ \infty) = 1$，并进一步对于 $\gamma < \infty$:

$$\beta(x,y,\gamma) = \sup\{1-\lambda \mid \varphi_{\lambda,x}(y) < \gamma\} = 1 - \inf\{\lambda \mid \varphi_{\lambda,x}(y) < \gamma\}. \tag{9}$$

3.6.**命题**。给定一个具有满足 **(LD)** 的局部基的逼近空间 X，则对于 $0 \leq \gamma < \infty$，有:

$$\beta(x,y,\gamma) > 1-\lambda \Leftrightarrow \varphi_{\lambda,x}(y) < \gamma.$$

证明。令 $\sup\{1-\rho \mid \varphi_{\rho,x}(y) < \gamma\} > 1-\lambda$.。则 $\exists \rho < \lambda,\ \ \varphi_{\rho,\ x}(y) < \gamma$，应用 **(LD)** 后可得 $\varphi_{\lambda,\ x}(y) < \gamma$.

对于另一个方向，假设 $\varphi_{\lambda,\ x}(y) < \gamma$.。再次应用 **(LD)**$\exists \rho < \lambda,\ \ \varphi_{\rho,\ x}(y) < \gamma$.。因此 $1 - \lambda < 1 - \rho \leq \beta(x,\ y,\ \gamma)$。 □

首先，我们需要以下引理。

3.7. **引理**。设 $([0,1], *)$ 是一个连续三角范数。对于所有的 $a, b, d \in]0,1]$，以下条件等价:

(1) $d \geq a * b$
(2) $\forall \lambda, \lambda' \in]0,1]$, *if* $a > 1-\lambda,\ b > 1-\lambda'$ *then* $d \geq (1-\lambda') * (1-\lambda)$
(3) $\forall \rho \in]0,1]$, *if* $a * b > 1-\rho$ *then* $d \geq 1-\rho$.

证明。(1)与(3)等价，且(1)推出(2)，这是显然的。我们证明(2)推出(3)。

令 $\rho \in]0,\ 1]$，并假设 $a * b > 1 - \rho$. 取严格递增的序列 $(1-\lambda_n)_n$，其位于 $]0,1]$ 中并收敛于 a，以及 $(1-\lambda'_n)_n$，收敛于 b.。由于 $*$ 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上具有连续性，序列 $((1-\lambda_n) * (1-\lambda'_n))_n$ 收敛于 $a * b$，且对所有 n. 都有 $(1-\lambda_n) * (1-\lambda'_n) \leq a * b$。由于 $]1-\rho,\ 1]$ 是 $a * b$的开邻域，我们可以选取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $(1-\lambda_n) * (1-\lambda'_n) \in]1-\rho,\ 1]$.。应用 (2) 后，我们现在得到

$$d \geq (1-\lambda_n) * (1-\lambda'_n) > 1-\rho.$$

□

3.8.**定理 (定理 3.8 的第二部分)**。如果 X 是一个在 x中具有局部基的逼近空间

$$\mathcal{B}(x) = \{\varphi_{\lambda,x} \mid 0 < \lambda \leq 1\},$$

满足**(LS)**、**(LD)**、**(LT)** 的某个连续三角范数 $*$ 以及**(LH)**，则存在一个概率度量空间$(X, \beta, *)$，其底层逼近空间为 X。

证明。假设 X 在 x中有一个局部基

$$\mathcal{B}(x) = \{\varphi_{\lambda,x} \mid 0 < \lambda \leq 1\},$$

满足**(LS)**、**(LD)**、**(LT)** 和**(LH)**。

在 X 上定义 $\beta(x,y,-)$，如式（9）所示。我们证明，$(X, \beta, *)$ 是意义如式（1）所述的概率度量空间。

根据定义，$\beta(x,y,0) = 0$ 如 $\varphi_{\lambda,x}(y) \geq 0$ 以及 $\beta(x,y,\infty)$。

$\beta(x,\ y,\ -)$ 关于 $\gamma \leq \gamma'$，$\{\lambda \mid \varphi_{\lambda,x}(y) < \gamma\} \subseteq \{\lambda \mid \varphi_{\lambda,x}(y) < \gamma'\}$. 单调不减

$\beta(x,y,-)$ 在 $]0,\infty[$ 上左连续。由前述性质可知，$\sup_{s<\gamma} \beta(x,y,s) \leq \beta(x,y,\gamma)$。为证明反向不等式，假设 $\beta(x,y,\gamma) > 1-\lambda$。根据 3.6，这意味着 $\varphi_{\lambda,x}(y) < \gamma$，因此 $\exists s < \gamma,\ \varphi_{\lambda,x}(y) < s.$。这意味着 $\exists s < \gamma,\ \beta(x,y,s) > 1-\lambda.$。所以我们有 $\sup_{s<\gamma} \beta(x,y,s) > 1-\lambda.$。根据前述结论，我们可以得出 (P1) 成立。

为证明 (P2) 成立，注意到对于 $\gamma > 0$，我们有

$$\beta(x,x,\gamma) = \sup\{1-\lambda \mid \varphi_{\lambda,x}(x) < \gamma\} = 1.$$

显然，(P3) 由 (**LS**) 立即得出。

接下来验证 (P4)。设 $x \neq y$，由 (**LH**) 可得

$$\exists \lambda,\ \varphi_{\lambda,x}(y) \neq 0.$$

选取 γ 使得 $0 < \gamma < \varphi_{\lambda,\ x}(y)$，由 3.6 得到 $\beta(x,\ y,\ \gamma) \neq 1$.

接下来验证 β 满足 (P5)。设 $x,\ y,\ z \in X$，并假设 $\beta(y,\ z,\ \gamma') > 1-\lambda'$ 以及 $\beta(x,\ y,\ \gamma) > 1-\lambda.$。对于每个满足以下条件的 $0 < \varepsilon \leq 1$

$$(1-\lambda') * (1-\lambda) > 1-\varepsilon,$$

应用(**LT**)，我们有

$$\varphi_{\varepsilon,x}(z) \leq \varphi_{\lambda,x}(y) + \varphi_{\lambda',y}(z) < \gamma' + \gamma.$$

因此

$$\beta(x,z,\gamma+\gamma') > 1-\varepsilon.$$

这意味着

$$\beta(x,z,\gamma+\gamma') \geq (1-\lambda') * (1-\lambda).$$

应用 3.7，我们可以得出 $\beta(x,\ z,\ \gamma+\gamma') \geq \beta(y,\ z,\ \gamma') * \beta(x,\ y,\ \gamma)$。

最后，我们证明 $(X,\ \beta)$ 的底层逼近空间是 X。

设 $\{\psi_{\lambda,x} \mid 0 < \lambda \leq 1\}$ 与 $(X,\ \beta)$ 相关联，如 (6) 所示。则由 (7) 和 3.6 可知，对于 γ 有限

$$\psi_{\lambda,x}(y) < \gamma \Leftrightarrow \beta(x,y,\gamma) > 1-\lambda \Leftrightarrow \varphi_{\lambda,x}(y) < \gamma.$$

因此，我们可以得出 $\psi_{\lambda,\ x} = \varphi_{\lambda,\ x}$ 对所有 λ 都成立。 □

根据定理 3.4（3.8 的第一部分）和定理 3.8（3.8 的第二部分），我们现在得到以下结论。

3.9.**定理**。概率可度量化逼近空间恰好是那些 X在 x中具有局部基的

$$\mathcal{B}(x) = \{\varphi_{\lambda,x} \mid 0 < \lambda \leq 1\},$$

满足(**LS**)、(**LD**)、(**LT**) 的空间，其中某个连续三角范数为 $*$，且满足(**LH**)。

4. Probabilistic metrizability of uniform gauge spaces

本节将给出一致情形下概率可度量化的内在刻画。我们将研究由局部系统的一种一致替代结构所定义的对象，即一致系统 [13]，并以一致压缩映射作为态射。我们所研究的范畴与一致规范空间范畴 UG 同构 [11]。我们从具体函子 [7]开始

$$\Lambda : \mathsf{ProbMet} \to \mathsf{UG}, \tag{10}$$

其中，为每个概率度量空间（$X,\ \alpha,\ *$）都指定一个赋有一致系统的底层空间 X。

一致系统是根据点之间的距离集合来定义的。这意味着不要求 $[0,\infty]^{X\times X}$ 中的函数满足三角不等式。与上一节一样，这里以混合三角条件（AU3）取而代之。更多详情请参阅 [13]。

4.1. **定义**。设 X 为一个集合。X 上的一个**一致系统** 是一个理想 $\Upsilon \subseteq [0,\infty]^{X\times X}$，满足

(AU1) $\forall d \in \Upsilon,\ \forall x \in X,\ d(x,\ x) = 0$.(AU2) 若 $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N < \infty,$
$\exists d_\varepsilon^N \in \Upsilon,\ e \wedge N \leq d_\varepsilon^N + \varepsilon,$ 则 $e \in \Upsilon$.(AU3) $\forall d \in \Upsilon,\ \forall N < \infty,$
$\exists e^N \in \Upsilon,\ \forall x,\ y,\ z \in X,$

$$d(x,z) \wedge N \leq e^N(x,y) + e^N(y,z).$$

(AU4) $\forall d \in \Upsilon,\ d^{-1} \in \Upsilon$.

Υ 的成员称为**一致距离**。

与局部系统一样，在一致情形下，有一个基底就足够了。

4.2. **定义**。设 X 为一个集合且 $\Psi \subseteq [0,\infty]^{X\times X}$。那么，如果 Ψ 是满足 (AU1)、(AU3) 和 (AU4) 的理想基，则称 Ψ 为**一致基** 。

为了从一致基导出一致系统，我们需要以下**饱和运算**。给定一个子集 $\Psi \subseteq [0,\infty]^{X\times X}$，它是一致系统的一个基，我们定义

$$\langle\Psi\rangle = \{d \in [0,\infty]^{X\times X} \mid \forall \varepsilon > 0, \forall N < \infty, \exists d_\varepsilon^N \in \Psi, e \wedge N \leq d_\varepsilon^N + \varepsilon,\} \tag{11}$$

Ψ 的饱和，并称 $\langle\Psi\rangle$ 由 Ψ**生成**。

函数 $f\colon (X,\Upsilon) \to (Y,\Upsilon')$ 是一个**一致压缩映射** ，当且仅当

$$d' \circ (f \times f) \in \Upsilon \text{ whenever } d \in \Upsilon'. \tag{12}$$

同样，只需在陪域中的一致基上施加该条件。

在 [13] 中已证明，赋予一致系统并以一致压缩映射为态射的集合范畴，是一致规范空间范畴 UG 的一个同构描述 ，该范畴由 [11]引入。因此，我们仍将这个范畴称为 UG。

接下来我们证明存在一个具体函子

$$\Lambda : \mathsf{ProbMet} \to \mathsf{UG}.$$

在 [7] 中，与概率度量空间相关联的对象是用塔来描述的。在 [14] [15], 中，还给出了另一种等价的转换方式，即用（有限取值的）对称距离族来表示概率度量空间。这里我们将对相关联的（对称）距离族采用同样的表述。区别在于，我们将这个集合族解释为一致系统的一致基。最后一节中，我们会回到以（对称）距离族为基础的表述。

设 $(X,\ \alpha,\ *)$ 是一个概率度量空间。与之相关联的一个**底层 一致空间范畴-空间** X 可通过给出以下一致基 Ψ，来定义，

$$\Psi = \{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\}, \tag{13}$$

with

$$d_\lambda(x,y) = \inf\{0 \leq \gamma < \infty \mid \alpha(x,y,\gamma) > 1-\lambda\}.$$

与（7）中的证明类似，我们可以证明当 γ 为有限时，以下等价关系成立。由于它与上一节的内容十分相似，我们就不再重复所有证明。

4.3. **命题**。对于 $0 \leq \gamma < \infty$ 和 $0 < \lambda \leq 1$ ，我们有

$$d_\lambda(x,y) < \gamma \Leftrightarrow \alpha(x,y,\gamma) > 1-\lambda. \tag{14}$$

4.4. **命题**。 $\Psi = \{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\}$ （定义见(13)）是X 上的一致基，具体含义见 *4.2*。

证明。根据定义，所有 $d_\lambda \in [0,\infty]^{X\times X}$. 满足 (AU1)，即对每个 λ，都有 $d_\lambda(x,x) = 0$，这可由以下事实得出：对所有 $\gamma > 0$， $\alpha(x,x,\gamma) = 1$。

接下来我们证明条件 (AU3)。事实上，我们将证明一致混合三角不等式 (**UM**)，显然它蕴含 (AU3)：对于满足以下条件的 $0 < \varepsilon \leq 1,\ 0 < \lambda \leq 1$

$$(1-\lambda) * (1-\lambda) > 1-\varepsilon.$$

并且对所有 $x, y, z \in X$，有

$$d_\varepsilon(x,z) \leq d_\lambda(x,y) + d_\lambda(y,z). \tag{15}$$

首先注意到，鉴于 t-范数 $*$ 在 $[0,1]$ 上的连续性，存在 $0 < \lambda \leq 1$ 使得

$$(1-\lambda) * (1-\lambda) > 1-\varepsilon.$$

如果 (15) 右端的值为 ∞，则无需证明。接下来，任取 γ, γ'，其中 $d_\lambda(x,y) < \gamma$ 且 $d_\lambda(y,z) < \gamma'$.。应用 (14) 得到 $\alpha(x,y,\gamma) > 1-\lambda$ 且 $\alpha(y,z,\gamma') > 1-\lambda$。由 α 的公理（P5），我们得到

$$\alpha(x,z,\gamma+\gamma') \geq \alpha(y,z,\gamma') * \alpha(x,y,\gamma) \geq (1-\lambda) * (1-\lambda) > 1-\varepsilon.$$

再次应用 (14)，得到 $d_\varepsilon(x,\ z) < \gamma+\gamma'$，由此可得结论 (15)。

性质 (AU4) 可由条件(**US**) 推出，我们将在 4.6 节列出该条件。

□

应用 [7]，中的结果很容易看出， Λ 确实是一个函子，因为其中给出的塔式描述等价于本文所述的描述。集合 $\{d_\lambda < \rho\}$ 与集合 U^ρ_λ [7] 相同。用一致距离表述的证明与 3.3 节中的证明相当类似。

4.5. 命题。 Λ *: ProbMet* $\to$ *UG* 是一个具体函子，这意味着当 $f: (X,\alpha) \to (Y,\alpha')$ 是非扩张映射时， $\Lambda(f): (X,\Upsilon) \to (Y,\Upsilon')$ 是 *(12)* 意义下的一致压缩映射，其中 $\Lambda((X,\alpha)) = (X,\Upsilon)$ 且 $\Lambda((Y,\alpha')) = (Y,\Upsilon')$

为了确定 ProbMet 的像，我们列出以下性质。

4.6. **定理 (定理 4.10 的第一部分)**。设 $(X、\ \alpha、\ *)$ 为一个概率度量空间。与之关联的一致基 $\Psi = \{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\}$ 如 (13) 中所示，具有以下性质：

(US) 对称性：对于每个 $0 < \lambda \leq 1$ 以及 $x、\ y \in X$，有

$$d_\lambda(x,y) = d_\lambda(y,x).$$

(UD) 稠密性：对于每个 $0 < \lambda \leq 1$

$$d_\lambda = \inf_{\rho<\lambda} d_\rho.$$

(UT) *t*-范数：对于 $0 < \varepsilon \leq 1、\ \ 0 < \lambda \leq 1$ 和 $0 < \lambda' \leq 1$，有

$$(1-\lambda') * (1-\lambda) > 1-\varepsilon,$$

并且对于 $x、\ y、\ z \in X$，有

$$d_\varepsilon(x,z) \leq d_\lambda(x,y) + d_{\lambda'}(y,z).$$

(UH) 分离性：

$$x \neq y \ \textit{then}\ \exists\lambda,\ 0 < \lambda \leq 1,\ d_\lambda(x,y) > 0.$$

与局部情形类似，很容易看出(**UT**) 蕴含(**UM**)。因此，(**UT**)可视为一致强混合三角条件。

接下来，我们研究另一个方向，即如何将概率度量空间与 UG-空间的一个特定一致基相关联。

4.7.**定义**。 设 X 是一个具有一致基的 UG-空间

$$\Psi = \{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\}.$$

在 X 上，我们定义 $\beta(x,\ y,\ \infty) = 1$，并且对 $\gamma < \infty$进一步定义：

$$\beta(x,y,\gamma) = \sup\{1-\lambda \mid d_\lambda(x,y) < \gamma\} = 1 - \inf\{\lambda \mid d_\lambda(x,y) < \gamma\}. \tag{16}$$

4.8.**命题**。 给定具有满足 **(UD)** 的一致基的 X，对于 $0 \leq \gamma < \infty$，我们有：

$$\beta(x,y,\gamma) > 1-\lambda \Leftrightarrow d_\lambda(x,y) < \gamma.$$

4.9.**定理 (定理 4.10 第二部分）**。 若 X 是一个具有一致基的 一致空间范畴-空间

$$\Psi = \{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\},$$

该一致基满足**(US), (UD), (UT)**，其中连续三角范数为 $*$，且满足 **(UH)**，则存在一个概率度量空间 $(X, \beta, *)$，其底层 一致空间范畴-空间为 X。

证明。 假设 X 具有一致基

$$\Psi = \{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\}$$

满足 **(US)、(UD)、(UT)** 和**(UH)**。

在 X 上，按照 (16) 定义 $\beta(x,\ y,\ -)$。类似于 3.8 中的证明，$(X,\ \beta,\ *)$ 是一个概率度量空间。

最后，我们证明 $(X,\ \beta)$ 的底层 UG-空间是 X。

令 $\{e_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\}$ 按照 (13) 与 $(X,\ \beta)$ 关联。于是，由 (14) 和 4.8，对于 $\gamma < \infty$

$$e_\lambda(x,y) < \gamma \Leftrightarrow \beta(x,y,\gamma) > 1-\lambda \Leftrightarrow d_\lambda(x,y) < \gamma.$$

因此，我们可以得出，对于所有 λ，$e_\lambda = d_\lambda$。 □

由定理 4.6（4.10 第一部分）和 4.9（4.10 第二部分），我们现在得到以下结论。

4.10.**定理**。概率可度量化的一致空间范畴空间恰好是那些 X 具有一致基的空间

$$\Psi = \{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\},$$

满足**(US)**、**(UD)**、**(UT)** 的空间，其中连续三角范数为 $*$，并且满足**(UH)**。

5. An isomorphic description of the category of Probabilistic Metric Spaces

人们曾多次尝试用带有逐层非扩张映射的对称广义度量族，对带有非扩张映射的概率度量空间范畴作同构描述。然而，要基于广义度量得到同构，就必须加以限制。在 [15]中，连续三角范数被限制为 M，取 $a*b = \min(a,b)$。另一项研究方向是用对称广义度量来表达弱概率度量空间，这一做法通过弱化公理（P5）并将其替换为公理 [14]得以实现

$$\alpha(x,y,\gamma) = 1 \text{ and } \alpha(y,z,\gamma') = 1 \Rightarrow \alpha(x,z,\gamma+\gamma') = 1.$$

或通过施加

$$\alpha(x,y,\gamma) > t \text{ and } \alpha(y,z,\gamma') > t \Rightarrow \alpha(x,z,\gamma+\gamma') > t$$

对于 $0 \leq t < 1$.

本节与前几节一样，仍采用针对任意连续三角范数表述的公理（P5）（如式（1）所示），并研究由距离组成的集族，其中集族成员的三角条件被集族自身的混合三角条件所取代。

请注意，以下内容与上一节有一个根本区别。在定义 5.1 中，对象是赋有距离族的集合。不同的距离族代表不同的对象。然而，在第 4 节中，距离族是一致系统的基。这意味着不同的距离族可能生成相同的 UG 对象。第二个根本区别在于式 (17) 中态射的表述：它们是逐层非扩张的。然而，在第 4 节中，态射被定义为一致压缩映射 (12)，其中函数定义域中的整个一致系统都参与其中。

5.1. **定义**。令 $\mathfrak{Z}$ 为一个范畴，其对象为 $(X,\ \{d_\lambda \mid 0<\lambda\le 1\})$，由 $0<\lambda\le 1$ 编号的距离族赋予结构的集合，其中$\{d_\lambda \mid 0<\lambda\le 1\}$ 满足以下条件：**(US)**、**(UD)**、**(UT)**，对于某个连续三角范数 $*$，以及**第 4.6 节中的 (UH)**。

态射 $f\colon (X,\{d_\lambda \mid 0<\lambda\le 1\}) \to (Y,\{d'_\lambda \mid 0<\lambda\le 1\})$ 是逐层非扩张的，当且仅当

$$\forall\lambda,\ d'_\lambda(f(x),f(x'))\le d_\lambda(x,x'),\ \text{whenever } x,x'\in X. \tag{17}$$

设 $(X,\alpha,*)$ 是一个概率度量空间。如同 [14]

$$(X,\{d_\lambda \mid 0<\lambda\le 1\}) \tag{18}$$

通过以下方式与 $(X,\alpha,*)$ 相关联：

$$d_\lambda(x,y)=\inf\{0\le\gamma<\infty \mid \alpha(x,y,\gamma)>1-\lambda\}.$$

这与 (13) 中的公式相同，因此我们再次得到 (14) 中的等价关系，即对于 $0\le\gamma<\infty$ 和对于 $0<\lambda\le 1$

$$d_\lambda(x,y)<\gamma \Leftrightarrow \alpha(x,y,\gamma)>1-\lambda. \tag{19}$$

5.2. **命题**。这定义了一个具体函子 $\Delta\colon \mathsf{ProbMet}\to\mathfrak{Z}$，它将对象 $(X,\alpha,*)$ 映射为$(X,\{d_\lambda \mid 0<\lambda\le 1\})$。

证明。$(X,\{d_\lambda \mid 0<\lambda\le 1\})$ 属于 $\mathfrak{Z}$ 的证明与针对相同连续 t-范数 $*$ 和**(UH)** 的**(US)**, **(UD)**, **(UT)** 证明完全相同。

接下来，设 $f\colon (X,\alpha)\to(Y,\alpha')$ 是一个非扩张映射。首先注意，在 $d'_\lambda(f(x),f(x'))=\infty$ 的情形下，对每个 $\gamma<\infty$, $\alpha(f(x),f(x'),\gamma)\not>1-\lambda$. 都成立。这意味着，对每个 $\gamma<\infty$, $\alpha(x,x',\gamma)\not>1-\lambda$. 。因此我们可以得出结论：$d_\lambda(x,x')=\infty$.

在有限情形下，应用 (19) 可得到以下等价关系：

$$\begin{aligned}
f:(X,\alpha)\to(Y,\alpha') \text{ is non-expansive} &\Leftrightarrow \forall t,\ \alpha(x,x',t)\le\alpha'(f(x),f(x'),t)\\
&\Leftrightarrow \forall t,\forall\lambda:\ \ \alpha(x,x',t)>1-\lambda\Rightarrow\\
&\qquad \alpha'(f(x),f(x'),t)>1-\lambda\\
&\Leftrightarrow \forall t,\forall\lambda:\ d_\lambda(x,x')<t\Rightarrow d'_\lambda(f(x),f(x'))<t\\
&\Leftrightarrow \forall\lambda,\ d'_\lambda(f(x),f(x'))\le d_\lambda(x,x').
\end{aligned}$$

由此可知，$\Delta f\colon (X,\{d_\lambda \mid 0<\lambda\le 1\})\to(Y,\{d'_\lambda \mid 0<\lambda\le 1\})$ 是逐层非扩张的。□

接下来我们考察反方向。设 $(X, \{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\})$ 是 $\mathfrak{Z}$ 的一个对象，并令 $(X, \beta, *)$ 如 4.7 中所定义： $\beta(x, y, \infty) = 1$ 并且进一步对 $\gamma < \infty$:

$$\beta(x, y, \gamma) = \sup\{1 - \lambda \mid d_\lambda(x, y) < \gamma\} = 1 - \inf\{\lambda \mid d_\lambda(x, y) < \gamma\}. \tag{20}$$

同样，对于 $\gamma < \infty$，我们有

$$\beta(x, y, \gamma) > 1 - \lambda \Leftrightarrow d_\lambda(x, y) < \gamma. \tag{21}$$

正如上一节所述，由于上面列出的 $(X, \{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\})$ 的性质，$(X, \beta, *)$ 定义了一个概率度量空间。

5.3. **命题**。 这定义了一个具体函子 Φ: $\mathfrak{Z} \to \mathsf{ProbMet}$，它将对象 $(X, \{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\})$ 映射到 $(X, \beta, *)$。

证明。 这是一个函子，证明如下。
设 $f: (X, \{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\}) \to (X, \{d'_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\})$ 是逐层非扩张的。首先注意，在 $\gamma = \infty, \beta(x, x', \infty) = \beta'(f(x)\ f(x')\ \infty) = 1$ 的情形下，根据定义成立。在有限情形下，应用 (21) 可得以下等价关系:

$$\begin{aligned}
f : (X, \{d_\lambda \mid \lambda\}) \to (X, \{d'_\lambda \mid \lambda\}) \text{ levelw. n-exp.} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \lambda,\ d'_\lambda(f(x), f(x')) \leq d_\lambda(x, x') \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \gamma, \forall \lambda :\ d_\lambda(x, x') < \gamma \Rightarrow \\
&\qquad\ d'_\lambda(f(x), f(x')) < \gamma \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \gamma, \forall \lambda :\quad \beta(x, x', \gamma) > 1 - \lambda \Rightarrow \\
&\qquad\ \beta'(f(x), f(x'), \gamma) > 1 - \lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad \beta(x, x', -) \leq \beta'(f(x), f(x'), -) \\
&\Leftrightarrow \quad \Phi(f) : (X, \beta) \to (Y, \beta') \text{ n-exp.}
\end{aligned}$$

□

5.4. **定理**。 Δ： $\mathsf{ProbMet} \to \mathfrak{Z}$ 是一个同构。

证明。 我们证明 $\Phi \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathsf{ProbMet}}$ 和 $\Delta \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathfrak{Z}}$.

给定一个概率度量空间（X, α, $*$），应用 Δ 可得一个对象（X, $\{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\}$，属于 $\mathfrak{Z}$。接着应用 Φ 可得一个概率度量空间（X, β, $*$），如 5.2 和 5.3 所述。对 $\gamma < \infty$ 应用 (19) 和 (21)，可得

$$\beta(x, y, \gamma) > 1 - \lambda \Leftrightarrow d_\lambda(x, y) < \gamma \Leftrightarrow \alpha(x, y, \gamma) > 1 - \lambda.$$

由于 $\beta(x, y, \infty) = \alpha(x, y, \infty) = 1$, 因此我们有 $\alpha = \beta$.

对于另一个恒等式，我们从 $\mathfrak{Z}$ 中的一个对象（X, $\{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\}$）开始，并应用 Φ。设（X, β, $*$）为所得的概率度量空间。应用 Δ 可得来自 $\mathfrak{Z}$. 的对象（X, $\{e_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\}$）。再次对 $\gamma < \infty$ 应用 (19) 和 (21)，可得

$$e_\lambda(x, y) < \gamma \Leftrightarrow \beta(x, y, \gamma) > 1 - \lambda \Leftrightarrow d_\lambda(x, y) < \gamma,$$

这意味着 $e_\lambda = d_\lambda$ 对所有 λ. □

在一些相关论文中，假设所涉及的距离取有限值。在我们的框架中也可以得到这一条件。

5.5. **定义**。 定义 $\mathsf{ProbMet}_{\lim}$ 为 ProbMet 的具体全子范畴，由满足以下条件的对象 $(X, \alpha, *)$ 构成

$$\forall x, y \in X,\ \lim_{\gamma \to \infty} \alpha(x, y, \gamma) = 1. \tag{22}$$

定义 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{fin}}$ $\mathfrak{Z}$ 的全子范畴，该子范畴由满足以下条件的 $(X, \{d_\lambda \mid 0 < \lambda \leq 1\})$ 组成

$$\forall x, y \in X,\ \forall\ 0 < \lambda \leq 1,\ d_\lambda(x, y) < \infty. \tag{23}$$

5.6. **命题**。函子 Δ 和 Φ 限制为 Δ: $\mathsf{ProbMet}_{lim} \to \mathfrak{Z}_{fin}$ 和 Φ： $\mathfrak{Z}_{fin} \to \mathsf{ProbMet}_{lim}$，因此范畴 $\mathsf{ProbMet}_{lim}$ 和 $\mathfrak{Z}_{fin}$ 同构。

证明。设 $x, y \in X$，并假设 $\lim_{\gamma\to\infty} \alpha(x, y, \gamma) = 1$。这意味着对于每个$0 < \lambda \leq 1$,，集合

$$\{0 \leq \gamma < \infty \mid \alpha(x, y, \gamma) > 1 - \lambda\}$$

非空，因此由 (18) 可得 $d_\lambda(x, y) < \infty$.

设 $x, y \in X$，并假设对于每个 $0 < \lambda \leq 1$，距离 $d_\lambda(x, y) < \infty$。任取 λ，取 $\lambda' < \lambda$，再取满足 $d_{\lambda'}(x, y) < \gamma$. 的 γ。这意味着

$$\inf\{\rho \mid d_\rho(x, y) < \gamma\} \leq \lambda' < \lambda.$$

应用 (20) 得 $\beta(x, y, \gamma) > 1 - \lambda$.

□

References

[1] B. Berckmoes, R. Lowen, J.A. van Casteren，概率测度与随机变量上的距离，《数学分析与应用杂志》，374(2)，(2011)，412-428。[2] B. Berckmoes, T. Hellemans, M. Sioen, J.A. van Casteren，将逼近理论应用于Wasserstein度量的相对豪斯多夫非紧性测度，《数学分析与应用杂志》，449(20)，(2017)，1770-1789。[3]M.M. Clementino, E. Colebunders, W. Tholen，作为空间的Lax代数，《幺半拓扑：序、度量与拓扑的范畴论方法》，剑桥大学出版社，(2014)，375-465。[4] M. M. Clementino 和 D. Hofmann, Lax代数的拓扑特征，《应用范畴结构》，11，(2003) 267-286。[5] E. Colebunders, S. De Wachter, R. Lowen，DCPO之间压缩映射的不动点，《计算机科学中的数学结构》，24(1)，(2014)，e240102，共18页。[6] E. Colebunders, S. De Wachter, M. Schellekens，通过逼近理论进行复杂性分析，《应用范畴结构》，22 (1)，(2014)，119-136。[7] E. Colebunders, R. Lowen, 概率可度量化逼近空间的逼近性质，《拓扑学及其应用》，373,(2025), doi 10.1016/j.topol.2025.109494。[8] D. Hofmann, G. J. Seal, W. Tholen 编，《幺半拓扑：序、度量与拓扑的范畴论方法》，剑桥大学出版社，(2014)。[9] H. Lai, L. Shen, J. Yu，关于逼近空间的概率可度量性，《拓扑学及其应用》，第358卷，(2024)，109-113。[10] R. Lowen，《逼近空间：拓扑—一致性—度量三元组中缺失的一环》，牛津数学专著，牛津大学出版社，(1997)。[11] R. Lowen，《指标分析：逼近理论的实践》，施普林格数学专著，施普林格出版社，(2015)。[12] R. Lowen, M. Sioen，重新审视超空间上的Wijsman拓扑与Attouch-Wets拓扑，《拓扑学及其应用》，70，(1996)，179-197。[13] R. Lowen, B. Windels, AUnif：pMet与Unif的共同超范畴，《国际数学与数学科学杂志》，21，(1998) 1-18。[14] E. Nishiura，概率度量空间中的构造性方法，《基础数学》，67，(1970)，115-124。[15] B. Schweitzer, A. Sklar，《概率度量空间》，北荷兰概率与应用数学丛书，爱思唯尔科学出版社，纽约，(1983)。[16] C. Sempi，概率度量空间，《一般拓扑学百科全书》，E节，e-15，288-292。[17] M. Sioen, S. Verwulgen，量化泛函分析与半赋范空间：一种对偶伴随，《纯粹与应用代数杂志》，207，(2006)，675-686。

E. Colebunders 数学与数据科学系，布鲁塞尔自由大学，普莱因大道2号，布鲁塞尔1050，比利时¨e*evacoleb@vub.be*数学系，安特卫普大学，Middelheimlaan1，2020安特卫普，比利时¨e*eva.colebunders@uantwerpen.be*

R. Lowen 数学系，安特卫普大学，米德尔海姆大道1号，2020 安特卫普，比利¨时
bob.lowen@uantwerpen.be