arXiv:2601.06291v1 [cond-mat.stat-mech] 9 Jan 2026

受限控制的追逐—逃逸动力学

R. G. Rossatto

佩洛塔斯联邦大学物理系、物理与数学研究所，佩洛塔斯，巴西

H. A. Alvarez液体与生物系统物理研究所，*CONICET-UNLP*，拉普拉塔，阿根廷；阿图罗·豪雷切国立大学健康科学研究所，弗洛伦西奥·巴雷拉，阿根廷；以及拉普拉塔国立大学精确科学学院生物科学系，拉普拉塔，阿根廷

C.M. Carlevaro液体与生物系统物理研究所，*CONICET-UNLP*，拉普拉塔，阿根廷；以及阿根廷贝里索的国立技术大学拉普拉塔地区学院实验与计算力学研究中心Jos´eRafael Bordin物理系、物理与数学研究所、佩洛塔斯联邦大学，佩洛塔斯，巴西；以及德国康斯坦茨大学物理系

（日期：2026年1月13日）

摘要

我们研究了一个位于具有随机分布静态障碍物的二维方格晶格上的最简追逐–逃逸模型，重点考察几何无序如何控制集体追逐动力学。追逐者和逃逸者依据短程感知规则移动，而障碍物密度则调节可达空间的连通性。通过结合几何分析、动力学观测量、生存统计和输运表征，我们建立了晶格连通性与追捕效率之间的直接联系。广度优先搜索分析表明，在达到渗流阈值之前，障碍物诱导的碎片化会导致可达性逐步丧失，从而确定动力学的有效初始条件。捕获时间和捕获代价对障碍物密度呈现非单调依赖，反映出连通环境中的路径延长与渗流阈值附近的几何限域之间的竞争。生存分析显示，逃逸者群体的衰减遵循威布尔形式，其特征时间和形状参数随障碍物密度变化表现出明显的交叉转变，表明协同捕获与约束主导的俘获并存。通过均方位移指数量化的输运性质进一步支持了这一图景，揭示出次扩散动力学，以及在接近渗流状态时向几何控制机制的趋近。总体而言，我们的结果表明，无序环境中的追逐与逃逸动力学受几何驱动的交叉转变支配，其中渗流和连通性作为统一的控制参数，决定了空间、时间和集体行为。

I. 引言

追逐与逃逸动力学作为将局部相互作用规则与涌现集体行为联系起来的最简模型，在统计物理、软物质与活性物质及复杂系统领域持续受到关注 [1–5]。在活性系统和驱动系统中，几何形状与拥挤效应对于塑造输运、相遇率和协同发挥着核心作用，因此追捕–逃避过程是研究非平衡组织的天然试验平台 [6–9]。这些模型还提供了活跃态与吸收态之间非平衡相变的最简实现，并与流行病传播、扩散限制反应及捕食者–猎物动力学密切相关 [6, 7, 10]。

虽然许多理论表述假设环境开放或结构较弱，但现

实场景往往受到障碍物和异质性连通性的强烈制约。这类约束在生物系统中普遍存在：免疫细胞需要在复杂组织中导航 [11–14], ，在破碎化的生态景观中穿行 [15, 16], ；在技术应用中，群体机器人学以及拥挤环境中的自主导航也面临类似问题 [17–22]。相关的人群与疏散动力学进一步表明，边界和瓶颈会控制集体运动及逃逸效率 [23–25]。

从统计物理学的角度来看，无序与限制会自然诱发反常输运、亚扩散和俘获，这些现象在活性介质和非均匀介质中被广泛观察到 [6, 26, 27]。几何约束会产生长时间关联以及广泛分布的捕获时间，从而导致非高斯动力学和重尾生存统计。基于格点的模型提供了一个可控框架，用于区分几何效应与动力学效应，并建立空间可达性、渗流和追捕效率之间的直接联系 [28, 29]。特别是，在二维追逐–逃逸模型中引入静态障碍物，会产生非平凡的生存曲线和非单调的效率权衡 [30], ；相关的基于图的方法则能够捕捉追捕过程中的有限连通性效应和相变 [31–36]。

受上述考量的启发，我们研究了一个位于正方晶格上的最简追逐–逃逸模型，其中随机分布着静态障碍物，追捕者和逃逸者依据短程感知规则和随机更新进行移动 [37, 38]。通过系统地改变障碍物密度和种群比例，我们分析了几何无序如何控制以下因素：**(i)** 作为整体效率衡量指标的捕获时间；**(ii)** 与集体努力相关的代价函数；**(iii)** 通过生存函数 $S(t)$ 和累积风险 $H(t)$ 表征的生存统计；以及 **(iv)** 通过均方位移（MSD）指数 α 量化的输运反常。

我们的结果揭示了追捕动力学中一种由几何驱动的交叉转变。中等障碍物密度会使捕获时间和代价达到最大，这反映了在仍保持连通的区域中探索受到阻碍；而当连通性崩塌后，几何碎裂占据主导，并降低效率和变异性。逃逸者群体的衰减遵循威布尔分布，表明存在两种截然不同的捕获机制：早期的压缩指数行为与协同追捕有关，而长期的拉伸指数行为则对应于限制和几何俘获。这种交叉转变是非均匀介质中亚扩散、俘获主导动力学的典型特征 [6, 26]。通过整合渗流分析、生存统计和输运表征，本研究建立了一个统一的

统计物理框架，用于描述无序环境中的协同追捕。

本文其余部分安排如下：第2节介绍模型和仿真方案。第3节呈现并讨论主要结果。最后，第4节总结结论，并展望未来研究方向。

II. 模型与计算方法

我们研究定义在边长为 $L = 128$ 的二维方格晶格上的追捕—逃逸系统（其他系统尺寸的结果见补充材料）。该系统由两类智能体组成： N^{C}追捕者（猎人）和 N^{E}逃逸者（猎物），以及分布在晶格上的静态障碍物。所有仿真均采用周期性边界条件。

首先使用随机顺序吸附（RSA）方案放置障碍物 [10]。障碍物密度定义为 $\phi = N_{\mathrm{obs}}/L^2$，其中 N_{obs} 为障碍物数量，其取值范围为 $\phi \in \{0.00, 0.10, 0.20,$

$0.30, 0.40, 0.50, 0.59, 0.60, 0.61, 0.70, 0.80\}$。系统在临界障碍物密度 ϕ_c 处发生几何渗流转变。对于正方晶格上的位点渗流，在热力学极限下，临界阈值为 $\phi_c \simeq 0.593$ [29]。对于此处研究的有限系统，我们定义有效渗流阈值 $\phi_c = 0.60$。

逃逸者的初始数量定义为空闲晶格点数量的固定比例，而追捕者的数量则是逃逸者数量的函数，

$$N_0^{\mathrm{E}} = \frac{L^2(1-\phi)}{4}, \tag{1}$$

$$N^{\mathrm{C}} = f N_0^{\mathrm{E}}, \tag{2}$$

其中 $f \in \{0.5, 0.8, 1.0\}$。不考虑出生与死亡过程。

主体动力学采用基于主体的方法进行建模，并使用离散时间更新。追捕者和逃逸者均通过有限的感知半径或搜索半径（SR）进行交互，该设定受文献 [30] 启发，并相较于文献 [37, 38]进行了简化。感知半径采用曼哈顿度量定义：两个格点 $S_1 = (x_1, y_1)$ 和 $S_2 = (x_2, y_2)$ 之间的距离为

$$d_{\mathrm{M}} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \tag{3}$$

如果 $d_{\mathrm{M}} \leq SR$，且 $SR \in \{1, 2\}$，则一个智能体可以检测到另一个智能体。

在每个模拟步中，随机选择一个晶格格点。如果该格点为空或被障碍物占据，则不进行更新。如果该格点上有智能体，它将尝试按照以下规则移动：(i) 追逐者朝着在 $SR = 1$ 内探测到的最近逃逸者移动；如果有多个目标，则随机选择一个；(ii) 如果在 $SR = 1$ 内未探测到逃逸者，但在 $SR = 2$ 内至少探测到一个，追逐者便朝着局部逃逸者密度最高的方向移动；(iii) 如果在 $SR = 2$ 内未探测到逃逸者，追逐者则进行随机游走。逃逸者遵循类似规则：远离 $SR = 1$ 内的附近追逐者，或远离追逐者密度较高的区域（ $SR = 2$ 内），否则进行随机游走。图 1 示意性地展示了感知半径。

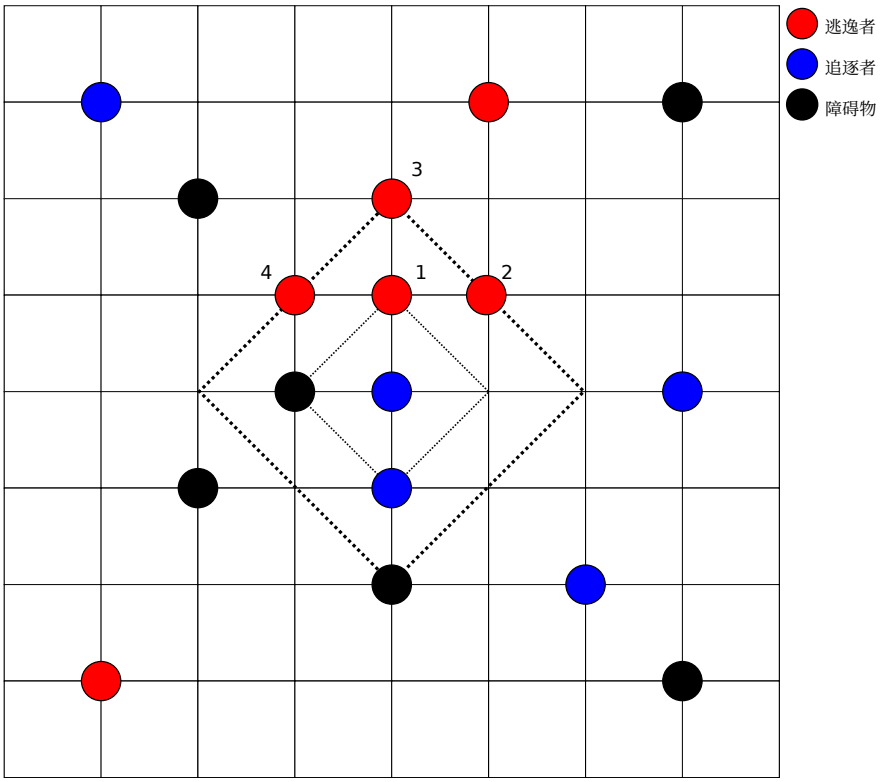

图 1. 示意图展示了使用曼哈顿度量定义的感知半径（SR），追逐者位于晶格中心。SR = 1和 SR = 2以内的格点确定了适用定向运动规则的区域。该示意图展示了基于智能体的动力学中所使用的局部决策规则，未按比例绘制。

表征追捕效率的一个核心量是捕获时间 TT，其定义为捕获所有可达逃逸者所需的模拟步数。根据参考文献 [1], ，我们将捕获代价定义为

$$c = \frac{N^{\mathrm{C}} TT}{N_0^{\mathrm{E}}} = f\,TT, \tag{4}$$

它衡量的是每名初始逃逸者所需的集体努力。这一成本是集体努力的操作性度量，而非能量量。

我们采用非参数生存分析技术分析生存统计。由于仿真会在所有可达逃逸者都被捕获后终止，且不同实现的持续时间可能不同，因此我们采用 Kaplan–Meier 估计量 [39]。生存函数定义为

$$S(t) = \prod_{i:t_i \le t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right), \tag{5}$$

其中， d_i 是在时间 t_i 被捕获的逃逸者数量， n_i 是在 t_i之前即刻处于风险中的逃逸者数量。生存函数也可以等价地表示为

$$S(t) = \exp[-H(t)], \tag{6}$$

其中， $H(t)$是累积风险函数，使用 Nelson–Aalen 估计量 [40],进行估计。

$$H(t) = \sum_{i:t_i \le t} \frac{d_i}{n_i}. \tag{7}$$

我们使用 `Trajpy` 软件包 [41]计算追捕者的均方位移（MSD），以此表征输运性质。MSD 定义为

$$\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle \propto t^{\alpha}, \tag{8}$$

其中，指数 α 表征系统的动力学状态。追捕者的 MSD 被用作系统整体输运性质的代理指标，因为追捕者在整个追捕过程中都会主动探索可达空间。

III. 结果

A. 几何可达性与广度优先搜索分析

在进行动力学追捕—逃逸模拟之前，我们使用广度优先搜索（BFS）算法 {v1} 对晶格连通性进行了纯几何分析。

这一步初步分析旨在量化障碍物密度ϕ 如何影响逃逸者的拓扑可达性，而不受具体动力学规则的影响。由于追捕轨迹受空闲晶格点连通性的限制，这项分析为解读后续所有动力学观测量提供了几何基线。

利用广度优先搜索，我们计算拓扑上不可达的逃逸者所占比例，即由于障碍物诱导的晶格碎片化而无法被任何追捕者到达的逃逸者所占的比例。对于不同的初始追捕者数量，该量作为 ϕ的函数进行评估N^{C} ，结果如图2所示。虚线表示障碍物网络的渗流阈值 ϕ_c。

随着 ϕ 增加，不可达逃逸者的比例单调增长，反映出全局连通性的逐步丧失。值得注意的是，当 $\phi \gtrsim 0.50$时，曲线的斜率已经出现显著增加，远低于热力学极限下理论上的位点渗流阈值。这种行为直接源于晶格中的有限尺寸效应（$L = 128$）：在形成贯穿系统的簇之前，局部障碍物簇就可能使可达空间发生碎片化。因此，逃逸者会被限制在与追捕者探索区域不连通的孤立区域内。这些区域构成了后续章节所分析的动力学捕获过程的有效初始条件。晶格渗流研究 [29] 以及表现出连通性驱动的转变的追捕—逃逸模型 [28, 30]中，也有关于渗流有限尺寸前兆的类似报道。

除了可达性之外，广度优先搜索分析还使我们能够量化系统的特征几何长度尺度。具体而言，我们计算追捕者与逃逸者之间的平均最短路径长度 $\langle d \rangle$，仅考虑存在连接路径的配对。这一指标反映了与追捕动力学相关的有效几何间距，并在图3中展示为 ϕ 的函数。

在障碍物密度较低时， $\langle d \rangle$ 会随 ϕ增加，并在 $\phi \approx 0.50$附近达到最大值。在这一状态下，引入障碍物会在仍保持连通的晶格中延长路径，从而增加追捕者到达逃逸者所必须 traversed 的典型距离。然而，当 ϕ较大时， $\langle d \rangle$ 会急剧下降。这种反转表明可达空间的几何结构发生了质的变化：追捕者和逃逸者越来越受到限制，被困在自由位点的同一小簇中，此时局部空间相关性比长程连通性更为重要。对于 $\phi > \phi_c$，对应不同 N^{C} 取值的曲线会重合，

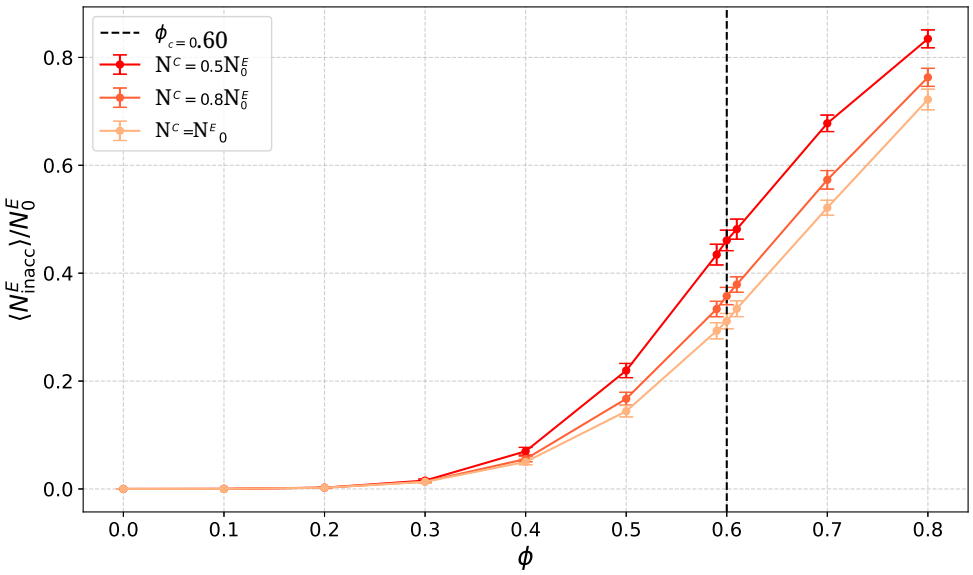

图2. 通过广度优先搜索分析获得的拓扑不可达逃逸者比例随障碍物密度 ϕ的变化。 $\phi \gtrsim 0.50$时观察到的快速增长表明，在达到渗流阈值 ϕ_c之前，连通性丧失已经开始，这凸显了可达空间的有限尺寸碎裂。

这表明晶格的几何结构，而非智能体密度的相对值，成为控制该系统的主导因素。

这种几何交叉预示了后文讨论的动力学状态。特别是，高 ϕ 下 $\langle d \rangle$ 的减少反映了强烈的限制和几何俘获，这最终决定了输运性质和捕获效率。这种由几何主导的行为与活性粒子系统在非均匀且拥挤的环境中运动时的观察结果一致 [6, 26]。

B. 捕获时间与几何减速

捕获时间（TT）提供了追捕过程动力效率的全局衡量指标，定义为追捕者捕获所有拓扑上可到达的逃逸者所需的模拟步总数。因此， TT 直接反映了广度优先搜索分析所揭示的几何约束如何调节集体动力学。具体而言，上一小节讨论的晶格连通性和特征路径长度的变化，预计会在捕获的时间尺度上留下明显的特征

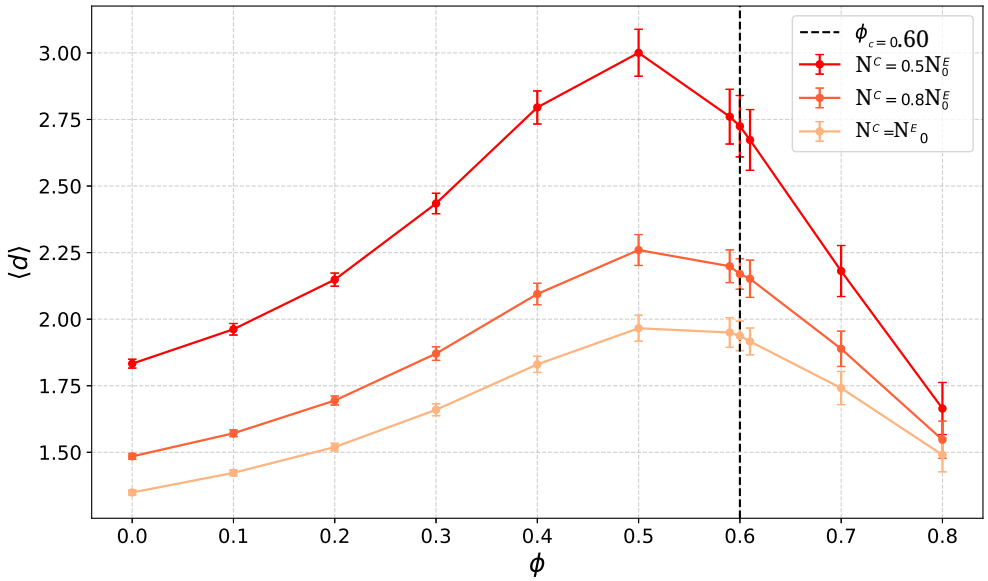

图3。使用广度优先搜索计算，并仅考虑拓扑可达对时，追捕者与逃逸者之间的平均最短路径长度 $\langle d \rangle$ 随障碍物密度 ϕ 的变化。非单调行为反映了从连通晶格中的路径延长到高 ϕ 时孤立簇内共同禁闭的转变。

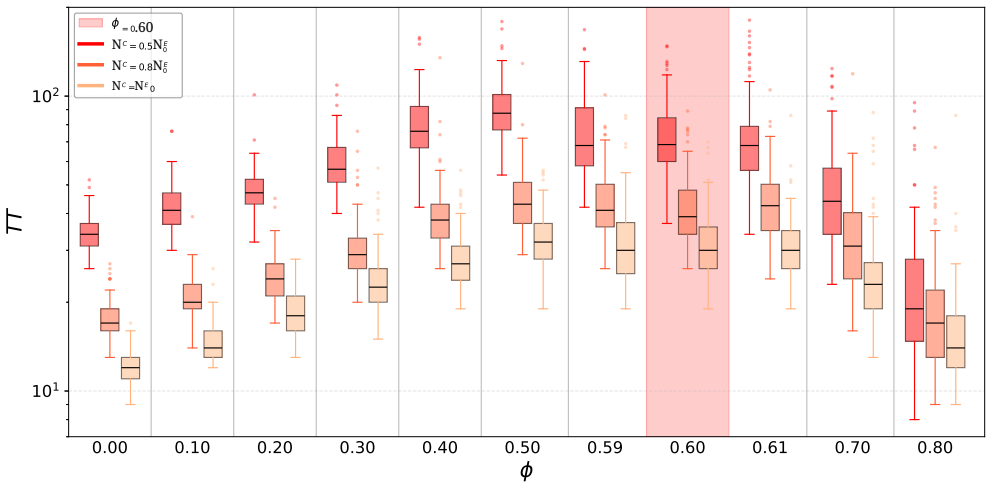

图4。不同初始追捕者数量下，捕获时间 TT 随障碍物密度 ϕ 的变化。非单调行为反映了连通晶格中的路径延长与渗流区间附近几何碎裂之间的竞争。阴影区域表示有效渗流阈值 ϕ_c。

过程。

图4展示了不同初始追捕者数量下，捕获时间随障碍物密度 ϕ 的变化。数据以箱线图呈现，渗流阈值ϕ_c 以阴影区域标示。对于所有 N^{C}，在低和中等障碍物密度下，捕获时间中位数随 ϕ增加而上升，并在$\phi \approx 0.50$附近达到显著峰值。这种非单调行为源于两种相互对立机制之间的竞争。一方面，增加 ϕ 会延长可通行路径，从而阻碍个体移动能力；图3所示的追捕者—逃逸者平均距离增大也印证了这一点，进而使追捕过程延长。另一方面，随着 ϕ 接近渗流区间，可达空间会碎裂成非连通区域，从而缩小有效搜索空间，加快捕获过程的完成。

在 $\phi \approx 0.50$ 附近， TT 的急剧增加令人联想到几何诱导的减速和临界行为：随着晶格连通性接近崩溃，探索时间会迅速增长。在受几何无序 [6, 26, 28–30]影响的活性系统和基于晶格的系统中，也有类似的渗流驱动交叉行为报道。最大值出现在理论渗流阈值（$\phi_c \approx 0.60$）略低处，这反映了有限尺寸效应：在有限晶格中，局部障碍物簇可能在贯穿系统的簇形成之前就已有效渗流，并使可通行区域碎裂。

除中位数的表现外，箱线图还揭示了障碍物诱发的碎片化如何改变捕获动力学的变异性。对于 $\phi \lesssim 0.50$，不同追捕者密度对应的分布明显分离，这表明在连通性良好的环境中，个体密度对追捕效率有显著影响。在接近 $\phi = 0.59$ 和 0.60 时，中等密度与高密度情况的分布开始部分重叠，表明系统接近渗流区间时变异性增加。对于$\phi \gtrsim 0.70$，在所有 N^{C} 取值下，分布的重叠程度都逐渐增加；在 $\phi = 0.80$ 时，它们几乎无法区分。这种分布收敛表明，在高度碎片化的环境中，捕获时间在很大程度上不受追捕者数量影响，而是由可达簇的几何形态决定。在此区间内，集体追捕速度更快，也更具可预测性，这与受限活性系统中几何主导的动力学的出现相一致 [6, 7]。

C. 捕获成本与协同干扰

现在，我们分析捕获所有拓扑可达逃逸者所需的代价，如图 5 所示。根据式（4）的定义，该代价等于捕获时间乘以追捕者数量，再除以初始逃逸者数量，可用于衡量追捕过程中所需的集体行动投入。按照定义，该量将环境的几何约束（由捕获时间表征）与活跃个体的数量联系起来。

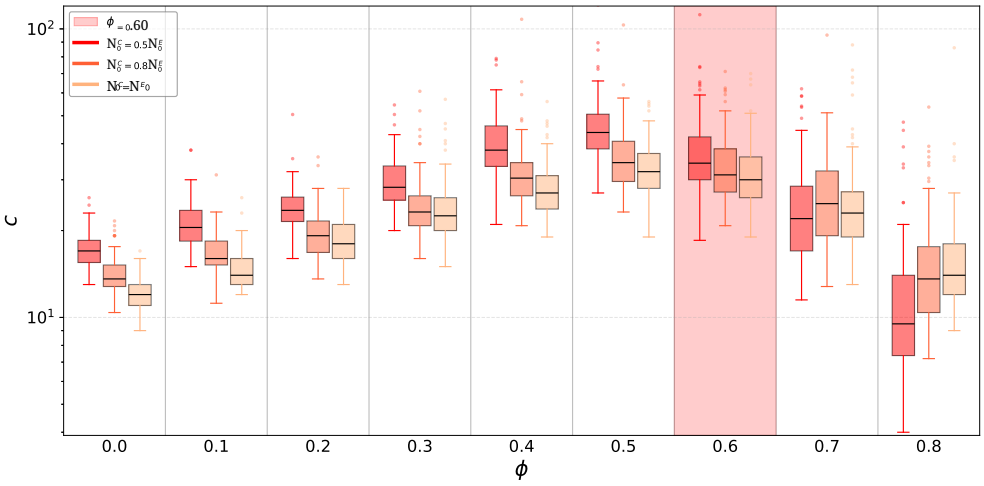

图 5. 不同初始追捕者数量下，捕获成本随障碍物密度 ϕ 的变化。在 ϕ较低时，成本强烈取决于追捕者的数量；而当 $\phi \gtrsim \phi_c$ 时，各分布趋于一致，这表明几何限域主导了追捕效率。

图 5 展示了不同初始追捕者数量下，成本随障碍物密度 ϕ 的变化情况。在障碍物密度较低时，与 $N^{\mathrm{C}} = 0.5N_{\mathrm{E}0}$、$0.8N_{\mathrm{E}0}$ 和 N_0^{E} 对应的箱线图明显分离，这表明在相对开放的环境中，增加追捕者数量会导致运行成本上升。然而，随着 ϕ 增加，这些分布逐渐重叠。对于 $\phi \gtrsim 0.10$，中等密度和高密度情形下的分布已出现部分重叠；当接近 $\phi \approx 0.59$ 时，三种分布基本无法区分。这种趋同表明，超过某一障碍物密度阈值后，系统成本对追捕者数量的依赖较弱，转而主要受空间碎片化所带来的几何约束支配。

成本的非单调行为反映了与

捕获时间中观察到的相同竞争：障碍物密度增加起初会阻碍智能体运动，从而提高成本；而在渗流区间附近，进一步的碎片化会缩小有效搜索空间，并限制增加更多追捕者所带来的收益。多智能体追捕和群体机器人学模型中也有相关报告：环境约束会引发类似的效率权衡，障碍物诱导的碎片化会带来能耗和运行方面的限 [17, 18, 20, 21]制。

尽管各分布的重叠程度不断增加，但当障碍物密度超过渗流阈值 ϕ_c 后，中位成本明显下降。初始追捕者数量较少时，这种下降最为显著，揭示了追捕者之间协同干扰的影响。在障碍严重的环境中，可达空间被限制在一些小簇内，大量追捕者会造成轨迹冗余和相互阻挡，从而降低整体效率。在这种情况下，数量较少的追捕者能够更有效地探索有限的可达空间，从而降低每捕获一个逃逸者的成本。这一行为与生物群体狩猎和活性物质群体中的观察结果相似：最大化效率依靠的是最佳协同，而非最大化密度 [1, 4, 5, 43]。

D. 存活动力学与威布尔统计

现在，我们通过生存分析考察逃逸者群体 $N^{\mathrm{E}}(t)$ 随时间的演变。这种方法对追捕动力学提供了一种互补的、随时间变化的刻画，拓展了前文讨论的全局指标，例如捕获时间和成本。具体而言，生存统计使我们能够解析快速捕获事件与长期存活的逃逸者并存的现象；这种现象源于 BFS 分析所揭示的几何约束。

式（5）中定义的生存函数 $S(t)$ 表示逃逸者存活至时间 t 仍未被捕获的概率，而累积风险函数 $H(t)$ 则表示随时间累积的瞬时被捕获风险。图 6 展示了两种典型情况下的 $H(t)$（左）和 $S(t)$（右）：无障碍晶格（$\phi = 0.00$）以及渗流阈值附近障碍物密集的系统（$\phi_c = 0.60$）。结果对应不同的初始追捕者数量 N^{C}。

可以清楚地观察到空间无序对风险动力学的影响。在没有

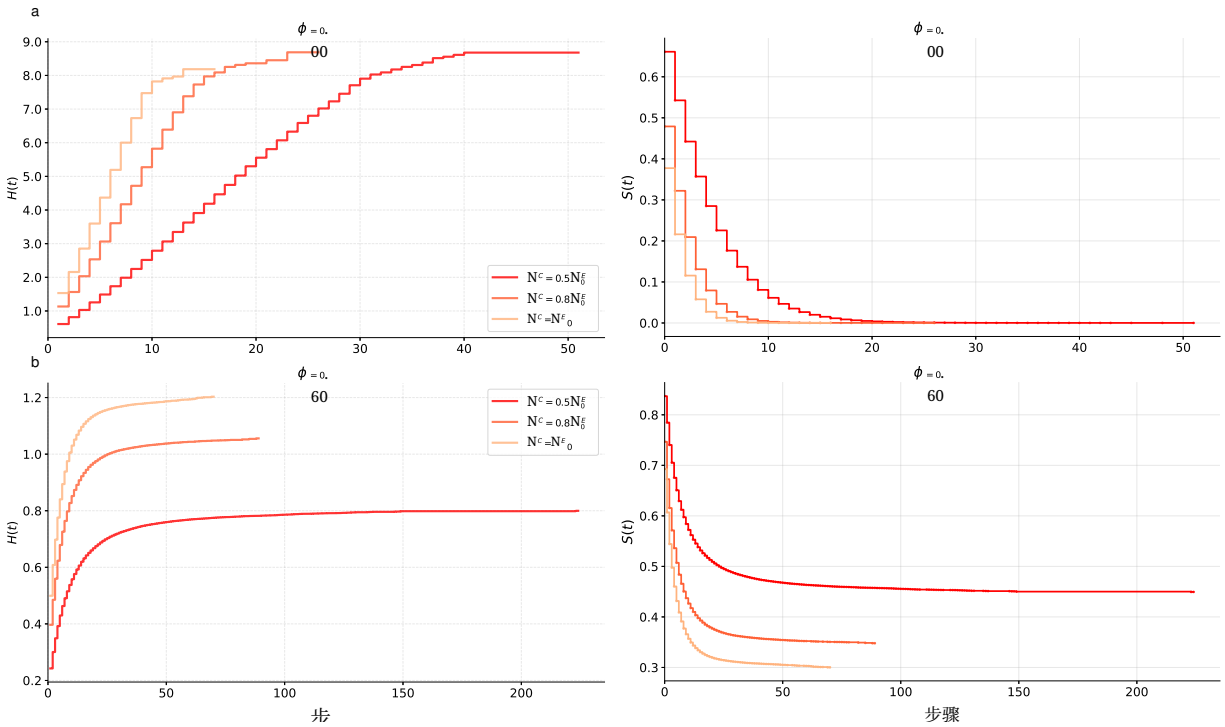

图 6. 不同初始追捕者数量下， $\phi = 0.00$ (a) 和 $\phi = \phi_c = 0.60$ (b) 的累积风险函数 $H(t)$（左）和生存函数 $S(t)$（右）。障碍物密度增加会抑制早期风险，并因几何碎裂而提高长期生存率；而较大的 N^{C} 会提高初始捕获率。

障碍物的情况下，逃逸者经历较高的初始风险，这反映了在完全连通环境中的频繁相遇。随着 ϕ增加，累积风险增长得更加缓慢，表明相遇的概率降低。这一趋势与广度优先搜索的结果（图2）一致，结果显示，障碍物密度增加会导致空间碎片化，并使逃逸者被孤立在非连通簇中。因此，几何约束会抑制相遇率，并重塑捕获事件的时间结构。

对于所有障碍物密度，初始风险率都会随着追捕者数量的增加而上升，这符合预期，因为在更密集的追捕配置中，相遇概率更高。这种效应在早期最为显著，此时位于追捕者附近的逃逸者会迅速被捕获。相应的生存函数呈现出 $S(t)$ 的快速初始衰减，随后出现明显的长时间尾部。这种两阶段行为反映了短时间内的协同追捕与长时间内缓慢的几何俘获并存，这与此前观察到的捕获时间和代价的非单调趋势一致。

逃逸者群体的衰减并不遵循简单的指数定律，而是呈现拉伸指数或压缩指数行为。这种非平凡的时间结构可用威布尔分布准确描述，正如先前在基于晶格的追逐—逃逸系统中报告的那样 [30],

$$N^{\mathrm{E}}(t) = A \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta}\right] + C, \tag{9}$$

with

$$C = N^{\mathrm{E}}(\infty), \qquad A = N_0^{\mathrm{E}} - N^{\mathrm{E}}(\infty). \tag{10}$$

这里， τ 表示衰减的特征时间，而形状参数 β 量化了偏离指数行为的程度，并刻画捕获过程的时间异质性。威布尔形式能够自然地描述等待时间分布宽广的异质俘获过程；在碎片化且受限的几何结构中，预计会出现这类过程。

图7展示了无障碍情形 $\phi = 0$和 $N_{\mathrm{C}}= N_0^{\mathrm{E}}$的代表性拟合结果，说明韦布尔描述是恰当的。拟合结果高度吻合，证实威布尔形式既能捕捉与协同捕获相关的快速初始衰减，也能捕捉由几何俘获导致的缓慢长时间尾部。

接下来，我们考察特征时间 τ 如何随障碍物密度 ϕ变化。图8显示， τ 随 ϕ呈非单调变化，这与BFS分析（图3）得到的追捕者—逃逸者平均距离的变化趋势十分相似。在障碍物密度较低时，晶格仍保持良好的连通性，且相遇频繁，因此特征时间相对较短。随着 ϕ 增加，路径延长和局部障碍会阻碍智能体运动，使 τ值增大。对于追逐者数量较少的情形（$N_{\mathrm{C}}= 0.5N_0^{\mathrm{E}}$），这一效应尤为显著，凸显了稀疏追逐构型对几何无序的敏感性更强。

在连通性崩塌之后， τ 急剧下降，反映出可达逃逸者数量的大幅减少。在这一状态下，剩余的可达簇规模较小，仍可到达的逃逸者会在更短的绝对时间尺度内被俘获。在基于渗流的输运和俘获过程中，也有研究报道了类似的几何控制交叉现象 [6, 26, 28]。

图 9 所示的形状参数 β，进一步揭示了存活动力学的时间结构。对于 $\phi \lesssim 0.30$, $\beta > 1$，对应于压缩型

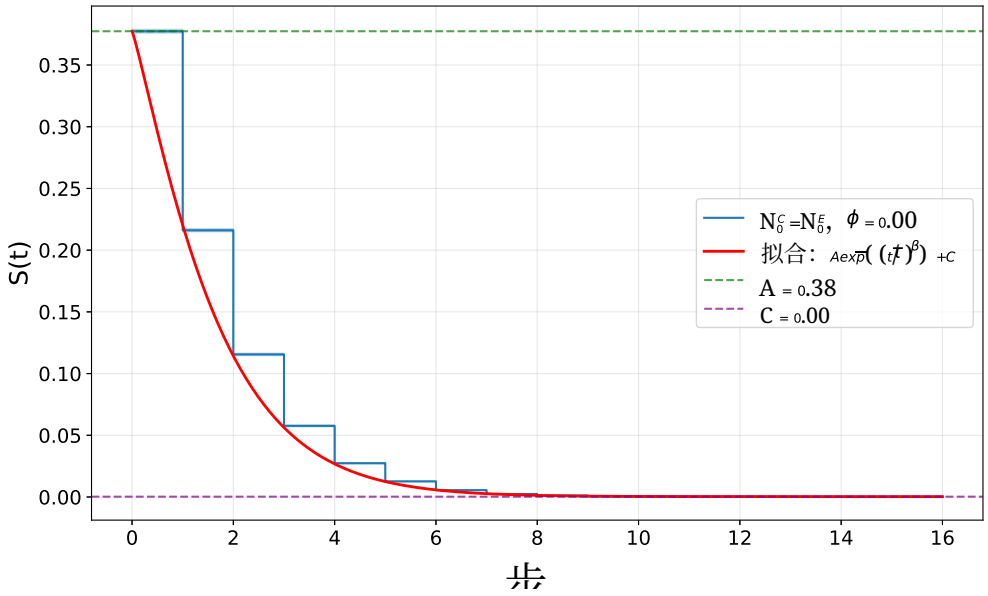

图 7. 生存函数 $S(t)$ 在 $\phi = 0$和 $N_C = N_0^E$下的韦布尔拟合。该拟合准确再现了早期衰减和长时间尾部，从而验证了存活动力学的韦布尔描述。

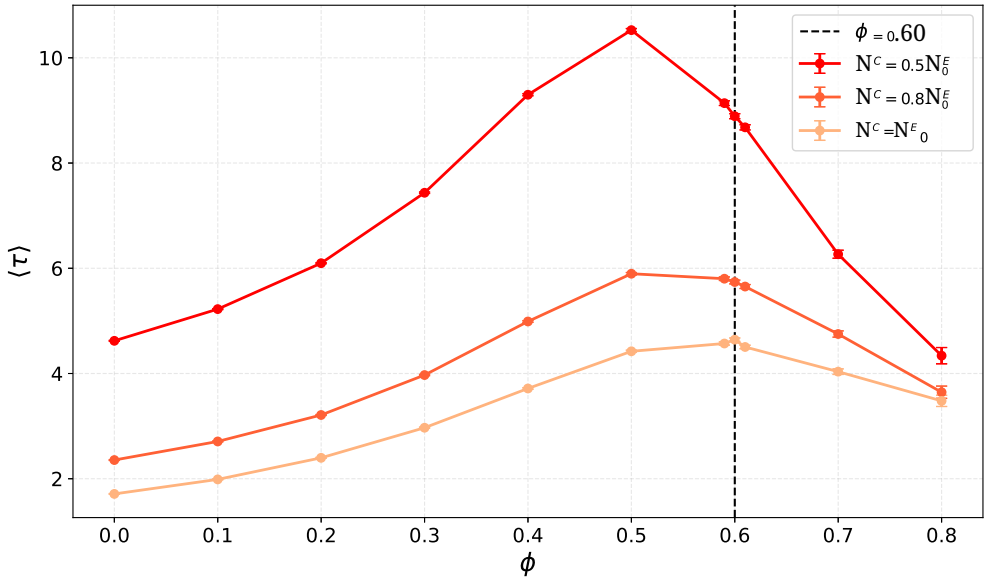

图 8. 特征时间 τ 随障碍物密度 ϕ的变化。非单调行为反映了连通晶格中的路径延长与渗流区间附近的几何碎裂之间的相互作用。

指数区间，在该区间内，捕获事件高度同步，且主要发生于

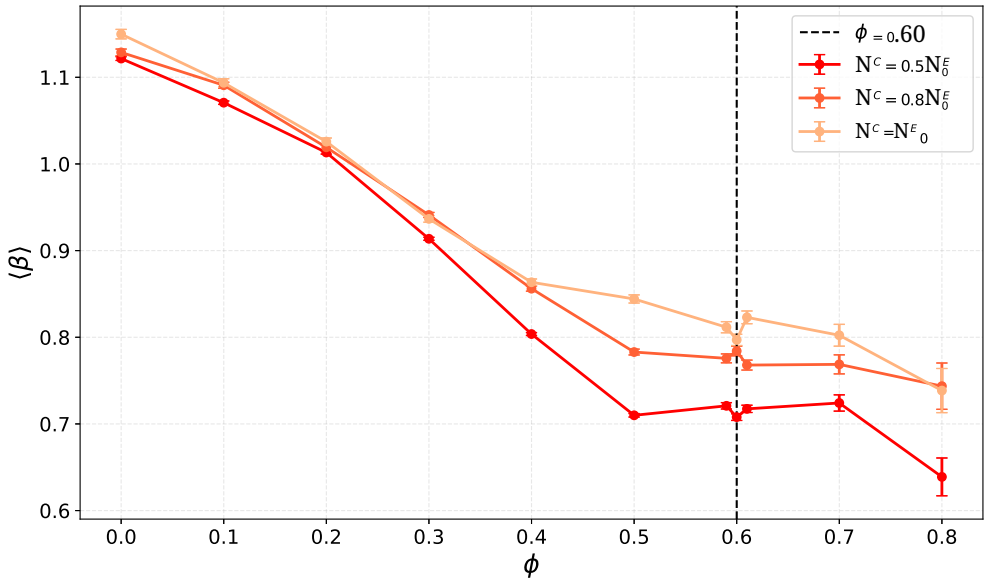

图 9. 威布尔分布的形状参数 β 随障碍物密度 ϕ 的变化。从 $\beta > 1$ 到 $\beta < 1$ 的交叉转变表明，系统从同步捕获动力学转变为由限制主导的异质性生存。

早期时刻。随着障碍物密度超过这一数值，系统转入拉伸指数区间，$\beta < 1$，这表明强烈的时间异质性和长寿命逃逸者的出现。这一转变反映了空间限域的开始以及宽分布的捕获时间，这是无序介质中反应–扩散和搜索过程的典型特征 [8, 27]。

有趣的是，对于 $\phi > \phi_c$，特征时间 τ 会缩短，而 β 仍低于 1。这种表面上的矛盾源于：尽管生存时间的相对分布仍然很宽，可达逃逸者的绝对数量却变少了。因此，孤立簇内会迅速发生捕获，使 τ 降低，但生存统计的重尾特征并未消失。综合来看，τ 和 β 的变化趋势揭示了两种截然不同的动力学状态：低障碍物密度下的协同扩散限制追捕，以及高障碍物密度下的限域主导的俘获过程。

生存分析揭示的几何和时间异质性预计会在输运性质上留下明显痕迹，接下来我们将对此进行分析。

E. 输运性质和均方位移

最后，我们通过考察追捕者的均方位移（MSD），分析系统的输运性质。图 10 显示了均方位移标度指数 α 随障碍物密度 ϕ的变化。指数 α 可直接衡量有效输运状态，区分正常扩散与由相互作用和几何约束引起的亚扩散运动。

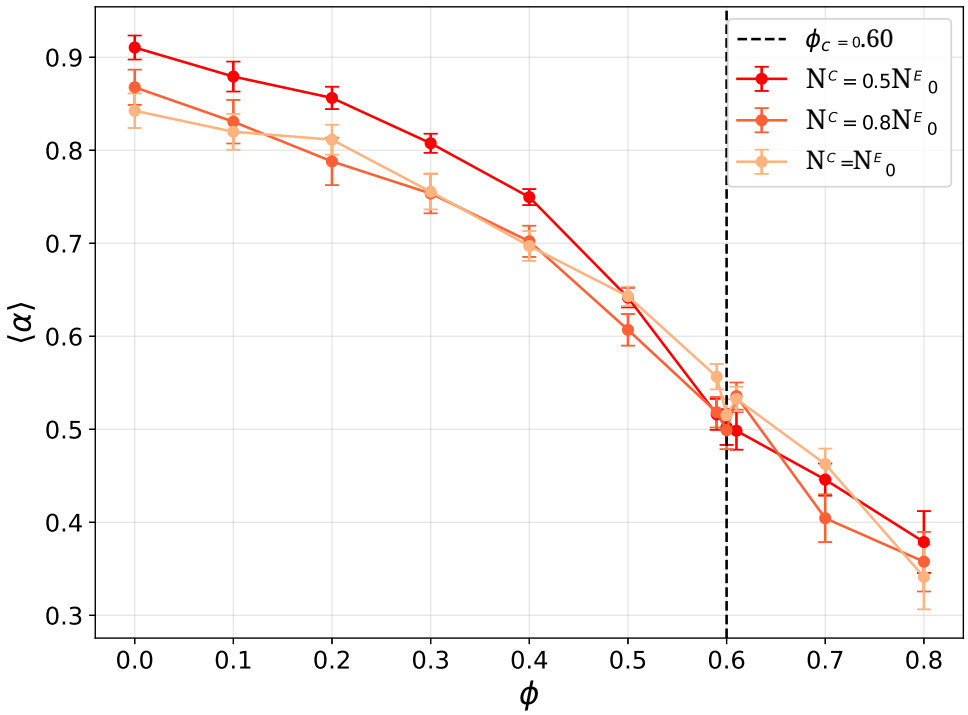

图 10. 均方位移指数 α 随障碍物密度 ϕ的变化。由于集体相互作用，即使在无障碍物系统中也会观察到亚扩散行为（$\alpha < 1$）。随着 ϕ增加，几何约束占据主导地位，导致 α 在渗流阈值 ϕ_c附近趋于一致，此时输运受晶格连通性控制。

即使不存在障碍物（$\phi = 0$），系统仍表现出亚扩散行为（$\alpha < 1$）。这一效应源于智能体局部密度较高，以及由此导致的追捕者与逃逸者频繁相遇，进而产生关联运动、瞬态笼困和反复重新定向。尽管在此条件下晶格完全连通，但仅凭集体相互作用就足以抑制正常扩散。

在障碍物密度较低时，个体仍能探索晶格中的大片区域，因此

与障碍物更多的配置相比， α 的值相对较高。然而，随着 ϕ 增加，几何障碍会逐渐限制智能体运动。路径延长、死胡同以及受限于狭窄通道都会降低移动能力并增强时间相关性，使系统进一步深入亚扩散区间。这一趋势与特征时间 τ 的增加以及前文讨论的拉伸指数生存统计的出现相一致。

一个关键观察是，所有 α 曲线在渗流阈值 ϕ_c 附近趋于汇聚。在这一状态下，输运性质在很大程度上不再取决于追捕者的数量，这表明系统转变为由几何结构主导的动力学状态。一旦可达空间分裂为孤立簇，这些簇的连通性便决定了输运过程，其影响远超智能体密度和局部相互作用规则。此种汇聚与捕获时间、代价和生存参数所呈现的坍缩现象相呼应，进一步凸显了渗流在控制系统动力学中的核心作用。

综合来看，均方位移指数 α、特征时间 τ 和威布尔形状参数 β 的一致表现表明，无序晶格中的追逐—逃逸动力学受协同运动与几何约束之间的竞争所支配。在低障碍物密度下，集体追捕和频繁相互作用占主导；而在高 ϕ 下，输运呈现强烈的次扩散特征，并受限于孤立区域。在 ϕ_c 处，输运性质和时间观测量趋于汇聚，这凸显了几何转变的普适性，并在统一的非平衡框架 [6, 7, 9, 28] 中将空间可达性、时间持续性和集体行为联系起来。

IV. 结论

我们研究了二维晶格上的一个最简追逐–逃逸模型，其中静态障碍物随机分布，重点考察几何无序如何控制集体追逐动力学。通过结合几何可达性分析、动力学观测量、生存统计和输运性质，我们建立了晶格连通性与追捕效率之间的直接联系。

广度优先搜索（BFS）分析表明，在热力学极限下，障碍物诱导的碎片化会在渗流阈值之前导致可达性的逐步丧失，从而定义动力学的有效初始条件。这种几何限域——

条件塑造了后续所有可观测量。捕获时间和捕获代价对障碍物密度呈现非单调依赖，反映出连通晶格中的路径延长与渗流附近的几何限域之间的竞争。在高度受阻的环境中，效率在很大程度上与追捕者的数量无关，表明系统处于几何主导的状态。

生存分析表明，逃逸者群体的衰减遵循威布尔形式，其特征时间和形状参数随障碍物密度变化呈现出明显的交叉转变。这些时间特征反映了短时间尺度下的协同捕获与长时间尺度下的约束主导的俘获并存。通过均方位移指数进行量化的输运性质进一步印证了这一图景：低障碍物密度下，集体相互作用会引发亚扩散运动；而在渗流点附近，运动则趋向几何控制机制。

总之，我们的结果表明，无序环境中的追逐与逃逸动力学受几何驱动的交叉转变支配，其中渗流和连通性是空间、时间及集体行为的统一控制参数。这一简约框架有助于深入理解拥挤且非均匀系统中的协同搜索过程。

致谢

没有公共资金支持，这项研究将无法开展。J.R.B. 感谢巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）提供的资助，项目编号为 405479/2023-9、441728/2023-5 和 304958/2022-0A；感谢南里奥格兰德州研究支持基金会（FAPERGS）提供的资助，项目编号为 25/2551-0002609-1；并感谢高等教育人才培养协调机构（CAPES，巴西）和亚历山大·冯·洪堡基金会通过研究奖学金提供的资金支持。RGR 感谢 CAPES（财务代码 001）和 CNPq 提供的资助，项目编号为 441728/2023-5。

[1] A. Kamimura 和 T. Ohira，《群体追逃》，《新物理学杂志》**12**，053013（2010）。

[2]L. Angelani，集体捕食与逃逸策略，《物理评论快报》**109**，10.1103/physrevlett.109.118104（2012）。[3] T. Vicsek 和 A. Zafeiris，集体运动，《物理报告》**517**，71–140（2012）。[4] M. Janosov、C. Vir´agh、G. V´as´arhelyi 和 T. Vicsek，群体追逐策略：如何捕捉速度更快的猎物，《新物理学杂志》**19**，053003（2017）。[5] T. Ohira，从追逐与逃逸中涌现的集体行为，《人工生命与机器人学》**29**，1–11（2024）。[6] C. Bechinger、R. Di Leonardo、H. L¨owen、C. Reichhardt、G. Volpe 和 G. Volpe，复杂且拥挤环境中的活性粒子，《现代物理评论》**88**，045006（2016）。[7] M. J. Bowick、N. Fakhri、M. C. Marchetti 和 S. Ramaswamy，活性物质中的对称性、热力学与拓扑学，《物理评论X》**12**，010501（2022）。[8] J. M. Epstein、K. Klymko 和 K. K. Mandadapu，活性流体中输运过程的统计力学。II. 活性布朗粒子的流体力学方程，《化学物理学杂志》**150**，10.1063/1.5054912（2019）。[9] M. te Vrugt 和 R. Wittkowski，元综述：活性物质综述调查，《欧洲物理学杂志E辑》**48**，10.1140/epje/s10189-024-00466-z（2025）。[10] J. W. Evans，随机与协同顺序吸附，《现代物理评论》**65**，1281（1993）。[11] D. J. Fowell 和 M. Kim，效应T细胞迁移的时空调控，《自然综述：免疫学》**21**，582–596（2021）。[12] D. Schienstock 和 S. N. Mueller，超越速度：量化免疫细胞行为的机遇与挑战*，《免疫学评论》**306**，123–136（2021）。[13] M. Moreira-Soares、S. P. Cunha、J. R. Bordin 和 R. D. M. Travasso，黏附调节细胞在致密纤维网络中的形态与迁移，《物理学杂志：凝聚态》**32**，314001（2020）。[14] S. Melo、P. Guerrero、M. Moreira Soares、J. R. Bordin、F. Carneiro、P. Carneiro、M. B. Dias、J. Carvalho、J. Figueiredo、R. Seruca 和 R. D. M. Travasso，细胞外基质与组织结构是E-钙黏蛋白功能障碍介导的早期侵袭的主要决定因素，《通讯生物学》**6**，10.1038/s42003-023-05482-x（2023）。[15] L. GORINI、J. D. C. LINNELL、R. MAY、M. PANZACCHI、L. BOITANI、M. ODDEN 和 E. B. NILSEN，栖息地异质性与哺乳动物捕食者—猎物相互作用，《哺乳动物》

Review, 42, 55–77 (2011).
0[16] G. Cozzi、F. Broekhuis、J. W. McNutt 和 B. Schmid，《人工与自然屏障对大型非洲食肉动物的影响比较：对种间关系和连通性的启示》，《动物生态学杂志》**82**, 707–715 (2013).[17] D. W. Oyler、P. T. Kabamba 和 A. R. Girard，《存在障碍物时的追逃博弈》，《自动化》**65**, 1–11 (2016).[18] X. Liang、B. Zhou、L. Jiang、G. Meng 和 Y. Xiu，《障碍物环境中基于阿波罗尼斯圆的多无人机协同追逃博弈》，《连接科学》**35**, 10.1080/09540091.2023.2168253 (2023).[19] K. Katona、H. A. Neamah 和 P. Korondi，《移动机器人自主导航的避障与路径规划方法》，《传感器》**24**, 3573 (2024).[20] Y. Zhou、A. Chen、X. He 和 X. Bian，《考虑实际约束的群体机器人多目标协同搜索算法》，《神经机器人学前沿》**15**, 10.3389/fn- bot.2021.753052 (2021).[21] J.-P. A. Yaacoub、H. N. Noura、O. Salman 和 A. Chehab，《机器人网络安全：漏洞、攻击、对策与建议》，《国际信息安全杂志》**21**, 115–158 (2021).[22] Y. Alqudsi 和 M. Makaraci，《无人机集群：研究、挑战与未来方向》，《工程与应用科学杂志》**72**, 10.1186/s44147-025-00582-3 (2025).[23] D. Helbing、L. Buzna、A. Johansson 和 T. Werner，《行人群体的自组织动力学：实验、仿真与设计方案》，《交通科学》**39**, 1 (2005).[24] D. Zhang、G. Huang、C. Ji、H. Liu 和 Y. Tang，《多出口场景中的行人疏散建模与仿真》，Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **582**, 126272 (2021).[25] Y. Wang、J. Ge 和 A. Comber，《利用智能博弈代理对涌现式行人疏散行为建模》，《计算社会科学杂志》**8**, 49 (2025).[26] O. Chepizhko 和 F. Peruani，《非均匀介质中活性粒子的扩散、亚扩散与俘获》，Phys. Rev. Lett.**111**, 160604 (2013).[27] N. Bellomo、F. Brezzi 和 J. Soler，《行为系统中的活性粒子方法及其挑战》，《应用科学中的数学模型与方法》**30**, 653–658 (2020).

[28] A. Kumar、P. Grassberger 和 D. Dhar, 《二维正方晶格上的追逃渗流》, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **577**, 126072 (2021).[29] V. Cornette、A. J. Ramirez-Pastor 和 F. Nieto, 《正方晶格上多原子物种的渗流》, The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems **36**, 391 (2003).[30] J. ˇS´cepanovi´c、A. Karaˇc、Z. Jakˇsi´c、L. Budinski-Petkovi´c 和 S. Vrhovac, 《存在障碍物时的群体追逃》, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**525**, 450 (2019).[31] S. Fortunato, 《图中的社群检测》, Phys. Rep.-Rev. Sec. Phys. Lett. **486**, 75 (2010).[32] M. E. J. Newman 和 M. Girvan, 《发现并评估网络中的社群结构》, Phys. Rev. E. **69**, 026113 (2004).[33] E. Bernstein、C. Hamblen、M. Junge 和 L. Reeves, 《配置模型上的追逃》, Electronic Communications in Probability **27**, 1 (2022).[34] A. Hinsen、B. Jahnel、E. Cali 和 J.-P. Wary, 《吉尔伯特图上追逃模型的相变》, arXiv 预印本 arXiv:1911.02622 (2019).[35] E. Cali、A. Hinsen、B. Jahnel 和 J.-P. Wary, 《动态设备到设备网络中的追逃》, Journal of Applied Probability **61**, 311 (2024).[36] E. Beckman、K. Cook、N. Eikmeier、S. Hernandez-Torres 和 M. Junge, 《树上的含死亡追逃》, The Annals of Probability **49**, 10.1214/21-aop1514 (2021).[37] H. Wang、W. Han 和 J. Yang, 《视野受限的追逐者参与的群体追逃》, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**465**, 34 (2017).[38] M. Su、D. Bernardi 和 B. Lindner, 《能看见追逐者的随机猎物追捕问题》, 《新物理学杂志》**25**, 023033 (2023).[39] E. L. Kaplan 和 P. Meier, 《基于不完整观测的非参数估计》, Journal of the American statistical association **53**, 457 (1958).[40] E. Colosimo、F. v. Ferreira、M. Oliveira 和 C. Sousa, 《Kaplan–Meier 与 Nelson–Aalen 生存函数估计量的实证比较》, Journal of Statistical Computation and Simulation **72**, 299 (2002).[41] M. Moreira-Soares、E. Mossmann、R. D. Travasso 和 J. R. Bordin, 《Trajpy：赋能跨领域轨迹分析的特征工程》, Bioinformatics Advances**4**, vbae026 (2024).

[42] T. H. Cormen、C. E. Leiserson、R. L. Rivest 和 C. Stein，《算法导论》（麻省理工学院出版社，2022）。

[43] M. J. Hansen、P. Domenici、P. Bartashevich、A. Burns 和 J. Krause，《脊椎动物群体狩猎的机制》，《生物学评论》**98**，1687–1711（2023）。