黎曼ζ函数混合导数的离散二阶矩

BENJAMIN DURKAN、CHRISTOPHER HUGHES 和 ANDREW PEARCE-CRUM P

Abstract. 我们给出了黎曼ζ函数混合导数在ζ函数零点处取值的离散二阶矩的完整渐近式，并提供无条件和条件误差项。Gonek 最早研究了这一问题，当时只给出了首项渐近式；随后 Conrey–Snaith 和 Milinovich 将结果扩展到包含一阶导数的低阶项。我们将一阶导数的情形推广至所有阶导数。

arXiv:2601.06292v1 [math.NT] 9 Jan 2026

1. Introduction

本文的核心研究对象是黎曼ζ函数混合导数的离散二阶矩，其定义为以下求和：

$$I(\mu,\nu) := I(\mu,\nu;T) = \sum_{0<\gamma\leq T} \zeta^{(\mu)}(\rho)\zeta^{(\nu)}(1-\rho), \tag{1.1}$$

当 $T \to \infty$ 时，其中求和遍及ζ函数的非平凡零点 $\rho = \beta + i\gamma$，而 $\zeta^{(\mu)}(s)$ 表示黎曼ζ函数的 μ^{th} 阶导数。我们将为该和建立完整渐近展开，并在黎曼猜想成立的条件下给出一个幂节省误差项。

这类离散矩由 Gonek 引入 [9], ，他证明了对于正整数 μ,ν，其具有如下形式的首阶渐近式

$$\begin{aligned}&\sum_{0<\gamma\leq T} \zeta^{(\mu)}(\rho)\zeta^{(\nu)}(1-\rho)\\ &\quad= (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu+\nu+1} - \frac{1}{(\mu+1)(\nu+1)}\right)\frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^{\mu+\nu+2} + O\left(T(\log T)^{\mu+\nu+1}\right)\end{aligned} \tag{1.2}$$

当 $T\to\infty$ 时。

特殊情形 $\mu=\nu$ 称为 ζ的离散二阶矩，在黎曼猜想下可表示为

$$\sum_{0<\gamma\leq T}\left|\zeta^{(\nu)}\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|^2 = \frac{\nu^2}{(2\nu+1)(\nu+1)^2}\frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^{2\nu+2} + O\left(T(\log T)^{2\nu+1}\right) \tag{1.3}$$

当 $T\to\infty$ 时。

Conrey 和 Snaith [3] 在黎曼猜想成立的条件下猜想，对于 $\varepsilon > 0$任意且 $L = \log t/2\pi$,

$$\begin{aligned}\sum_{0<\gamma\leq T}|\zeta'(\rho)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_1^T &\left(\frac{1}{12}L^4 + \frac{2\gamma_0}{3}L^3 + \left(\gamma_0^2 - 2\gamma_1\right)L^2 - \left(2\gamma_0^3 + 2\gamma_0\gamma_1 + \gamma_2\right)L\right.\\ &\left.+\left(2\gamma_0^4 + 2\gamma_0^2\gamma_1 + 14\gamma_1^2 + 8\gamma_0\gamma_2 + \frac{10\gamma_3}{3}\right)\right)dt + O\left(T^{1/2+\varepsilon}\right),\end{aligned}$$

其中 $T \to \infty$， γ_n 是从 $\zeta(s)$ 在$s = 1$附近的展开式中得到的斯蒂尔切斯系数，

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma_0 - \gamma_1(s-1) + \frac{\gamma_2}{2!}(s-1)^2 + \cdots + (-1)^n \frac{\gamma_n}{n!}(s-1)^n + \cdots .$$

Milinovich [18] 在黎曼猜想成立的假设下证明了这一猜想，并将渐近式写为

$$\sum_{0<\gamma\leq T} \left|\zeta'\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right)\right|^2 = \frac{T}{2\pi} P_4\left(\log\frac{T}{2\pi}\right) + O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \tag{1.4}$$

as $T \to \infty$，其中 $P_4(x)$ 是一个四次多项式，定义如下：

$$\begin{aligned} P_4(x) = {} & \frac{1}{12}x^4 \\ & + \left(\frac{2\gamma_0 - 1}{3}\right) x^3 \\ & + \left(1 - 2\gamma_0 + \gamma_0^2 - 2\gamma_1\right) x^2 \\ & + \left(-2 + 4\gamma_0 - 2\gamma_0^2 - 2\gamma_0^3 - 10\gamma_0\gamma_1 + 4\gamma_1 - \gamma_2\right) x \\ & + \left(\frac{6 + 6\gamma_0(5\gamma_1 + 4\gamma_2 - 2) + 6\gamma_0^2(\gamma_0 + \gamma_0^2 + 6\gamma_1 + 1) - 12\gamma_1 + 42\gamma_1^2 + 3\gamma_2 + 10\gamma_3}{3}\right) \end{aligned}$$

注。 通过计算积分，可得 *Milinovich* 的结果与 *Conrey* 和 *Snaith* 的猜想等价。

上述结果的一些其他推广示例包括平移二阶矩结果 [7, 8]，高阶矩猜想 [10, 12, 14, 20]，ζ函数导数的极值 [21]，矩的上下界 [17, 1]以及负矩[10, 6, 11, 5, 2]。

2. Statement of Results

我们通过证明黎曼ζ函数（1.1）混合导数的离散二阶矩的完整渐近展开式，将结果（1.2）和（1.4）加以推广；这一结果既无条件成立，也在黎曼猜想成立的条件下成立。

定理1. 对于正整数 μ、ν，有

$$\sum_{0<\gamma\leq T} \zeta^{(\mu)}(\rho)\zeta^{(\nu)}(1-\rho) = \frac{T}{2\pi}\mathcal{P}_{\mu,\nu}\left(\log\frac{T}{2\pi}\right) + O\left(Te^{-C\sqrt{\log T}}\right) \tag{2.1}$$

当 $T \to \infty$ 时，其中 C 是一个正数，且 $\mathcal{P}_{\mu,\,\nu}(x)$ 是次数为 $\mu + \nu + 2$ 的多项式，由下式给出

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu,\nu}(x) = {} & \sum_{m=0}^{\mu+\nu+2} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^\nu \binom{\nu}{k} C_1^{(\mu,\nu)}(m,k) x^m \\ & + \sum_{m=0}^{\mu+\nu+2} \sum_{k=0}^{\mu} (-1)^\mu \binom{\mu}{k} \left(C_1^{(\nu,\mu)}(m,k) + C_2^{(\mu,\nu)}(m,k)\right) x^m, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中

$$C_1^{(\mu,\nu)}(m,k)=$$

$$\begin{cases}\dfrac{(-1)^m(\nu-k)}{m!}\displaystyle\sum_{j=0}^{\mu+\nu+1-m}(-1)^{\mu+\nu-j}\frac{(\mu+\nu+1-j)!}{(\mu+k+2-j)!}c_j^{(\mu,k)}+ & \\ \quad+\dfrac{c_{\mu+\nu+2-m}^{(\mu,k)}}{(k+m-\nu)!} & m\geq\nu-k \\ \dfrac{(-1)^m(\nu-k)}{m!}\displaystyle\sum_{j=0}^{\mu+k+2}(-1)^{\mu+\nu-j}\frac{(\mu+\nu+1-j)!}{(\mu+k+2-j)!}c_j^{(\mu,k)} & m\leq\nu-k-1\end{cases}$$

其中， $c_j^{(\mu,k)}$ 是 $s=1$ 附近的*Laurent*级数系数，取自

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{1}{s}=\sum_{j=0}^{\infty}c_j^{(\mu,k)}(s-1)^{-\mu-k-3+j},\tag{2.3}$$

并且

$$C_2^{(\mu,\nu)}(m,k)=$$

$$\begin{cases}\dfrac{(-1)^m(\mu-k+1)}{m!}\displaystyle\sum_{j=0}^{\mu+\nu+1-m}(-1)^{\mu+\nu-j}\frac{(\mu+\nu+1-j)!}{(\nu+k+1-j)!}d_j^{(\nu,k)}+ & \\ \quad+\dfrac{d_{\mu+\nu+2-m}^{(\nu,k)}}{(k+m-\mu-1)!} & m\geq\mu-k+1 \\ \dfrac{(-1)^m(\mu-k+1)}{m!}\displaystyle\sum_{j=0}^{\nu+k+1}(-1)^{\mu+\nu-j}\frac{(\mu+\nu+1-j)!}{(\nu+k+1-j)!}d_j^{(\nu,k)} & m\leq\mu-k\end{cases}$$

其中， $d_j^{(\nu,k)}$ 是 $s=1$ 附近的*Laurent*级数系数，取自

$$\zeta^{(\nu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{1}{s}=\sum_{j=0}^{\infty}d_j^{(\nu,k)}(s-1)^{-\nu-k-2+j}.$$

若假设黎曼猜想成立，则对于任意 $\varepsilon>0$，误差项可替换为 $O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$。

现在我们陈述这一结果的几个推论。推论1显然可由该定理立即得到，而推论2和推论3将在第6节中证明。

推论1. 假设黎曼猜想成立。对于 ν 正整数，ζ函数所有导数的离散二阶矩由下式给出

$$\sum_{0<\gamma\leq T}\left|\zeta^{(\nu)}\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|^2$$
$$=\frac{T}{2\pi}\sum_{m=0}^{2\nu+2}\left(\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{k}\left(2C_1^{(\nu,\nu)}(m,k)+C_2^{(\nu,\nu)}(m,k)\right)\right)\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^m+O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 $C_1^{(\nu,\nu)}(m,k)$ 和 $C_2^{(\nu,\nu)}(m,k)$ 在定理*1*中定义。

推论2。 假设黎曼猜想。在 $\mu=\nu=1$ 的情况下，(2.1) 还原了 (P_4x) 中的多项式(1.4)。

推论3。 对于 μ， ν 正整数，$\mathcal{P}_{\mu,\nu}(x)$ 的首阶系数与(1.2)中给出的首阶项一致。

正如我们从式 (1.4) 中 Milinovich 的多项式 $P_4(x)$ 所见，系数很快就变得难以处理。我们在附录 A 中给出一个关于二阶导数离散二阶矩结果的例子，明确写出二阶导数对应的多项式。最后，在附录 B 中，我们通过绘制一阶导数和二阶导数的图像来演示该定理。

Acknowledgments

本文部分内容源自第一作者在约克大学完成的研究型理学硕士论文 [4] 。第三作者感谢海尔布隆数学研究所提供的支持。

3. Brief outline of the proof

对于 $c = 1 + {}^{1}\log T$ 和 $\mathcal{R}$，以 $c+i$、 $c+iT$、 $1-c+iT$ 和 $1-c+i$ 为顶点的矩形围道，我们可以利用柯西定理写出

$$\begin{aligned} I(\mu,\nu) &= \sum_{0<\gamma\leq T} \zeta^{(\mu)}(\rho)\zeta^{(\nu)}(1-\rho) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{R}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(\nu)}(1-s)\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c+i}^{c+iT} + \int_{c+iT}^{1-c+iT} + \int_{1-c+iT}^{1-c+i} + \int_{1-c+i}^{c+i}\right)\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(\nu)}(1-s)\,ds \\ &= I_1(\mu,\nu) + I_2(\mu,\nu) + I_3(\mu,\nu) + I_4(\mu,\nu). \end{aligned} \tag{3.1}$$

由于积分路径长度有限且被积函数有界，显然 $I_4(\mu,\nu) = O(1)$。此外，正如 Gonek [9], 所示，我们有 $I_2(\mu,\nu) = O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$，只需作一个无关紧要的限制： T与某个零点纵坐标 γ的距离为 $\gg 1/\log T$。在整个证明过程中，我们都将不失一般性地采用这一限制。由此可得

$$I(\mu,\nu) = I_1(\mu,\nu) + I_3(\mu,\nu) + O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \tag{3.2}$$

在第 4 节中，我们处理右侧的竖直线段 $I_1(\mu,\ \nu)$。我们首先引入一个函数方程，从而可以将 $\zeta^{(\nu)}(1-s)$ 表示为 $\zeta^{(k)}(s)$ 的形式，其中 k 介于 0 和 ν 之间。因此，我们可以将 $I_1(\mu,\ \nu)$ 写成一个绝对收敛的狄利克雷级数的积分。随后，我们使用驻相法将该积分改写为以下各项之和

$$\sum_{n_1n_2n_3\leq\frac{T}{2\pi}} \Lambda(n_1)(\log n_2)^{\mu}(\log n_3)^{k}(\log n_1n_2n_3)^{\nu-k},$$

再加上一个很小的误差，该误差可并入上文所写的误差项中。

我们通过 Perron公式计算这个不含 $(\log n_1n_2n_3)^{\nu-k}$ 因子的和。这将该和表示为狄利克雷级数在 $s=1$ 处的留数，而后者又是一个次数为 $\mu+\nu+2$ 的多项式。最后，我们通过分部求和重新引入对数项。

在第5节中，我们处理左侧线段 $I_3(\mu,\ \nu)$。我们利用另一个函数方程，将积分的左侧竖直线段与右侧竖直线段联系起来，然后采用与第4节类似的方法，建立左侧竖直线段的渐近表达式

。将这两条围道结合起来，再加上证明过程中保留的误差项，即可得到定理1。

最后，正如引言中所述，我们将在第6节证明本结果的一些推论。

4. The right-hand vertical segment

4.1. **初步处理**。

我们首先将 $I_1(\mu,\ \nu)$ 写成一种更便于分析的形式。回想一下，

$$I_1(\mu,\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_1^T \frac{\zeta'}{\zeta}(c+it)\zeta^{(\mu)}(c+it)\zeta^{(\nu)}(1-c-it)\ dt.$$

我们应用 $\zeta^{(\nu)}(1-c-it)$ 的函数方程，从而可以将所得表达式写成收敛的狄利克雷级数。

引理 1. [13, 引理 4] 对于 $s=\sigma+it$，取 $\sigma\geq 1$ 和 $t\geq 1$，我们有

$$\zeta^{(\nu)}(1-s)=(-1)^\nu\chi(1-s)\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\left(\log\frac{t}{2\pi}\right)^{\nu-k}\zeta^{(k)}(s)+O\left(t^{\sigma-\frac{3}{2}}(\log t)^\nu\right),\qquad(4.1)$$

其中 $\chi(s)$ 是函数方程 $\zeta(s)=\chi(s)\zeta(1-s)$ 中的因子。

将 (4.1) 代入 $I_1(\mu,\nu)$ 的表达式，得到

$$\begin{aligned}&I_1(\mu,\nu)\\&=\frac{(-1)^\nu}{2\pi}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\int_1^T\frac{\zeta'}{\zeta}(c+it)\zeta^{(\mu)}(c+it)\zeta^{(k)}(c+it)\chi(1-c-it)\left(\log\frac{t}{2\pi}\right)^{\nu-k}dt\\&\qquad+O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

被积函数中的每一项都可表示为狄利克雷级数，因为 $\Re(s)=c>1$，即

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\text{ and }\zeta^{(\mu)}(s)=(-1)^\mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^\mu}{n^s},$$

其中 $\Lambda(n)$ 是冯·曼戈尔特函数。

因此，将上面积分中的狄利克雷级数相乘，可得

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)&=(-1)^{\mu+k+1}\left(\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n_1)}{n_1^s}\right)\left(\sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{(\log n_2)^\mu}{n_2^s}\right)\left(\sum_{n_3=1}^{\infty}\frac{(\log n_3)^k}{n_3^s}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^{(\mu,k)}}{n^s}\end{aligned}$$

其中

$$A_n^{(\mu,k)}:=(-1)^{\mu+k+1}\sum_{n_1n_2n_3=n}\Lambda(n_1)(\log n_2)^\mu(\log n_3)^k.\qquad(4.2)$$

积分 $I_1(\mu,\ \nu)$ 随后可写为

$$\begin{aligned}&I_1(\mu,\nu)\\&=\frac{(-1)^\nu}{2\pi}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\int_1^T\chi(1-c-it)\left(\log\frac{t}{2\pi}\right)^{\nu-k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^{(\mu,k)}}{n^{c+it}}\right)dt+O\left(T^{\frac{1}{2}}(\log T)^\nu\right).\end{aligned}$$

现在我们使用 Gonek 的一个引理 [9, 引理 5]，该引理源自驻相法，它将使我们能够把这个积分写成一个和，随后我们将用 Perron 方法对其求值。

引理2. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个满足条件 $a_n \ll n^{\varepsilon}$（对任意 $\varepsilon > 0$）的复数序列。令 $c = 1 + \frac{1}{\log T}$，并设 m 为非负整数。那么对于 $T \geq 1$，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^T \chi(1-c-it)\left(\log\frac{t}{2\pi}\right)^m\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{c+it}}\right)dt = \sum_{1\leq n\leq \frac{T}{2\pi}} a_n(\log n)^m + O\left(T^{c-\frac{1}{2}}(\log T)^m\right).$$

由引理2，我们可以将 $I_1(\mu,\nu)$ 重写为以下求和

$$I_1(\mu,\nu) = \sum_{k=0}^{\nu}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{k}\sum_{n\leq\frac{T}{2\pi}} A_n^{(\mu,k)}(\log n)^{\nu-k} + O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \tag{4.3}$$

4.2. **计算不含对数的内层求和。**

在本节中，为方便记号，我们令 $Y = \frac{T}{2\pi}$。

现在我们来计算式（4.3）中的和。可以利用狄利克雷级数展开，应用 Perron公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^{(\mu,k)}(\log n)^{\nu-k}}{n^s} = (-1)^{\nu-k}\frac{d^{\nu-k}}{ds^{\nu-k}}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\right).$$

然而，事实证明，使用Perron公式计算 $\sum_{n\leq Y} A_n^{(\mu,k)}$而不含任何对数会更简单、更方便，之后再利用分部求和将其重新引入。

我们首先使用Perron公式的截断版本。

引理3。 设 $A_n^{(\mu,k)}$由(4.2)给出。对于 $2 \leq V \leq Y$，当 $Y \to \infty$时，

$$\sum_{n\leq Y} A_n^{(\mu,k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iV}^{c+iV}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s}\,ds + R_1(Y,V),$$

其中

$$R_1(Y,V) = O\left(\frac{Y}{V}(\log Y)^{\mu+k+3}\right).$$

证明。要证明该引理，我们只需估计 $R_1(Y,\ V)$，因为积分直接来自Perron公式（截断会产生误差项）。根据 [19,推论5，3] 我们可以将余项估计为

$$\begin{aligned} R_1(Y,V) &\ll \sum_{\frac{Y}{2}<n<2Y} |A_n^{(\mu,k)}| \min\left(1, \frac{Y}{V|Y-n|}\right) + \frac{4^c + Y^c}{V}\sum_{n\geq 1}\frac{|A_n^{(\mu,k)}|}{n^c} \\ &= A + B, \end{aligned} \tag{4.4}$$

说。为了估计误差，我们首先给出 $A_n^{(\mu,k)}$ 的一个上界。注意，$\Lambda(n) \leq \log n$，且当且仅当 n 是素数时等号成立。我们对 $A_n^{(\mu,k)}$ 作粗略估计，得到

$$\left|A_n^{(\mu,k)}\right| \leq \sum_{n_1n_2n_3=n}(\log n)(\log n)^{\mu}(\log n)^k = (\log n)^{\mu+k+1}d_3(n),$$

其中 $d_3(n)$ 是三重约数函数。用 $A_n^{(\mu,k)}$ 的最大值来估计式 (4.4) 中的 A，并采用记号 $\ell = |Y - m|$,

$$\begin{aligned} A &\ll (\log Y)^{\mu+k+1} \sum_{\frac{Y}{2}<m<2Y} d_3(m) \min\left(1, \frac{Y}{V\ell}\right) \\ &\ll (\log Y)^{\mu+k+1} \sum_{\ell \le Y} \frac{Y}{V}\frac{1}{\ell} d_3(\ell) \\ &\ll \frac{Y}{V}(\log Y)^{\mu+k+4}, \end{aligned}$$

利用 $\sum_{\ell \le Y} {}^{d_3(\ell)}{}_{\ell} \ll (\log Y)^3$ 这一事实（例如参见 [19, 第43]页）。

接下来，我们转而对（4.4）中的 B 进行估计。由于 $c = 1 + \frac{1}{\log T}$ 狄利克雷级数收敛，因此

$$B = \frac{4^c + Y^c}{V}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(c)\zeta^{(\mu)}(c)\zeta^{(k)}(c)\right| \ll \frac{Y}{V}(\log Y)^{\mu+k+3},$$

利用$Y = \frac{T}{2\pi}$ 这一事实，并且

$$\frac{\zeta'}{\zeta}\left(1 + \frac{1}{\log T}\right) \ll \log T, \tag{4.5}$$

and

$$\zeta^{(\mu)}\left(1 + \frac{1}{\log T}\right) \ll (\log T)^{\mu+1} \tag{4.6}$$

如所需。 □

接下来，我们将引理3中的积分表示为被积函数在$s = 1$处的留数。将围道补全为矩形时会产生一个误差项，我们将在引理4中处理它。我们指出，这个引理是唯一一个在是否假设黎曼猜想时会得到不同误差项的地方，因此我们将分别讨论这两种情况。

引理4。 对于 $Y = \frac{T}{2\pi}$，当 $V, Y \to \infty$ 时，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iV}^{c+iV} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s}\, ds = \operatorname*{Res}_{s=1}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s}\right) + \mathcal{E}_1(Y, V),$$

其中 $\mathcal{E}_1(\mu, k;\ Y)$ 由下式给出

(1) $\mathcal{E}_1(\mu, k; Y) = \left(Ye^{-C\sqrt{\log Y}}\right)$ *unconditionally for a positive constant* C

(2) $\mathcal{E}_1(\mu, k; Y) = \left(Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ *under the Riemann Hypothesis.*

引理4的证明。 我们考虑顶点为 $c \pm iV, c' \pm iV$ 的正向矩形围道，其中 $\frac{1}{2} < c' < 1$ 足够大，使得实部为 $|\gamma| \le V$ 的 ζ函数零点均不位于 c' 直线之上或其右侧。因此，该围道内唯一的极点位于 $s = 1$，由柯西留数定理可得,

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Res}_{s=1}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s}\right) \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c-iV}^{c+iV} + \int_{c+iV}^{c'+iV} + \int_{c'+iV}^{c'-iV} + \int_{c'-iV}^{c-iV}\right)\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s}\, ds. \end{aligned}$$

重新整理此表达式并改变部分积分的方向后，可得所求积分等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iV}^{c+iV}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s}\,ds=\operatorname*{Res}_{s=1}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s}\right)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c'+iV}^{c+iV}+\int_{c'-iV}^{c'+iV}-\int_{c'-iV}^{c-iV}\right)\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s}\,ds.$$

通过为三个线积分找到适当的界，即可得到该结果。由于条件情形和无条件情形所涉及的 c' 取值以及ζ函数的界不同，我们将分别考察这两种情形。

无条件情形。

正如 Titchmarsh [22, p.54], 所指出的，存在某个绝对常数 $C>0$ ，使得当 $c'=1-\frac{C}{\log V}$时，ζ(s)的任何零点与$c'-iV$和 $c'+iV$之间的直线的距离均为 $\gg\frac{1}{\log V}$。

因此，在两段水平线段上，我们可以应用 Gonek [9, §2] 的界，该界对 $-1\le\sigma\le 2$一致成立。

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma\pm iV)\ll(\log V)^2.$$

我们还在临界带内及其右侧使用凸性界。

$$\zeta^{(\mu)}(\sigma\pm iV)\ll\begin{cases}V^{\frac{1}{2}(1-\sigma)}(\log V)^{\mu+1} & \text{if } 0\le\sigma\le 1\\ (\log V)^{\mu+1} & \text{if } \sigma\ge 1,\end{cases}\tag{4.7}$$

这可以通过使用 Ivić 对 $\nu=1$ [16] 的界，并对以 $\sigma+iV$为中心、半径为 $1/\log V$的圆盘内解析函数的导数应用柯西估计来建立。

利用这些界，我们推得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c'\pm iV}^{c\pm iV}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s}\,d\sigma\ll(\log V)^{\mu+k+4}\frac{Y^c}{V}(c-c')\ll\frac{Y}{V}(\log V)^{\mu+k+3},$$

其中我们使用了 $c-c'\ll\frac{1}{\log V}$以及 $Y^c=\ll Y$这一事实。

现在我们转向围道的竖直线段。除去极点外，我们可以使用与上面相同的界；对于 $t\approx 0$，我们利用相应的洛朗展开式（4.5）和（4.6）来估计积分中的各项。因此，在直线 $s=c'+it$,$-V\le t\le V$上，我们可以将积分估计为

$$Y^{c'}(\log V)^{\mu+k+4}+\int_1^V(\log V)^{\mu+k+4}\frac{Y^{c'}}{t}\,dt\ll Y^{c'}(\log V)^{\mu+k+5}.$$

由于 $Y^{c'}=Y\exp\left(\frac{C}{\log Y}\right)\ll\log$，这就完成了无条件情形的证明。

条件情形。

在黎曼猜想的假设下，我们既可以将积分线进一步向左移动而不穿过任何零点，也可以对 ζ函数及其导数使用更好的（条件性）界。具体来说，我们将围道移至临界线右侧紧邻处，令 $c'=\frac{1}{2}+\frac{1}{\log V}$，并对任意 $\varepsilon>0$ 使用 $\zeta^{(n)}(s)\ll t^{\varepsilon}$。

在竖直线段上的任意一点，最近的零点距离为 $\geq \frac{1}{\log V}$，因此我们有 $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll (\log V)^2$，所以竖直积分的上界为

$$Y^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\log Y}{\log V}\right) V^{\varepsilon}$$

对任意 $\varepsilon > 0$。

水平线段的处理方式与之前类似，只是这次积分区间的长度有界，因此我们将把诸如 $\log V$ 这样的项估计为 V^{ε}，因为这已足以满足我们的需要。两段水平线段的贡献估计为

$$\frac{Y}{V} V^{\varepsilon}$$

由此便完成了条件情形下的证明。 □

引理*4*的证明完毕。

利用引理3，到目前为止，我们已在引理4中证明

$$\sum_{n \leq Y} A_n^{(\mu,k)} = \operatorname*{Res}_{s=1} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s}\right) + R_1(Y,V) + \mathcal{E}_1(V,Y).$$

此处我们根据是以条件方式还是无条件方式估计误差项，选取关于 Y 的最优 V。

在无条件情形下，我们可以选取 $V = \exp(\sqrt{C \log Y})$，以优化误差项。由此得到的误差项为

$$R_1(Y,V) + \mathcal{E}_1(V,Y) \ll Y e^{-\sqrt{C \log Y}} (\log Y)^{\frac{\mu+k+5}{2}} \ll Y \exp(-\tilde{C}\sqrt{\log Y})$$

，其中 $C > 0$。

在条件情形下，我们取 $V = Y$，并得到

$$R_1(Y,V) + \mathcal{E}_1(V,Y) \ll Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

对任意 $\varepsilon > 0$ 均成立，如引理4所述。

现在我们来计算留数项。在下面的引理中，我们将用式（4.2）中给出的三重狄利克雷级数在 $s = 1$ 附近的洛朗系数表示该留数。

引理 5. 我们有

$$\operatorname{Res}_{s=1} \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s}\right) = Y \sum_{j=0}^{\mu+k+2} \frac{c_j^{(\mu,k)}}{(\mu+k+2-j)!} (\log Y)^{\mu+k+2-j}, \tag{4.8}$$

其中 $c^{\mu}{}_{,}{}_{j}{}^{k}$ 是围绕 $s = 1$ 展开的 *Laurent*级数系数

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{1}{s} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(\mu,k)} (s-1)^{-\mu-k-3+j}. \tag{4.9}$$

证明。 函数 $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{1}{s}$ 在 $s = 1$ 处有一个 $\mu + k + 3$ 阶极点。我们将此展开式写成 (4.9) 中给出的级数。

Y^s 在 $s = 1$ 附近的展开式为

$$Y^s = Y\left(1 + (s-1)\log Y + \frac{(s-1)^2}{2!}(\log Y)^2 + \cdots + \frac{(s-1)^k}{k!}(\log Y)^k + \cdots\right).$$

因此， $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\zeta^{(\mu)}(s)\zeta^{(k)}(s)Y^s$ 的留数等于以下各项之和：

$$\frac{c_j^{(\mu,k)}}{(\mu+k+2-j)!} (\log Y)^{\mu+k+2-j}$$

对于每个 $j = 0$、.....、$\mu + k + 2$。 □

4.3. **在内层求和中重新引入对数**。

在本节中，我们设定 $Y = \frac{T}{2\pi}$ 以便于记号表示。

引理 6. 对于 $0 \leq k \leq \nu$，我们有

$$\sum_{n \leq Y} A_n^{(\mu,k)} (\log n)^{\nu-k} = Y \sum_{m=0}^{\mu+\nu+2} C_1^{(\mu,\nu)}(m,k)(\log Y)^m + O\left(Ye^{-C\sqrt{\log Y}}\right),$$

其中对于 $m \geq \nu - k$,

$$C_1^{(\mu,\nu)}(m,k) = \frac{(-1)^m(\nu-k)}{m!} \sum_{j=0}^{\mu+\nu+1-m} (-1)^{\mu+\nu-j} \frac{(\mu+\nu+1-j)!}{(\mu+k+2-j)!} c_j^{(\mu,k)} + \frac{c_{\mu+\nu+2-m}^{(\mu,k)}}{(k+m-\nu)!}$$

且对于 $m < \nu - k$

$$C_1^{(\mu,\nu)}(m,k) = \frac{(-1)^m(\nu-k)}{m!} \sum_{j=0}^{\mu+k+2} (-1)^{\mu+\nu-j} \frac{(\mu+\nu+1-j)!}{(\mu+k+2-j)!} c_j^{(\mu,k)}$$

注。 表达式 $C_1^{(\mu,\nu)}(m,k)$ 的两种写法之间的差异在于：较大的 m 会多出一项，而且 j 求和的上限不同。当 $m = \nu - k - 1$ 时，这两个上限相同。最后，当 $m = \mu + \nu + 2$ 时（这是它所能取到的最大值）， j 求和为空。

证明。 利用引理 3、4 和 5，我们已经证明

$$\sum_{n \leq Y} A_n^{(\mu,k)} = Y \sum_{j=0}^{\mu+k+2} \frac{c_j^{(\mu,k)}}{(\mu+k+2-j)!} (\log Y)^{\mu+k+2-j} + O\left(Ye^{-C\sqrt{\log Y}}\right).$$

通过分部求和，我们得到

$$\sum_{n \leq Y} A_n^{(\mu,k)} (\log n)^{\nu-k} = \left(\sum_{n \leq Y} A_n^{(\mu,k)}\right) (\log Y)^{\nu-k} - (\nu-k) \int_1^Y \left(\sum_{n \leq t} A_n^{(\mu,k)}\right) \frac{(\log t)^{\nu-k-1}}{t}\, dt. \tag{4.10}$$

显然

$$\left(\sum_{n \leq Y} A_n^{(\mu,k)}\right) (\log Y)^{\nu-k} = Y \sum_{j=0}^{\mu+k+2} \frac{c_j^{(\mu,k)}}{(\mu+k+2-j)!} (\log Y)^{\mu+\nu+2-j} + O\left((\log Y)^{\nu-k} Y e^{-C\sqrt{\log Y}}\right),$$

其中 $C > 0$ 不一定始终是同一个常数。将求和重新标记，使 $m = \mu + \nu + 2 - j$ （以便清楚地显示 $\log Y$ 的幂），则 (4.10) 中的第一部分为

$$\sum_{n \leq Y} A_n^{(\mu,k)} (\log Y)^{\nu-k} = Y \sum_{m=\nu-k}^{\mu+\nu+2} \frac{c_{\mu+\nu+2-m}^{(\mu,k)}}{(m+k-\nu)!} (\log Y)^m + O\left(Ye^{-C\sqrt{\log Y}}\right). \tag{4.11}$$

接下来，注意到 (4.10) 中的第二项为

$$(\nu-k) \sum_{j=0}^{\mu+k+2} \frac{c_j^{(\mu,k)}}{(\mu+k+2-j)!} \int_1^Y (\log t)^{\mu+\nu+1-j}\, dt + O\left(Ye^{-C\sqrt{\log Y}}\right). \tag{4.12}$$

注意到，通过反复分部积分，

$$\int_1^Y (\log t)^n \, dt = (-1)^n n! Y \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m (\log Y)^m}{m!} + O(1), \tag{4.13}$$

因此，利用 (4.13) 和 $n = \mu + \nu + 1 - j$，我们有

$$\begin{aligned}\int_1^Y \left(\sum_{n \le t} A_n^{(\mu,k)} \right) \frac{(\log t)^{\nu-k-1}}{t} \, dt \\ = \sum_{j=0}^{\mu+k+2} \frac{c_j^{(\mu,k)}}{(\mu+k+2-j)!} (-1)^{\mu+\nu+1-j} (\mu+\nu+1-j)! Y \sum_{m=0}^{\mu+\nu+1-j} \frac{(-1)^m (\log Y)^m}{m!} \\ + O\left(Y e^{-C\sqrt{\log Y}} \right).\end{aligned}$$

接下来交换双重求和中的求和顺序，得到

$$\begin{aligned}Y \sum_{m=0}^{\nu-k-1} \frac{(-1)^m (\log Y)^m}{m!} \sum_{j=0}^{\mu+k+2} \frac{c_j^{(\mu,k)}}{(\mu+k+2-j)!} (-1)^{\mu+\nu+1-j} (\mu+\nu+1-j)! \\ + Y \sum_{m=\nu-k}^{\mu+\nu+1} \frac{(-1)^m (\log Y)^m}{m!} \sum_{j=0}^{\mu+\nu+1-m} \frac{c_j^{(\mu,k)}}{(\mu+k+2-j)!} (-1)^{\mu+\nu+1-j} (\mu+\nu+1-j)!\end{aligned} \tag{4.14}$$

结合 (4.11)、(4.12) 和 (4.14)，得到

$$\begin{aligned}\sum_{n \le Y} A_n^{(\mu,k)} (\log n)^{\nu-k} = Y \sum_{m=\nu-k}^{\mu+\nu+2} \frac{c_{\mu+\nu+2-m}^{(\mu,k)}}{(m+k-\nu)!} (\log Y)^m \\ + (\nu-k) Y \sum_{m=0}^{\mu+\nu+1} \frac{(-1)^m (\log Y)^m}{m!} \sum_{j=0}^{\min\{\mu+\nu+1-m,\, \mu+k+2\}} (-1)^{\mu+\nu-j} \frac{(\mu+\nu+1-j)!}{(\mu+k+2-j)!} c_j^{(\mu,k)} \\ + O\left(Y e^{-C\sqrt{\log Y}} \right)\end{aligned} \tag{4.15}$$

对于某个 $C > 0$，这正是所需的。 □

最后，由于 $I_1(\mu, \nu)$ 等于

$$\sum_{k=0}^{\nu} (-1)^\nu \binom{\nu}{k} \sum_{n \le \frac{T}{2\pi}} A_n^{(\mu,k)} (\log n)^{\nu-k} + O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right),$$

由引理 6 可知

$$I_1(\mu,\nu) = \frac{T}{2\pi} \sum_{m=0}^{\mu+\nu+2} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^\nu \binom{\nu}{k} C_1^{(\mu,\nu)}(m,k) \left(\log \frac{T}{2\pi} \right)^m + O\left(T e^{-C\sqrt{\log T}} \right) \tag{4.16}$$

其中 $C^{\mu}{}_{,1}{}^{\nu}(m,k)$ 如引理 6 的陈述所给出。

5. The left-hand vertical segment

左侧部分 $I_3(\mu,\nu)$ 的计算与 $I_1(\mu,\nu)$ 的计算非常相似，因此本节将概述计算过程，并重点说明两种计算之间的差异所在。

5.1. **初步处理**。

我们首先将式（3.1）中的 $I_3(\mu,\nu)$ 写成一种形式，使其将 $I_3(\mu,\nu)$ 与 $I_1(\mu,\nu)$ 联系起来。我们有

$$I_3(\mu,\nu) = -\frac{1}{2\pi}\int_1^T \frac{\zeta'}{\zeta}(1-c+it)\zeta^{(\mu)}(1-c+it)\zeta^{(\nu)}(c-it)\ dt.$$

根据 [9, 引理 6]，我们有（其中 $t \neq 0$）

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) = -\log\left(\frac{|t|}{2\pi}\right) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + O\left(\frac{1}{1+|t|}\right). \tag{5.1}$$

so

$$\begin{aligned} I_3(\mu,\nu) &= \frac{1}{2\pi}\int_1^T \left(\log\left(\frac{t}{2\pi}\right) + \frac{\zeta'}{\zeta}(c-it) + O\left(\frac{1}{1+|t|}\right)\right)\zeta^{(\mu)}(1-c+it)\zeta^{(\nu)}(c-it)\ dt \\ &= \overline{J(\mu,\nu)} + \overline{I_1(\nu,\mu)} + O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中，上划线表示复共轭，并且我们将 $s = c + it$写作

$$J(\mu,\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_1^T \left(\log\frac{t}{2\pi}\right)\zeta^{(\mu)}(1-s)\zeta^{(\nu)}(s)\ dt.$$

我们已经计算过 $I_1(\mu,\ \nu)$（但请注意，此处 μ 和 ν 互换了）。因此，现在只需计算 $J(\mu,\ \nu)$。这可以采用类似的方法，区别仅在于一些次要的技术细节（特别是，在我们的被积函数中有一个对数项，而在 $I_1(\mu,\ \nu)$中则是ζ函数的对数导数）。

注。为与我们处理 $I_1(\mu,\nu)$的方法保持一致，我们将用斯蒂尔切斯系数显式计算 $J(\mu,\nu)$。不过，另一种方法是改用 ***Ingham*** 的方法 [15]，从而得到

$$J(\mu,\nu) = \int_1^T \left(\log\frac{t}{2\pi}\right)\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial\alpha^{\mu+\nu}}\left(\zeta(1+\alpha) + \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\alpha}\zeta(1-\alpha)\right)\Bigg|_{\alpha=0} dt + O\left(T^{1/2+\epsilon}\right).$$

5.2. J **的初步运算**(μ,ν)。

我们首先对 $\zeta^{(\mu)}(1-s)$ 使用引理 1，将 $J(\mu,\nu)$ 写成

$$\frac{(-1)^\mu}{2\pi}\sum_{k=0}^{\mu}\binom{\mu}{k}\int_1^T \zeta^{(\nu)}(c+it)\zeta^{(k)}(c+it)\chi(1-c-it)\left(\log\frac{t}{2\pi}\right)^{\mu-k+1} dt + O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

由于我们处于区域 $\Re(s) = c > 1$，因此可以使用这些项的狄利克雷级数表示，即

$$\zeta^{(\nu)}(s)\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n^{(\nu,k)}}{n^s}$$

其中

$$B_n^{(\nu,k)} = (-1)^{\nu+k}\sum_{n_1 n_2 = n}(\log n_1)^\nu(\log n_2)^k$$

从而

$$J(\mu,\nu) = \frac{(-1)^\mu}{2\pi}\sum_{k=0}^{\mu}\binom{\mu}{k}\int_1^T \chi(1-c-it)\left(\log\frac{t}{2\pi}\right)^{\mu-k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n^{(\nu,k)}}{n^{c+it}}\ dt + O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

接下来，应用引理2可得

$$J(\mu,\nu) = (-1)^\mu\sum_{k=0}^{\mu}\binom{\mu}{k}\sum_{n\leq\frac{T}{2\pi}}B_n^{(\nu,k)}(\log n)^{\mu-k+1} + O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \tag{5.3}$$

5.3. **计算内层求和**。

在本节中，为方便记号，我们设定 $Y = \frac{T}{2\pi}$ 。

我们有以下引理，它们与引理3和引理4非常相似。这里的关键区别在于，我们没有 $\zeta'/\zeta(s)$ 项（或者等价地说，我们不需要进行素数求和），这意味着我们不需要像在引理4中那样，根据是否假设黎曼猜想而拆分误差项。

引理7。 由于 $Y \to \infty$ 我们有

$$\sum_{n \le Y} B_n^{(\nu,k)} = \operatorname*{Res}_{s=1} \left(\zeta^{(\nu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s} \right) + O\left(Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right). \tag{5.4}$$

证明。 如同引理3，对于 $2 \le V \le Y$我们有；由于 $Y \to \infty$ 我们有

$$\sum_{n \le Y} B_n^{(\nu,k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iV}^{c+iV} \zeta^{(\nu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s}ds + O\left(\frac{Y}{V}(\log Y)^{\nu+k+2} \right).$$

类似于引理4，我们将围道移至竖直直线 $c' = 1/2$，注意到被积函数除了在 $s = 1$ 处外没有其他奇点。在两段水平线 $\sigma \pm iV$上，我们对 $\zeta^{(\mu)}(\sigma + iV)$ 使用(4.7)中给出的无条件凸性界，从而得到大小为

$$\int_{1/2}^{1} V^{(1-\sigma)}(\log V)^{\mu+\nu+2}\frac{Y^\sigma}{V}d\sigma \ll \frac{Y}{V}V^\epsilon.$$

直线 $c' = 1/2$ 上的竖直围道有界于

$$\ll \int_1^V \left|\zeta^{(\mu)}(\tfrac{1}{2}+it)\right| \left|\zeta^{(\mu)}(\tfrac{1}{2}+it)\right| \frac{Y^{1/2}}{t}dt$$

$$\ll Y^{1/2}\left(\int_1^V \frac{\left|\zeta^{(\mu)}(\frac{1}{2}+it)\right|^2}{t} \right)^{1/2} \left(\int_1^V \frac{\left|\zeta^{(\nu)}(\frac{1}{2}+it)\right|^2}{t} \right)^{1/2} \ll Y^{1/2}V^\epsilon$$

最后一个不等式由 Ingham 对临界线上 ζ函数导数的二阶矩的 [15] 估值推出。任取满足 $\sqrt{Y} \le V \le Y$的 V，即可得到所需的误差，并证明该引理。□

以类似于引理 5 的方法计算 (5.4) 中的留数。

引理8。我们有

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \left(\zeta^{(\nu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{Y^s}{s} \right) = Y\sum_{j=0}^{\nu+k+1} \frac{d_j^{(\nu,k)}}{(\nu+k+1-j)!}(\log Y)^{\nu+k+1-j}$$

其中 $d_j^{(\nu,k)}$ 是围绕 $s = 1$ 的 *Laurent*级数系数，

$$\zeta^{(\nu)}(s)\zeta^{(k)}(s)\frac{1}{s} = \sum_{j \ge 0} d_j^{(\nu,k)}(s-1)^{-\nu-k-2+j}.$$

结合引理7和引理8可得

$$\sum_{n \le Y} B_n^{(\nu,k)} = Y\sum_{j=0}^{\nu+k+1} \frac{d_j^{(\nu,k)}}{(\nu+k+1-j)!}(\log Y)^{\nu+k+1-j} + O\left(Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right).$$

下一个引理与我们在引理 6 中证明的内容类似，其中我们将对数重新代入上面的和式中。

引理 9. 对于 $k = 0,1,\ldots,\mu$，我们有

$$\sum_{n\leq Y} B_n^{(\nu,k)}(\log n)^{\mu-k+1} = Y\sum_{m=0}^{\mu+\nu+2} C_2^{(\mu,\nu)}(m,k)(\log Y)^m + O\left(Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中，对于 $m \geq \mu-k+1$,

$$C_2^{(\mu,\nu)}(m,k) = \frac{(-1)^m(\mu-k+1)}{m!}\sum_{j=0}^{\mu+\nu+1-m}(-1)^{\mu+\nu-j}\frac{(\mu+\nu+1-j)!}{(\nu+k+1-j)!}d_j^{(\nu,k)} + \frac{d_{\mu+\nu+2-m}^{(\nu,k)}}{(k+m-\mu-1)!}$$

对于 $m \leq \mu-k$,

$$C_2^{(\mu,\nu)}(m,k) = \frac{(-1)^m(\mu-k+1)}{m!}\sum_{j=0}^{\nu+k+1}(-1)^{\mu+\nu-j}\frac{(\mu+\nu+1-j)!}{(\nu+k+1-j)!}d_j^{(\nu,k)}$$

注。 当 $m = \mu+\nu+2$（可能的最大 m）时，$C_2^{(\mu,\nu)}(m,k)$ 中的求和为空。

证明。与引理 6 中的右侧竖直线段一样，我们使用分部求和重新引入对数项。根据分部求和公式，我们有

$$\sum_{n\leq Y} B_n^{(\nu,k)}(\log n)^{\mu-k+1} = \left(\sum_{n\leq Y} B_n^{(\nu,k)}\right)(\log Y)^{\mu-k+1} - (\mu-k+1)\int_1^Y \left(\sum_{n\leq t} B_n^{(\nu,k)}\right)\frac{(\log t)^{\mu-k}}{t}\,dt.$$

第一项为

$$\left(\sum_{n\leq Y} B_n^{(\nu,k)}\right)(\log Y)^{\mu-k+1} = Y\sum_{j=0}^{\nu+k+1}\frac{d_j^{(\nu,k)}}{(\nu+k+1-j)!}(\log Y)^{\mu+\nu+2-j} + O\left(Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) = Y\sum_{m=\mu-k+1}^{\mu+\nu+2}\frac{d_{\mu+\nu+2-m}^{(\nu,k)}}{(m+k-\mu-1)!}(\log Y)^m + O\left(Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

而第二项等于

$$-(\mu-k+1)\sum_{j=0}^{\nu+k+1}\frac{d_j^{(\nu,k)}}{(\nu+k+1-j)!}\int_1^Y (\log t)^{\mu+\nu+1-j}dt + O\left(Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

利用（4.13），可将其计算为

$$-(\mu-k+1)\sum_{j=0}^{\nu+k+1}\frac{d_j^{(\nu,k)}}{(\nu+k+1-j)!}(-1)^{\mu+\nu+1-j}(\mu+\nu+1-j)!Y\sum_{m=0}^{\mu+\nu+1-j}\frac{(-1)^m(\log Y)^m}{m!}$$

交换求和的阶，双重求和为

$$(\mu-k+1)Y\sum_{m=0}^{\mu-k}\frac{(-1)^m(\log Y)^m}{m!}\sum_{j=0}^{\nu+k+1}(-1)^{\mu+\nu-j}\frac{(\mu+\nu+1-j)!}{(\nu+k+1-j)!}d_j^{(\nu,k)}$$
$$+(\mu-k+1)Y\sum_{m=\mu-k+1}^{\mu+\nu+1}\frac{(-1)^m(\log Y)^m}{m!}\sum_{j=0}^{\mu+\nu+1-m}(-1)^{\mu+\nu-j}\frac{(\mu+\nu+1-j)!}{(\nu+k+1-j)!}d_j^{(\nu,k)}.$$

将两部分合并，得到 $C_2^{(\mu,\nu)}(m,\ k)$ 的公式，并完成证明。□

将引理 9 应用于 (5.3)，得到

$$J(\mu,\nu)=\frac{T}{2\pi}\sum_{m=0}^{\mu+\nu+2}\sum_{k=0}^{\mu}(-1)^\mu\binom{\mu}{k}C_2^{(\mu,\nu)}(m,k)\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^m+O\left(T^{\frac12+\varepsilon}\right).\tag{5.5}$$

在 (4.16) 中交换 μ 和 ν 的角色，得到

$$I_1(\nu,\mu)=\frac{T}{2\pi}\sum_{m=0}^{\mu+\nu+2}\sum_{k=0}^{\mu}(-1)^\mu\binom{\mu}{k}C_1^{(\nu,\mu)}(m,k)\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^m+O\left(Te^{-C\sqrt{\log T}}\right)\tag{5.6}$$

因此，将 (5.2) 中的 $\overline{J(\mu,\ \nu)}$ 和 $\overline{I_1(\nu,\ \mu)}$ 合并，得到

$$I_3(\mu,\nu)=\frac{T}{2\pi}\sum_{m=0}^{\mu+\nu+2}\sum_{k=0}^{\mu}(-1)^\mu\binom{\mu}{k}\left(C_1^{(\nu,\mu)}(m,k)+C_2^{(\mu,\nu)}(m,k)\right)\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^m$$
$$+O\left(Te^{-C\sqrt{\log T}}\right)\tag{5.7}$$

将 (4.16) 和 (5.7) 代入 (3.2)，可得

$$I(\mu,\nu)=\frac{T}{2\pi}\sum_{m=0}^{\mu+\nu+2}\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^\nu\binom{\nu}{k}C_1^{(\mu,\nu)}(m,k)\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^m$$
$$+\frac{T}{2\pi}\sum_{m=0}^{\mu+\nu+2}\sum_{k=0}^{\mu}(-1)^\mu\binom{\mu}{k}\left(C_1^{(\nu,\mu)}(m,k)+C_2^{(\mu,\nu)}(m,k)\right)\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^m+O\left(Te^{-C\sqrt{\log T}}\right),$$

从而完成定理1的证明。

6. Proof of the Corollaries

如前所述，推论1可由定理1立即推出。

推论2的证明。我们证明，带有 $\mu=\nu=1$ 的定理恰好得到了 Milinovich 在 (1.4) 中陈述的一阶导数的完整渐近展开。

定理1指出，在黎曼猜想成立的条件下，

$$\sum_{0<\gamma\le T}\left|\zeta'\left(\frac12+i\gamma\right)\right|^2$$
$$=\frac{T}{2\pi}\sum_{m=0}^{4}(-2C_1^{(1,1)}(m,0)-C_2^{(1,1)}(m,0)-2C_1^{(1,1)}(m,1)-C_2^{(1,1)}(m,1))\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^m$$
$$+O\left(T^{\frac12+\varepsilon}\right).$$

现在我们计算该展开式中的各项。我们有

$$C_1^{(1,1)}(m,0) = \begin{cases} c_0^{(1,0)} - c_1^{(1,0)} + c_2^{(1,0)} - c_3^{(1,0)} & \text{if } m = 0 \\ -c_0^{(1,0)} + c_1^{(1,0)} - c_2^{(1,0)} + c_3^{(1,0)} & \text{if } m = 1 \\ \frac{1}{2}c_0^{(1,0)} - \frac{1}{2}c_1^{(1,0)} + c_2^{(1,0)} & \text{if } m = 2 \\ -\frac{1}{6}c_0^{(1,0)} + \frac{1}{2}c_1^{(1,0)} & \text{if } m = 3 \\ \frac{1}{6}c_0^{(1,0)} & \text{if } m = 4 \end{cases}$$

其中 $c_j^{(1,0)}$ 是.....的系数

$$\frac{\zeta'(s)^2}{s} = \frac{c_0^{(1,0)}}{(s-1)^4} + \frac{c_1^{(1,0)}}{(s-1)^3} + \frac{c_2^{(1,0)}}{(s-1)^2} + \frac{c_3^{(1,0)}}{(s-1)} + \dots$$

并且其中

$$C_2^{(1,1)}(m,0) = \begin{cases} 6d_0^{(1,0)} - 4d_1^{(1,0)} + 2d_2^{(1,0)} & \text{if } m = 0 \\ -6d_0^{(1,0)} + 4d_1^{(1,0)} - 2d_2^{(1,0)} & \text{if } m = 1 \\ 3d_0^{(1,0)} - 2d_1^{(1,0)} + d_2^{(1,0)} & \text{if } m = 2 \\ -d_0^{(1,0)} + d_1^{(1,0)} & \text{if } m = 3 \\ \frac{1}{2}d_0^{(1,0)} & \text{if } m = 4 \end{cases}$$

其中 $d_j^{(1,0)}$ 是.....的系数

$$\frac{\zeta'(s)\zeta(s)}{s} = \frac{d_0^{(1,0)}}{(s-1)^3} + \frac{d_1^{(1,0)}}{(s-1)^2} + \frac{d_2^{(1,0)}}{(s-1)} + \dots$$

并且其中

$$C_1^{(1,1)}(m,1) = \begin{cases} c_4^{(1,1)} & \text{if } m = 0 \\ c_3^{(1,1)} & \text{if } m = 1 \\ \frac{1}{2}c_2^{(1,1)} & \text{if } m = 2 \\ \frac{1}{6}c_1^{(1,1)} & \text{if } m = 3 \\ \frac{1}{24}c_0^{(1,1)} & \text{if } m = 4 \end{cases}$$

其中 $c_j^{(1,1)}$ 是.....的系数

$$\frac{\zeta'(s)^3}{\zeta(s)}\frac{1}{s} = \frac{c_0^{(1,1)}}{(s-1)^5} + \frac{c_1^{(1,1)}}{(s-1)^4} + \frac{c_2^{(1,1)}}{(s-1)^3} + \frac{c_3^{(1,1)}}{(s-1)^2} + \frac{c_4^{(1,1)}}{(s-1)} + \dots$$

并且其中

$$C_2^{(1,1)}(m,1) = \begin{cases} d_0^{(1,1)} - d_1^{(1,1)} + d_2^{(1,1)} - d_3^{(1,1)} & \text{if } m = 0 \\ -d_0^{(1,1)} + d_1^{(1,1)} - d_2^{(1,1)} + d_3^{(1,1)} & \text{if } m = 1 \\ \frac{1}{2}d_0^{(1,1)} - \frac{1}{2}d_1^{(1,1)} + d_2^{(1,1)} & \text{if } m = 2 \\ -\frac{1}{6}d_0^{(1,1)} + \frac{1}{2}d_1^{(1,1)} & \text{if } m = 3 \\ \frac{1}{6}d_0^{(1,1)} & \text{if } m = 4 \end{cases}$$

其中 $d_j^{(1,1)}$ 是.....的系数

$$\frac{\zeta'(s)^2}{s} = \frac{d_0^{(1,1)}}{(s-1)^4} + \frac{d_1^{(1,1)}}{(s-1)^3} + \frac{d_2^{(1,1)}}{(s-1)^2} + \frac{d_3^{(1,1)}}{(s-1)} + \dots$$

我们注意到，在这个特殊情形下，它们与 $c_j^{(1,0)}$ 相同。

计算洛朗系数 $c_j^{(1,k)}$ 和 $d_j^{(1,k)}$ ，并将其代入 $C_1(m,\ k)$和 $C_2(m,\ k)$，得到（1.4）。□

推论*3*的证明。通过明确计算定理1中多项式的最高阶项，我们可以求得首项系数，该系数最初由Gonek发现。

根据定理1，首项由取（2.2）中的 $m = \mu + \nu + 2$项给出，即

$$\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{k}C_1^{(\mu,\nu)}(\mu+\nu+2,k) + \sum_{k=0}^{\mu}(-1)^{\mu}\binom{\mu}{k}\left(C_1^{(\nu,\mu)}(\mu+\nu+2,k) + C_2^{(\mu,\nu)}(\mu+\nu+2,k)\right). \quad (6.1)$$

在最高次幂处，对 C_1, C_2 中 j 个部分的求和为空，因此只剩下首项，

$$C_1^{(\mu,\nu)}(\mu+\nu+2,k) = \frac{c_0^{(\mu,k)}}{(k+\mu+2)!} = \frac{(-1)^{\mu+k+1}\mu!k!}{(k+\mu+2)!}$$
$$C_1^{(\nu,\mu)}(\mu+\nu+2,k) = \frac{c_0^{(\nu,k)}}{(k+\nu+2)!} = \frac{(-1)^{\nu+k+1}\nu!k!}{(k+\nu+2)!}$$
$$C_2^{(\mu,\nu)}(\mu+\nu+2,k) = \frac{d_0^{(\nu,k)}}{(k+\nu+1)!} = \frac{(-1)^{\nu+k}\nu!k!}{(k+\nu+1)!}.$$

将这些值代入 (6.1) 得到

$$\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{k}\frac{(-1)^{\mu+k+1}\mu!k!}{(k+\mu+2)!} + \sum_{k=0}^{\mu}(-1)^{\mu}\binom{\mu}{k}\left(\frac{(-1)^{\nu+k+1}\nu!k!}{(k+\nu+2)!} + \frac{(-1)^{\nu+k}\nu!k!}{(k+\nu+1)!}\right)$$

计算这些和即可完成推论3的证明。 □

Appendix A. The second derivative

借助 Mathematica，我们计算出了二阶导数的完整渐近式。这展示了将结果完整写出时的复杂性。

我们有

$$\sum_{0<\gamma\leq T}\left|\zeta''\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|^2=\frac{T}{2\pi}\sum_{m=0}^{6}A_j\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^j$$

其中系数 A_j 见表1。

A_6	$\frac{4}{45}$
A_5	$-\frac{8}{15}+\frac{11\gamma_0}{15}$
A_4	$\frac{8}{3}-\frac{11\gamma_0}{3}+\gamma_0^2-\frac{8\gamma_1}{3}$
A_3	$-\frac{32}{3}+\frac{44\gamma_0}{3}-4\gamma_0^2-\frac{8\gamma_0^3}{3}+\frac{32\gamma_1}{3}-12\gamma_0\gamma_1+\frac{2\gamma_2}{3}$
A_2	$32-44\gamma_0+12\gamma_0^2+8\gamma_0^3+4\gamma_0^4-32\gamma_1+36\gamma_0\gamma_1+24\gamma_0^2\gamma_1+24\gamma_1^2-2\gamma_2+16\gamma_0\gamma_2+\frac{8\gamma_3}{3}$
A_1	$-64+88\gamma_0-24\gamma_0^2-16\gamma_0^3-8\gamma_0^4+64\gamma_1-72\gamma_0\gamma_1-48\gamma_0^2\gamma_1-8\gamma_0^3\gamma_1-48\gamma_1^2-24\gamma_0\gamma_1^2+4\gamma_2-32\gamma_0\gamma_2-12\gamma_0^2\gamma_2-32\gamma_1\gamma_2-\frac{16\gamma_3}{3}-8\gamma_0\gamma_3-\frac{4\gamma_4}{3}$
A_0	$64-88\gamma_0+24\gamma_0^2+16\gamma_0^3+8\gamma_0^4-8\gamma_0^6-64\gamma_1+72\gamma_0\gamma_1+48\gamma_0^2\gamma_1+8\gamma_0^3\gamma_1-48\gamma_0^4\gamma_1+48\gamma_1^2+24\gamma_0\gamma_1^2-72\gamma_0^2\gamma_1^2-16\gamma_1^3-4\gamma_2+32\gamma_0\gamma_2+12\gamma_0^2\gamma_2-16\gamma_0^3\gamma_2+32\gamma_1\gamma_2-24\gamma_0\gamma_1\gamma_2+4\gamma_2^2+\frac{16\gamma_3}{3}+8\gamma_0\gamma_3+8\gamma_1\gamma_3+\frac{4\gamma_4}{3}+2\gamma_0\gamma_4+\frac{14\gamma_5}{15}$

TABLE 1. 二阶导数的绝对值平方所对应的渐近六次多项式的系数，$\left|\zeta''\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|^2$。

类似地，我们有

$$\sum_{0<\gamma\leq T}\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\zeta''\left(\frac{1}{2}-i\gamma\right)=\frac{T}{2\pi}\sum_{m=0}^{5}B_j\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^j$$

其中系数 B_j 见表2。

B_5	$-\frac{1}{12}$
B_4	$\frac{5}{12}-\frac{2\gamma_0}{3}$
B_3	$-\frac{5}{3}+\frac{8\gamma_0}{3}-\gamma_0^2+2\gamma_1$
B_2	$5-8\gamma_0+3\gamma_0^2+2\gamma_0^3-6\gamma_1+10\gamma_0\gamma_1+\gamma_2$
B_1	$-10+16\gamma_0-6\gamma_0^2-4\gamma_0^3-2\gamma_0^4+12\gamma_1-20\gamma_0\gamma_1-12\gamma_0^2\gamma_1-14\gamma_1^2-2\gamma_2-8\gamma_0\gamma_2-\frac{10\gamma_3}{3}$
B_0	$10-16\gamma_0+6\gamma_0^2+4\gamma_0^3+2\gamma_0^4-12\gamma_1+20\gamma_0\gamma_1+12\gamma_0^2\gamma_1+14\gamma_1^2+2\gamma_2+8\gamma_0\gamma_2+\frac{10\gamma_3}{3}$

TABLE 2. 一阶与二阶混合导数所对应的渐近五次多项式的系数，$\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\zeta''\left(\frac{1}{2}-i\gamma\right)$。

AppendixB. Graphical illustration

我们通过绘制 $\mu=\nu=1$ 的图形来展示这一结果的威力，见图1； $\mu=\nu=2$ 的图形见图2。每幅图均展示了完整的求和

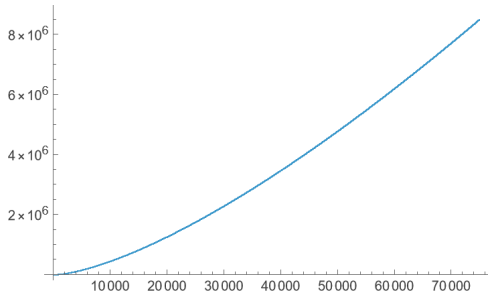
$$\sum_{0<\gamma\leq T}\left|\zeta^{(\nu)}\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|^2,$$

总和减去首项渐近项，以及总和减去定理1中给出的完整渐近式。尽管我们只绘制了前100,000个零点对应的图，但这些图清楚地展示了该结果的威力。

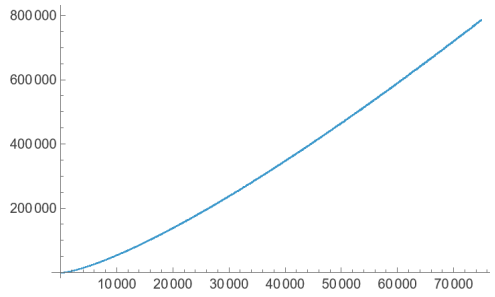
同样，在图3中，我们绘制了 $\mu=1$ 和 $\nu=2$的图。实际总和并非实数，但其虚部与实部相比非常小，因此我们展示

$$\Im\sum_{0<\gamma\leq T}\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\zeta''\left(\frac{1}{2}-i\gamma\right)$$

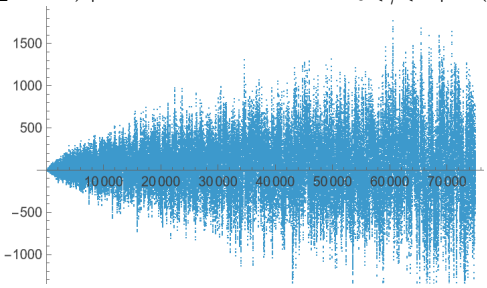
以及从总和的实部中减去完整渐近式所产生的误差。



(A) $\sum_{0<\gamma<T}\left|\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|^2$

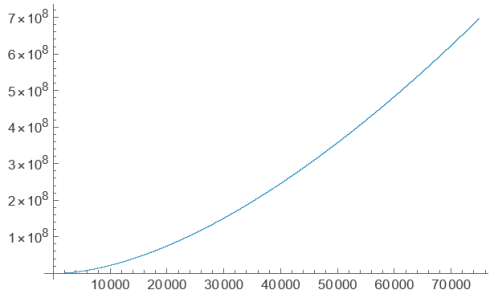


(B) $\sum_{0<\gamma<T}\left|\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|^2-\frac{1}{24\pi}T\left(\text{对数}\frac{T}{2\pi}\right)^4$

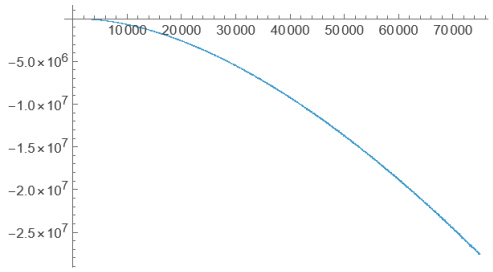


(C) $\sum_{0<\gamma<T}\left|\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|^2$ 减去完整渐近式在（1.4）中给出的渐近式。

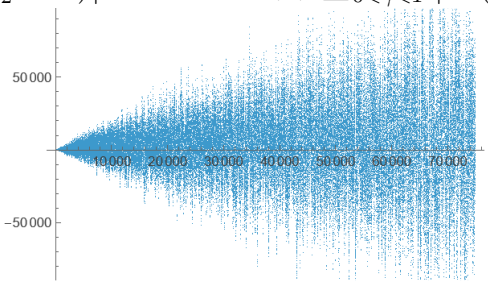
Figure 1. 一阶导数



(A) $\sum_{0<\gamma<T}\left|\zeta''\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|^2$

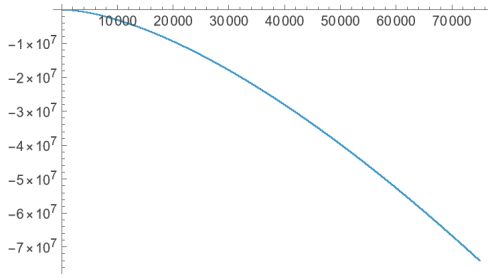


(B) $\sum_{0<\gamma<T}\left|\zeta''\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|^2-\frac{4}{90\pi}T\left(\text{对数}\frac{T}{2\pi}\right)^6$

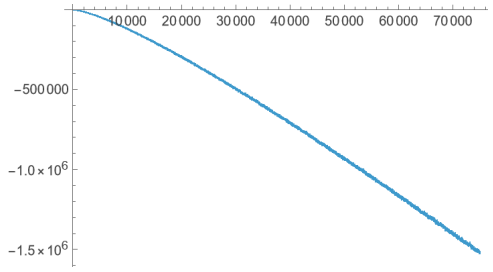


(C) $\sum_{0<\gamma<T}\left|\zeta''\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|^2$ 减去完整的渐近式（见附录 A）

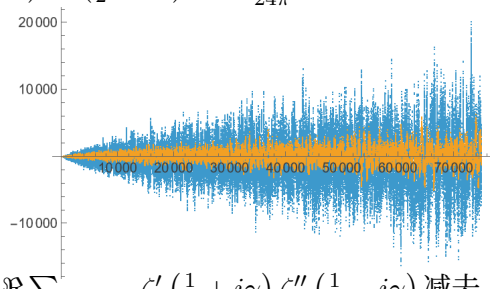
FIGURE 2. 二阶导数



(A) $\Re\sum_{0<\gamma<T}\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\zeta''\left(\frac{1}{2}-i\gamma\right)$



(B) $\Re\sum_{0<\gamma<T}\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\zeta''\left(\frac{1}{2}-i\gamma\right)-\frac{1}{24\pi}T\left(\text{对数}\frac{T}{2\pi}\right)^5$



(C) $\Re\sum_{0<\gamma<T}\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\zeta''\left(\frac{1}{2}-i\gamma\right)$ 减去附录 A 中给出的完整渐近式（蓝色），以及还有 $\Im\sum_{0<\gamma<T}\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\zeta''\left(\frac{1}{2}-i\gamma\right)$（橙色）。

FIGURE 3. 一阶和二阶混合导数

REFERENCES

[1] K. Benli、E. Elma 和 N. Ng。《黎曼ζ函数的一个离散均值》*Mathematika*，70(4)：论文编号 e12281，47 页，2024 年。

[2] H. M. Bui、A. Florea 和 M. B. Milinovich。黎曼ζ函数的导数的负离散矩。Bull. Lond. Math. Soc., 56(8):2680–2703, 2024.[3] J. B. Conrey 和 N. C. Snaith。 L函数比值猜想的应用。Proc. Lond. Math. Soc. (3), 93(3):594–646, 2007.[4] B. Durkan。关于黎曼ζ函数零点和的两个定理。硕士论文，约克大学，2025.[5] P. Gao 和 L. Zhao。 $\zeta'(\rho)$负矩的下界。Mathematika, 69(4):1081–1103, 2023.[6] M. Z. Garaev。关于 $\zeta(s)$单零点的一条不等式。Hardy-Ramanujan期刊, 26:18–22, 2003.[7] R. Garunk˘stis 和 J. Paliulionyt˙e。黎曼猜想下黎曼ζ函数在平移零点处的均值。arXiv 预印本 arXiv:2512.03297, 2025.[8] R. Garunk˘stis 和 J. Paliulionyt˙e。黎曼ζ函数在其平移的非平凡零点上的离散均值定理。Funct. Approx. Comment. Math., 72(2):201–224, 2025.[9] S. M. Gonek。黎曼ζ函数及其导数的均值。Invent. Math., 75:123–142, 1984.[10] S. M. Gonek。关于黎曼ζ函数的负矩。Mathematika, 36(1):71–88, 1989.[11] W. Heap、J. Li 和 J. Zhao。黎曼ζ函数离散负矩的下界。Algebra Number Theory, 16(7):1589–1625, 2022.[12] D. A. Hejhal。关于 $\log|\zeta'(\frac{1}{2}+it)|$ 的分布。载于《数论、迹公式与离散群》（奥斯陆，1987），第343–370页。Academic Press，波士顿，马萨诸塞州，1989.[13] C. Hughes 和 A. Pearce-Crump。黎曼ζ函数高阶导数的离散均值定理。J. Number Theory, 235:123–142, 2022.[14] C. P. Hughes、J. P. Keating 和 N. O'Connell。随机矩阵理论与黎曼ζ函数的导数。R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 456(2003):2611–2627, 2000.[15] A. E. Ingham。黎曼ζ函数理论中的均值定理。Proc. Lond. Math. Soc., 27:273–300, 1926.[16] A. Ivic。黎曼ζ函数：理论与应用。Dover, 2003.[17] S. Kirila。黎曼ζ函数的导数离散矩的一个上界。Mathematika, 66(2):475–497, 2020.[18] M. B. Milinovich。黎曼ζ函数导数的均值估计。博士论文，罗切斯特大学，2008.[19] H. L. Montgomery 和 R. C. Vaughan。《乘法数论 I：经典理论》，剑桥高等数学研究丛书第97卷。剑桥大学出版社，剑桥，2006.[20] N. Ng。 $\zeta'(\rho)$的四阶矩。Duke Math. J., 125(2), 2004.[21] N. Ng。 $\zeta'(\rho)$的极值。J. London Math. Soc., 78(2):273–289, 2008.[22] E. C. Titchmarsh。《黎曼ζ函数理论》。Clarendon Press，牛津大学出版社，纽约，第2版，1986。

Department of Mathematics, The University of Manchester, Oxford Road, Manchester, M13 9PL
电子邮件地址: benjamin.durkan@postgrad.manchester.ac.uk

Department of Mathematics, University of York, York, YO10 5GH, United Kingdom
电子邮件地址: christopher.hughes@york.ac.uk

School of Mathematics, Fry Building, Woodland Road, Bristol, BS8 1UG, United Kingdom
电子邮件地址: andrew.pearce-crump@bristol.ac.uk