arXiv:2601.06322v1 [math.GR] 9 Jan 2026

巴拿赫空间上的一致仿射作用：余循环的增长

¨KEVIN BOUCHER 和 GEORG GRUTZNER

Abstract. 我们研究取值于超自反巴拿赫空间上的一致有界表示中的余循环的增长性质；这包括 L^p-空间（其中 $1 < p < \infty$）以及希尔伯特空间。随后，我们研究在这种情形下产生的余循环的广义希尔伯特压缩，并针对 (T) 性质群 Sp(n，1)、 $n \geq 2$，确立具有最优增长的一致 Lipschitz 仿射作用的存在性。

记号。我们用 $\lesssim$ 表示在一个正的乘法常数意义下的不等式，相应的等价关系记为 $\asymp$。在更合适的情况下，我们改用兰道符号：即给定函数 $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$，我们将 $o(g(s))$ 写作 $s \to 0^+$ 或 $+\infty$，其中 $s > 0$ 为任意满足 $\lim_{s\to 0^+}$ 或 $_{+\infty}$ ^{o} $(_g(_s))$ $_g(_s) = 0$的项。对于拓扑空间 X，以及 $f, h\colon X \to \mathbb{R}_+$，如果存在常数 $M > 0$ 和一个紧子集 $K \subset X$，使得在 K之外 $f \leq Mh$，则记作 $f \preceq h$。如果 $f \preceq h \preceq f$，我们记作 $f \sim h$。如果对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个紧子集 $K \subset G$，使得在 K 之外 $f \leq \varepsilon h$，我们记作 $f \prec h$。

1. Introduction

希尔伯特空间上的等距群作用研究，深深植根于几何群论和表示论。

这一领域的核心概念是卡兹丹的 *(T)* 性质，该性质由卡兹丹于1967年提出，是局部紧群的一种刚性性质。具有 (T) 性质的群，其特征是：每个包含几乎不变向量的酉表示都必定包含一个非零不变向量 [16]。

等价的上同调表述由*Delorme– Guichardet* 定理给出：a σ-紧局部紧群具有 (T) 性质，当且仅当它在任意酉表示中的系数上同调第一群是平凡的。从几何角度来说，这意味着每个仿射

2020 数学主题分类。主要分类 22D12；次要分类 43A07、20F69、22D55。关键词和短语。卡兹丹的 (T) 性质、可 amen 性、余循环增长、统一有界表示、等变压缩、几何群论。

群在希尔伯特空间上的等距作用都有一个全局不动点 [6][11]。

与卡兹丹群形成鲜明对比的是，高秩半单李群及其格便是这类群的例子。Haagerup 在其具有里程碑意义的1978年工作中指出， [12]自由群允许在希尔伯特空间上的适当仿射等距作用。这一结果开启了对如今所谓的 *Haagerup* 性质 （或按 Gromov 的术语称为*a-T-*可积性 ） [12]的研究。Haagerup 性质为 (T) 性质提供了一种自然的障碍。其主要后果之一是与 Baum–Connes 猜想的联系：Higson 和 Kasparov 在21世纪初证明，具有 Haagerup 性质的群满足 Baum–Connes 猜想 [15]。

另一方面，Cornulier、Tessera 和 Valette 在 [5]中引入了局部紧、紧生成群 G的等变希尔伯特压缩指数 这一概念，其中该群赋予词度量：

$$\alpha_2^*(G) = \sup\{\, \alpha \geq 0 : \exists \text{ unitary representation } \pi, \\ \exists b \in Z^1(G,\pi) \text{ s.t. } \|b(g)\| \succeq |g|_S^{\alpha}\}$$

该不变量通过相关 1-余循环的增长，量化希尔伯特空间上仿射等距作用的轨道渐近增长（精确定义见第 1.1 小节）。等变压缩指数是 Guentner 和 Kaminker [10]在度量空间一致嵌入的背景下提出的早期非等变希尔伯特压缩概念的细化。

$\alpha_2^*(G)$ 的取值反映了等变嵌入到希尔伯特空间的质量。指数 $\alpha_2^*(G) = 1$表明存在任意接近拟等距的嵌入，而 $\alpha_2^*(G) < 1$则意味着某种收缩不可避免。由此呈现出一个鲜明的二分现象：对于可和群，等变与非等变希尔伯特压缩相同（这一现象通常称为*Gromov* 技巧），且在许多情况下满足 $\alpha_2^*(G) > \frac{1}{2}$ [9]。相比之下，对于非 *amenable* 群，等变希尔伯特压缩指数至多为$1\ 2$。

更准确地说，如果群 Gadmits 一个压缩指数严格大于 $1\ 2$ 的希尔伯特空间值 1-余循环，那么 G must be 可和。等价地，非 amenable 群无法拥有增长超过$\|b(g)\| \sim |g|_S^{1/2}$ 的余循环。因此，$1\ 2$ appears as equivariant Hilbert compression 的临界阈值。例如，自由群上的最优希尔伯特余循环 F_2 exhibits 平方根增长，

$$\|b(g)\| \sim |g|_S^{1/2},$$

在非可和情形下达到可能的最大指数 $1\ 2$ 。对于非可和群，等变性发挥着至关重要的作用。事实上，Tessera

证明了所有字双曲群都允许具有压缩指数等于 1 [25], 的非等变希尔伯特嵌入，从而鲜明地展示了等变与非等变压缩概念之间的差异。

超越等距作用的范畴，我们研究以一致有界表示为系数的上同调。这一更广阔的框架源于 Pisier 的一项结果：他证明，存在一些非 amenable 群的一致有界表示，它们不等价于任何酉表示 [23]。

Shalom 的以下猜想进一步印证了这一观点：

猜想 1.1 (Shalom)。 一旦不再要求线性部分是酉的，每个 *Gromov* 双曲群（包括具有 *(T)* 性质的群）都存在希尔伯特空间上的适当的一致 *Lipschitz* 仿射作用。

这些想法表明，希尔伯特空间上的一致 Lipschitz 仿射作用比等距作用更为丰富，其对应的压缩率也可能有所不同。

这一猜想近期取得的进展令人瞩目。Nishikawa[21] 证实了 Shalom 对秩一单李群 Sp(n，1),$n \geq 2$ 的猜想，并为其中每个群构造了希尔伯特空间上的度量适当仿射作用，其线性部分一致有界但不是酉的。这是首次发现具有 (T) 性质的群能够在希尔伯特空间上具有适当仿射作用。

在另一个方向上，超越希尔伯特空间，Drut̨u、Mackay 和 Vergara 证明，许多已知无法在非自反巴拿赫空间（如 ℓ^1 ）上进行适当等距作用的群，[7] [27]却可以通过一致 Lipschitz 仿射变换进行适当作用。这些结果进一步支持了这样一种观点：允许有限的灵活性，以一致有界作用或 Lipschitz 作用取代严格等距作用，可以显著改善群轨道的大尺度几何性质。

1.1. 结果陈述。 设 G 为局部紧拓扑群， B 为巴拿赫空间，GL(B) 为 B 上可逆连续线性变换所成的群。 G 的一个 *(* 巴拿赫 *)* 表示 是一个群同态

$$\pi : G \to \mathrm{GL}(B)$$

且关于 GL(B) 上的强算子拓扑连续。

一个连续映射 b: $G \to B$ ， 满足

$$b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h), \quad \text{for all } g, h \in G$$

称为一个系数取值于(π， B)的余循环。所有系数取值于(π， B)的余循环构成的空间 Z^1(π， B)赋予紧开拓扑后，

在逐点运算下是一个实拓扑向量空间。满足存在 $v \in B$ 使得下式成立的余循环b：$G \to B$

$$b(g) = \pi(g)v - v, \text{ for all } g \in G,$$

称为关于 π 的 余边界。所有关于 π 的余边界构成的集合 $B^1(\pi, B)$ 是 $Z^1(\pi, B)$ 的一个子空间。商向量空间

$$H^1(\pi, B) = Z^1(\pi, B)/B^1(\pi, B)$$

称为系数取自 (π, B) 的第一上同调群。

若巴拿赫表示 (π, B) 满足以下条件，则称其为 G 的一致有界

$$\sup_{g \in G} \|\pi(g)\|_{op} < \infty.$$

若巴拿赫表示 (π, B) 限制为连续群同态，则称其为等距的

$$\pi : G \to \mathrm{O}(B),$$

w此处 $\mathrm{O}(B) < \mathrm{GL}(B)$ 是 B 的线性等距算子子群。

1.1.1. 结果。设 G 是一个局部紧、紧生成群，且 $S \subset G$ 是一个开、相对紧的对称生成集。那么对每个 $g \in G$，g 关于 S 的字长（或字范数）定义为

$$|g|_S = \min\{n \in \mathbb{N} : g \in S^n\}.$$

观察 1.2。对于一个紧生成的局部紧群以及任意一个余循环 b，若其系数取自某个一致有界的巴拿赫表示（π，B），则由 $L: g \in G \mapsto \|b(g)\| \in \mathbb{R}_+$ 定义的巴拿赫长度函数关于 G 上的任意字范数都是利普希茨的；也就是说，对于任意开、相对紧的生成子集 $S \subset G$，存在 $C > 0$，使得 $\forall g \in G$，$L(g) \leq C|g|_S$。

巴拿赫空间 B 的一致光滑模对 $\tau > 0$ 定义为

$$\rho_B(\tau) = \sup\left\{\frac{\|u+v\| + \|u-v\|}{2} - 1 : \|u\| \leq 1 \text{ and } \|v\| \leq \tau\right\}.$$

如果 $\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_B(\tau)}{\tau} = 0$，则称 B 是一致光滑的。如果进一步存在常数 K，使得对某些 $p > 1$、$p \leq 2$，有 $\rho_B(\tau) \leq K\tau^p$，则称 B 是 p-一致光滑的。

注 1.3. *Pisier* 的一个深刻定理 [22] 指出，若 B 一致光滑，则存在某个 $1 < p \leq 2$，使得 B 具有一个 p-一致光滑的等价范数。事实上，在同构意义下，这一类与超自反巴拿赫空间 [3,定理 A。6]相同。

将 [5, 定理 1.2]推广到系数取值于酉表示的余循环之外，我们得到如下可和性判据：

定理 1.4。 设 Γ 是一个有限生成离散群， S 是 Γ的有限生成集。设(π, B)是在一个 p- 一致光滑巴拿赫空间 B 上的一致有界表示。若 Γ 存在一个余循环 b，其系数取值于(π, B) ，且满足

$$\|b(g)\| \succ |g|_S^{\frac{1}{p}},$$

那么 Γ 是可和的。

据作者所知，即使对于作用在 L^r-空间上的等距巴拿赫表示， $r \neq 1, \infty$, 这一结果也是新的；并且它改进了 Naor 和 Peres [19] 在等变压缩指数等于 $\frac{1}{p}$ 这一临界情形下的结果。由此我们得到，Nica 在 [20]中构造的、作用于 L^p-空间且具有$\bar{p} \neq 1, \infty$ 较大值的非初等双曲群仿射作用，具有最优增长。

定理 1.4 还表明，与酉情形一样，对于系数取自一致有界希尔伯特表示的余循环 b，所能期望的最佳增长为

$$\|b(g)\| \sim |g|_S^{1/2}.$$

为了扩展 [5, 命题 3.9], 中讨论的、允许在希尔伯特空间上具有最优增长仿射作用的群的范围，我们证明以下定理：

定理 1.5。 设 G 是一个连通、单、实秩1 李群，具有有限中心；设 (π, H) 是一个具有谱隙的一致有界希尔伯特表示。若 $H^1(\pi, H) \neq 0$, 则存在 $b \in Z^1(\pi, H)$ ，使得

$$\|b\| \sim d^{\frac{1}{2}}(\cdot, e),$$

其中， d 表示由 G/K 的典范几何所诱导的轨道距离， K 是 G 的一个紧极大子群。

注 1.6。 若一致有界希尔伯特表示限制在其不变向量的补空间上时不含几乎不变向量，则该表示具有谱隙。精确定义见第 *3* 节。我们指出，那里给出的所有定义同样适用于一致有界表示。

利用 Nishikawa 的构造 [21] ，我们以如下推论结束本文，该推论已在第 4.1.1 节中证明。

推论 1.7。 对于所有满足 $n \geq 2$ 的 ***Kazhdan*** 群$\mathrm{Sp}(n,1)$ ，都存在一个一致有界希尔伯特表示(π, H) 以及一个余循环 $b \in Z^1(\pi, H)$，使得

$$\|b\| \sim d^{\frac{1}{2}}(\cdot, e),$$

w此处 d 表示四元数双曲 n 空间上的轨道距离。

1.1.2. 论文结构。 本文结构如下。在第 2 节中，我们证明定理 1.4。第 3 节致力于证明一致凸巴拿赫表示的光滑调和表示定理。最后，在第 4 节中，我们证明定理 1.5；其存在性部分依赖于第 3 节的结果。

1.1.3. 致谢。 我们感谢 Pierre Pansu 和 Alain Valette 富有成效的讨论，并感谢 John Mackay 指引我们关注 Naor 和 Peres 的工作。第一作者获得了英国工程与自然科学研究委员会标准资助 EP/V002899/1 的支持。

2. Optimal compression exponent

在本节中，设 E 表示一个 p-一致光滑巴拿赫空间（根据备注 1.3，必然 $1 < p \leq 2$ ）。存在以下对偶空间概念。

定义 2.1. 巴拿赫空间 B 的凸性模量 $\delta_B(\varepsilon)$ 定义如下：

$$\delta_B(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|u+v\|}{2} : \|u\|, \|v\| \leq 1 \ and \ \|u-v\| \geq \varepsilon\right\}, \quad 0 < \varepsilon \leq 2.$$

若对所有 $\varepsilon > 0$， $\delta_B(\varepsilon) > 0$，则称 B 为一致凸。若存在某个 $q \geq 2$使得 $\delta_B(\varepsilon) \geq c\varepsilon^q$，则称 B 为 q-一致凸。

巴拿赫空间 B 是 p-一致光滑的，当且仅当其对偶空间 B^* 是q-一致凸的，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。这由以下关系得出：

$$\rho_{\mathrm{B}}(\tau) = \sup_{0 \leq \varepsilon \leq 2} (\tau\varepsilon/2 - \delta_{\mathrm{B}^*}(\varepsilon)) \quad (\tau > 0)$$

根据 Lindenstrauss [18, 定理 1]。

引理 2.2. 设 G 是一个群，通过一致有界算子作用于 E 上。那么存在一个等价的 p-一致光滑且 G-不变的范数，定义在E上。

证明. 由于 $(E, \|\cdot\|)$ 是 p-一致光滑的，因此 $(E^*, \|\cdot\|^*)$ 是 q-一致凸的，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。定义一个等价的 G-不变范数于 E^* 上

$$\|v\|^{*'} := \sup_{g \in G} \|gv\|^*.$$

如 [1, 命题 2.3]，的证明所示，这个新范数也具有 q-一致凸性。因此，它在 $E^{**} = E$ 上的对偶范数定义了一个 G-不变、p-一致光滑的范数，且该范数与原范数等价 $\|\cdot\|$。

□

我们需要一个关于相对维诺格拉多夫记号的、更具定性特征的版本。

引理 2.3。设 G 是一个局部紧、紧生成群。给定 f、h： $G \to \mathbb{R}_+$，则

$$f \prec h$$

当且仅当存在一个可测递增映射 η： $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，满足

$$\lim_{x\to\infty} \eta(x) = \infty, \textit{ for any diverging sequence},$$

使得对所有 $g \in G$,

$$f(g)\eta(|g|_S) \le h(g).$$

这里， $|\cdot|_S$ 表示相对于 G 的某个开且相对紧的生成集 S 的字范数。

证明。若存在这样的映射 η，则对任意 $k > 0$，都存在一个闭球 $_B$，使得 $\eta(|g|_S) \ge k$ 位于该闭球之外。由于闭球相对于 $|\cdot|_S$ 是紧的，这意味着 $f \prec h$。

反之，假设 $f \prec h$。根据定义，对于任意正实数递增序列 $\{k_n\}$，存在一个紧集序列 $\{K_n\}$，使得

$$f(g)k_n \le h(g)$$

对于所有在 K_n之外的 g。取一列嵌套球 $\{B_i\}$，使得 $G = \bigcup_i B_i$。令 i_1 为满足 $K_1 \subset B_{i_1}$的最小指标。给定 i_n，若$K_{n+1} \subset B_{i_n}$，令 $i_{n+1} = i_n + 1$；否则，令 i_{n+1} 为满足 $K_{n+1} \subset B_{i_{n+1}}$的最小指标。令$r_i$ 表示 B_i的半径。分段定义函数 $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 如下：

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le r_{i_1} \\ k_{i_n} & \text{for } r_{i_n} < x \le r_{i_{n+1}}. \end{cases}$$

□

定理 *1.4* 的证明。由引理 2.2 可知，我们可以将 (π, B) 替换为一个等距表示。令 S 为任意有限的对称生成集，$S \subset \Gamma$，并令 $(W_n)_n$ 为相应的随机游走。Naor 和 Peres 在 [19,定理 2.1], 中证明，$(W_n)_n$ 在余循环 b: $G \to B$ 下的像满足某种马尔可夫型不等式。也就是说，对于任意时刻 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[\|b\left(W_n\right)\|^p\right] \lesssim n\,\mathbb{E}\left[\|b\left(W_1\right)\|^p\right].$$

我们的证明采用反证法。假设 Γ 是非平均的，且 $|g|^{\frac{1}{p}} \prec \|b(g)\|$。由于 Γ 是非平均的，存在 $\lambda > 0$ 使得

$$1 = \mathbb{P}\left(\liminf_n \frac{|W_n|}{n} > \lambda\right) \le \liminf_n \mathbb{P}\left(|W_n| > \lambda n\right)$$

（关于 λ的存在性，参见 [28, 命题 8.2] ；该不等式由Fatou引理得出。）因此，对所有可测正非减函数η：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\eta\left(|W_n|\right)\right) &\geq \mathbb{E}\left(\eta\left(|W_n|\right)1_{\frac{|W_n|}{n}\geq\lambda}\right) \geq \eta(\lambda n)\mathbb{P}\left(\frac{|W_n|}{n}\geq\lambda\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\eta(\lambda n)\end{aligned}$$

对于仅依赖于（Γ， S）且足够大的 n 。

取 η 如引理 2.3 所示。已知，对于任意随机变量 X 以及两个递增函数 f 和 g， $f(X)$ 与 $g(X)$ 的协方差满足 $\mathrm{Cov}[f(X)\ g(X)] \geq 0$，详情请参见 [24]。因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\|b\left(W_n\right)\|^p\right) &\geq \mathbb{E}\left(\eta^p\left(|W_n|\right)|W_n|\right) \geq_{\mathrm{Cov}\geq 0} \mathbb{E}\left(|W_n|\right)\mathbb{E}\left(\eta^p\left(|W_n|\right)\right)\\ &\geq \frac{1}{4}\lambda n\,\eta^p(\lambda n)\end{aligned}$$

当 n 足够大时。这与来自 [19,定理 2.1] 的界： $\mathbb{E}(\|b(W_n)\|^p) \lesssim n$ 相矛盾。

□

3. A smooth version of the harmonic representation ofcocycles

设 G 为一个具有有限中心的连通半单李群， K 为 G 的极大紧子群。设 E 为一个一致凸巴拿赫空间，且（π_E， E）为 G 的等距巴拿赫表示。

映射 $F: G/K \to E$ 是调和的，如果它至少是二次连续可微的，并且 $\Delta F = 0$ 对于 G/K上的拉普拉斯算子 Δ 。

本节的目标是证明，在具有谱隙的一致凸巴拿赫表示中，任意余循环都有一个调和代表元。

定义 3.1. 设 G 是一个局部紧拓扑群，且 (π, B) 是一个等距巴拿赫表示。

1.对于 G 的子集 Q 和实数 $\varepsilon > 0$，若向量 v 属于 B ，则称其为(Q, ε)-不变，如果

$$\sup_{g\in Q}\|\pi(g)v - v\| < \varepsilon\|v\|.$$

2. 如果对每个紧子集 Q （属于 G ）和每个 $\varepsilon > 0$，该表示 (π, B) 都几乎有不变向量，那么称该表示几乎有不变向量。3. 如果存在 $v \neq 0$ 属于 B，使得对所有 $g \in G$， $\pi(g)v = v$，则称该表示 (π, B) 有非零不变向量 。若此条件成立，我们记作 $1_G \subset \pi$。

如果存在 Q 属于 G 的紧子集和常数 $\kappa > 0$，使得对每个 $v \in B$，表示 (π, B) 都没有几乎不变向量，

$$\sup_{g \in Q} \|\pi(g)v - v\| \geq \kappa \|v\|.$$

称数对 (Q, κ) 为 π 的 *Kazhdan* 对。

定义 3.2。巴拿赫空间 B 上的等距表示 (π, B) 称为有补的，如果

$$B = B^\pi \oplus B_\pi,$$

其中 B^π 是不动向量空间。

注 3.3。超自反巴拿赫空间上的任意等距表示 π 都有补 [1,命题 2。6]。

定义 3.4。如果(π, B_π) 没有几乎不变向量，则称有补表示 (π, B) 有谱隙。

从现在起，假设 (π_E, E) 具有谱隙。

注 3.5 ([8, 定理 1.1])。设 G 是一个局部紧群，且(π_E, E) 是 G 的一个可补巴拿赫表示。那么(π_E, E) 具有谱隙，当且仅当存在 G 上的一个紧支撑概率测度 μ，使得马尔可夫算子

$$\pi_E(\mu) = \int_G \pi_E(g)\, d\mu$$

限制在 B_π 上时具有谱隙，即

$$\|\pi_E(\mu)|_{E_\pi}\|_{\mathrm{op}} < 1.$$

在我们的半单情形下，我们对 μ 稍作改进。

命题 3.6. 存在一个概率密度 $\rho \in C_c^0(K\backslash G/K)$，其支集生成 G 的一个稠密子群，使得

$$\|\pi_E(\rho)\|_{\mathrm{op}} < 1.$$

证明。根据注 3.3，π_E 分解为 $E_{\pi_E} \oplus E^{\pi_E}$，相应地，余循环 b 也分解为两部分。由于 G 是半单的，第二个直和项必定平凡。事实上，否则 $b|_{E^{\pi_E}}$ 将在 G 与 $(E^{\pi_E}, +)$ 之间诱导一个态射，这与 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R}) = 0$ 的事实矛盾。因此可以假设 $E = E_{\pi_E}$。

令 Q 为 G的紧生成集。选取 $C_c^0(K\backslash G/K)$ 中的一对函数 (α_Q, β_Q)，使得对所有 $g \in Q$ 和 $a \in G$，有 $\alpha_Q, \beta_Q \geq 0$、$\alpha_Q(e) > 0$、$\int_G \alpha_Q = 1$，且 $g \cdot \alpha_Q(a) \leq \beta_Q(a)$。注意，$\beta_Q$ 的支集包含于 Q。

给定一对 $(\alpha_Q,\ \beta_Q)$，我们将 G 上定义的连续概率密度记为 $\rho_Q \in C_c^0($ $K\backslash G/K)$，其定义为

$$\rho_Q = \frac{\alpha_Q + \beta_Q}{\int_G (\alpha_Q + \beta_Q)}.$$

根据假设，存在 $\varepsilon > 0$，使得 (Q, ε) 是 (π_E, E) 的 Kazhdan 对。我们指出，π_E 具有几乎不变向量，当且仅当对于每个 $\varepsilon > 0$，它都有一个 (Q, ε)-不变向量。由与 $[8,$ 定理 3.4$]$, 类似的论证可得，$\|\pi_E(\rho)\|_{\mathrm{op}} < 1$。

□

定义 3.7。设 G 是一个拓扑群，B 是一个巴拿赫空间。G 在 B 上的一个仿射表示 是一个连续群同态

$$\alpha : G \to \mathrm{Aff}(B) = B \rtimes \mathrm{GL}(B),$$

其中 $\mathrm{Aff}(B)$ 配备由 B 的拓扑和 $\mathrm{GL}(B)$ 上的紧开拓扑所诱导的积拓扑。

连续映射 $F\colon G/K \to E$ 是 G-等变的，如果存在一个线性部分为 π_E 的仿射表示 α，使得

$$F = \alpha(g) \circ F \circ \lambda(g^{-1}) \quad \forall g \in G,$$

其中 $\lambda(g)$ 表示 G/K 的由 $g \in G$ 左平移所对应的自同构 .

命题 3.8。给定 $b \in Z^1(G, \pi_E)$，存在 $b' \in B^1(G, \pi_E)$，使得 $b_K = b + b'$ 是光滑的，并诱导出一个 G-等变映射 $F_{b_K}\colon\ G/K \to E$，满足 $\Delta F_{b_K} = 0$。

证明。由命题 3.6，存在一个概率密度 $\rho \in C_c^0(K\backslash G/K)$，使得 $\|\pi_E(\rho)$ $\|_{\mathrm{op}} < 1$。因此，仿射变换 $\alpha(\rho) = \pi_E(\rho)+b(\rho)$ 有唯一的不动点 $x_1 \in E$。此外，由于 $(G,\ K)$ 构成一个盖尔范德对（例如参见 $[26,$ 命题 6.1.3$]$），概率密度空间 $C_c^0(K\backslash G/K)$ 关于卷积是交换的；又由 $\alpha(\rho)$ 的不动点唯一性可知，点 x_1 被$C_c^0(K\backslash G/K)$ 中的每个概率密度固定。

定义余边界 $b'(g) = \pi_E(g)x_1 - x_1$和 $b_K = b + b'$。那么对于任意概率密度 $\rho \in C_c^0(K\backslash G/K)$，$b_K(\rho) = 0$。由 ρ 的 K-不变性，对于任意 $k \in K$，

$$\begin{aligned} b_K(\rho) &= \int_G b_K(kg)\rho(g)\, dg \\ &= b_K(k) + \pi_E(k) b_K(\rho). \end{aligned}$$

因此，$b_K|_K = 0$和 b_K在 G/K上诱导出一个映射，记作F_{b_K}。

更一般地，对于任意概率密度 $\rho \in C_c^0(K\backslash G/K)$,

$$
\begin{aligned}
b_K(g) &= \int_G b_K(gh)\rho(h)\,dh - \pi_E(g)b_K(\rho) \\
&= \int_G b_K(h)\rho(g^{-1}h)\,dh.
\end{aligned} \tag{1}
$$

我们可以选择 ρ 使其光滑，因此 F_{b_K} 在 G/K上光滑。

平均值性质 (1) 表明， F 被 G不变算子湮灭。这些算子作用于适当的函数空间 $\mathcal{F}$，其定义见 [2, 第 156] 页。F_{b_K} 属于 G不变的 Fr´echet 空间 $C^\infty(G/K, B)$。回想一下，当且仅当 f 及其所有导数在 G/K的紧子集上一致趋于 0 时， $f \to 0$ 属于 $C^\infty(G/K, B)$。点求值 $\mathrm{ev}_x : C^\infty(G/K, B) \to B$以及在 $C^\infty(G/K, B)$上由左平移给出的轨道映射都是连续的。因此，$C^\infty(G/K, B)$满足 [2, 第 156] 页中对 $\mathcal{F}$ 的条件。根据 [2, 命题 3.3, 8] $DF_b = 0$ 对每个作用于$C^\infty(G/K, B)$的 G不变微分算子 D 均成立。

显然，映射 F_{b_K} 关于等距仿射巴拿赫作用 $\alpha_K = \pi_E + b_K$ 是 G-等变的。

□

4. The Hilbert space case

设 G 是一个中心有限的连通半单李群，且令 $K \leq G$ 为一个极大紧子群。设 (π, H) 是 G 的一致有界希尔伯特表示。

在本节中，我们利用映射 $F\colon G/K \to H$ 的调和性，将其增长与 F 的无穷小行为联系起来。这一关系在第 4.1 小节中得到明确阐述，并在那里使用常微分方程方法进行分析。

在希尔伯特空间的情形下， F 的无穷小行为由其在点 $x \in G/K$ 处的微分的希尔伯特–施密特范数刻画。因此，我们的首要目标是对这些希尔伯特–施密特范数进行全局控制，这将作为随后增长估计的主要解析输入。

引理 4.1。 设 $F : G/K \to H$ 是一个调和映射，则对于每个 $x \in G/K$,

$$\Delta\|F(x)\|^2 = -2\,\|d_xF\|_{\mathrm{HS}}^2\,,$$

其中， $\|d_xF\|_{\mathrm{HS}} = \left(\mathrm{Tr}\left((d_xF)^*\,d_xF\right)\right)^{1/2}$ 是 F 在 x处的微分的希尔伯特–施密特范数。

证明。 这直接由该方程得出

$$\Delta\|F(x)\|^2 = 2\langle\Delta F(x), F(x)\rangle - 2\,\|d_xF\|_{\mathrm{HS}}^2\,.$$

详情请参见 [2, 命题 3.3.14.]。

□

我们可以假设，通过对 K 上的归一化哈尔测度取平均内积， K 在 H 上以酉方式作用。

命题 4.2. 设 $F\colon G/K \to H$ 是一个非恒定的 G-等变调和映射。那么，算子 $d_xF\colon T_x(G/K) \to H$ 的希尔伯特–施密特范数一致有界，即存在 $c > 0$ ，使得对所有 $x \in G/K$，

$$\frac{\sqrt{\dim(G/K)}}{c} \leq \|d_xF\|_{HS} \leq c\sqrt{\dim(G/K)}.$$

在继续证明之前，我们简要回顾一下 G/K 的可微结构与 G 的李代数之间的联系。详情请参阅 [14, 第三章， 7] 和 [14, 第五章， 6]。

令 $\mathfrak{g}$ 表示 G 的李代数，并令 $\mathfrak{k}$ 为与 K 相关的子代数。存在 $\mathfrak{g}$ 的嘉当分解 $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$。对于每个元素 $X \in \mathfrak{p}$，存在相应的切向量 $D_X \in T_{x_0}(G/K)$，其中 $x_0 = K$，由 $D_Xf(x_0) = \frac{d}{dt}f(\exp(tX)x_0)|_{t=0}$， $\forall f \in C^\infty(G/K)$ 给出。映射 $X \mapsto D_X$ 定义了 $\mathfrak{p}$ 与 $T_{x_0}(G/K)$ 之间的线性同构，从而可以将 $T_{x_0}(G/K)$ 与 $\mathfrak{p}$ 等同起来。

对于任意 $k \in K$， $T_{x_0}(G/K)$上的线性自同构 $d\lambda(k)_{x_0}$ 对应于内自同构 $\mathrm{Ad}(k) : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$。这种关系如下所示：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f\left(k\exp(tX)x_0\right)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}f\left(k\exp(tX)k^{-1}x_0\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}f\left(\exp\left(t\,\mathrm{Ad}(k)X\right)x_0\right)\Big|_{t=0},\end{aligned}$$

对所有 $f \in C^\infty(G/K)$ 均成立。

命题 *4.2* 的证明。切空间 $T_{x_0}(G/K)$ 被识别为 $\mathfrak{p}$，如前所述；任意向量 $v \in H$ 处的切空间也类似地被识别为 H。利用 F 是 G- 等变这一事实，我们推得

对所有 $k \in K$ 和 $X \in \mathfrak{p}$，有如下结论：

$$\begin{aligned} d_{x_0}F(\mathrm{Ad}(k)X) &= \left.\frac{d}{dt}F\left(\exp(t\,\mathrm{Ad}(k)X)x_0\right)\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}F\left(k\exp(tX)x_0\right)\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\left(\pi(k)F\left(\exp(tX)x_0\right)\right)\right|_{t=0} \\ &= \pi(k)\left.\frac{d}{dt}F\left(\exp(tX)x_0\right)\right|_{t=0} \\ &= \pi(k)\,d_{x_0}F(X). \end{aligned}$$

由于 K 在 H上以酉方式作用，因此对所有 $k \in K$， $\|\pi(k)d_{x_0}F(X)\| = \|d_{x_0}F(X)\|$。于是，在 $T_{x_0}(G/K) \cong \mathfrak{p}$ 上由下式定义的对称双线性型 B_{x_0}

$$B_{x_0}(X,Y) = \langle d_{x_0}F(X), d_{x_0}F(Y)\rangle,$$

在 $\mathrm{Ad}(K)$ 的作用下保持不变。

我们断言 B_{x_0} 是正定的。假设存在非零的 $Z \in T_{x_0}(G/K)$，使得 $\|d_{x_0}F(Z)\| = 0$。那么根据 B_{x_0} 在 $\mathrm{Ad}(K)$ 下的不变性，$d_{x_0}F$ 在整个切空间 $T_{x_0}(G/K)$ 上都为零。由 F 的 G-等变性，对于任意 $g \in G$ 和 $x = gx_0$，有

$$d_xF = \pi(g)\,d_{x_0}F\,d_x\lambda\left(g^{-1}\right). \tag{2}$$

由于 $(\pi,\ H)$ 一致有界，

$$\|d_xF\left(d_{x_0}\lambda(g)(X)\right)\| \lesssim \|d_{x_0}F(X)\| = 0$$

对所有 $X \in \mathfrak{p}$ 均成立。因此 F 将为常数，这与矛盾。

由范数等价，存在 $c > 0$，使得。

$$\frac{\|X\|_2^2}{c^2} \le B_{x_0}(X,X) \le c^2\,\|X\|_2^2 \quad \text{for all } X \in T_{x_0}(G/K).$$

我们断言，可以选取 c，使其独立于基点 x_0。事实上，由于 F 的 G-等变性，对于任意 $g \in G$ 和 $x = gx_0$，我们有

$$\begin{aligned} B_x(d_{x_0}\lambda(g)(X), d_{x_0}\lambda(g)(X)) &= \|d_xF\left(d_{x_0}\lambda(g)(X)\right)\|^2 \\ &\le C\,\|d_{x_0}F(X)\|^2 \\ &= C\,B_{x_0}(X,X) \\ &\le C\,c^2\,\|X\|_2^2 \end{aligned}$$

对所有 $X \in \mathfrak{p}$均成立。下界的证明类似。通过对一个正交归一基求和，可得到希尔伯特–施密特范数的一致界。

□

4.1. 实秩一——定理 1.5 的证明。如果进一步要求 G 为实秩一，那么陪集空间 G/K可分别认作实 n双曲空间、复 n双曲空间、四元数 n双曲空间，或八元数双曲平面。详细内容请参见例如 [17, 定理 6.105] 和 [4, 第 3]章。我们用 $\mathbb{K}$ 表示实数、复数、四元数或八元数。

G-等变映射 $F\colon G/K \to H$ 的增长是径向的，即存在一个函数 $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，使得对于每个 $x \in G/K$，都有$r = d(x,\ x_0)$

$$\|F(x)\|^2 = \varphi(r).$$

由方程 2 可知，还存在一个函数 $\eta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，使得

$$\|d_x F(x)\|_{HS} = \eta(r).$$

因此，对于一个 G-等变调和映射 $F\colon G/K \to H$，

$$\Delta\|F(x)\|^2 = -\frac{d^2\varphi}{dr^2} - m(r)\frac{d\varphi}{dr} = -2\eta(r)$$

其中 $m(r) = m_1$ 双曲余切 $r + 2m_2$ 双曲余切 $2r$，且 $m_1 = k(n-1)$ $m_2 = k-1$，$k =$维数$_{\mathbb{R}}\,\mathbb{K}$（见 [13, 第二章、第 3] 节及引理 4.1）。

定理 *1.5* 的证明。由于 $H^1(\pi,\ H) \neq 0$，存在一个无界余循环 b。由命题 3.8，存在 $b' \in B^1(G,\ \pi)$，使得 $b_K = b + b'$ 诱导出一个调和映射 $F\colon G/K \to H$，该映射关于 $\alpha = \pi + b_K$ 是 G-等变的。由于 b 无界，F 非常值。

按上述方式选取 φ 和 η，得到方程：

$$\varphi''(r) + m(r)\,\varphi'(r) = 2\eta(r).$$

令 $\psi = \varphi'$，可得关于ψ的一阶常微分方程，并可用常数变易法求解。相应齐次方程的通解是函数的常数倍：

$$\psi_0(r) = (\sinh r)^{-m_1}(\sinh 2r)^{-m_2}.$$

因此，非齐次方程的一个特解为：

$$\psi(r) = 2\psi_0(r)\int_0^r \frac{\eta(s)}{\psi_0(s)}\,ds.$$

现在，令：

$$f(r) = \frac{1}{\psi_0(r)} = (\sinh r)^{m_1}(\sinh 2r)^{m_2},$$

我们得到上极限（下极限的情形类似）

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{f(r)}\int_0^r \eta(s)f(s)\,ds = \limsup_{s\to\infty}\eta(s)\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{f'(r)}$$
$$= \limsup_{s\to\infty}\frac{\eta(s)}{m_1+2m_2}.$$

因此，结合命题 4.2，我们得出存在 $c>0$，使得

$$\frac{2n}{m_1+2m_2}\frac{1}{c}+o(1)\le\psi(r)\le\frac{2n}{m_1+2m_2}\,c+o(1)$$

如 $r\to\infty$。积分可得

$$\|F(\cdot)\|^2\sim d(\cdot,x_0).$$

□

4.1.1. 推论 *1.7* 的证明。将 Sp(n,1)/K 与四元数双曲 n-空间对应后，记 Sp(n,1)/K的理想边界为 ∂X。背景及详细内容请参见 [4, 第 3]章。

设 π 是 Sp(n,1) 在 $C^\infty(\partial X)$ 上由左平移给出的自然表示。常值函数的子空间 $\mathbb{C}1_{\partial X}$ 是 π 的一个平凡子表示。记其在商空间上的诱导商表示为 π_0

$$C^\infty(\partial X)/\mathbb{C}1_{\partial X}.$$

Nishikawa 证明，在该商空间上存在一个欧几里得范数，使得相对于此范数，π_0 是连续且一致有界的；参见 [21,命题 2.13]。此外，他还证明了 π_0 具有非平凡余循环。

为了获得该余循环的调和代表元（命题 3.8），我们证明 π_0 具有谱隙。这由下面的引理以及以下事实可知：$C^\infty(\partial X)$ 中在左平移下不变的唯一函数是常值函数。

回顾引理 2.2，任意一致有界的欧几里得范数 $\|\cdot\|$都可以修改为一个 G-不变的$_1$ $_2$-一致光滑巴拿赫范数。$^-$

引理 4.3。设(π, B) 是局部紧、紧生成群 G的一个等距巴拿赫空间表示。设 K 是 G的一个紧子群。如果在 K作用下保持不变的向量 B^K 所组成的空间具有有限维数，那么(π, B) 要么不具有几乎不变向量，要么 $1\subset\pi$。

证明。 假设 G 几乎具有不变向量。令 Q 为 G的一个紧生成集。令

$$P=\int_K \pi(k)\,dk$$

并注意到，由于对所有 $k \in K$都有 $[\pi(k)\ P] = 0$， P是 B 中 K-不变向量上的投影。如果 $(b_n)_n$ 是一列归一化的 $\left(Q,\ \frac{1}{n}\right)$-不变向量，那么 $^-$

$$\|Pb_n - b_n\| \leq \int_K \|\pi(k)b_n - b_n\|\, dk = o(1),$$

因此，当 n 足够大时， $\|Pb_n\|$ 有界离开 0。令 $b'_n = \frac{1}{\|Pb_n\|} Pb_n \in B^K$ ¯(其中 n 足够大)，并注意到

$$\begin{aligned}\|\pi(g)b'_n - b'_n\| &= \frac{1}{\|Pb_n\|}\|\pi(g)Pb_n - Pb_n\| \\ &\leq \frac{2}{\|Pb_n\|}\|Pb_n - b_n\| + \frac{1}{\|Pb_n\|}\|\pi(g)b_n - b_n\| = o(1)\end{aligned}$$

在 G 的紧集上一致成立。另一方面， B^K 是有限维的，因此可以假设 $(b'_n)_n$ 收敛到 $b \in B^K$，其中 $b \neq 0$。由此可知， b 在 G 下保持不变。

□

References

[1] Uri Bader、Alex Furman、Tsachik Gelander 和 Nicolas Monod。(T) 性质与巴拿赫空间上作用的刚性。《数学学报》，198(1):57–105，2007年。[2] Bachir Bekka、Pierre de la Harpe 和 Alain Valette。卡兹丹的 *(T)* 性质，新数学专著丛书第 11 卷。新数学专著丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2008年。[3] Yoav Benyamini 和 Joram Lindenstrauss。几何非线性泛函分析。第 *1* 卷，美国数学会讨论会出版物第 48 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年。[4]Pierre-Alain Cherix、Michael Cowling、Paul Jolissaint、Pierre Julg 和 Alain Valette。具有 *Haagerup* 性质的群。现代 Birkhäuser 经典丛书。Birkhäuser/Springer，巴塞尔，2001年。Gromov 的 a-T-可容许性，2001年版的平装重印本 [MR1852148]。[5] Yves de Cornulier、Romain Tessera 和 Alain Valette。希尔伯特空间上的等距群作用：余循环的增长。《几何与泛函分析》，17(3):770–792，2007年。[6] Patrick Delorme。半单李群和可解李群酉表示的 1-上同调与对偶空间拓扑。表示的连续张量积。《法国数学会通报》，105(3):281–336，1977年。[7] Cornelia Drutu 和 John M. Mackay。轴双曲群对ℓ^1的作用，2023年。预印本，arXiv:2309.12915，https://arxiv.org/abs/2309.12915。[8] Cornelia Drutu 和 Piotr W. Nowak。Kazhdan 投影、随机游走与遍历定理。《纯粹与应用数学杂志》，754:49–86，2019年。[9] Antoine Gournay。Liouville 性质与希尔伯特压缩。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》，66(6):2435–2454，2016年。[10] Erik Guentner 和 Jerome Kaminker。离散群的精确性与一致可嵌入性。《伦敦数学会杂志》（第二辑），70(3):703–718，2004年。

[11] A. Guichardet。 ´李群的 l-上同调研究以及对偶空间的拓扑：具有阿贝尔根的 `李群。Math. Ann.，228(3):215–232，1977年。[12] Uffe Haagerup。一个非核 C^*-代数的例子，它具有度量逼近性质。Invent. Math.，50(3):279–293，1978/79年。[13] Sigurdur Helgason。《群与几何分析》，纯粹与应用数学第 113 卷。Academic Press, Inc.，奥兰多，佛罗里达州，1984年。积分几何、不变微分算子与球函数。[14] Sigurdur Helgason。《微分几何、李群与对称空间》，数学研究生教程第 34 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001年。1978年原版的修订重印本。[15] Nigel Higson 和 Gennadi Kasparov。对希尔伯特空间作适当等距作用的群的 E-理论与 KK-理论。Invent. Math.，144(1):23–74，2001年。[16] D. A. Kaˇzdan。群的对偶空间与其闭子群结构之间的联系。Funkcional. Anal. i Priloˇzen.，1:71–74，1967年。[17] Anthony W. Knapp。《李群：入门之后》，数学进展第 140 卷。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，第二版，2002年。[18] Joram Lindenstrauss。巴拿赫空间中的光滑模与发散级数。Michigan Math. J.，10:241–252，1963年。[19] Assaf Naor 和 Yuval Peres。离散群的嵌入与随机游走的速度。Int. Math. Res. Not. IMRN，页码 Art. ID rnn 076，34，2008年。[20] Bogdan Nica。双曲群在 L^p-空间上的适当等距作用。Compos. Math.，149(5):773–792，2013年。[21] Shintaro Nishikawa。Sp(n,1) 存在一个对应于一致有界表示的适当 1-余循环，2020年。预印本，arXiv:2003.03769，https://arxiv.org/abs/2003.03769。[22] Gilles Pisier。取值于一致凸空间的鞅。Israel J. Math.，20(3-4):326–350，1975年。[23] Gilles Pisier。《相似性问题与完全有界映射》，数学讲义第 1618 卷。Springer-Verlag，柏林，扩充版，2001年。包括“Halmos 问题”的解答。[24] Klaus D. Schmidt。关于单调函数的矩不等式与协方差。Insurance Math. Econom.，55:91–95，2014年。[25] Romain Tessera。群上的渐近等周不等式与到巴拿赫空间的一致嵌入。Comment. Math. Helv.，86(3):499–535，2011年。[26] Gerrit van Dijk。《调和分析与广义 Gelfand 对导论》，De Gruyter 数学研究丛书第 36 卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，2009年。[27] Ignacio Vergara。 L^1子空间上的双曲性与一致 Lipschitz 仿射作用。Bull. Lond. Math. Soc.，55(5):2446–2455，2023年。[28] Wolfgang Woess。《无限图与群上的随机游走》，剑桥数学专著第 138 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。

电子邮箱地址：kevin.boucher01@gmail.com

Department of Mathematics, University of Luxembourg, L-4364 Esch-sur-Alzette电子邮箱地址：georg.gruetzner@uni.lu