一些最小拓扑空间与向量格

RICARDO E. CARRERA、ANTHONY W. HAGER 和 BRIAN WYNNE*

摘要。我们研究紧豪斯多夫空间X 相对于某个固定覆盖算子 c 和满足 $cK = K$的紧豪斯多夫空间 K 为最小元的存在性。然后，利用吉田表示定理，我们说明这种情形与满足 $hH = H$的阿基米德向量格 A （带有指定强单位元）相对于某个固定包算子 h 和向量格 H 为最小元的存在性之间的关系。除此之外，我们还对 $c = g$ （Gleason 覆盖算子）、 $c = qF$（准-F 覆盖算子）、 $h = u$ （一致完备算子）和 $h = e$（本质完备化算子）给出了答案。

arXiv:2601.06310v1 [math.FA] 9 Jan 2026

1. 引言

令 **Comp** 为由紧豪斯多夫空间及其连续映射构成的范畴。对于任意 **Comp**-对象 K （通常简写为 $K \in$**Comp** ），所有形如（X， f）的对（其中 $X \xleftarrow{f} K$是 **Comp** 中的一个覆盖）构成一个完备上半格（模去一个等价关系），其偏序是自然定义的。该偏序继承到 $\{X \in \mathbf{Comp} : cX = K\}$，其中 $K \in$**Comp** 任意，且 c 是 **Comp** 上的任意覆盖算子（这样的 c 为每个 $X \in \mathbf{Comp}$ 指定一个覆盖 $X \xleftarrow{cX} cX$）。本文探讨的两个主要问题之一是:

问题 1.1。 对于 **Comp** 上的哪些覆盖算子 c ，以及对于哪些带有 $cK = K$ 的 **Comp** $K \in$ ， $\{X \in \mathbf{Comp} : cX = K\}$ 具有最小元? 在这种情况下，最小元是什么?

在第 2—4 节介绍覆盖算子和包算子的一些预备知识后，我们在第 5 节针对 $c = \mathrm{id}$（恒等覆盖算子）、 $c = a(\gamma)$（覆盖算子格中的一个原子）、 $c = g$ （Gleason 覆盖算子）和 $c = qF$（准-F 覆盖算子）给出问题 1.1 的答案。借助 Yosida 表示定理，第 6 节和第 7 节将第 5 节的结果转化为对一个相关布尔代数问题以及我们的第二个主要问题的解答；后者涉及如下范畴:

2020 数学主题分类。 主要分类 54D80，06F20；次要分类 54C10，08C05。关键词和短语。 紧致豪斯多夫空间、覆盖算子、向量格、包算子。

具有指定强单位元、且态射为保单位向量格同态的阿基米德向量格$\mathbf{W}^*$：

问题 1.2。 对于 $\mathbf{W}^*$ 上的哪些包算子 h，以及对于满足 $hH = H$ 的哪些 $H \in \mathbf{W}^*$，$\{A \in \mathbf{W}^* : hA = H\}$ 有最小元？若有，其最小元是什么？

2. 覆盖算子的预备知识

这里简要回顾 **Comp** 上的覆盖和覆盖算子。我们的主要参考文献是 [8], [15], 和 [2]。

假设所有空间都是 Tychonoff 空间，且通常为紧致 Hausdorff 空间。若 X 是一个空间，则称一对 (Y, f) 为 X 的一个**覆盖**，如果 Y 是一个空间，且 $X \xleftarrow{f} Y$ 是完美不可约连续满射；映射 f 本身称为**覆盖映射**。这里，**完美** 意指该映射是闭映射且所有点逆像均为紧致集；**不可约** 意指对于 Y 中任意真闭集 F，$f(F) \neq X$。

对于 $K \in \mathbf{Comp}$ 的两个覆盖 (X_i, f_i) $(i = 1, 2)$，若存在连续的 $X_1 \xleftarrow{f} X_2$ 使得 $f_2 = f_1 \circ f$，我们就记作 $(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2)$；在这种情况下，$f$ 是唯一的，而 (X_2, f) 是 X_1 的一个覆盖。若 $(X_1, f_1) \leq (X_2, f_2)$ 且 $(X_2, f_2) \leq (X_1, f_1)$，则与第一个不等式相关联的 f 是一个同胚。预序 $\leq$ 在 K 的所有覆盖组成的集合上诱导出一个等价关系；我们将该集合记为 $\mathbf{cov}\, K$。通常，我们会滥用记号，将 K 的一个覆盖 (X, f) 与它在 $\mathbf{cov}\ K$ 中所代表的等价类视为相同。事实证明，关系 $\leq$ 使 $\mathbf{cov}\, K$ 成为一个完备格。事实上，$\mathbf{cov}\, K$ 有最大元，这要归功于以下由 Gleason [7] 给出的事实。

定理2.1。 如果 $E \in \mathbf{Comp}$，那么 $\mathrm{cov}\, E = \{E\}$ 当且仅当 E 是极不连通的（当且仅当 X 在 **Comp** 中是射影的）。此外，每个 $X \in \mathbf{Comp}$ 都有一个最大覆盖 $(gX, g) \in \mathrm{cov}\ X$，称为 ***Gleason***（或射影）覆盖。

令 c 为每个 $X \in \mathbf{Comp}$ 赋予一个 $(cX, c_X) \in \mathbf{cov}\ X$ 的函数，并令 $\mathbf{fix}(c) = \{X \in \mathbf{Comp} : c_X \text{ 是一个同胚}\}$。若 (cX, c_X) 是 $\{(Y, f) \in \mathbf{cov}\ X$ 中的最小元 $Y \in \mathbf{fix}(c)\}$，则称这样的 c 为 **覆盖算子**，作用于 **Comp**；在这种情况下，我们称 $\mathbf{fix}(c)$ 为与 c 相关联的**覆盖类**。例如，2.1 中的 g 可视为这样的覆盖算子，其相关联的覆盖类是**Comp**中所有极端不连通空间组成的类；我们称 g 为 Gleason 覆盖算子。

令**coComp** 为 **Comp**上所有覆盖算子组成的（真）类。对于熟悉范畴论的读者而言，**coComp** 的元素恰好是**Comp**$^{\#}$中的余反射，其中 **Comp**$^{\#}$ 是一个范畴，其对象类与**Comp** 相同，但其态射仅为**Comp**中的覆盖。可以通过规定 $c \leq d$ 当且仅当对于每个 $X \in$**Comp**，$(cX, c_X) \leq (dX, d_X)$，从而在**coComp** 上定义一个偏序；在此偏序下，**co Comp**成为一个完备格，其底元为恒等算子，顶元为 Gleason 算子 g。**coComp** 的其他元素将在第 5 节中逐一讨论。

除了对固定空间上方的覆盖进行偏序排列外，也可以用类似的方式对被固定空间覆盖的空间进行偏序排列：若$X_i \xleftarrow{f_i} K\,(i = 1,\ 2)$是<自 5>Comp中的覆盖，则当且仅当存在连续的 $X_1 \xleftarrow{f} X_2$ 使得 $f_1 = f \circ f_2$时，我们写作$(X_1,\ f_1) \leq (X_2,\ f_2)$。这个 $\leq$ 也是一个预序，它会在由该预序确定的等价类集合上诱导出一个偏序（可参照 [15, 定理 8.4(e)]证明）。事实上，在此偏序下，等价类集合构成一个完备上半格（[15,定理 8.4(f)]）。

为简化记号，我们作如下

定义 2.2。 设 $c \in$ **coComp** 且 $K \in$ **Comp** ，满足 $K = cK$。令

$$\mathcal{S}(K, c) \equiv \{X \in \textbf{Comp} : cX = K\}.$$

因此，现在可以将 1.1 表述为：询问 $\mathcal{S}(K, c)$ 中的最小元，其中的序继承自上文所述的、所有以 K 为覆盖的空间构成的集合上的序（这里我们将空间 X 与有序对 (X, c_X) 视为同一对象）。

3. 包络算子预备知识

这里我们简要回顾本质嵌入和包算子。在某些方面，这与第 2 节讨论的内容互为对偶。我们假设读者对这些概念有一定了解；主要参考文献包括 [14]（关于向量格）、 [12]（关于本质嵌入）和 [2]（关于包算子）。

如果 $A \in \mathbf{W}^*$，那么一对 $(B,\ f)$ 称为 A 的本质扩张，如果$B \in \mathbf{W}^*$ 且 $A \xrightarrow{f} B$ 是一个本质嵌入，也就是说，如果 f 是一个$\mathbf{W}^*$-嵌入，并且满足：每当 $B \xrightarrow{f_1} C$ 是一个$\mathbf{W}^*$-态射且 $f_1 \circ f$ 是单态时，f_1 就是单态（在$\mathbf{W}^*$ 中，单态意味着单射）。等价地，若对每个 $0 < b \in B$ 都存在 $0 < a \in A$ ，使得$f(a) \leq nb$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立，那么$\mathbf{W}^*$-嵌入$A \xrightarrow{f} B$ 就是本质的（这有时被称为 A 在 B 中“稠密”，参见 [1, 定理 11.1.15]）。

对于 $A \in \mathbf{W}^*$ 的两个本质扩张 (B_i, f_i) $(i = 1, 2)$，若存在一个 $\mathbf{W}^*$-态射 $B_1 \xrightarrow{f} B_2$ 使得 $f_2 = f \circ f_1$，我们记作 $(B_1, f_1) \leq (B_2, f_2)$；此时 f 唯一，且 (B_2, f) 是 B_1 的一个本质扩张。如果 $(B_1, f_2) \leq (B_2, f_2)$ 且 $(B_2, f_2) \leq (B_1, f_1)$，那么与第一个不等式相关联的 f 是一个 $\mathbf{W}^*$-同构。预序 $\leq$ 在 A 的所有本质扩张的集合上诱导出一个等价关系；我们将该集合记作 $\operatorname{ext} A$。事实证明，关系 $\leq$ 使 $\operatorname{ext} A$ 成为一个完备格。事实上，$\operatorname{ext} A$ 有最大元，这可由以下事实得出；该事实归功于 Conrad [3,定理 3.3]。

定理 3.1。若 $A \in \mathbf{W}^*$，则 $\operatorname{ext} A = \{A\}$ 当且仅当 $A = C(X)$ 对某个极端不连通的 $X \in \mathbf{Comp}$ 成立。此外，每个 $A \in \mathbf{W}^*$ 都有一个最大本质扩张 $(eA, e_A) \in \operatorname{ext} A$，称为 A 的本质完备化。

注：本文中，$C(X)$ 表示空间 X 上所有实值连续函数构成的向量格；若 $K \in \mathbf{Comp}$，则 $C(K) \in \mathbf{W}^*$，其中我们默认指定强单位元为 $\chi(X)$，即在 X 上取值恒为 1 的常值函数。

设 h 是一个函数，它为每个 $A \in \mathbf{W}^*$ 指定一对 $(hA, h_a) \in \operatorname{ext} A$；并设 $\operatorname{fix}(h) = \{A \in \mathbf{W}^* : h_A$ 是一个 $\mathbf{W}^*$-同构$\}$。若 (hA, h_A) 是 $\{(B, f) \in \operatorname{ext} A$ 中满足 $B \in \operatorname{fix}(h)\}$ 的最小元，则称这样的 h 为 $\mathbf{W}^*$ 上的包算子；此时，我们称 $\operatorname{fix}(h)$ 为与 h相关联的包类。例如，3.1 中的e 可视为这样的包算子，其相关联的包类是所有满足 $X \in \mathbf{Comp}$ 极端不连通的 $C(X)$ 构成的类；我们称e 为本质完备化算子。

令 $\mathbf{hoW}^*$ 为 $\mathbf{W}^*$ 上所有包算子组成的（真）类。对于熟悉范畴论的读者而言，$\mathbf{hoW}^*$ 的元素恰好是$\mathbf{W}^{*\#}$ 中的反射，其中$\mathbf{W}^{*\#}$ 是一个范畴，其对象类与$\mathbf{W}^*$ 相同，但其态射仅为$\mathbf{W}^*$ 中的本质嵌入。可以在$\mathbf{hoW}^*$ 上定义偏序：当且仅当对每个 $A \in \mathbf{W}^*$，hA, h_A 在 $\operatorname{ext} A$ 中小于等于 kA, k_A 时，令 $h \leq k$；在此偏序下，$\mathbf{hoW}^*$ 成为一个完备格，其底元为恒等算子，顶元为本质闭包算子 e。$\mathbf{hoW}^*$ 的其他元素将在第 7 节中适时讨论。

除了对固定的$\mathbf{W}^*$-对象的本质扩张进行偏序排列外，也可以用类似的方式对具有共同本质扩张的$\mathbf{W}^*$-对象进行偏序排列：若 $A_i \xrightarrow{f_i} B$ $(i = 1, 2)$ 是本质$\mathbf{W}^*$-嵌入，则当且仅当存在本质$\mathbf{W}^*$-嵌入 $A_1 \xrightarrow{f} A_2$ 使得 $f_1 = f_2 \circ f$ 时，我们记 $(A_1, f_1) \leq (A_2, f_2)$。这 $\leq$ 也是

一个预序，它在由该预序确定的等价类集合上诱导出偏序（可按 2.2 之前的方法证明这一点）。事实上，在该偏序下，等价类集合构成一个完备上半格。

为简化记号，我们作如下

定义 3.2. 设 $h \in \mathbf{ho}\mathbf{W}^*$ 和 $H \in \mathbf{W}^*$ 满足 $H = hH$。令

$$\mathcal{V}(H,h) \equiv \{A \in \mathbf{W}^* : hA = H\}.$$

因此，现在可以通过询问 $\mathcal{V}(H,h)$ 中的最小元来表述 1.2，其中的序继承自上述在所有$\mathbf{W}^*$-对象上的序，而 H 是这些对象的本质扩张（此处我们将$\mathbf{W}^*$-对象 A 与有序对 (A, h_A) 等同）。

4. Yosida 函子与 μ

$\mathbf{W}^*$ 与$\mathbf{Comp}$ 之间的联系，是我们在此利用的，它源自以下表示定理；该定理由 Yosida [17] 的一个结果发展而来。

定理 *4.1. (i)*（*Yosida* 空间）若 $A \in W^*$ 是带有指定强单位元 u 的结构，则 $YA \in$ *Comp*，其中 YA 是 A 中所有 u-极大理想（相对于不包含 u 而言的极大理想）组成的集合，并赋予核包拓扑。我们称 YA 为 A 的 *Yosida* 空间。*(ii)*（存在性）存在一个 *W**-嵌入 ν_A*:* $A \to C(YA)$*,* 使得 $\nu_A(A)$ 分离 YA 的点。*(iii)*（唯一性）若 $X \in$ *Comp*，且 ϕ*:* $A \to C(X)$ 是一个 *W**-嵌入，使得 $\phi(A)$ 分离 X 的点，则存在一个同胚 η*:* $YA \to X$，使得对每个 $a \in A$，$\nu_A(a) = \phi(a) \circ \eta$。*(iv)*（协变性）若 $A \xrightarrow{f} B$ 是一个 *W**-态射，则存在一个连续满射 $YG \xleftarrow{Yf} YH$，使得对每个 $a \in A$，$\nu_B(f(a)) = \nu_A(a) \circ Yf$。此外，$(B, f) \in$ *ext* A 当且仅当 $(YH, Yf) \in$ *cov* YG。

注 4.2。 定理 4.1 实际上是$\mathbf{W}$的一种表示定理的特例。$\mathbf{W}$是由带有指定弱单位元且态射保持单位元的阿基米德向量格构成的范畴；参见[9]。

在 [2, 第 5], 节中，研究了从 $\mathbf{Comp}$ 中的覆盖类到带弱单位元的阿基米德格序群的包类的映射 μ。这里我们重新表述 μ，使其在 $\mathbf{W}^*$ 中给出包算子。

定义 4.3。对于 $c \in \mathbf{coComp}$ 和 $A \in \mathbf{W}^*$，设 $\mu(c)A = C(cYA)$ 且 $\mu(c)_A = \phi_{A,c} \circ \nu_A$，其中 ν_A 是 Yosida 嵌入，$\phi_{A,c}\colon C(YA) \to C(cYA)$ 是由覆盖 $YA \xleftarrow{c_{YA}} cYA$ 诱导的本质 $\mathbf{W}^*$-态射，即由 $\phi_{A,c}(f) = f \circ c_{YA}$ 给出的映射，其中 $f \in C(YA)$。

定理 4.4。若 $c \in \mathbf{coComp}$，则 $\mu(c) \in \mathbf{hoW}^*$。

证明。首先，$(\mu(c)A,\ \mu(c)_A) \in \mathrm{ext}\, A$，因为 ν_A 和 $\phi_{A,\,c}$ 都是本质的 $\mathbf{W}^*$-嵌入（这由 4.1 得出；注意 $c_{YA} = Y\phi_{A,\,c}$），而本质 $\mathbf{W}^*$-嵌入的复合仍是本质的$\mathbf{W}^*$-嵌入。

现在，假设 $(B, f) \in \mathrm{ext}\ A$，且 $B \xrightarrow{\mu(c)_B} \mu(c)B$ 是一个 $\mathbf{W}^*$-同构。我们证明 $(\mu(c)A, \mu(c)_A) \le (B, f)$ 属于 $\mathrm{ext}\ A$。由于覆盖的复合仍是覆盖，我们看到 $(cYB, Yf \circ c_{YB}) \in \mathrm{cov}\ YA$。由于 $c \in \mathbf{coComp}$，因此 $(cYA,\ c_{YA}) \le (cYB, Yf \circ c_{YB})$ 属于 $\mathrm{cov}\ YA$。所以存在一个覆盖 $cYA \xleftarrow{Y\varphi} cYB$，它诱导出一个本质的 $\mathbf{W}^*$-嵌入 $C(cYA) \xrightarrow{\varphi} C(cYB)$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} YA & \xleftarrow{Yf} & YB \\ {\scriptstyle Yc_{YA}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle Yc_{YB}} \\ cYA & \xleftarrow[Y\varphi]{} & cYB \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\ {\scriptstyle \mu(c)_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu(c)_B} \\ C(cYA) & \xrightarrow[\varphi]{} & C(cYB) \end{array}$$

二者均可交换。因此 $\mu(c)_B^{-1} \circ \varphi$ 见证了 $\mathrm{ext}\, A$ 中的 $(\mu(c)A,\ \mu(c)_A) \le (B, f)$。□

下面给出 μ 的一些基本性质。

定理 4.5. *(i)* μ 是保序且单射的。

(ii) μ 的值域包含于 $\{h \in \mathbf{hoW}^* : h \text{ 在 } u\}$ 之上。*(iii)* μ 并非满射到 $\mathbf{hoW}^*$：省略的是环反射 r 和可投射包算子 p。

证明。(i) 显然。

(ii) 由 (i) 和 4.8 可知（若 c 不高于 μ，则 $\mu(\mathrm{id})$ 不高于 $\mu(c)$）。

(iii) 对于一个空间 X，令 $F(X) \equiv \{f \in C(X)\colon\ f(X) \text{ 是有限的}\}$。对于任意无限零维 X，$F(X) = rF(X) = pF(X)$，但 $F(X)$ 不是$uF(X)$。（下文使用 h 表示 k 当且仅当 $h(\mathbf{W}^*)$ 包含 $k(\mathbf{W}^*)$，这一点我们已知。）关于 r 的背景，参见 [9, 节 6]；关于 p（对于 ℓ-群）的背景，例如参见 [11] 及其中所列的参考文献。□

注 4.6。 实际上，上文 4.5(ii) 中两者相等。这对本文后续内容没有帮助，而证明似乎很繁琐，并且涉及一个映射 σ $\mathbf{hoW}^*$，遗憾的是其值域并不完全落在 **coComp** 中，即 $\sigma(h)X \equiv YhC(X)$。这可能不是幂等的，例如， $\sigma(p)$ 就不是。

一些复杂之处可见于 [2], ，其中 σ 定义在**hoW** 的一个子类上，且其中 σ 是幂等的，而 μ 后来被称为“ σ的截面”。

此处不再进一步讨论，打算在后续论文中再回到 μ/σ 的情形。

本节最后指出 μ的一些特定像。

定理 4.7。 $\mu(g) = e$。

证明。 根据定义， $\mu(g)A = C(gYA)$且 $\mu(g)_A = \phi_{A,\ g} \circ \nu_A = \nu_A$。 由于 gYA 是极不连通的，由 3.1 可知 $C(gYA) = eA$ 且$\mu(g)_A = e_A$。 □

令 $u \in \mathbf{hoW}^*$ 为一致完备算子，即满足 $uA = C(YA)$ 和 $u_A = \nu_A$ 的算子。该算子的名称源于这样一个事实：根据斯通 - 魏尔施特拉斯定理, $\nu_A(A)$ 在 $C(YA)$ 中的一致完备化是 $C(YA)$，因为 $\nu_A(A)$ 是 $C(YA)$ 中包含所有常值函数并能分离 YA 的向量格。

定理 4.8. $\mu(\mathrm{id}) = u.$

证明。 根据定义 $\mu(\mathrm{id})A = C(\mathrm{id}\, YA) = C(YA)$ 和 $\mu(\mathrm{id})_A = \phi_{A,\ \mathrm{id}} \circ \nu_A = \nu_A$。 □

5. 问题 1.1 的一些解答

本节考察以下情形中的 $\mathcal{S}(K, c)$： $c = \mathrm{id}$（恒等覆盖算子）、 $c = a(\gamma)$（**coComp** 中的一个原子）、 $c = g$ （Gleason 覆盖算子）以及 $c = qF$（准-F 覆盖算子）。

首先，我们先排除一个显然的情况：

定理 5.1. 如果$\mathrm{id} \in$ **coComp** 是恒等算子，那么对于任意**Comp**， $\mathcal{S}(K, \mathrm{id}) = \{K\}$ $K \in$，所以 K 是最小元。

在 [10], it isshown 中证明了格 **coComp** 具有原子，我们现在简要回顾其描述。设 $E \in \mathbf{Comp}$ 是极端不连通的，且 $p \neq q$ 是 E 中的非孤立点。令 E_{pq} 为 E 的商空间，其中仅将 p 和 q 识别，并令 $E_{pq} \overset{\gamma}{\leftarrow} E$ 为相应的商映射。更改记号，令 E_γ 表示 $E_{pq} - \{\gamma(p)\}$。那么 $E_{pq} = E_\gamma$ 是

E_γ 的一点紧化。因此，存在覆盖 $\dot{E}_\gamma \xleftarrow{\gamma} E$。由 γ 确定的原子 $a(\gamma) \in \mathbf{coComp}$ 为

$$(a(\gamma)Y, a(\gamma)_Y) = \begin{cases} (E, \gamma) & \text{if } Y = \dot{E}_\gamma \\ (Y, \mathrm{id}_Y) & \text{if } Y \neq \dot{E}_\gamma. \end{cases}$$

（这里，$Y = E_\gamma$ 表示这些空间彼此同胚，而 id_Y 是空间 Y 上的恒等函数。）定理 2.2], 证明了 a（γ）是**coComp**的一个原子，并且**coComp** 中的每个原子都具有这种形式。注意，由 a（γ）固定的空间类由所有不同胚于 E_γ的空间组成。我们将称 a（γ）为与 E相关联的**coComp** 的一个原子。

定理 5.2。 *(i)* $\mathcal{S}(E, a(\gamma)) = \{E_\gamma, E\}$，其具有最小元 E_γ。*(ii)* 若 $Y \neq E, E_\gamma$，则 $\mathcal{S}(Y, a(\gamma)) = \{Y\}$，其具有最小元 Y。

证明。 这些结论由上述对 $a(\gamma)$ 的描述立即得出。 □

接下来，令 $g \in$**coComp** 为 Gleason 覆盖，因此对于 $K \in$**Comp**，$gK = K$ 成立当且仅当 K 是极端不连通的。当然，如果K 是有限的，那么 K 是离散的，$gK = K$，并且 $\mathcal{S}(K, g) = \{K\}$ 有最小元K。因此我们转而考虑 K 是无限的情形。

如果 D 是无限离散空间，那么我们用 αD 表示 D的一点紧化。

引理 5.3。 *(i)* 如果 D 是无限离散空间，且 $X \xleftarrow{\tau} \alpha D$ 是一个覆盖，那么 τ 是一个同胚。*(ii)* 如果 D 是无限离散空间，那么 αD 的覆盖恰好是 D 的紧化。*(iii)* 如果 $K \in \mathbf{Comp}$ 是无限的，那么 $\{Z \in \mathbf{Comp} : K \in \operatorname{cov} Z\}$ 有最小元，当且仅当 K 是某个离散空间 D的紧化；在这种情况下，最小元是 αD。

证明。 可以验证，对于 X，$Y \in \mathbf{Comp}$，如果 $X \xleftarrow{\tau} Y$ 是任意覆盖，则对于任意孤立的 $p \in Y$，$\tau(p)$ 是 X中的孤立点；并且只要 $q \in X$ 是孤立的，对于某个孤立的 $r \in Y$，$\tau^{-1}(q) = \{r\}$。因此，τ 限制为从 Y的孤立点到X的孤立点的同胚。由此观察可轻易得到陈述 (i) 和 (ii)。

如果 K 是离散空间 D 的紧化，那么 D 是无限的，因为 K 是无限的。再次利用上一段中的观察，可以证明，D 的紧化所构成的偏序集（例如参见 [5, 第 3.5] 节）与 αD 的覆盖所构成的偏序集序同构。命题 (iii) 的充分性由此得证。

最后，假设 $K \in \mathbf{Comp}$ 不是任何离散空间 D 的紧化。设 $Z \xleftarrow{f} K$ 是一个覆盖。我们证明 Z 不是最小元。由于 f 是一个覆盖，且 K 的孤立点集不稠密，因此 Z 的孤立点集也不稠密。所以存在一个非空开集 U，它位于 Z 中且不含孤立点。取点 $p \neq q$ 属于 U，并令 Z_{pq} 为将 Z 中仅有的 p 和 q 识别后得到的商空间。那么 $Z_{pq} \in \mathbf{Comp}$，商映射 $Z_{pq} \leftarrow Z$ 是一个覆盖且不是同胚，并且 $K \in \operatorname{cov} Z_{pq}$（覆盖的任意复合仍是覆盖）。因此 Z 不是最小元。□

注5.4. 5.3(iii) 的证明表明，除了没有最小元之外，当 K 不是某个离散空间的紧化时，$\{Z \in \mathbf{Comp}: K \in \operatorname{cov} Z\}$ 也没有极小元。

若 X 是任意一个蒂赫诺夫空间，则 βX 表示 X 的切赫-斯通紧化（例如参见 [5, 第 3.6] 节或 [6, 第 6] 章）。

定理5.5. 若 $K \in \mathbf{Comp}$ 是无限的且满足 $gK = K$，则 $\mathcal{S}(K, g)$ 有最小元，当且仅当对某个离散空间 D，有 $K = \beta D$；在这种情况下，最小元是 αD。

证明. 假设 $K \in \mathbf{Comp}$ 是无限的且满足 $gK = K$。那么 $\mathcal{S}(K, g) = \{Z \in \mathbf{Comp}: Z \in \operatorname{cov} K\}$，因此 $\mathcal{S}(K, g)$ 有最小元，当且仅当 K 是某个无限离散空间 D 的紧化（回忆一下，根据假设，K 是无限的），且根据 5.3，最小元是 αD。由于 K 是极端不连通的，D 在 K 中是 C^*-嵌入的（[6, 问题 1H.6]）。因此 $K = \beta D$。

□

最后，我们考虑所讨论的覆盖算子为$c = qF$（即准-F 覆盖算子）的情形。与该算子相关联的覆盖类是准-F 空间类，即满足以下条件的 Tychonoff空间X：每个稠密余零集 X 都是 C^*-嵌入的（在稠密余零集上定义的每个有界实值连续函数都能连续延拓到 X上）。关于 qF 和准-F 空间的更多内容，参见 [4] 或 [2]。

回忆一下，若空间 X 没有真稠密余零集（参见 [13]），则称其为几乎-P。注意，几乎-P 蕴含准-F。

定理5.6。 ***(i)*** $\mathcal{S}(\beta\mathbb{N}, qF)$ 有最小元 $\alpha\mathbb{N}$。***(ii)*** 如果 $K \in \mathbf{Comp}$ 是几乎-P，那么 $\mathcal{S}(K, qF) = \{K\}$ 有最小元 K。

证明。 由于 $\mathbb{N}$ 是无限、离散且极端不连通的，根据5.3，我们知道 $\{Z \in \mathbf{Comp}: \beta\mathbb{N} \in \operatorname{cov} Z\}$ 与 $\mathbb{N}$的紧致化集合重合，并且有最小元 $\alpha\mathbb{N}$。由于

$$\mathcal{S}(\beta\mathbb{N}, qF) \subseteq \{Z \in \mathbf{Comp} : \beta\mathbb{N} \in \operatorname{cov} Z\},$$

并且由于 $qF\alpha\mathbb{N} = \beta\mathbb{N}$ （ $\alpha\mathbb{N}$ 的每个稠密开集都包含一个稠密余零集 $\alpha\mathbb{N}$, 因此 $qF\alpha\mathbb{N}$ 由 [4, 命题 4.6]可知是极端不连通的），结论 (i) 得证。

每个几乎-P空间也是拟-F空间；若 $X \leftarrow Y$是一个覆盖且 Y是几乎-P，那么 X也几乎是P。因此，若$\mathbf{Comp}$是几乎-P，便可推出 $\mathcal{S}(K, qF) = \{K\}$。故 (ii) 成立。□

注 5.7。 每个极端不连通空间都是拟-F，而 $\mathcal{S}(\beta D, g)$由 5.5 可知有最小元 αD 。另一方面，如果 D 不可数，那么$\mathcal{S}(\beta D, qF)$又如何呢？无论如何，$\alpha D \notin \mathcal{S}(\beta D, qF)$，因为 αD是几乎-P（因此也是拟-F）。

6. 布尔代数

我们提出并回答以下关于完备化算子 χ 的最小元布尔代数的问题；这是问题 1.2 的一个变体（实际上是其特殊情形）。

对于具有 $\chi C = C$ 的 C 布尔代数，令

$$\mathcal{B}(C, \chi) = \{A \in \mathbf{BA} : \chi A = C\},$$

其中 $\mathbf{BA}$ 是布尔代数及布尔代数同态所构成的范畴。这个 $\mathcal{B}(C, \chi)$ 按 $\mathbf{BA}$-包含关系构成偏序。

问题 6.1。 对于哪些具有 $\chi C = C$ 的 $C \in \mathbf{BA}$ ， $\mathcal{B}(C, \chi)$ 存在最小元？该最小元是什么？

以下是我们的答案。

定理 6.2。 $\mathcal{B}(C, \chi)$ 有最小元，当且仅当 C 是幂集$\operatorname{Pow}(D)$，此时最小元是定义在 D上的有限余有限布尔代数。

我们通过 Stone 对偶得到这一结论，将该问题与 5.5 中体现的 Q1.1 特例联系起来。

Stone 对偶“就是”这对函子 $\mathbf{BA} \xrightarrow{s} \mathbf{ZD} \xrightarrow{\text{clop}} \mathbf{BA}$，其中$\mathbf{ZD}$ 是由紧致零维空间及其连续映射构成的范畴， s 将布尔代数 A 赋给其 Stone 表示空间 sA，而 clop X是 X中既开又闭集的$\mathbf{BA}$。clop $\circ s$ 是一个$\mathbf{BA}$同构，

并且我们通常将 $A \in \mathbf{BA}$ 与 clop sA等同起来。如此一来，所有**BA**-态射 clop $X \overset{\varphi}{\to}$ clop Y都由唯一的连续 $X \overset{\tau}{\leftarrow} Y$给出，其中 $\varphi(U) = \tau^{-1}(U)$。我们将 φ记作 $\hat{\tau}$。（这显然与 4.1 节中的 Yosida 表示相似。）有关布尔代数的背景知识，请视需要参阅[16]。

现在，对于 $A \in \mathbf{BA}$， χA 是 A的最大 **BA** 本质扩张：对于一个 **BA** 态射 $A \overset{\varphi}{\to} B$，其为 **BA** 本质的含义是 $\varphi(A)$ 在 B中序稠密；而 clop $X \overset{\tau}{\leftarrow}$ clop Y 是 **ZD** 本质的，当且仅当 τ 不可约（最初由 E. Weinberg 提出；参见关于$\mathbf{W}^*$ 4.1(iv) 的注释）。

由此可知，完备化 $A \overset{\chi_A}{\to} \chi A$ 恰好是 clop $sA \overset{\tau}{\leftarrow}$ clop gsA，其中 $sA \overset{\tau}{\leftarrow} gsA$ 是 Gleason 覆盖。

定理 6.3. 对于任意完备的 $C \in \mathbf{BA}$， $C = \operatorname{clop} E$，其中 E 是紧致且极端不连通的，并且存在偏序集的序同构$\mathcal{B}(C, \chi) \to \mathcal{S}(E, g) \cap \mathbf{ZD}$，定义为：$\chi A = C$，其中 $A = \operatorname{clop} X$仅表示$X \in \mathbf{ZD}$，而 $gX = E$ （见上文讨论）

因此， M *in* $\mathcal{B}(\operatorname{clop} E, \chi)$ 中的一个最小元，恰好对应于 $\mathcal{S}(E, g) \cap$ **ZD**中的一个最小元。

回顾：

定理 6.4.（上文的 *5.5*）对于 E 无限且极端不连通的情形，$\mathcal{S}(E, g)$ 有最小元，当且仅当 E 是一个 βD；此时最小元为 αD。

现在我们给出 6.2 的证明。

证明。 与 6.2 等价的命题是：若 E 极端不连通，则 $\mathcal{B}$(clop E, χ) 有最小元，当且仅当 E 是一个 βD；此时最小元为 clop αD。根据 6.3，这又等价于： $\mathcal{S}(E, g) \cap \mathbf{ZD}$ 有最小元，当且仅当 E 是一个 βD；此时最小元为 αD。我们来证明这一点。

（$\Leftarrow$）。设 E 是一个 βD，其最小元为 αD。应用 6.4；由于 $\alpha D \in$ **ZD**，它也是 $\mathcal{S}(E, g) \cap \mathbf{ZD}$中的一个最小元。

($\Rightarrow$)。设 $\mathcal{S}(E, g) \cap \mathbf{ZD}$ 具有最小元 Z。只需证明 E是一个 βD。于是再次由 6.4 可知， $\mathcal{S}(E, g)$ 具有最小元 αD。要证明 E是一个 βD，只需证明 E 是离散空间 D的紧化；这样它必定是 βD （因为 E 是极端不连通的，因此任意稠密集都是 C^*-嵌入的）。为证明这一点，重复 5.3 证明末尾的论证：如果 E 不是离散空间 D的紧化，那么就存在既开又闭的 U，其中包含非孤立点 $p \neq q$，以及 $Z_{pq} \overset{\gamma}{\leftarrow} Z$，它只将.....识别为

p 和 q 构成一个覆盖，而且很容易看出 Z_{pq} 是**ZD**，因为 Z 是。这与我们的假设矛盾：Z 是 $\mathcal{S}(E,\ g)\cap$**ZD**中的最小元。□

注记 6.5. 6.2 与下一节中的 7.10 有着明确的联系，这通过范畴嵌入 $\mathbf{BA}\ \to\ \mathbf{W}^*$ 实现。该嵌入将 clop X 映射到 $C(X)$ 中由所有 $U\in$ clop X 的特征函数生成的 ℓ-群。无论如何，要解释这一点似乎都需要上述所有细节。

7. 关于问题 1.2 的一些解答

本节建立 $\mathcal{V}(H,\ \mu(c))$ 与 $\mathcal{S}(K,\ c)$ 之间的联系，然后利用这一联系将上一节的结果推广过去。

我们首先给出一个关于相对于固定 Yosida 空间的最小元的结果。回忆一下，若 $K\in\mathbf{Comp}$，则集合 $\{A\in\mathbf{W}^*:\ YA=K\}$ 可以通过如下方式赋予偏序：若存在本质向量格嵌入 $A\ \xrightarrow{f}\ B$ 使得 $\nu_A=\nu_B\circ f$，则写作 $A\le B$（这里 $\nu_A,\ \nu_B$ 是 4.1(ii) 中的 Yosida 嵌入）。

定理 7.1。若 $K\in\mathbf{Comp}$，则偏序集 $\{A\in\mathbf{W}^*:\ YA=K\}$ 有最小元，当且仅当 K 是零维的；此时，最小元为 $F(K)\equiv\{f\in C(K)\colon f(K)$ 是有限的$\}$。

证明。(⇐)：设 K 是零维的，且 $A\in\mathbf{W}^*$ 有 $YA=K$。则 A 包含在 YA上取值为 1 的常值函数；又由于 A是向量格，因此它必定包含 YA上的所有常值函数。此外，由于 A 0-1 能分离 YA 中的闭集（这可由 4.1 得出），可知对于任意 $U\in$clop(YA)，都有 $\chi(U)\in A$，其中 $\chi(U)$ 表示 U的特征函数。因此 $F(K)\subseteq A$。现在，$YF(K)=K$，因为 K是零维的（故 $F(K)$ 能分离 K中的点），所以 $F(K)$ 确实是所需的最小元。

(⇒)：首先，我们证明一些简单的引理。

对于 $A\in\mathbf{W}^*$、$p\in YA$ 和 $a\in A$，我们称 a 在 p处是局部常值的，如果存在 p的一个邻域 U，使得 a在 U上的限制 $a|_U$是常值的。令 lc(A,p) 表示所有满足 a 在 p处局部常值的 $a\in A$ 组成的集合。

引理 7.2。lc$(A,p)\in\mathbf{W}^*$ 且 $Y($lc$(A,p))=YA$。

证明。对于 $\otimes=+,-,\vee,\wedge$ 和 $a_1,a_2\in$lc(A,p)，其对应的 p的邻域为 U_i，可以看出，p 的邻域 $U_1\cap U_2$ 证明了$a_1\otimes a_2\in$lc(A,p)。

那么，根据 $p_1\ne p_2$ 的情况，lc(A,p) 分离 YA 的点。□

引理 7.3. 如果 a 在每个 $p \in YA$ 处都是局部常值的，那么 $a \in F(YA)$。

证明。对于每个 $p \in YA$，取 U_p 的一个邻域，使得 a 在 U_p 上处处取值 $a(p)$。取 $\{U_1, \dots, U_k\}$ 的一个有限子覆盖$\{U_p\colon\ p \in YA\}$。因此 $a(YA) = \bigcup\{a(p_i)\colon\ i = 1, \dots, k\}$ 是有限的。□

引理 7.4。设 $A \in \mathbf{W}^*$。$A = F(YA)$ 当且仅当 $A = \mathrm{lc}(A, p)$ 对每个 $p \in YA$都成立；此时 YA 是 *ZD*。

证明。($\Rightarrow$)：显然。

($\Leftarrow$)：由 7.3 可知，每个 $a \in A$ 也属于 $F(YA)$。 □

现在我们可以完成 7.1 的证明了。设 K 不是零维的，且 $A \in \mathbf{W}^*$，其中 $YA = K$。那么，由 7.4 可知，我们有 $A \neq F(K)$，并且存在 $p \in K$ 使得 $A \neq \mathrm{lc}(A, p)$。但是，根据定义，$\mathrm{lc}(A, p) \subseteq A$，并且由 7.2 可知，$Y\,\mathrm{lc}(A, p) = K$。因此 A 不是最小元。□

这里是 $\mathcal{V}$ 与 $\mathcal{S}$之间的联系。

定理 7.5。M 是 $\mathcal{V}(H, \mu(c))$ 中的最小元，当且仅当 YM 是 $\mathcal{S}(YH, c)$中的最小元，YM是零维的，且 $M = F(YM)$。

证明。请记住以下几点：

(i) $A \in \mathcal{V}(H, \mu(c))$ 当且仅当 $cYA = YH$（且 $cYH = YH$）；

(ii) $A \in \mathcal{V}(H, \mu(c))$ 且 $YA' = YA$ 蕴含 $A' \in \mathcal{V}(H, \mu(c))$。

($\Rightarrow$) 设 $\mathcal{V}(H, \mu(c))$ 具有最小元 M，且 $YM = X_0$。则由 (i) 得 $cX_0 = YH$，因此 $X_0 \in \mathcal{S}(YH, c)$。现在，若 $X \in \mathcal{S}(c, YH)$，则 $X \leftarrow cX = YH$，所以由 (i) 得 $C(X) \in \mathcal{V}(H, \mu(c))$，因为 $YC(X) = X$。因此，由 M的最小性可知，存在一个本质的 $\mathbf{W}^*$-嵌入 $M \to C(X)$，故 $X_0 = YM \leftarrow YC(X) = X$，且 X_0 是 $\mathcal{S}(c, YH)$ 中的最小元。最后，取满足 $YA = X_0$的 $A \in \mathbf{W}^*$。由 (ii) 得 $A \in \mathcal{V}(H, \mu(c))$，因此由 M的最小性可知，存在一个本质的 $\mathbf{W}^*$-嵌入 $M \to A$。所以 YM是零维的，且由 7.1 得 $M = F(YM)$。

($\Leftarrow$)：假设 YM 是 $\mathcal{S}(YH, c)$ 中的最小元，YM 是零维的，且 $M = F(YM)$。那么 M 是 $\{A \in \mathbf{W}^*$ 中的最小元：由 7.1 得 $YA = YM\}$，由 (i) 得 $M \in \mathcal{V}(H, \mu(c))$。现在，若 $A \in \mathcal{V}(H, \mu(c))$，则由 (i) 得 $YA \in \mathcal{S}(YH, c)$，因此根据 YM 的最小性，$YM \leftarrow YA$。于是存在一个本质的$\mathbf{W}^*$-嵌入 $M \to A$，且 M 是 $\mathcal{V}(H, \mu(c))$ 中的最小元。□

现在，我们将 7.5 与上一节中关于各种 c 的 $\mathcal{S}(K,\ c)$ 的结果结合起来。

定理 7.6。 如果 $K \in \mathbf{Comp}$，且 $u \in \mathbf{hoW}^*$ 是一致完备化算子，那么 $\mathcal{V}(C(K)\ u)$ 有最小元，当且仅当 K 是零维的；在这种情况下，最小元为 $F(K)$。

证明。 若 $A \in \mathbf{W}^*$，则由斯通-魏尔施特拉斯定理可得 $uA = C(YA)$。由于 YA 和 K 都是紧致的，$C(YA) = C(K)$ 蕴含 YA 和 K 同胚，因此 $\mathcal{V}(C(K)\ u) = \{A \in \mathbf{W}^* : \ YA = K\}$；根据 7.5，当且仅当 K 是零维时，它有最小元；在这种情况下，最小元为 $F(K)$。□

注 7.7。 整个项目源于 7.6，它是对斯通-魏尔施特拉斯情形的一种看法。

定理 7.8。 假设 $E \in \mathbf{Comp}$ 是无限且极端不连通的，并且 $a(\gamma)$ 是与 E 相关联的格 $\mathbf{coComp}$中的一个原子，如 *5.2* 所述。

(i) $\mathcal{V}(C(E)\ \mu(a(\gamma)))$ 有最小元 $F(E_\gamma)$。*(ii)* 若 $Y \in \mathbf{Comp}$ 且 $Y \neq E_\gamma$ 或 E，则 $\mathcal{V}(C(Y)\ \mu(a(\gamma)))$ 有最小元，当且仅当 Y 是零维的；在这种情况下，最小元为 $F(Y)$。

证明。 $\mathcal{S}(E,\ a(\gamma))$ 的最小元为 E_γ，由 5.2(i) 得出。由于 E_γ 是零维的，这里的 (i) 由 7.5 得出。

同样地，由 5.2(ii)，$\mathcal{S}(Y,\ a(\gamma))$ 有最小元 Y，因此这里的 (ii) 由 7.5 得出。□

注 7.9。 虽然 $a(\gamma)$ 是格$\mathbf{coComp}$中的一个原子，但算子$\mu(a(\gamma))$ 不是格 $\mathbf{hoW}^*$ 中的原子，因为一致完备算子 u 满足 $u \leq \mu(a(\gamma))$ 和 $u \neq \mu(a(\gamma))$，其为

$$uC(\dot{E}_\gamma) = C(\dot{E}_\gamma) < C(E) = \mu(a(\gamma))C(E).$$

定理 7.10。 如果 $E \in \mathbf{Comp}$ 是无限且极端不连通的，并且 $e \in \mathbf{hoW}^*$ 是本质完备化算子，那么 $\mathcal{V}(C(E)\ e)$ 有最小元，当且仅当 E 对某个离散空间 D而言是 βD；在这种情况下，最小元为 $F(\alpha D)$。

证明。 令 $g \in \mathbf{coComp}$ 为 Gleason 覆盖算子。则 $\mu(g) = e$。由于 $YC(E) = E$，所需结果由 5.5 和 7.5 得出。□

定理 *7.11. (i)* $\mathcal{V}(C(\beta\mathbb{N})\ \mu(qF))$ 有最小元 $F(\alpha\mathbb{N})$。*(ii)* 如果 $K \in \mathbf{Comp}$ 是连通的几乎-P 空间，则 $\mathcal{V}(C(K)\ \mu(qF))$ 没有最小元。*(iii)* 如果 $K \in \mathbf{Comp}$ 是几乎-P空间且 $K \in \mathbf{ZD}$，则 $\mathcal{V}(C(K)\ \mu(qF))$ 有最小元 $F(K)$。

证明。 (i)–(iii)由 5.6 和 7.5 得出。 □

注记 7.12. 我们已经彻底回答了关于 g 和 $\mu(g) = e$ （它也是 $\mathbf{W}^*$ 中的戴德金完备化）的“最小元问题”，并推进了关于 qF 和 $\mu(qF)$（即 $\mathbf{W}^*$ 中的“o-柯西完备化”；见 [4]）的问题。由于 $\mathbf{coComp}$ 和 $\mathbf{hoW}^*$ 是真类，许多内容未能涉及。值得一提的或许是（介于 qF 和 g 之间的）基本不连通覆盖及其在 μ 下的像（它是 $\mathbf{W}^*$ 中的戴德金 σ-完备化）。此外还有 $\mathbf{W}^*$ 中的可投射包 p；由于它不在 μ 的值域内（见上文 4.5(iii)），似乎需要采用不同的方法。

参考文献

[1]Bigard, A., Keimel, K., Wolfenstein, S., 格序群与格序环，《数学讲义》608，施普林格出版社，柏林—海德堡—纽约，1977 年。[2] Carrera, R. E., Hager, A. W., 关于 ℓ群的包类与空间的覆盖类，《斯洛伐克数学》61（2011），第 3 期，411–428。[3]Conrad, P.F., 阿基米德格序群的本质闭包，《杜克数学期刊》38（1971），151–160。[4] Dashiel,F., Hager, A.W., Henriksen, M., 连续函数环与向量格的序柯西完备化，《加拿大数学杂志》32（1980），657–685。[5] Engelking, R.: 《一般拓扑学》，纯数学西格玛丛书6, Heldermann 出版社，柏林，1989 年。[6] Gillman, L., Jerison, M.,连续函数环，《高等数学大学丛书》，范诺斯特兰德，普林斯顿，1960 年。[7]Gleason, A. M.，射影拓扑空间，《伊利诺伊数学杂志》2（1958），482–489。[8] Hager, A. W.，拓扑空间的极小覆盖，《纽约科学院年刊》552（1989），44–59。[9] Hager, A.W., Robertson, L.C.,黎斯空间的表示与环化，载于：《数学专题讨论会》21，学术出版社，伦敦，1977 年，411–431。[10] Hager, A.W., Wynne, B.,紧豪斯多夫空间上覆盖算子格中的原子，《拓扑学及其应用》289（2021），论文编号 107402，共 9 页。

[11]Hager, A.W., Wynne, B., α可投射且侧 α完备的带弱单位元的阿基米德格序群及其拓扑，《范畴与应用广义代数结构》20（2024），第 1 期，131–153。[12] Herrlich, H., Strecker, G.，范畴论，纯数学西格玛丛书第 1 号，Heldermann 出版社，柏林，1979 年。[13] Levy, R.，几乎 P空间，《加拿大数学杂志》29（1977），第 2 期，284–288。[14] Luxemburg, W., Zaanen, A.，《黎斯空间 I》，North-Holland，阿姆斯特丹，1971 年。[15] Porter, J.R., Woods, R. G.,豪斯多夫空间的扩张与绝对，施普林格出版社，纽约，1988 年。[16] Sikorski, R.，布尔代数，第三版，施普林格出版社，纽约，1969 年。[17] Yosida, K. 向量格的表示，《东京帝国学院纪要》18（1942），339–343。诺瓦东南大学数学系，劳德代尔堡，FL 33328，美国电子邮件地址：ricardo@nova.edu 纽约市立大学莱曼学院数学系，吉莱特楼，211 室，250 Bedford Park Blvd West，布朗克斯，NY 10468，美国电子邮件地址：email: ahager@wesleyan.edu 数学系与计算机科学系，卫斯理大学，米德尔敦，CT 06459，美国电子邮件地址：brian.wynne@lehman.cuny.edu