# 估计解的演 化：向量时滞非线性系统中的解范数、稳定性与有界性 s

Mark A. Pinsky

摘要—现有方法很少能刻画时变时滞和系数下向量非线性时滞微分方程中解范数的时间演化，因此往往导致过于保守的有界性和稳定性判据。我们提出一种框架，通过构造向量时滞微分方程的标量对应系统，在相应历史函数匹配时，其解能够为原系统解范数的演化提供上界。借助这一约化，可通过标量对应系统的动力学来评估向量时滞微分方程的有界性和稳定性，并可采用直接仿真或简化的解析推理。我们推导并验证了新的有界性和稳定性判据，以及能够使原向量系统产生有界解或稳定解的历史函数所在球的半径估计，并通过有代表性的仿真进行了验证。

索引词—时滞非自治非线性系统，时变时滞和系数，解范数估计，有界性和稳定性判据。

## I. 引言

评估具有时变时滞和系数的向量非线性系统的有界性与稳定性，一直是一个长期存在的问题，在科学与工程领域有着广泛的应用。专著 [4],[7]-[9], [11]-[15], [17]-[20], [24] 和综述 [1], [5], [10],[16] 中报告的大量研究，针对特定类别的时滞系统提出了各种稳定性判据和一些有界性判据。

近期进展主要源于对 Krasovskii [19] 和 Razumikhin [29]提出的时滞系统 Lyapunov方法的扩展。这些进展还结合了 Halanay不等式 [7], [8], [12], [22], 、Bohl–Perron定理 [2],[3], [9], 以及若干相关的、更专门的方法。对于线性时不变系统，这些方法促成了计算效率较高的线性矩阵不等式技术 [8], [18], [30], ； 而时变时滞微分方程的稳定性则已在 [3], [4],[6],[21], [33]中得到研究。

然而，将此类方法应用于具有时变时滞和系数的非线性时滞微分方程仍有诸多限制，所得判据过于保守，很少能对稳定性或有界性区域给出令人满意的估计 [23], [31]。对于此类非齐次向量非线性系统，这些局限尤为明显。输入到状态稳定性方法虽能处理问题的某些方面 [5], , 但仍有许多挑战尚未解决。

当前的稳定性与有界性研究范式侧重于系统的渐近行为，却忽视了暂态动力学，而后者在实际应用中可能至关重要。

基于我们此前关于非线性常微分方程 [25]-[28], 的研究，本研究提出了一种新框架，用于分析向量非线性系统中解的范数的时间演化中的时变时滞和系数。该方法为原始向量系统构造标量辅助对应系统。在历史函数适当匹配的条件下，这些标量方程的解可为向量时滞微分方程的解的范数演化提供上界。

通过简化的解析推理以及对标量对应系统的高效仿真，可以估计向量时滞微分方程解的范数随时间的演化。这一化简构成了本文的主要贡献。因此，我们推导出新的有界性和稳定性判据，并估计有界性区域或稳定性区域中球的半径。在类利普希茨条件下对标量辅助方程进行线性化，可得到简化但更为保守的判据。通过具有代表性的仿真验证了所提方法，结果证实了其准确性和实际价值。

本文结构安排如下。第二节介绍记号、定义和系统表述；第三节推导标量辅助方程及相关的有界性–稳定性判据；第四节构建线性化标量辅助方程以及相应的有界性–稳定性判据。第五节报告仿真结果，第六节总结全文，并对未来研究方向作出展望。

## II. 记号与控制方程

**2.1. 记号**。回顾一下，符号 and表示实数、非-负实数和正实数以及实-维向量的集合，是实数正整数的集合，是矩阵的集合，而是单位矩阵。接下来，和是连续实函数空间，以及,分别配备上确界范数，其中表示向量的欧几里得范数或矩阵的诱导范数，并且可以是无穷大。反过来，，其中是中的右上导数。另请注意，和。

**2.3. 下划线方程与定义**。接下来的分析涉及具有时变时滞和系数的向量非线性方程：

内华达大学雷诺分校数学与统计系的 *Mark A. Pinsky*，地址：雷诺，内华达州 *89557*，美国（电子邮件：*pinsky@unr.edu*）

$$\dot{x}=A(t)x+f\left(t,x(t),x\left(t-h_1(t)\right),...,x\left(t-h_m(t)\right)\right)+F(t),$$
$$\forall t\geq t_0;\ x(t,\varphi)=\varphi(t),\ \forall t\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right] \quad (2.1$$

其中，，，是一个连续函数，关于所有变量，初始函数，，标量函数，=1, +1...，矩阵是连续可微的，，，，。

我们假设初始问题 (2.1) 存在唯一解，且。在上述假设下，(2.1) 的右端关于所有变量均连续，因此该方程的解，是连续的，关于 连续可微，并且在任意有限区间上有界。因此，接下来的分析将估计 (2.1) 的解的范数的瞬态演化及其在 时的渐近行为。

下文采用简化记号：

，并引入 (2.1) 的齐次对应方程：

$$\dot{x}=A(t)x+f\left(t,x(t),x\left(t-h_1(t)\right),...,x\left(t-h_m(t)\right)\right),$$
$$\forall t\geq t_0,\ x(t,\varphi)=\varphi(t),\ \forall t\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right] \quad (2.1)$$

该方程存在唯一解。我们还考虑相关的线性方程：

其解可以表示为：，其中是转移（柯西）矩阵，而是该线性方程的基本解矩阵。

后一个公式定义了下一节中的常数变易法。

接下来，我们假设，这一条件总是可以满足的。

接下来，在上述假设下，我们回顾方程 (2.1) 和 (2.2) 的解的有界性和稳定性的标准定义，这些定义将在下文中使用；例如，参见 [18]。

**定义1**。方程 (2.2) 的平凡解称为：(1.1) 对给定的 稳定，如果存在，。否则，它是不稳定的。(1.2) 一致稳定：在上述定义中。(1.3)

渐近稳定：如果对给定的 且存在，。(1.4) 一致渐近稳定：如果它是一致稳定的，并且在前述定义中。

**定义2**。方程 (2.1) 的解称为：（2.1）对于给定值 局部有界，如果存在，使得条件 蕴含。(2.2) 一致有界，如果。

此外，令为的上确界，满足定义1的子定义 (1.3) 或 (1.4) 中的条件，或定义2的子定义 (2.1) 或 (2.2) 中的条件。接下来，令

$$B_{R_i}:=\{\varphi\in C\left(\left[t_0-\bar{h},t_0\right],\mathbb{R}^n\right):\|\varphi\|\leq R_i\},\ i=3,...,6 \text{ denote}$$

以原点为中心、半径为 。这些球分别包含能够生成方程 (2.1) 和 (2.2) 的有界解或稳定解的历史函数。

接下来，我们回顾鲁棒稳定性的定义，该定义由 Krasovskii 称为持续扰动下的稳定性 [31], 第161页-164]。考虑方程 2.2 的一个扰动形式：

$$\dot{x}=A(t)x+f\left(t,x,x\left(t-h_1(t)\right),...,x\left(t-h_m(t)\right)\right)+$$
$$R\left(t,x,x\left(t-h_1^*(t)\right),...,x\left(t-h_m^*(t)\right)\right),\forall t\geq t_0, \quad (2.2)$$
$$x(t)=\varphi(t),\ \forall t\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right]$$

此外，除上述针对包含在 (2.3) 中的 (2.2) 各组成部分所规定的条件外，我们还假设：(I) 函数 在以下变量中是利普希茨连续的

$$\chi_i\in\mathbb{R}^n,\ i=1,...,m+1, \quad \text{(II) } f(t,0)=0, \quad \text{(III)}$$

对所有变量而言是连续函数，尽管 可能不为零，并且 (IV) 标量函数 。

**定义3**。如果，使得，，并且是方程 (2.3) 的解，则称方程 (2.2) 的平凡解是鲁棒稳定的。

$$|x(t,\varphi)|_\infty\leq\varepsilon,\ \forall t\geq t_0 \text{ if}$$

**命题**（Krasovskii [19], 第162页）。在条件 (I)–(IV) 下，如果方程 (2.2) 的平凡解是一致渐近稳定的，则该平凡解是鲁棒稳定的。

## III. 标量时滞辅助方程

下面推导一个带有历史函数的标量辅助时滞微分方程，以求得向量时滞微分方程 (2.1) 的解的范数的上界。

通过使用常数变易法，将两个方程都写成积分形式。应用标准范数和扩展的利普希茨不等式，可得到方程 (2.1) 的一个标量积分方程，随后将其与标量辅助时滞微分方程的积分形式相匹配。

首先，我们将（2.1）写成积分形式：

$$x(t,\varphi)=w(t)w^{-1}(t_0)\varphi(t_0)+w(t)\int_{t_0}^{t}w^{-1}(\tau)Q(\tau)d\tau,\ \forall t\ge t_0,$$

$$x(t,\varphi)=\varphi(t),\ \forall t\in[t_0-\bar{h},t_0]$$

where $Q=f(t,x(t),x(t-h_1(t)),...,x(t-h_m(t)))+F(t)$.

因此，我们得到：

$$|x(t,\varphi)|=\left|w(t)w^{-1}(t_0)\varphi(t_0)+w(t)\int_{t_0}^{t}w^{-1}(\tau)Q(\tau)d\tau\right|, \quad (3.1)$$

$$\forall t\ge t_0,\ |x(t,\varphi)|=|\varphi(t)|,\ \forall t\in[t_0-\bar{h},t_0]$$

Then, applying 标准 norm 不等式 yields:

$$|X_1(t,\varphi)|=|w(t)||w^{-1}(t_0)\varphi(t_0)|+|w(t)|\int_{t_0}^{t}|w^{-1}(\tau)||Q(\tau)|d\tau, \quad (3.1)$$

$$\forall t\ge t_0,\ |X_1(t,\varphi)|=|\varphi(t)|,\ \forall t\in[t_0-\bar{h},t_0]$$

其中 是关于两个变量的连续向量函数。比较（3.1）和（3.2）可得。

为了将 (3.2) 化为更易处理的形式，我们引入 Lipschitz 条件的非线性扩展：

$$|f(t,\chi_1,...,\chi_{m+1})-f(t,\bar{\chi}_1,...,\bar{\chi}_{m+1})|\le\sum_{i=1}^{m+1}L_i|\chi_i-\bar{\chi}_i|,$$

$$\forall\chi=[\chi_1,...,\chi_{m+1}]^T\in\Omega\in\mathbb{R}^{n(m+1)},\ \chi_i\in\mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

其中 是的紧子集，包含零点，，，以及，是连续标量函数。

附录 B 说明了当 是多项式或幂级数（关于 ）且 误差项有界时，如何以闭式定义这类标量函数。在前一种情形下，；如果幂级数误差项在 上有界，相同条件同样成立。此外，在 上变为线性的，如果 关于相应变量是线性的。此外，第 V 节为平面非线性系统定义了。

注意，为简便起见，本文其余部分均假设 。

接下来，将 (3.3) 代入 (3.2)，得到以下方程：

$$X_2(t,\tilde{\varphi})=|w(t)||w^{-1}(t_0)\varphi(t_0)|+|w(t)|\int_{t_0}^{t}|w^{-1}(\tau)|q(\tau)d\tau, \quad (3.3)$$

$$\forall t\ge t_0;\ X_2(t,\tilde{\varphi})=|\varphi(t)|,\ \forall t\in[t_0-\bar{h},t_0]$$

其中，是一个连续的关于两个变量的标量函数，且

。因此，方程 (3.4) 表明。

that

Next, we introduce an auxiliary scalar nonlinear DDE:

$$\dot{y}=p(t)y+c(t)\left(L(t,y(t),y(t-h_1(t)),...,y(t-h_m(t)))+|F(t)|\right) \quad (3.5)$$

$$\forall t\ge t_0,\ y(t,\phi)=\phi(t),\ \forall t\in[t_0-\bar{h},t_0]$$

其中，，，以及函数、和 将在下文确定。随后，我们利用常数变易法将 (3.5) 写成积分形式：

$$y(t)=e^{d(t)}\left(\phi(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-d(\tau)}c(\tau)q(\tau)d\tau\right),\ \forall t\ge t_0 \quad (3.4)$$

$$y(t,\phi)=\phi(t),\ \forall t\in[t_0-\bar{h},t_0]$$

where $d(t)=\int_{t_0}^{t}p(s)ds$.

为确定 和，我们令（3.6）和（3.4）的右端相等。匹配第一项：和，得到：

$$|w(t)|=\exp\left(\int_{t_0}^{t}p(s)ds\right) \quad (3.5)$$

$$\phi(t_0)=|w^{-1}(t_0)\varphi(t_0)| \quad (3.6)$$

为了匹配（3.6）和（3.4）右侧的第二项，我们首先将后一个函数乘以并除以，并利用由于（3.7）所知的关系，，其得出：

$$\int_{t_0}^{t}e^{-d(\tau)}c(\tau)q(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}\left(|w(\tau)||w^{-1}(\tau)|\right)q(\tau)/|w(\tau)|d\tau$$

最后一个关系表明 是 的运行条件数。由于，因此可得 。此外， 的连续可微性确保了 具有相同的性质，并且 连续。

最后，由 (3.7) 可得：

$$p(t)=d\left(\ln|w(t)|\right)/dt \quad (3.7)$$

对 (3.4) 和 (3.6) 中的初始函数进行匹配可得，将其与 (3.8) 结合可推出：。该条件与先前的要求 一起，在令 s 为 时得到满足。

因此，式（3.5）采用上述定义的系数，并补充以下条件：

, 结出了一个标量辅助时滞微分方程的初始问题，该方程的解对原向量方程 (2.1) 的相应解的范数构成上界。由此得到以下陈述。

**定理1**。假设，，矩阵 连续可微，，，，，，，不等式 (3.3) 成立，其中，且 。随后，我们假设方程 (2.1) 和 (3.5) 存在唯一解，，那么，

$$\|x(t,\varphi)\| \le y(t,\phi),\ \forall t \ge t_0$$
$$\phi(t) = \|\varphi(t)\|,\ \forall t \in [t_0 - \bar{h}, t_0] \tag{3.8}$$

其中 和 分别是方程（2.1）和（3.5）的解。

**证明**。事实上，先前已证明。对函数和 进行上述赋值可得：，若

$$\|x(t,\varphi)\| \le y(t,\phi),\ \forall t \in [t_0 - \bar{h}, t_0]$$

因此，对标量方程（3.5）或其在 时得到的齐次对应方程施加有界性或稳定性条件，可确保同一性质分别适用于向量方程（2.1）和（2.2）。

接下来，假设将定义1和定义2应用于标量方程（3.5）的解，或其在 时的齐次类比方程的解。然后，定义 ，使得定义1中的子定义（1.3）或（1.4）的条件在应用于 时的（3.5）时成立，或者定义2中的子定义（2.1）或（2.2）的条件在应用于（3.5）时， 成立。进一步，令为半径为 且以原点为中心的球。

由此得到以下结论。

**定理2**。假设定理1的条件成立，并且方程（3.5）的平凡解满足稳定、一致稳定、渐近稳定或一致渐近稳定。那么，方程（2.2）的平凡解也具有相同类型的稳定性。

此外，在定义1的条件（1.3）和（1.4）下，。

**证明**。上述两个结论均可直接通过将不等式（3.10）应用于方程（2.2）和（3.5）的相应解而得，其中 □

**定理3**。假设满足定理1的条件，且方程 (3.5) 的解在集合 取值如果或一致有界如果。那么，方程 (2.

1) 匹配历史函数在相同取值下也有界，或者是一致有界。此外，在先前条件下，。

**证明**。该结论的证明可直接通过将不等式（3.10）应用于方程（2.1）及其标量对应方程（3.5）的解而得出 □

估算 的值这一关键任务可由以下结论简化。

**引理1**。设 是方程（3.5）的解，且 。则。

**证明**。该结论可由方程（3.5）的解具有唯一性这一假设推出；该假设排除了标量时滞方程的解曲线在 - 平面上相交的可能性 □

因此，方程（3.5）及其齐次对应方程在常值历史函数下的解，即 ，在上是单调的，。这进一步简化了对满足相应条件的定义1和定义2中的值进行仿真的过程。

接下来，我们通过对其标量对应方程施加条件，运用我们的方法确保向量时滞方程（2.2）的平凡解具有鲁棒稳定性。因此，我们将方程（2.3）的标量对应方程写作如下：

$$z = p(t)z + c(t)\begin{pmatrix} L\left(t, z(t), z\left(t-h_1(t)\right), \ldots, z\left(t-h_m(t)\right)\right) + \\ L_R\left(t, z(t), z\left(t-h_1^*(t)\right), \ldots, z\left(t-h_m^*(t)\right)\right) \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

其中 且 。

然后，将定义3应用于满足且满足方程（3.11）的方程（3.5），可得以下结论。

**定理 4**。假设定理1的条件以及条件（I）–（IV）对方程（3.11）成立，并且方程（3.5）的齐次对应方程的平凡解一致渐近稳定。那么，该平凡解以及由此可知方程（2.2）的平凡解均鲁棒稳定。

**证明**。事实上，在上述条件下，（3.5）的齐次对应方程的平凡解鲁棒稳定，这意味着，(其中 是下列方程的一个解

(3.11)若 ,, ，且 ,, 参见定义3。那么，由 (3.11)ε 可得, 其中 是下列方程的一个解(2.3)，因为 (3.11) 是 (2.3) 的标量对应方程

□

**推论**。假设定理1的条件成立，且，，并且。接下来，我们假设，并且条件(I)-(IV)对方程（3.11）成立。那么，相应向量方程（2.2）的平凡解是鲁棒稳定的。

**证明**。在给定假设下，相应标量方程（3.5）的平凡解是一致渐近稳定的。根据定理 4，这意味着方程（2.2）是鲁棒稳定的

□

因此，所提出的方法能够对具有变时滞和变系数的向量非线性时滞微分方程的解的范数演化进行上界估计，从而通过对相关标量对应系统进行严格论证的仿真，简化此类方程的有界性和稳定性分析。这些仿真还可以估计历史函数球的半径，从而确定导致原系统有界解或渐近稳定解的初始条件范围。此外，该方法还简化了将解析工具应用于这些问题的过程。

## IV. 线性化标量时滞辅助方程

在利普希茨型条件下，本节推导出用于判定标量非线性时滞方程及其对应向量方程的有界性和稳定性的简化但更保守的准则。

假设，

$$L(t,\zeta_1,...,\zeta_{m+1})\le\sum_{i=1}^{m+1}\mu_i(t,\zeta_i)\zeta_i,\ \forall|\zeta|\le\tilde{\zeta}>0,\ \forall t\ge t_0 \tag{4.1}$$

其中且。于是，将(4.1)应用于(3.5)，可得一个标量线性方程：

$$\begin{aligned}\dot{u}&=P(t)u+c(t)\left(\sum_{i=2}^{m+1}\mu_i(t,\zeta_i)u(t-h_i(t))+F_0|e(t)|\right)\\ u(t,\phi)&=|\varphi(t)|,\ \forall t\in[t_0-\bar{h},t_0]\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中。接下来，我们在(4.1)中令，

$$\zeta_1=u(t,\phi),\ \zeta_i=u(t-h_i(t),\phi),\ i=2,...,m+1 \tag{4.3}$$

其中是方程(4.2)或其在下得到的齐次对应方程的一个解。因此，我们提出以下稳定性判据。

**定理 5**。假设、、、、和满足条件（A.1）（见附录A），且方程（4.2）存在唯一解、和。接下来，令子定义（1,i），的定义1条件对方程（4.2）的平凡解成立，其中和，且满足子定义（1.i）的条件。进一步假设

$$\forall\tilde{\zeta}^{*}<\tilde{\zeta}\le\zeta$$

，上标

定理1的条件均得到满足。则，其中和是方程

$$\left|\quad,\varphi\right|\le\quad,\phi\le \tag{4.4}$$

分别为（2.2）以及（3.5）和（4.2）的齐次对应方程。此外，方程（4.2）和（3.5）在条件下的平凡解，以及方程（2.2）的平凡解，均具有定义1的子定义（1.i）所定义的同类稳定性。

**证明**。 在子定义 (1.1) 的最宽松条件下，不等式 (4.1) 成立，这意味着，如果足够小，其中满足 (4.2)，且。这确保了当足够小时，不等式 (4.1) 成立，且。然后，不等式 (4.1) 确保可将引理 2（见附录 A）应用于 (3.5) 及 (4.2) 的齐次对应方程，从而得到，，这表明，对于给定值，(3.5) 的平凡解（其中）和 (2.2) 的平凡解均稳定。

此外，在子定义 (1,i) 的更保守条件下，也可得出相同结论，

□

反过来，(4.2) 的解可表示为（参见例如 [18], 第139页）：

$$u(t,\phi)=u_h(t,\phi)+F_0u_{nh}(t) \tag{4.5}$$

其中是满足和的 (4.2) 的一个解，且是满足的 (4.2) 的解。此外，，其中是 (4.2) 的柯西函数，定义为满足以下历史函数的 (4.2) 齐次对应方程的解：。由此得到以下有界性判据。

**定理6**。假设定理 5 的条件成立，且方程 (4.2) 在这些条件下存在唯一解。此外，假设，并且和都充分小。那么，

$$|x(t,\varphi)|\le y(t,\phi)\le u(t,\phi),\ \forall t\ge t_0 \tag{4.6}$$

其中，、分别是方程 (2.1)、(3.5) 和 (4.2) 的解，并且。

**证明**。在所述假设下，通过适当选择和，方程 (4.5) 右端的两项都可以变得任意小，这意味着 (4.1) 成立。因此，由于 (4.1)，引理 2 适用于方程 (3.5) 和 (4.2)，从而确保不等式 (4.6) 成立

□

因此，关系式 (4.5) 和 (4.6) 表明，其中，根据定理6，以及 是 方程 (4.2) 的齐次对应方程的稳定或渐近稳定解，具体取决于所采用的判据，条件消除了输入–标量线性方程 (4.2) 中的系统共振，并确保向量非线性时滞微分方程 (2.2) 在定义1中规定的所有稳定性条件下都具有输入到状态稳定性。这种方法避免了类李雅普诺夫论证，并导出了一个新的输入到状态稳定性条件（进一步讨论见 [5]）。

## V. 仿真

Let us assume that (2.1) takes the following form,

$$\dot{x}=\left(A_0(t)+A_1(t)\right)x+\rho A_1(t)x(t-h)+f\left(t,x(t-h)\right)+F(t),\ \forall t\ge t_0=0,\ x(t,x_0)\in\mathbb{R}^2,\ x(t,x_0)=x_0=const,\ \forall t\in[-h,0] \tag{5.1}$$

where, $f=b\left[0,\ x_2^3(t-h)\right]^T$, $F=\left[0,F_2(t)\right]^T$, $b,h,\rho\in\mathbb{R}_+$,

$$A_0=diag\left(\lambda(t),\lambda(t)\right),\ A_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega(t) & -\alpha_1\end{pmatrix}.$$

Next, we calculate the functions $p(t)$ and $c(t)$ for the subsystem $\dot{x}=A_0(t)x$ (see Section 3). Clearly, in this case, $w(t)=diag(\eta,\eta)$, where $\eta=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right)$, which implies that $p(t)=\lambda(t)$ and $c(t)\equiv 1$.

因此，对于（5.1），标量辅助方程（3.5）变为：

$$\dot{y}=\lambda(t)y+\rho\lambda(t)y(t-h)+by^3(t-h)+|F(t)|,\ \forall t\ge 0,\ y(t)\in\mathbb{R}_{\ge 0};\ y(t)=|x_0|,\ \forall t\in[-h,0] \tag{5.2}$$

相应地，其自治标量对应方程最终变为：

$$\dot{\hat{y}}=\left(\hat{\lambda}+\hat{A}_1\right)\hat{y}+\rho\hat{A}_1\hat{y}(t-h)+b\hat{y}^3(t-h)+F_0,$$

（5.3）其中 与确界 上。因此，引理 2 蕴含 。

请回想一下，线性化方程（5.3）的稳定性在其参数空间中已有充分研究；只要 足够小，[18]，其渐近稳定性便可保证方程（5.3）的齐次对应方程的平凡解渐近稳定。此外，方程（5.2）和（5.3）的右–端仅分别依赖于标量函数和标量参数，而非矩阵的全部四个元素。这大大简化了对原方程（5.1）进行的参数变化灵敏度分析。

Simulations of equations (5.1)-(5.3) assume that $\lambda=\lambda_0+\lambda_+(t)$, where $\lambda_0=-3$ and either (a)

$$\lambda_+(t)=q\sin(dt),\ q=0.1,\ d=5 \text{ or} \tag{b}$$

接下来，我们假设 且。所有仿真均使用 MATLAB 求解器 DDE23 完成。

图 1 比较了使用匹配历史函数模拟方程 (5.1)-(5.3) 得到的解的范数随时间的演化，分别以实线、虚线和点划线表示。所有参数均标注在图中。

在所有图中，不等式 成立于模拟的时间区间内， 并适用于广泛的参数取值范围，为我们的理论推断提供支持。标量非自治方程 (5.2) 的解与方程 (5.1) 的解范数非常接近，而自治方程 (5.3) 的仿真则给出了较粗略的估计。

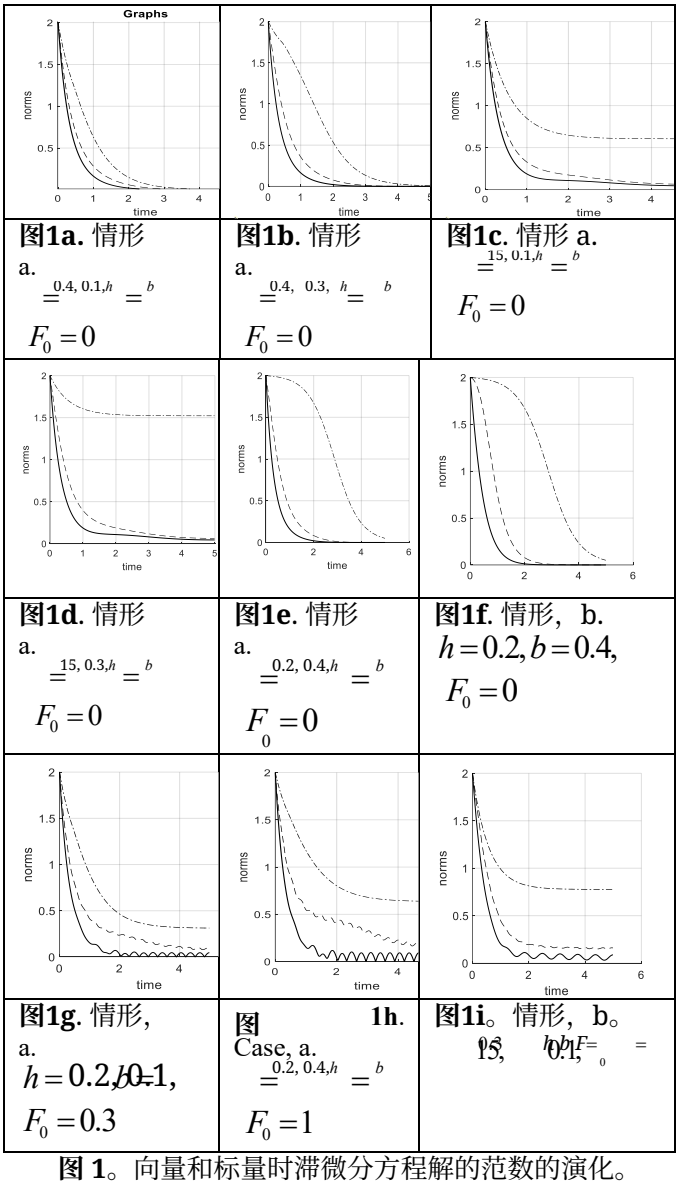


**图1a.** 情形 a. $h=0.4,\ 0.1,\ b=$ $F_0=0$

**图1b.** 情形 a. $h=0.4,\ 0.3,\ b=$ $F_0=0$

**图1c.** 情形 a. $=15,\ 0.1,\ h=\ b=$ $F_0=0$

**图1d.** 情形 a. $=15,\ 0.3,\ h=\ b=$ $F_0=0$

**图1e.** 情形 a. $=0.2,\ 0.4,\ h=\ b=$ $F_0=0$

**图1f.** 情形，b. $h=0.2, b=0.4,$ $F_0=0$

**图1g.** 情形，a. $h=0.2, b=1,$ $F_0=0.3$

**图1h.** Case, a. $=0.2,\ 0.4,\ h=\ b=$ $F_0=1$

**图1i.** 情形，b。 $=15,\ 0.1,\ h=\ b=$ $F_0=$

**图 1**。向量和标量时滞微分方程解的范数的演化。

为了模拟陷获区域和稳定区域的边界——这些区域分别由使方程 (5.1) 或其齐次对应方程的解有界或稳定的初始向量构成——我们用极坐标表示初始向量。角度以步长，离散化；对于每个角度，半径逐渐增大，直到出现急剧上升，这表明已经越过边界。

观测到。采用相同的方法对标量方程（5.2）和（5.3）进行了处理，以估计真实捕获区域或稳定区域内的圆盘半径。这些估计的计算时间几乎与耦合方程的数量无关，并且由于 和

在 中，相比之下，向量方程（2.1）的边界估计规模随 变化，其中 是每个相空间变量对应的离散点数量，而 是此类变量的数量。

图2模拟了捕获区域（ ）和稳定区域（ ）的边界，针对方程（5.1）—（5.3），图中分别以实线、虚线和点划线表示，并采用图中标示的参数组。虚线和点划线曲线在所有图中几乎重合。为增强视觉清晰度，图中使用 代替 。

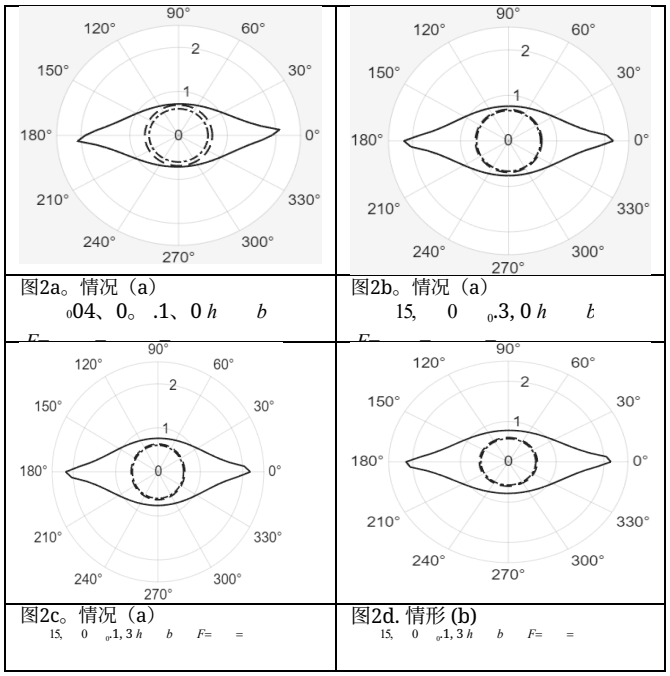


图2a。情况（a）

图2b。情况（a）

图2c。情况（a）

图2d. 情形 (b)

**图2**。捕获区域（ ）和 稳定性（ ）区域的方程 (5.1)–(5.3)。

对方程 (5.2) 和 (5.3) 进行仿真，可高效估算嵌入圆盘半径；这些半径接近真实区域的最小尺寸，且参数敏感性较弱。图2中曲线的排列与理论推论一致。

## VI. 结论

评估时变向量非线性时滞微分方程的有界性、稳定性以及解的范数的时间演化仍然具有挑战性，因为现有方法通常较为保守，且可能忽略系统动力学的关键特征。

我们提出了一种严谨且计算上易于处理的框架，其基础是构造标量辅助方程其解在历史函数对齐的条件下，为原向量系统的解的范数提供上界。这种约化将复杂向量时滞微分方程的分析转化为对标量对应系统的研究，从而简化解析处理，并实现高效、严谨的仿真。

该框架给出了新的有界性、稳定性和鲁棒稳定性判据，并估计了可确保解有界或稳定的历史函数球半径。对非线性项应用利普希茨型条件，可得到为相应非线性方程提供上界的线性标量方程，从而拓展并简化稳定性与有界性分析，例如，得出新的、保守性更低的输入到状态稳定性判据。

所提出方法的一项重要优势是，它通过统一框架自然地整合参数、历史函数和不确定性模型，从而简化后续的灵敏度分析与鲁棒性分析。

代表性仿真表明，对于初值位于有界性和稳定区域核心内的原始向量系统，其标量辅助方程的解能够紧密跟踪原系统解的范数。该方法还能够有效估计历史函数球的半径，确保在较宽的参数范围内系统保持有界或稳定。

该方法的局限性包括：求解线性非自治系统的基本解矩阵所需的计算量、应用范数不等式所引入的保守性，以及标量函数可能出现的长期增长。这些问题将在

在保留结果实际价值的额外假设下开展未来工作。后续研究还将为向量非线性非自治时滞系统中的捕获区域和稳定区域边界构建递归逼近，并推导解的范数的双边界。

## 附录 A。

**Lemma 2**. Consider two scalar DDEs:

$$\dot{u}_i = f_i\left(t,u_i(t),u_i(t-h_1),...,u_i(t-h_m)\right),\ \forall t\ge t_0;$$

$$u_i(t)=\varphi_i(t),\ \forall t\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right],\ i=1,2$$

where $u_i(t,\varphi)\in\mathbb{R},\ \forall t\ge t_0,\ \forall\|\varphi_i\|<\bar{\varphi}\in\mathbb{R}_+$ are unique solutions of the above DDEs, $h_i\in C\left(\left[t_0,\infty\right);\mathbb{R}_+\right)$ $f_i\in C\left(\left[t_0,\infty\right)\times\mathbb{R}^{m+1};\mathbb{R}\right),\ \varphi_i\in C\left(\left[t_0-\bar{h},t_0\right];\mathbb{R}\right),\ i=1,2.$

Assume also that $\varphi_1(t)\le\varphi_2(t),\ \forall t\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right]$, $f_1\left(t,x_1,x_2...,x_{m+1}\right)\le f_2\left(t,x_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_{m+1}\right)$, $\forall t\ge t_0,\ \forall x_j\le\bar{x}_j\in\mathbb{R},\ j=2,...,m+1$ and

$$\sup h_i(t)\le\bar{h}<\infty,\ t\ge t_0;\ \inf h_i(t)\ge\underline{h}>0,\ t\ge t_0,\ i=1,...,m \quad (A.1)$$

Then, $u_1(t,\varphi)\le u_2(t,\phi),\ \forall t\ge t_0$.

**证明**。条件（A.1）允许采用步长至少为 ，这会将每个后续区间上的问题简化为标量常微分方程中相应的经典结论 [32]。因此，证明通过归纳法进行**附录 B**。假设 且。那么因为， 。显然，这种推理可以推广到幂级数以及某些

$$x=$$

$$()()()()=\left[\begin{array}{cccc} 1 & \frac{3}{1}\frac{2}{2} & -1 & 2 \end{array}\right.\quad \frac{3}{2}\quad \left.-2\right]^{T}\ \text{脂肪}$$

$$xxthatxth \qquad \left|\left|\ {}^{21}ff\right.\right.$$

$$xxth\le \left|\left|\ {}^{3}\ {}^{1}\ {}^{1}\ {}^{2}\ {}^{1}a\right.\right.\quad ()\left|\left|\ {}^{2}_{2}\quad {}^{2}-\right.\right.$$

$$()()()\le|_{1}|\quad|^{3}|\quad-_{1}|^{2}+|_{2}\|\quad-_{2}|^{3}\ axt$$

$$xthaxth$$

$$\left|h\le\right|\quad()\quad(),\ {}^{n}\ {}^{mn}\ {}^{n}\ {}^{i}\ {}^{n}\quad xxxthxt\qquad =1,2,\ \in\ \mathbb{N}$$

rational functi致谢 der th致谢 iat致谢ditions.

**致谢**。第 V 节中讨论的仿真代码由 Steve Koblik 编写。

**参考文献**

[1] A. S. Andreev, N. O. Sedova, 《Lyapunov-Razumikhin方法在时滞系统稳定性分析中的应用》, 《自动化与远程控制》, 第80卷, 第7期, 第1185–1229页, 2019年。[2] N. V. Azbelev, P. M. Simonov, 《滞后微分方程的稳定性》, 英国伦敦: 泰勒-弗朗西斯, 2003年。[3] L. Berezansky, M. Krstic, 《线性时滞向量微分方程一致指数稳定性的一个简单判据》, IEEE自动控制汇刊, 第67卷, 第3期, 第1537–1542页, 2023年。[4] C. Briat, 《线性参数变化与时滞系统: 分析、观测、滤波与控制》, 德国柏林: 施普林格, 2015年。[5] A. Challet, F. Mazenc, M. Krstic, 《时滞系统的输入到状态稳定性框架: 综述》, 《数学控制、信号与系统》, 第35卷, 第237–306页, 2023年。[6] F. Cocane, F. Conter, A. Germani, 《可变输入时滞线性二次问题的无记忆方法》, IEEE自动控制汇刊, 第61卷, 第1期, 第216–221页, 2016年。[7] T. Erneux, 《应用时滞微分方程》, 德国柏林: 施普林格, 2009年。[8] E. Fridman, 《时滞系统导论: 分析与控制》, 瑞士巴塞尔: 比克豪泽, 2014年。[9] M. Gil, 《向量微分时滞方程的稳定性》, 瑞士巴塞尔: 比克豪泽, 2013年。[10] K. Gu, S. I. Niculescu, 《时滞系统稳定性与控制近期成果综述》, 《动力系统、测量与控制》, 第125卷, 第2期, 第158–165页, 2003年。[11] K. Gu, V. L. Kharitonov, J. Chen, 《时滞系统的稳定性》, 美国马萨诸塞州波士顿: 比克豪泽, 2003年。[12] A. Halanay, 《微分方程: 稳定性、振荡与时滞》, 英国剑桥: 学术出版社, 1966年。[13] J. Hale, S. M. V. Lunel, 《泛函微分方程导论》, 美国纽约: 施普林格出版社, 1993年。[14] J. Hu, 《时滞系统的非线性动力学: 方法与应用》, 德国柏林: 施普林格, 2024年。[15] I. Karafyllis, Z.-P. Jiang, 《非线性系统的稳定性与镇定》, 英国伦敦: 施普林格出版社, 2011年。[16] I. Karafyllis, M. Malisoff, F. Mazenc, P. Pepe, 《非线性时滞系统的镇定: 近期成果教程》, 载于《非线性时滞控制系统最新成果: 献给Miroslav Krstic》, ADD, 第4卷, 2016年。[17] V. I. Kharitonov, 《时滞系统、Lyapunov函数与矩阵》, 美国纽约: 比克豪泽, 2013年。[18] V. Kolmanovskii, A. Myshkis, 《泛函微分方程理论与应用导论》, 荷兰多德雷赫特: 施普林格, 1999年。[19] N. Krasovskii, 《运动稳定性理论问题》, 美国加利福尼亚州斯坦福: 斯坦福大学出版社, 1963年。[20] M. Lakshmanan, D. V. Senthilkumar, 《非线性时滞系统的动力学》, 德国柏林: 施普林格, 2011年。[21] F. Mazenc, M. Malisoff, 《时变时滞系统中Razumikhin定理的扩展与Lyapunov-Krasovskii泛函构造》, Automatica, 第78卷, 第1–13页, 2017年。[22] F. Mazenc, M. Malisoff, M. Krstic, 《Halanay不等式的向量扩展》, IEEE自动控制汇刊, 第67卷, 第3期, 第1453–1459页, 2022年。[23] D. Melchor-Aguilar, S. I. Niculescu, 《一类非线性时滞系统吸引域的估计》, 《IMA数学控制与信息学杂志》, 第24卷, 第4期, 第523–550页, 2007年。[24] W. Michiels, S. I. Niculescu, 《时滞系统的稳定性与镇定: 基于特征值的方法》, 美国宾夕法尼亚州费城: 工业与应用数学学会, 2014年。[25] M. A. Pinsky, 《某些非线性非自治系统解的双边界及陷获区域/稳定区域的逐步估计》, 《非线性动力学》, 第103卷, 第517–539页, 2021年。[26] M. A. Pinsky, 《某些多维非自治非线性系统解的稳定性与有界性》, 《数学问题工程》, 第2022卷, 文章编号5098677, 2022年。[27] M. A. Pinsky, 《时间尺度的最优二分以及某些多维时变非线性系统的有界性/稳定性》, 数学、控制与信号系统, 第35卷, 第125–158页, 2023年。[28] M. A. Pinsky, 《时变系数多维非线性系统陷获区域/稳定区域及解双边界的有效估计》, 《非线性科学杂志》, 第34卷, 第39篇, 2024年, doi:10.1007/s00332-024-10013-x。[29] B. Razumikhin, 《遗传系统的稳定性》, 俄罗斯莫斯科: 科学出版社, 1988年。[30] A. Seuret, F. Gouaisbaut, 《时滞系统稳定性分析的线性矩阵不等式条件层级》, 《系统与控制快报》, 第81卷, 第1–7页, 2015年。[31] A. Seuret, S. Marx, S. Tarbouriech, 《具有状态时滞和饱和输入的系统吸引域的层级估计》, 载于欧洲控制会议（ECC）论文集, 意大利那不勒斯, 2019年, 第2915–2920页。[32] W. Walter, 《常微分方程》, 美国纽约: 施普林格, 1998年。[33] B. Zhou, A. V. Egorov, 《时变时滞系统的Razumikhin与Krasovskii稳定性定理》, Automatica, 第71卷, 第281–291页, 2016年。