向量时滞非线性时变系统的双侧解界及有界性与稳定区域的逐次估计

Mark A. Pinsky

摘要。 由于现有方法具有保守性，具有变时滞和时变系数的向量非线性系统的稳定性与有界性分析仍然具有挑战性。此外，对解的范数瞬态行为的估计仍不够完善。本文提出了一种估计解的范数时间演化的方法，并将其应用于具有变时滞和时变系数的向量非线性系统的有界性与稳定性分析。该方法基于一种对原解进行逐次逼近的新方案，并辅以相应残差范数的估计。由此构造出一个标量非线性时滞方程，其解为残差范数演化提供上界。最终获得原解范数的双侧界，从而得到有效的有界性与稳定性判据，并能够估计相应的区域。

仿真表明，随着迭代次数增加，所提出的逼近解会迅速接近所关注区域的参考边界。此外，当初始函数保持在所考虑的区域内时，双侧界会逐步相互接近，并接近参考解的范数。

关键词。向量时滞非线性系统、时变系数与时滞、有界性与稳定性区域、双侧解界。

1. 引言

具有时变时滞和系数的向量非线性系统广泛应用于各个领域，对其有界性与稳定性进行分析对于预测其时间行为至关重要。

多年来，研究者针对其中一些问题开展了广泛研究，并深入探讨了这类系统的时间演化。众多专著 [4], [6], [7], [9], [15]–[17], [19]–[22], [23], [26], [28]–[30], [31] 以及大量研究论文考察了时滞系统动力学的不同方面，并建立了相应的分析框架。有关近期进展和未解挑战的更全面讨论，可参见综述论文 [2], [10], [18], [24]。

N. Krasovskii [29] 和 B. Razumikhin [43], 对时滞系统稳定性分析作出了重要贡献，拓展了针对时滞动力学的Lyapunov函数方法。这些技术基于构造Lyapunov型泛函或特定的Lyapunov函数，至今仍是有效的分析工具，并已应用于某些时变时滞系统，参见例如 [2], [6], [7], [32], [49]。然而，为一般的向量时滞非线性系统确定合适的泛函或函数仍是一项重大挑战。尽管如此，对于具有常系数的线性时滞系统，这些方法能够利用线性矩阵不等式（LMI）提供计算高效的途径 [16], [18], [19], [27], [45]。

有助于时滞系统稳定性分析的替代技术包括，例如，Halanay不等式 [15], [16], [20], [33] 和 Bohl-Perron定理 [4], [5], [17], 以及其他方法。尽管取得了这些进展，但对于具有多个耦合时滞方程的非线性系统，其稳定性评估往往会产生过于保守且实际相关性有限的结果。

另一个具有挑战性的问题是在外部扰动下确定非线性向量时滞系统的解的有界性，参见，例如，[8]。这一问题已在输入到状态稳定性（ISS）框架内得到部分解决，但该框架通常依赖于关于相关齐次系统稳定性的严格假设。有关这一主题的深入讨论，请参见综述 [10] 以及其中引用的相关研究。

估计时滞系统的稳定性区域或有界区域仍然是另一个尚未解决的重要问题。原则上，可以利用 Lyapunov-Krasovskii泛函或 Lyapunov-Razumikhin函数的等值集获得这些估计，如 [9], [11], [13], [14], [46]中所述。然而，将这些技术应用于向量时滞非线性系统时，往往会导致过于保守且繁琐、实际价值有限的判据。尝试利用历史函数 [34], [48] 的范数简化这些条件，通常会进一步增加这些技术的保守性。

在 [44] 中，曾尝试通过结合仿真与分岔技术来估计某些时滞非线性系统的稳定区域。在 [1], [11]–[12] 和 [47] 中，报道了稳定区域边界的分形结构。

尽管有界性和稳定性关注的是长期行为，但估计系统瞬态动力学往往同样具有实际意义，然而对此的研究仍然不够充分。此外，时滞系统中的不稳定性现象也相对较少受到关注；例如，参见 [35], [36]。

在 [37]–[40], 中，我们提出了一种分析多维常微分方程系统稳定性与有界性的方法，其依据是估计解的范数随时间的演化，而非构造 Lyapunov函数。该方法推导出标量辅助方程，其解为原系统相应解的范数提供上界。结合逐次逼近，该方法能够逐步提高对稳定性与有界性区域的估计精度 [40]。在 [41] 中，我们将该方法扩展到非线性向量时滞系统，并在 [42]中进一步加以推广。

本文基于我们先前的工作，提出高效的递归技术，得到双侧解界，并将其用于估计一大类具有显著非线性分量、变时滞和系数的向量系统的有界性与稳定性区域。该方法无需依赖李雅普诺夫型方法，即可估计解的范数随时间的演化。它基于一种针对原系统解的新型逐次逼近格式，以及对相关残差项时间演化的分析。我们定义了有界性与稳定性区域的有限维近似，这些近似包含陷获球或稳定性球；此外，我们还提出了新的判据，以逐步细化区域估计，并给出解的范数的双侧界。

数值仿真表明，随着迭代次数增加，这些估计值逐渐收敛于参考捕获边界和稳定性边界。同样，双侧范数界趋近于参考解范数，并始终处于估计区域内。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍记号、数学预备知识以及系统的表述。第3节和第4节介绍所提出的方法及其理论背景。第5节提出新的有界性与稳定性判据。第6节和第7节介绍具有多项式及更一般非线性项的时滞系统的仿真结果。第8节总结全文并概述未来研究方向。

2. 符号、预备知识与控制方程

2.1. 记号。首先，约定符号 和 分别表示实数、非负实数和正实数集合，以及-维实向量；表示正实数整数集合，表示-矩阵集合，表示单位矩阵， 表示复数集合， 以及 分别表示由复数元素构成的-维向量和-维矩阵集合。接下来，约定 ，

，以及表示实变量连续的函数空间,或 ，分别；上确界范数，其中表示向量的欧几里得范数或矩阵的诱导范数，也可以是无穷大；随后，定义单位阶跃函数以及。此外，约定和；并且在处的右上导数为：

2.2.1. 预备知识。 本文研究具有变时滞和时变系数的向量非线性系统：

$$\dot{x} = B(t)x + f\left(t, x(t), x\left(t-h_1(t)\right), \ldots, x\left(t-h_m(t)\right)\right) + F(t),\ \forall t \geq t_0$$
$$x(t) = \varphi(t),\ \forall t \in \left[t_0 - \bar{h}, t_0\right] \tag{2.1}$$

其中 ，是 的连通子集， ， 是关于所有变量的连续函数，并且关于 ，，，

$\|\varphi\| \le \bar{\varphi}$，矩阵，，，，，以及标量函数满足以下条件：

$$\max_i \sup_{\forall t \ge t_0} h_i(t) = \bar{h} < \infty,\ \min_i \inf_{\forall t \ge t_0} h_i(t) \ge \underline{h} > 0,\ i = 1,\dots,m \tag{2.2}$$

本文后续内容假设（2.1）存在唯一解，并采用简写记号，。

2.2.2。接下来，我们概述（2.1）解的有界性、稳定性和不稳定性的一些标准定义，后文将引用这些定义，参见例如 [28]。

定义 1。假设（2.1）存在唯一解，。则，具有 的方程（2.1）的平凡解称为：$\|\varphi\| \le \bar{\varphi}$ 对于给定值 稳定，使得存在 满足 。否则，该平凡解称为不稳定。（1.2）一致稳定，如果在上述定义中 。（1.3）渐近稳定，如果对于给定值 稳定，并且存在 使得当 。（1.4）一致渐近稳定，如果它一致稳定，并且在前述定义中。

定义 2。假设（2.1）存在唯一解，。则，（2.1）的平凡解称为：（2.1）对于给定值 有界，当 且存在使得， 当 。 否则，解 称为无界。（2.2）一致有界，如果 与 无关。

2.2.3. 在 [41] 中，我们定义以零为中心的球，其 最大半径 使其包含由满足稳定性或有界性条件的解所对应的历史函数，这些解是方程 (2.1) 的解，其中

表示 使定义 1 或定义 2 中相应条件成立的上确界。

然而，原则上，有界解或稳定解可以由 (2.1) 或其齐次对应方程生成 $\varphi \notin B_{R_i}$。为考虑这一点，可以将渐近稳定区域定义为函数空间的一个连通子集，其中的连续历史函数满足 ，其中 是方程 (2.1) 的一个解，其中 。类似地，有界区域定义为连续历史函数空间的一个连通子集，使得，

$|x(t,t_0,\varphi)| < \varepsilon > 0,\ \forall t \ge t_0$, where $x(t,t_0,\varphi)$ is a solution of (2.1).

值得注意的是，稳定区域通常也称为吸引域 [28]。

尽管上述定义可以自然地扩展到一致渐近稳定性和有界性，但相应区域的数值估计要复杂得多。

原则上，对 SR 和 BR 进行数值模拟，需要对 进行有限维表示，例如，可通过将连续历史函数构成的无限维空间投影到有限维子空间来实现，所用方法包括截断傅里叶级数、样条函数或相关逼近方案。由此得到的非线性时变常微分方程系统可近似原始时滞微分方程，并可利用 [40] 中描述的技术估计其 SR 和 BR 边界。然而，应用这类方法通常需要评估初始区域与其无限维近似之间的对应关系。此外，在这一框架下提高逼近准确率通常需要增加系统维数，从而导致计算复杂度大幅上升。

相比之下，我们将在下文介绍 SR 和 BR 的另一种有限维表示，它避免了维数增长，并可对原始时滞微分方程模型进行仿真，其形式在结构上类似于我们先前工作 [40] 中提出的基于常微分方程的框架。

首先，我们定义一个向量 φ_n，其中 $\varphi_j = \varphi(-\tau + \tfrac{j\tau}{n})$，$j = 0, 1, \ldots, n$。

定义 3。

(3.1) 稳定性域 D_S 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个连通子集，其中包含零向量以及所有满足的向量，其中 φ 是满足 (2.1) 且 $\varphi \in \mathbb{R}^n$ 的一个解，使得 $x(t) \to 0$ 当 $t \to \infty$ 时，对于 $\varphi \equiv \varphi_0$ 在 $[-\tau, 0]$ 上的所有初始函数，极限 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ 均成立。

(3.2) 评估稳定区域 ASR。

(3.3) 有界域 D_B 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个连通子集，其中包含零向量以及所有满足 $\|\varphi\| < \varepsilon_0$ 的向量，其中 φ 是满足 (2.1) 且具有 $\varepsilon_0 > 0$ 的解。

(3.4) 评估有界区域 ABR。

因此，定义 (3.1) 和 (3.3) 描述了 $\mathbb{R}^n$ 的连通区域，其中包含零向量以及所有对于给定的 $\varphi \in \mathbb{R}^n$ 和 $\varphi_0 \equiv \varphi$，(2.1) 的解或渐近稳定 ($\varepsilon_0 = 0$)，或有界 ($\varepsilon_0 > 0$)。相应的和集合定义了满足相应性质的连续历史函数集合。一旦估算出有限维区域和的边界，便可轻松判定给定的历史函数是否属于这些区域，或位于其外部。ASR ABR D_S D_b ∂ASR ∂ABR

我们还注意到，R_{ASR} 和 R_{ABR}，以及 B_{ASR} 和 B_{ABR} 分别是对稳定性球和有界性球及其相应半径定义的一种自然推广。

最后，定义 3 可扩展用于刻画一致渐近稳定性、指数稳定性或一致有界性。然而，对相应区域进行数值计算会带来额外挑战，因此本文不予讨论。

2.2.4. 接下来，我们回顾先前工作中的一些结果，这些结果将在下文中用到。为此，我们引入如下形式的、与系统 (2.1) 相关联的标量辅助方程 [41]。

$$\begin{aligned} \dot{u} &= p(t)u + c(t)\left(L\left(t, u(t), u(t-h_1(t)), \ldots, u(t-h_m(t))\right) + |F(t)|\right) \\ u\left(t, |\varphi(t)|\right) &= |\varphi(t)|, \ \forall t \in \left[t_0 - \bar{h}, t_0\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中，$u(t) \in \mathbb{R}$，是线性方程 $\dot{x} = B(t)x$ 的基本解矩阵 $X(t)$ 的运行条件数 $\|X(t)\|\|X^{-1}(t)\|$，以及一个标量函数 $L(t, \omega)$，$\omega \in \mathbb{R}^{m+1}$，关于所有变量连续，通过以下对 Lipschitz 连续性条件的非线性扩展来定义：

$$\begin{aligned} &|f(t, \chi_1, \ldots, \chi_{m+1})| \le L(t, |\chi_1|, \ldots, |\chi_{m+1}|), \forall t \ge t_0, \ \chi_i \in \mathbb{R}^n, \ i = 1, \ldots, m+1, \\ &\chi = [\chi_1, \ldots, \chi_{m+1}]^T \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n(m+1)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中，Ω 是一个紧且连通的子集，包含零。附录定义了在闭式形式下的 L 的 $f(t, \chi_1, \ldots, \chi_{m+1})$ 当。显然，L χ_1, χ_{m+1} L

是关于……的线性函数若 是关于……的线性函数。 注意,在所有这些情况下。

为简便起见，以下假设 在本文余下部分中。

随后，我们在 [41] 证明了 这 通过考察其标量对应方程 (2.3) 的相应行为，可以刻画向量方程 (2.1) 及其齐次类比方程的有界性和稳定性。

尽管如此，长时间区间内对 进行模拟时，如果和取值较大，在某些情况下 会 使我们的估计过于保守。

这些问题已在[42] 中得到解决，该文还推导了在满足条件时的上界和下界，其中 是一个处于一般位置的非零矩阵，而 是一个零均值矩阵。回顾一下，在此条件下，有 简单 特征值，除 [3]的某些孤立值外均如此。为此，将 (2.1) 映射到的特征基中，从而得到如下 方程：

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_{\times} = \left(A_{\times}(t_0) + G_{\times}(t)\right)x_{\times} + f_{\times}\left(t, x_{\times}(t), x_{\times}\left(t-h_1(t)\right), \ldots, x_{\times}\left(t-h_m(t)\right)\right) + F_{\times}(t),\ \forall t \geq t_0 \\
&x_{\times}(t,\eta) = \eta \equiv V^{-1}\varphi(t),\ \forall t \in \left[t_0 - \bar{h}, t_0\right]
\end{aligned}$$

其中 ，是 的特征矩阵， 是 的特征值，并且

$$f_{\times}\left(t, x_{\times}(t), x_{\times}\left(t-h_1(t)\right), \ldots, x_{\times}\left(t-h_m(t)\right)\right) = V^{-1} f\left(t, Vx_{\times}(t), Vx_{\times}\left(t-h_1(t)\right), \ldots, Vx_{\times}\left(t-h_m(t)\right)\right).$$

然后，通过将 (2.4) 应用于 ，定义如下 ，

，相关示例见 第6节 .

因此，[42] 得到了原解范数的以下双侧界：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|V^{-1}|} z(t,\phi) \leq \left|x(t,\varphi(t))\right| \leq |V| Z(t,\phi),\ \forall t \geq t_0 \\
&\phi(t) = \left|V^{-1}\varphi(t)\right|,\ \forall t \in \left[t_0 - \bar{h}, t_0\right]
\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 和 是以下标量方程的解：

$$\begin{aligned}
&\dot{Z} = \left(\alpha_1 + |g(t)|\right)Z + L_{\times}\left(t, Z(t), Z\left(t-h_1(t)\right), \ldots, Z\left(t-h_m(t)\right)\right) + |F_{\times}(t)| \\
&Z(t,\phi) = \left|V^{-1}\varphi(t)\right|,\ \forall t \in \left[t_0 - \bar{h}, t_0\right] \\
&\dot{z} = \left(\alpha_n - |g(t)|\right)z - \left(L_{\times}\left(t, z(t), z\left(t-h_1(t)\right), \ldots, z\left(t-h_m(t)\right)\right) + |F_{\times}(t)|\right) \\
&z(t,\phi) = \left|V^{-1}\varphi(t)\right|,\ \forall t \in \left[t_0 - \bar{h}, t_0\right]
\end{aligned} \tag{2.6}$$

这里，，，和 和分别是 的特征值实部中的最大值和最小值。

尽管如此，对于起源于系统（2.1）的有界性与稳定性区域中心部分的解，不等式（2.5）仍能提供相对准确的估计；然而，在这些区域的边界附近，其准确率会下降，从而导致对这些集合的评估较为保守。

本文余下部分将原方程的解表示为一个近似解与相应残差之和，以此解决这些局限性。随后利用（2.5）式右端估计残差的范数，从而得到双侧界；对于历史状态位于有界性区域或稳定区域内的解，这些界会逐渐趋于一致。

3. 逐次逼近

为与第6节和第7节中给出的仿真保持一致，将方程（2.1）改写为

$$\begin{aligned}&\dot{x}=\left(A(t_0)+G(t)\right)x+E(t)x\left(t-h_0(t)\right)+f\left(t,x(t),x\left(t-h_1(t)\right),...,x\left(t-h_m(t)\right)\right)+F(t),\ \forall t\geq t_0\\&x(t,\varphi)=\varphi(t),\ \forall t\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right]\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中函数 现在不含线性项，矩阵 , , 函数 已在上文定义、矩阵和 满足（2.2）。接下来，我们假设方程（3.1）存在唯一解其表示如下：

$$\forall\|\varphi\|\leq\bar{\phi}$$

$$x(t,\varphi)=Y_K(t,\varphi)+z_K(t,\varphi),\ t\geq t_0,1\leq K\in\mathbb{N}\tag{3.2}$$

其中，近似解为：、、 $J\subset C\left(\left[t_0-\bar{h},t_0\right];\mathbb{R}^n\right)$, and $z_K:=[t_0,\infty)\times J\to\mathbb{R}^n, z_K(t,\varphi)=0,\ \forall t\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right]$ is the residual of this 近似。随后可以清楚地看到， 包含微分方程的右侧，这证明了我们先前的记号是合理的，即。

然后，对（3.2）应用三角不等式及其逆形式，可得到关于的以下双侧界：

$$\left|Y_K(t,\varphi)\right|-\left|z_K(t,\varphi)\right|\leq\left|x(t,\varphi)\right|\leq\left|Y_K(t,\varphi)\right|+\left|z_K(t,\varphi)\right|,\ t\geq t_0\tag{3.3}$$

如果（3.3）的左侧取负值，则应将其调整为零。

反过来，我们将近似解表示为以下形式：

$$Y_K(t,\varphi)=\sum_{k=1}^{K}y_k(t,\varphi),\ 1\leq K\in\mathbb{N}\tag{3.4}$$

其中求解以下线性方程：

$$\begin{aligned}&\dot{y}_1=A(t_0)y_1+F(t),\ \forall t\geq t_0\\&y_1(t,\varphi)=\varphi(t),\ \forall t\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right]\\&\dot{y}_2=A(t_0)y_2(t)+G(t)y_1(t)+E(t)y_1\left(t-h_0(t)\right)+f\left(t,y_1(t),y_1\left(t-h_1(t)\right),...,y_1\left(t-h_m(t)\right)\right),\ \forall t\geq t_0\\&y_2(t,\varphi)=0,\ \forall t\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right]\\&\dot{y}_k=A(t_0)y_k(t)+G(t)y_{k-1}(t)+E(t)y_{k-1}\left(t-h_0(t)\right)+f\left(t,Y_{k-1}(t),Y_{k-1}\left(t-h_1(t)\right),...,Y_{k-1}\left(t-h_m(t)\right)\right)-\\&f\left(t,Y_{k-2}(t),Y_{k-2}\left(t-h_1(t)\right),...,Y_{k-2}\left(t-h_m(t)\right)\right),\ \forall t\geq t_0\\&y_k(t,\varphi)=0,\ \forall t\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right],3\leq k\leq K\end{aligned}\tag{3.5}$$

为简洁起见，我们采用。

系统 (3.5) 由一系列具有常系数的线性常微分方程组成，这些方程通过时变时滞项递归耦合。由于耦合项由前序方程的解明确确定，该系统的解几乎可以用闭式表示，从而便于进行定性分析和数值计算。

相应地，(3.5) 的残差项由以下非线性时滞方程定义 g y q :

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_K = Az_K + G(t)z_K + E(t)z_K\left(t-h_0(t)\right) + G(t)y_K(t) + E(t)y_K\left(t-h_0(t)\right) + \\
&f\left(t, z_K(t)+Y_K(t), z_K\left(t-h_1(t)\right)+Y_K\left(t-h_1(t)\right), ..., z_K\left(t-h_m(t)\right)+Y_K\left(t-h_m(t)\right)\right) - \\
&f\left(t, Y_{K-1}(t), Y_{K-1}\left(t-h_1(t)\right), ..., Y_{K-1}\left(t-h_m(t)\right)\right) \\
&z_K(t,\varphi) = 0,\ \forall t \in \left[t_0-\bar{h}, t_0\right],\ \forall K \geq 1
\end{aligned}$$

where $f\left(t, Y_0(t), Y_0\left(t-h_1(t)\right), ..., Y_0\left(t-h_m(t)\right)\right) \equiv 0$.

我们假设后面的方程存在唯一解。我们不直接求解这些方程，而是利用不等式（2.5）右端估计相应的解的范数。按照推导（2.5）时所采用的步骤，我们将该方程变换到 A 的特征基中，得到以下方程：

$$\begin{aligned}
&\dot{\hat{z}}_K = A_\times \hat{z}_K + G_\times(t)\hat{z}_K + E_\times(t)\hat{z}_K\left(t-h_0(t)\right) + \Gamma_K\left(t, \hat{z}_K(t), ..., \hat{z}_K\left(t-h_1(t)\right), ..., \hat{z}_K\left(t-h_m(t)\right)\right) \\
&\hat{z}_K(t,\varphi) = 0,\ \forall t \in \left[t_0-\bar{h}, t_0\right],\ \forall K \geq 1
\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中，

$$\begin{aligned}
&\Gamma_K\left(t, \hat{z}_K(t), ..., \hat{z}_K\left(t-h_1(t)\right), ..., \hat{z}_K\left(t-h_m(t)\right)\right) = \\
&V^{-1}\left(\begin{array}{l}
\hat{f}\left(t, \hat{z}_K(t)+Y_K(t), \hat{z}_K\left(t-h_1(t)\right)+Y_K\left(t-h_1(t)\right), ..., \hat{z}_K\left(t-h_m(t)\right)+Y_K\left(t-h_m(t)\right)\right) - \\
f\left(t, Y_{K-1}(t), Y_{K-1}\left(t-h_1(t)\right), ..., Y_{K-1}\left(t-h_m(t)\right)\right) + G(t)y_K(t) + E(t)y_K\left(t-h_0(t)\right)
\end{array}\right)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\hat{f}\left(t, \hat{z}_K(t)+Y_K(t), \hat{z}_K\left(t-h_1(t)\right)+Y_K\left(t-h_1(t)\right), ..., \hat{z}_K\left(t-h_m(t)\right)+Y_K\left(t-h_m(t)\right)\right) = \\
&f\left(t, V\hat{z}_K(t)+Y_K(t), V\hat{z}_K\left(t-h_1(t)\right)+Y_K\left(t-h_1(t)\right), ..., V\hat{z}_K\left(t-h_m(t)\right)+Y_K\left(t-h_m(t)\right)\right)
\end{aligned}$$

接着，将（2.4）应用于 可得到以下不等式：

$$\left|\Gamma_K\left(t, \chi_1, ..., \chi_{m+1}\right)\right| \leq L_{\Gamma_K}\left(t, |\chi_1|, ..., |\chi_{m+1}|\right),\ \forall \chi = \left[\chi_1, ..., \chi_{m+1}\right]^T \in \mathbb{R}^{n(m+1)} \tag{3.7}$$

其中。请注意，下一节将展示如何把该不等式应用于一些具有多项式非线性项的系统。

To u上界，我们为向量方程 (3.6) 建立如下标量对应方程 :

$$\begin{aligned}
&\dot{Z}_K = \left(\alpha_1 + |g(t)|\right)Z_K + |E_\times(t)|Z_K\left(t-h_0(t)\right) + L_{\Gamma_K}\left(t, Z_K(t), Z_K\left(t-h_1(t)\right), ..., Z_K\left(t-h_m(t)\right)\right) \\
&Z_K(t,\varphi) = 0,\ \forall t \in \left[t_0-\bar{h}, t_0\right],\ \forall K \geq 1
\end{aligned} \tag{3.8}$$

注意，(3.8) 右侧隐式地依赖于 ，因为 。 接下来，我们假设方程 (3.8) 存在唯一解， 。然后，对 (2.5) 中上界的应用可得以下不等式： 0 ，1K

$$\begin{aligned}
&\left|z_K\left(t,\varphi(t)\right)\right| \leq |V| Z_K(t,\varphi),\ \forall t \geq t_0;\ K \geq 1 \\
&Z_K(t,\varphi) = 0,\ \forall t \in \left[t_0-\bar{h}, t_0\right]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中 是标量方程 3.8) 的一个解。 (

最后，我们将 (3.3) 写成如下形式：

$$\left|Y_K(t,\varphi)\right| - |V| Z_K(t,\varphi) \leq \left|x(t,\varphi)\right| \leq \left|Y_K(t,\varphi)\right| + |V| Z_K(t,\varphi),\ t \geq t_0,\ \forall \|\varphi\| \leq \bar{\phi},\ \forall K \geq 1 \tag{3.10}$$

4. 近似解在长时间区间上的行为

本研究的关键结果基于以下命题。

定理 1。假设 $f(t,\chi_1,\ldots,\chi_{m+1})$ 并且该函数从第二个变量开始的所有变量均满足局部类利普希茨条件，即：

$$\begin{aligned}&\left|f(t,\chi_1,\ldots,\chi_{m+1})-f(t,\chi_1^*,\ldots,\chi_{m+1}^*)\right|\le\sum_{i=1}^{m+1}q_i(t,\tilde{\chi})\left|\chi_i-\chi_i^*\right|,\ \forall\left|\chi-\chi^*\right|\le\tilde{\chi}>0,\ \forall t\ge t_0,\ \chi_i,\chi_i^*\in\mathbb{R}^n,\\&\chi,\chi^*=\left[\chi_1^*,\ldots,\chi_{m+1}^*\right]^T\in\mathbb{R}^{n(m+1)},\ q_i\in C\left([t_0,\infty)\times\mathbb{R}_{\ge0};\mathbb{R}_{\ge0}\right),\ q_i(t,\tilde{\chi})\le q(\tilde{\chi})\in\mathbb{R}_+,\ \forall t\ge t_0,\ i=1,\ldots,m\end{aligned}\tag{4.1}$$

此外，我们假设 $\varphi(\cdot)\in C\left[-\bar{h},0\right]$，$\bar{h}>0$，$\|\varphi\|\le\bar{\varphi}\in\mathbb{R}_{\ge0}$，$F_0\in\mathbb{R}_{\ge0}$，$A(\cdot)\in C[0,\infty)$，$\mathbb{R}^{+}=[0,+\infty)$；$\ldots$ 满足（2.2），矩阵 $A(t)\in C[0,\infty)$，$\int_0^t\|A(s)\|ds<\infty$，$A(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是处于一般位置的赫尔维茨矩阵。

那么，

$$\left|Y_K(t)\right|\le\left(\|\varphi\|+O(F_0)\right)P_{K-1}(t)\exp(-\eta t)+O(F_0),\forall t\ge t_0,K>1\tag{4.2}$$

其中 是一个 $K-1$ 次数为 的多项式，且 K 是 A 的特征值中实部最大的一个，$-\eta=\alpha_1$.

证明。首先，回顾。接下来，式 (3.5) 中的所有方程均由常数变易法得到唯一解。对该序列中第一个方程的相应解应用标准范数不等式，可得：

$$\begin{aligned}&\left|y_1(t,\varphi)\right|\le\left[\|\varphi\|e^{-\eta(t-t_0)}+\left(F_0/v_1\right)\left(1-e^{-\eta(t-t_0)}\right)\right]=O\left(\|\varphi\|+F_0\right),\ \forall t\ge t_0\\&\left|y_1(t,\varphi)\right|=\left|\varphi(t)\right|\le\|\varphi\|,\ \forall t\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right]\end{aligned}\tag{4.3}$$

因此，利用 3.3)、4.1) 和 4.3)，我们可以写成：

$$\left|y_2(t,\varphi)\right|\le e^{-\eta t}\int_{t_0}^{t}e^{\eta\tau}\left(\|G\|\left|y_1(\tau)\right|+\|E\|\left|y_1(\tau-h_0(\tau))\right|+q\left(y_{1,s}\right)\left(\left|y_1(\tau)\right|+\sum_{i=1}^{m+1}\left|y_1(\tau-h_i(\tau))\right|\right)\right)d\tau$$. Next, we use that,

$\left|y_1(\tau)\right|\le\|\varphi\|$，$\forall\tau\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right]$，并将其与以下估计结合：$\ldots\ldots$，

$\left|y_1(t,\varphi)\right|\le\left(\|\varphi\|+O(F_0)\right)P_{K-1}(t)\exp(-\eta t)+O(F_0)$，$\forall t\ge t_0$，$K=1,\ldots,m+1$，$\inf\{t:\left|y_1(t,\varphi)\right|\le\|\varphi\|\}$ 是 $[t_0,\infty)$ 上闭界，是 $\left|y_1(t,\varphi)\right|=\|\varphi\|$，$\forall t\ge t_0$ 下确界 $\inf\{t:\left|y_1(t,\varphi)\right|=\|\varphi\|\}$ 是 $[t_0,\infty)$ 上闭界，$t\ge t_0$。应用标准积分法则可得：

$\left|y_2(t)\right|\le\left(\|\varphi\|+O(F_0)\right)P_1(t)\exp(-\eta t)+O(F_0)$, $\forall t\ge t_0$, $\left|y_2(t)\right|=\left|\varphi(t)\right|$, $\forall t\in\left[t_0-\bar{h},t_0\right]$, where $P_1(t)$ is a first degree polynomial in t.

依次地，根据归纳法，我们假设：$\left|y_{K-1}(t,\varphi)\right|\le\left(\|\varphi\|+O(F_0)\right)P_{K-2}(t)\exp(-\eta t)+O(F_0)$，$\forall t\ge t_0$，$\left|y_{K-1}(t,\varphi)\right|=\|\varphi\|$，$\forall t\in[t_0-\bar{h},t_0]$，其中是次数为的多项式。采用相同的推理可知，归纳假设可扩展为 P_{K-1}

$K-1$

□

因此，(4.2) 和 (4.3) 意味着

$$\lim_{t\to\infty}\left|Y_K(t,\varphi)\right|=O(F_0),\ \forall K\ge1\tag{4.4}$$

最后，将 (4.4) 与 (3.10) 的右端结合可得：

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\left|x(t,\varphi)\right|\le|V|\lim_{t\to\infty}Z_K(t,\varphi),\ F_0=0,\ K\ge1\\&\lim_{t\to\infty}\left|x(t,\varphi)\right|\le O(F_0)+|V|\lim_{t\to\infty}Z_K(t,\varphi),\ F_0>0,\ K\ge1\end{aligned}\tag{4.5}$$

5. 有界性与稳定性判据

因此，原向量方程 (3.1) 的有界性与稳定性分析归结为对标量方程 (3.8) 的研究，具体如下。

定理 2. 假设定理 1 的条件成立，，并且 对于该值，标量函数由 (3.7) 定义。假设对于此值的方程 (3.8) 存在唯一的解，并且该方程的平凡解对于给定值而言是稳定的、一致稳定的，对于给定值渐近稳定，或一致渐近稳定。

于是，方程（3.1）的平凡解满足相应的稳定性性质。此外，方程（3.1）的渐近稳定区域包含相应方程（3.8）的渐近稳定区域。

证明。证明可直接由不等式 (4.5) 的第一部分得出 □

定理 3。假设定理 1 的条件成立，，并且 对于该值，由 (3.7) 定义一个标量函数。假设对于此值，方程 (3.8) 存在唯一解 并且 当 或历史函数，属于该方程相应的有界区域时，标量方程 (3.8) 的解对于给定值有界，或者一致有界。

那么，相应向量方程 (3.1) 的解对于相同的值有界，或分别一致有界。此外，方程 (3.1) 的有界区域包含方程 (3.8) 的相应有界区域。

证明。证明可由不等式 (4.5) 的第二部分直接得出 □

不等式 (3.3) 给出了原解范数的双侧界；当迭代次数增加时，这些界收敛到真实解，前提是初始函数属于有界区域或稳定区域。其计算依赖于方程 (3.3) 给出的近似闭式估计，以及对标量方程 (3.8) 的仿真，因此基本上独立于原系统的维数。

尽管 的长期演化受不等式 (4.2) 控制，但随着初始函数从内部逐渐接近有界性域和稳定域的边界，其幅值会迅速增大。这

瞬态行为使这些区域能够得到高效估计，同时避免直接仿真方程 (3.8)。

6. 仿真

本节将所提出的方法应用于估计两个时滞系统的有界性域和稳定域边界（和），这些系统具有时变、非周期系数以及耗散型或保守型非线性项，从而可以直接评估给定的历史函数是否属于所考察的有界性区域或稳定区域（）；见定义 3。每个系统由两个耦合振子组成，其动力学类似于范德波尔–型和杜芬–型，并具有变系数、外部扰动和时滞。这些模型应用于各种领域（例如，见 [25]）。

尽管可以利用我们近期研究中提出的方法推导出局部有界性和稳定性的充分条件 [41], [42] 以及上述相关研究中引用的方法，但这些方法通常会得到保守估计，尤其是在确定捕获区域时。此外，[41] 中提出的技术并不适用于此处，因为对于所考虑的两个系统，。

6.1 带时滞的范德波尔型和杜芬型振子系统的标量方程

设在 (3.1) 中

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\omega_1^2+d\right) & -\alpha_1 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & -\left(\omega_2^2+d\right) & -\alpha_2 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_{21}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{43}(t) & 0 \end{pmatrix},\ E(t)=G(t)$$

$$F(t)=\begin{pmatrix} 0 & F_0\sin\omega_0 t & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

其中 ，

$\lambda_1=3.14,\ \lambda_2=6.15,\ \lambda_3=-3.1,\ \lambda_4=-6.28$。我们还回顾一下，$\lambda_i$ 是的特征向量矩阵。$\lambda_1=\lambda_2=0.1$ α α_0 5. V $v_i=[\ \ ]$ $i=1,\dots,4$ A

此外，我们假设范德波尔类系统满足：

$$f(t-h_1)=\begin{pmatrix}0 & -\mu_1 x_2^3(t-h_1) & 0 & -\mu_2 x_4^3(t-h_1)\end{pmatrix}^T$$

对于杜芬类系统，

$$f(t-h_1)=\begin{pmatrix}0 & -\mu_1 x_1^3(t-h_1) & 0 & -\mu_2 x_3^3(t-h_1)\end{pmatrix}^T$$

注意，和 的取值标示在图注中。μ_1 μ_2

接下来，我们推导出上述两个系统的标量方程 (3.5)。为此，我们定义如下 ng 标量，，其中 $\sum_{k=1}^{4} abs(v_{i\kappa})$，$i=1,\dots,4$ $abs(\varsigma)=|\varsigma|,\ \forall\varsigma\in\mathbb{R},\ abs(\varsigma)=\left(\varsigma_1^2+\varsigma_2^2\right)^{1/2}$，$\forall\varsigma=\varsigma_1+\varsigma_2 i\in\mathbb{C}$.

随后，我们观察到以下不等式：

$$abs\left(\sum_{l=1}^{4}\left(v_{il}\hat{z}_{lK}\right)\right)^j\le\left(\sum_{l=1}^{4}abs\left(v_{il}\hat{z}_{lK}\right)\right)^j=\left(\sum_{l=1}^{4}abs\left(v_{il}\right)abs\left(\hat{z}_{lK}\right)\right)^j\le\left(\sum_{l=1}^{4}abs\left(v_{il}\right)Z_K\right)^j=$$

$$\left(\sum_{l=1}^{4}abs\left(v_{il}\right)\right)^j Z_K^j=\kappa_i^j Z_K^j,\ i=1,\dots,4,\ j=1,2,3,\ K\in\mathbb{N}$$

其中我们用到了。$\left|\left(\ \right)\right|\le\left|\left[\ _1\ \ _4\right]^T\right|,\dots,\ _T\ _K\ _K\ _K$ 绝对值 $z\ z\ z\ Z\le$

接下来，我们对 中的一些分量进行如下估计：$|\Gamma_K|$

$$abc\left(\left(\sum_{l=1}^{4}\left(v_{il}\hat{z}_{lK}\right)+Y_{iK}\right)^3-Y_{i,K-1}^3\right)\le$$

$$abc\left(\sum_{l=1}^{4}\left(v_{il}\hat{z}_{lK}\right)\right)^3+3abc\left(\sum_{l=1}^{4}\left(v_{il}\hat{z}_{lK}\right)\right)^2abc\left(Y_{iK}\right)+3abc\left(\sum_{k=1}^{4}\left(v_{il}\hat{z}_{lK}\right)\right)Y_{iK}^2+abc\left(Y_{iK}^3-Y_{i,K-1}^3\right)\le$$

$$\kappa_i^3Z_K^3+3\kappa_i^2Z_K^2\bar{Y}_{iK}+3\kappa_iZ_K\bar{Y}_{iK}^2+abc\left(Y_{iK}^3-Y_{i,K-1}^3\right),\ i=1,\dots,4$$

其中我们假设 。$-\ (\ )\ _{iK}\ _{iK}$

接下来，我们建立如下不等式：

$$\mu_1abc\left(\left(\sum_{k=1}^{4}\left(v_{il}\hat{z}_{lK}\right)+Y_{iK}\right)^3-Y_{i,K-1}^3\right)+\mu_2abc\left(\left(\sum_{k=1}^{4}\left(v_{jl}\hat{z}_{lK}\right)+Y_{jK}\right)^3-Y_{j,K-1}^3\right)\le$$

$$\mu_1\left(\kappa_i^3Z_K^3+3\kappa_i^2Z_K^2\bar{Y}_{iK}+3\kappa_iZ_KY_{iK}^2+abc\left(Y_{iK}^3-Y_{i,K-1}^3\right)\right)+$$

$$\mu_2\left(\kappa_j^3Z_K^3+3\kappa_j^2Z_K^2\bar{Y}_{jK}+3\kappa_jZ_KY_{jK}^2+abc\left(Y_{jK}^3-Y_{j,K-1}^3\right)\right)$$

其中假设若，则（范德-波尔型系统）$i=1$ $j=3$ 且若，则（杜芬型系统）。$i=2$ $j=4$

接下来，我们估算得，

$$|\Gamma_K|=\left|V^{-1}\left(f\left(t,V\hat{z}_K+Y_K\right)-f\left(t,Y_{K-1}\right)\right)\right|\le$$

$$\left|V^{-1}\right|\begin{pmatrix}Z_K^3\left(\mu_1\kappa_i^3+\mu_2\kappa_j^3\right)+3Z_K^2\left(\mu_1\kappa_i^2\bar{Y}_{iK}+\mu_2\kappa_j^2\bar{Y}_{jK}\right)+3Z_K\left(\mu_1\kappa_iY_{iK}^2+\mu_2\kappa_jY_{jK}^2\right)+\\+\mu_1abc\left(Y_{iK}^3-Y_{i,K-1}^3\right)+\mu_2abc\left(Y_{jK}^3-Y_{j,K-1}^3\right)\end{pmatrix}$$

其中，如上所述，假设若，则（范德-波尔型系统）$i=1$ $j=3$，且若，则（杜芬型系统）。$i=2$ $j=4$

最后，对于我们的系统，标量方程 (3.8) 具有以下形式：

$$
\begin{aligned}
&\dot{Z}_1 = \alpha_1 Z_1 + \left(\left|V^{-1}G(t)V\right|\right)\left(Z_1(t) + Z_1(t-h_0)\right) + \\
&\left|V^{-1}\right| \begin{pmatrix} \left(\mu_1\kappa_2^3 + \varepsilon_2\kappa_4^3\right) Z_1^3(t-h_1) + \\ 3\left(\mu_1\kappa_2^2 abs\left(y_{2,1}(t-h_1)\right) + \mu_2\kappa_4^2 abs\left(y_{4,1}(t-h_1)\right)\right) Z_1^2(t-h_1) + \\ 3\left(\mu_1\kappa_2 y_{2,1}^2(t-h_1) + \mu_2\kappa_4 y_{4,1}^2(t-h_1)\right) Z_1(t-h_1) + \\ \mu_1 abs\left(y_{2,1}^3(t-h_1)\right) + \mu_2 abc\left(y_{4,1}^3(t-h_1)\right) \end{pmatrix} + \\
&\left|V^{-1}\left(G(t)\left(y_1(t) + y_1(t-h_0)\right)\right)\right| \\
&Z_1(t,\phi) = 0,\ \forall t \in \left[t_0 - \bar{h}, t_0\right]
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\dot{Z}_K = \alpha_1 Z_K(t) + \left|V^{-1}G(t)V\right|\left(Z_K(t) + Z_K(t-h_0)\right) + \\
&\left|V^{-1}\right| \begin{pmatrix} \left(\mu_1\kappa_2^3 + \varepsilon_2\kappa_4^3\right) Z_K^3(t-h_1) + 3\left(\mu_1\kappa_2^2 \bar{Y}_{2K}(t-h_1) + \mu_2\kappa_4^2 \bar{Y}_{4K}(t-h_1)\right) Z_K^2(t-h_1) + \\ 3\left(\mu_1\kappa_2 Y_{2K}^2(t-h_1) + \mu_2\kappa_4 Y_{4K}^2(t-h_1)\right) Z_K(t-h_1) + \\ \mu_1 abc\left(Y_{2K}^3(t-h_1) - Y_{2,K-1}^3(t-h_1)\right) + \mu_2 abc\left(Y_{4K}^3(t-h_1) - Y_{4,K-1}^3(t-h_1)\right) \end{pmatrix} + \\
&\left|V^{-1}\left(G(t)\left(y_K(t) + y_K(t-h_0)\right)\right)\right|, \\
&Z_K(t,\phi) = 0,\ \forall t \in \left[t_0 - \bar{h}, t_0\right],\ \forall K \geq 1
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

6.2. 有界性域和稳定性域的模拟与双侧解界

我们的仿真依赖两个组件（3.5）推导出的（3.1）的闭式近似解。在这两种情况下，（3.10）对于固定的，随着增加，模拟估计值会趋近于陷获域和稳定域的边界（定义3）；而参考边界则由对（3.1）的独立模拟得出。

第一种策略得到保守内近似，而第二种策略通常产生外近似，往往能够为估计边界提供双侧界。后者效率更高，其方法是通过仿真线性方程（3.5）的近乎闭式解；前者则通过，利用 标量方程（6.1）并结合满足 的线性方程（3.5）的近乎闭式解进行仿真。在这两种情况下，计算成本基本上不受系统维数影响。

此外，不等式（3.10）给出了关于解的范数的双侧界；随着迭代次数增加，只要解仍处于陷获域或稳定区域内，这些界就会收敛到精确范数。

尽管有界性和李雅普诺夫稳定性（定义 1–2）是在无限时间范围内定义的，但在有限区间内对系统动力学进行数值评估依赖于，且随着其增大，结果往往越发保守。

仿真采用 MATLAB 的可变步长时滞微分方程求解器，并使用默认容差；较小的容差（例如）在某些情况下提高了结果的可信度。

在仿真中，初始向量的各分量用双极坐标表示如下：

$$\varphi_{s1}(t_0)=r_1(t_0)\cos(\theta_1(t_0)),\ \varphi_{s2}(t_0)=r_1(t_0)\sin(\theta_1(t_0)),$$
$$\varphi_{s3}(t_0)=r_2(t_0)\cos(\theta_2(t_0)),\varphi_{s4}(t_0)=r_2(t_0)\sin(\theta_2(t_0))$$

两个角坐标均以步长 离散化。对于每一组固定的角坐标，径向分量 经过调整，以近似区域边界。仿真从位于捕获域或稳定性域内的较小径向值开始，并通过二分搜索逐步增大，直至超过预设阈值 。 增大/减小 通常会导致保守估计增多/减少。

采用相同的过程估计与有界性和稳定性区域相关的边界分量依据对不等式 (3.3) 右端或标量方程 (3.8) 的仿真。两种方法得出的结果无法区分；因此，下边界估计取自对 (3.8) 的仿真。

此外，当向量接近参考边界时，的大小迅速增加，并趋近于相同的阈值，从而提供了一个互补的边界估计。

为清晰起见，将估计的边界投影到-平面上，因为投影到其他坐标平面会得到定性相似的结果。图中以实线、虚线和点划线分别表示这些投影，对应于对原系统 (3.1)、方程 (6.1) 以及条件，

分别如此。本节中的图表显示，当评估区间充分超过最大滞后时，即使时滞和非线性缩放参数相对较大，近似准确率仍能保持。

6.3.1. 耦合时滞范德波尔型系统的稳定域与解界

图 1 展示了耦合时滞范德波尔–类系统原点附近估计稳定域的边界，这些边界是在不同时间区间内经过四次、六次和八次迭代计算得到的。除图 1a 外，由原系统仿真得到的稳定域（实线）位于两个估计值之间：一个根据 (6.2) 得到（虚线），另一个根据 （点划线）处的时间历程得到。图 1a–1c 表明，采用四

随着 增加，迭代次数和固定参数下的准确率会发生变化。对于相同的参数值和–，经过六次迭代后准确率得以恢复（图1d）。

$\mu_1=\mu_2=60$

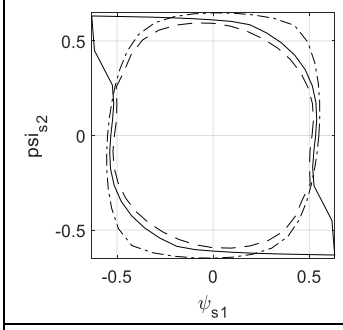

图1a。，$\mu_1=\mu_2=10$ $K=4$ T=12

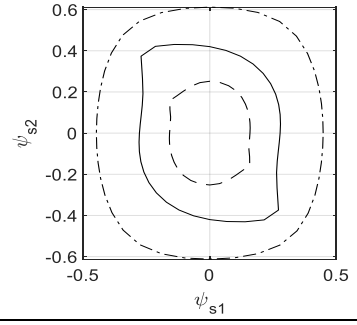

图1b。，$\mu_1=\mu_2=10$ $K=4$ ，T=23

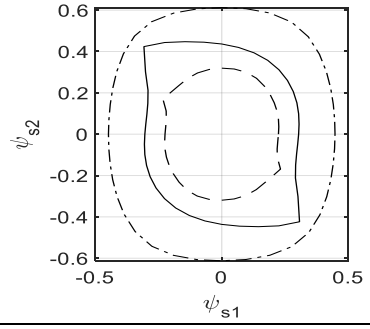

图1c。，$\mu_1=\mu_2=10$ $K=4$ ，T=40

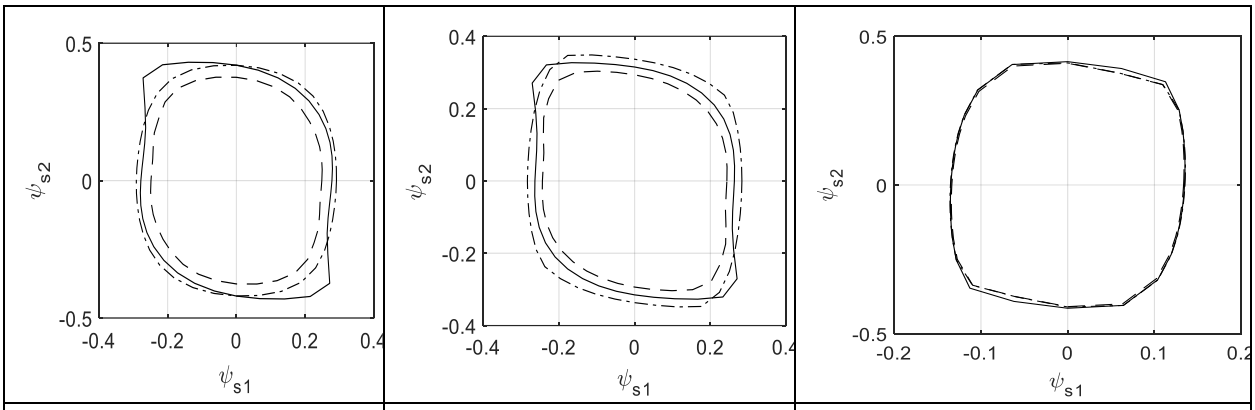

图 1d. , $\mu_1=\mu_2=10$ $K=6$ $T=40$

图 1e. , $\mu_1=\mu_2=10$ $K=6$ $T=80$

图 1f. , $\mu_1=\mu_2=60$ $K=8$ $T=80$

图 1. 具有不同近似次数、非线性幅值和时间范围的时滞范德波尔类系统的稳定域模拟结果

图2展示了通过应用不等式 (3.10) 得到的耦合范德波尔类振子原系统解的范数上下界（实线）的时间变化。所有估计均采用六次迭代，并且基于相同的初始向量。

在图2a–2c中，初始向量，位于稳定域内且接近其边界，而在图2d中，φ_s 则位于估计的稳定域之外，但在参考域内。. 在所有情况下，参考轨迹始终被计算界所包围。此外，随着 增大，图2a-2c中的界彼此靠近，并趋近于参考曲线。

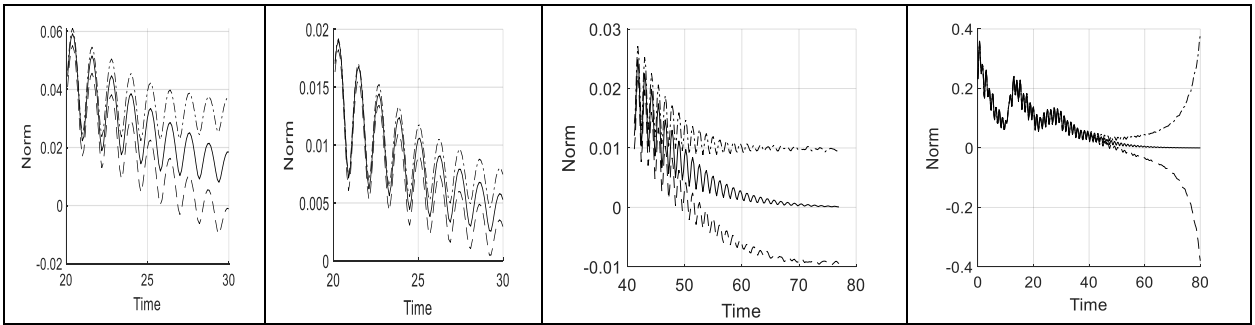

图2a。 $\mu_1=\mu_2=10$ $K=6$, $T=40$

图2b。 , $\mu_1=\mu_2=60$ $K=6$, $T=40$

图2c。 , $\mu_1=\mu_2=10$ $K=6$ $T=80$

图2d。 , $\mu_1=\mu_2=10$ $K=6$, $T=80$

图2. 不同时滞、非线性幅值和时间范围下时滞范德波尔类系统的双侧解界模拟

6.3.2. 耦合时滞杜芬类系统的稳定域和解界

图 3 展示了采用六次和八次迭代得到的耦合时滞杜芬类振子系统的估计稳定域；曲线的标识遵循图 1 和图 2 的惯例。前三幅图显示，六次迭代即可获得令人满意的准确率；迭代八次后结果进一步改善，而当 的取值较大时，六次迭代得到的估计区域也有了显著细化。

$T=80$

图 3d 展示了解的范数及其上界和下界的一个代表性时间演化，该结果通过六次迭代计算得出。所有曲线均从相同的初始向量出发，随着增加，这些界逐渐趋近于参考轨迹。

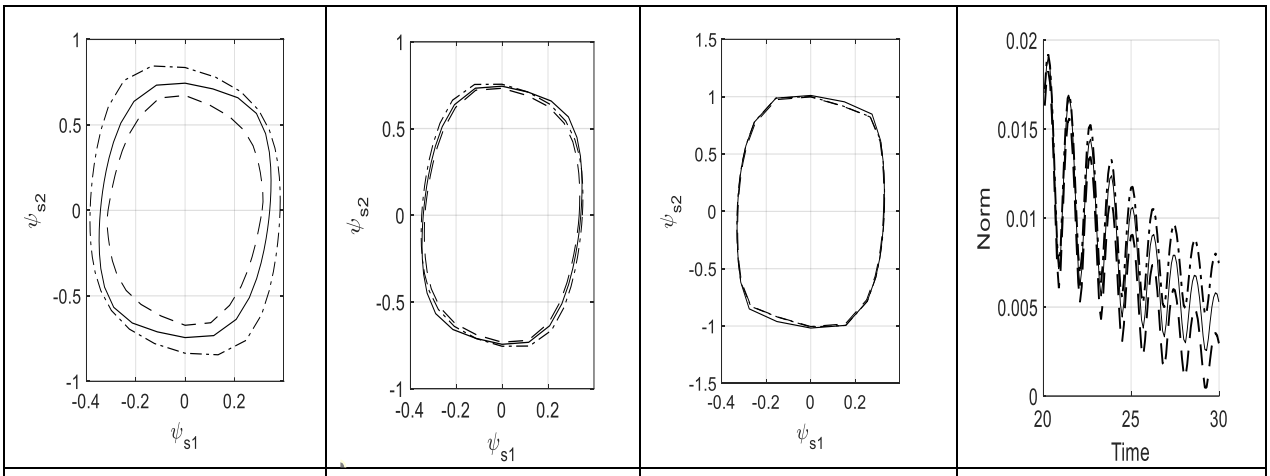

图3a。 $\mu_1=\mu_2=10$ $K=6$，$h_1, h_2=$ $T=40$	图3b。，$\mu_1=\mu_2=10$ $K=8$，$h_1, h_2=$ $T=40$	图3c.， $\mu_1=\mu_2=10$ $K=6$，$h_1, h_2=$ $T=80$	图3d.， $\mu_1=\mu_2=60$ $K=6$，$h_1, h_2=$ $T=80$

图 3. 对于不同近似次数、非线性幅值和时间范围，杜芬类系统的稳定性域及仿真的双侧解界

6.3.3. 具有时滞的非齐次范德波尔类和杜芬类系统的捕获区域与解界

据我们所知，关于估计具有变时滞和变系数的非齐次向量非线性系统的解的范数时间演化问题，现有文献关注有限。在 [41] 和 [42], 中，我们推导了局部有界性判据，从而得到了有界区域的保守估计。本节表明，当前方法能够有效弥补这一空白，捕捉非齐次项对系统行为的影响；参见图 4，其中曲线的标识遵循前述图中的约定。

图 4a 和图 4b 分别描绘了具有时滞的非齐次范德波尔坐标平面上的类和杜芬类系统的估计捕获区域投影，在–八次迭代中的情况。在两幅图中，虚线和点划线均与实线参考曲线高度吻合，偏差极小。后续仿真证实，在系统参数的较大范围内，只要选择足够大的仿真区间，八次迭代期间的估计误差始终足够小。

图 4c 和图 4d 分别展示了采用所提出的方法得到的类范德波尔和类杜芬时滞系统的参考解范数及其双侧界的时间演化。在这两种情况下，初始向量均位于参考有界性域内，但在其内估计之外，因此界会发散，但仍将参考解包含在内。

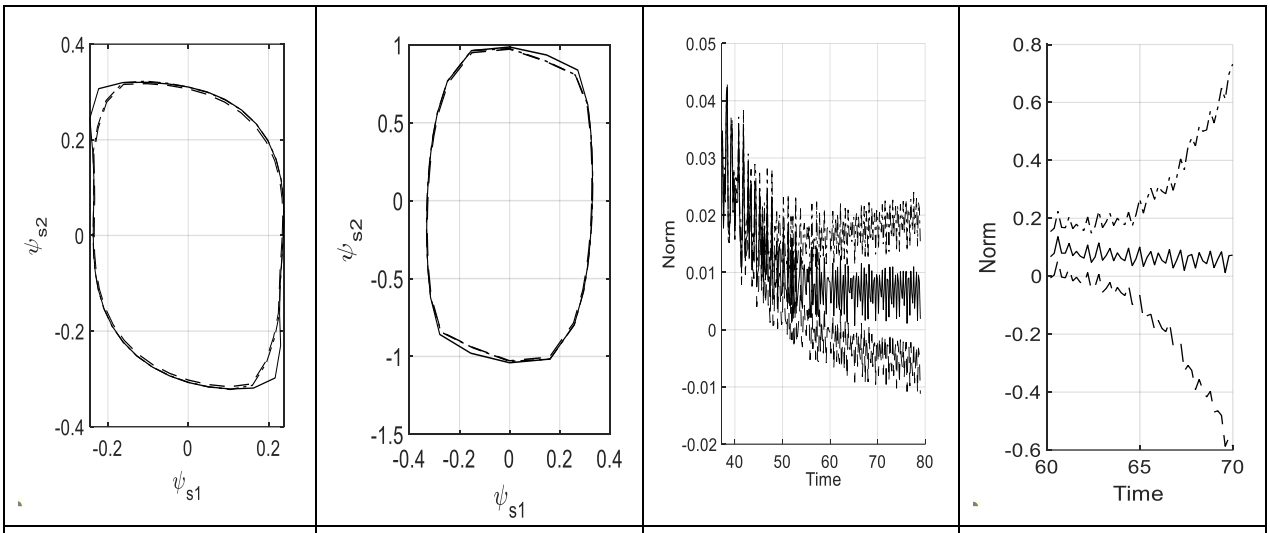

图4a。 $\mu_1=\mu_2=10$ $K=8$，$_1$ 1，$_2$ 10小时=，$T=80$，$_0$ 0.8F	图4b。 $\mu_1=\mu_2=10$ $K=8$，$_1$ 1，$_2$ 10小时=，$T=80$，$_0$ 0.8F	图4c.， $\mu_1=\mu_2=10$ $K=6$，$_1$ 1，$_2$ 8小时= $T=80$，$_0$ 0.1F	图4d.， $\mu_1=\mu_2=60$ $K=8$，$_1$ 5，$_2$ 10hh= $T=80$，$_0$ 0.8F

图 4. 对具有时滞的非齐次范德波尔类系统和杜芬类系统进行仿真得到的有界区域和双侧解界

7. 具有复杂非线性项的时滞系统的有界性域和稳定域估计

如前所述，标量方程 φ_s 对于非线性分量为多项式、幂级数或某些有理函数的向量时滞系统，可以直接推导出 (3.8)。对于更一般的非线性项，可以用这类容许函数进行近似处理；否则，推导 (3.8) 会复杂得多。

相比之下，在广泛的假设下，线性方程 (3.5) 存在近乎闭式的解，这些假设使其分量可表示为已知的时间函数。即使存在复杂的非线性分量，这一性质也使得估计 (3.1) 的有界性域和稳定域成为可能。对于多项式非线性，第 6.3 节在介绍产生相关区域内近似的主要方法时，也展示了这一方法。互补策略依赖于对初始向量分量的仿真，φ_s，这会导致快速增长 $\left\|t\varphi^{(\ )K\ sY}\right\|$ 达到预设阈值。

代表性仿真支持采用这一策略估计具有复杂非线性项和变系数的向量时滞系统的有界性域和稳定域。结果表明，随着 K 增大，近似误差会减小，前提是 T 足够大。虽然这种方法不能确保得到有界性域或稳定域的内近似或外近似，但它为后续计算量更大的分析提供了有价值的起点。

本节将所提出的技术应用于两个向量时滞系统，以评估其有效性。这两个系统由耦合的范德波尔型和杜芬型振子构成，并加入了高斯项和双曲正切项，用于建模脉冲和饱和

分别有 n 个非线性项。在第一种情况下，两个系统的非线性分量表示如下：

$$f=\left(0\quad -\left(\mu_1 x_2^3(t-h_1)+\mu_3 G(\Delta_2)\right)\quad 0\quad -\left(\mu_2 x_4^3(t-h_1)+\mu_4 G(\Delta_4)\right)\right)^T$$
$$f=\left(0\quad -\left(\mu_1 x_1^3(t-h_1)+\mu_3 G(\Delta_1)\right)\quad 0\quad -\left(\mu_2 x_3^3(t-h_1)+\mu_4 G(\Delta_3)\right)\right)^T \tag{7.1}$$

where $G(\Delta)=\dfrac{1}{q\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Delta}{q}\right)^2\right)$, $\Delta_1=x_1(t-h_1)-x_1^0$, $\Delta_2=x_2(t-h_1)-x_2^0$, $\Delta_3=x_3(t-h_1)-x_3^0$,

$\Delta_4=\ ^{(\ )}_{4}\ -\ _1\ -\ ^0_4\ x\ t\ h\ x$，，，$\mu_1=\mu_2=-0\ 1$。$\mu_3=\mu_4$ 和 $=-1$ x $^0_1=\ ^0_2=\ ^0_3=\ ^0_4=7$ $x\ x$ $_0=1,\ _2=10,\ =1,\ T=80$ $h\ h\ q$

在后一种情况下，系统的非线性分量规定如下：

$$f=\left(0\quad -\left(\mu_1 x_2^3\left(t-h_1\right)+\mu_3\tanh\left(k_1 x_2\left(t-h_1\right)\right)\right)\quad 0\quad -\left(\mu_2 x_4^3\left(t-h_1\right)+\mu_4\tanh\left(k_2 x_4\left(t-h_1\right)\right)\right)\right)^T$$

$$f=\left(0\quad -\left(\mu_1 x_1^3\left(t-h_1\right)+\mu_3\tanh\left(k_1 x_1\left(t-h_1\right)\right)\right)\quad 0\quad -\left(\mu_2 x_3^3\left(t-h_1\right)+\mu_4\tanh\left(k_2 x_3\left(t-h_1\right)\right)\right)\right)^T \tag{7.2}$$

其中，$\mu_1=\mu_2=-0\ 1$。 和 $\mu_3=\mu_4=-1$。 $_0=1,\ _1=10,\ _1=\ _2=1,\ T=80$ $h\ h\ k\ k$

请注意，在第一种情况下，。因此，该系统在原点处不存在平衡点，且所提出的技术估计了坐标原点附近的有界域。

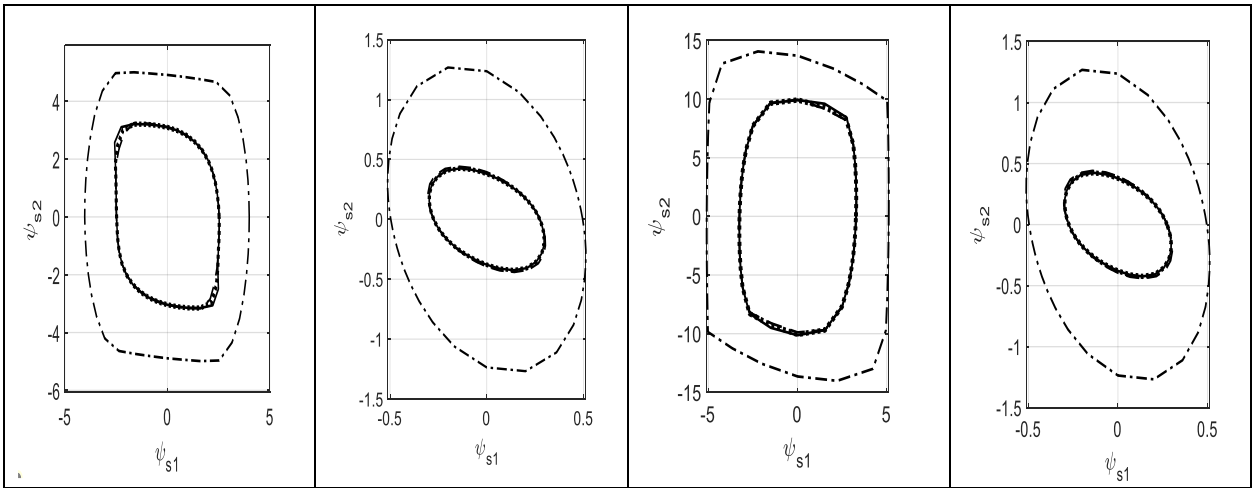

图5a。Van der-Pol-like 系统。Gaussin 非线性项，$4,8,K=$	图5b。Van der-Pol-like 系统。饱和非线性项，$6,8,K=$	图5c。杜芬类系统。高斯非线性项，$4,8,K=$	图5d。杜芬类系统。饱和非线性项，$K=6,7,8$

图5。时滞范德波尔类和 Duffin 类系统的有界性与稳定性区域仿真结果，其中脉冲和类饱和非线性分量

图 5 展示了平面上具有式 (7.1) 或 (7.2) 所给非线性项的耦合系统坐标原点附近有界性与稳定性域边界的估计结果。实线表示通过仿真原系统 (3.1) 得到的参考边界，而点–划线、虚线和粗–点线分别表示在图注所列参数l的连续取值下进行仿真得到的结果。

$\varphi_1\times\varphi_2$

$\left|\varphi\ \ (\ )\ \ {}_{K}\ \ {}_{s}\ \ Y\ t\right|$ $\varphi=\varpi$ K

在所有图中，取值最大的两个参数所得到的边界几乎重合，K且与参考曲线也几乎重合，这表明所提出的方法能够有效估计具有复杂非线性项的向量时滞系统的有界性域和稳定域。因此，可以比较该参数连续取值下得到的估计结果，进而选择合适的参数值。K

8. 结论与进一步研究

对于向量时滞非线性时变系统，估计能够产生有界解或稳定解的初始函数集合，是一项具有挑战性但在实践中十分重要的问题。 现有的大多数方法给出的局部稳定性与有界性判据会导致条件过于复杂且过于保守，实际适用性有限。

本工作将 [40] 中针对非自治常微分方程所发展的方法扩展到具有变时滞和变系数的向量非线性时滞微分方程。该方法基于递归地用精心构造的常系数线性常微分方程系统的解来近似原解；这些系统包含强迫项，具有近似闭式解，并且保持原系统的有界性和稳定性性质。随后，近似残差的范数被一个所推导标量时滞方程的解从上界定，该方程以隐式方式纳入初始向量函数。这种方法将对原向量系统的直接分析替换为对其标量对应方程的分析，无论原时滞微分方程中耦合的方程数量如何，都能显著降低计算复杂度。

在此框架下，得到了原解范数的双侧界以及新的有界性与稳定性判据，从而获得了收敛于有界性和

随着迭代次数增加，稳定域也随之变化。数值仿真表明，在广泛的参数范围内，误差会迅速减小；当初始函数属于有界性区域或稳定区域时，双侧界会逐渐趋近于彼此以及参考解范数。

仿真进一步表明，支配逐次逼近的线性常微分方程在有界性域和稳定性域的边界附近呈现快速增长。这种瞬态行为有助于高效估算这些区域，并为更严格但计算量更大的方法提供有效的初始近似。该方法对于具有复杂非线性项的系统仍然有效，包括脉冲类和饱和类分量；仿真证实其能够快速收敛至参考边界。

最后，该方法可自然推广至含脉冲分量和随机分量的非自治向量时滞系统，也可用于塑造控制应用中的有界性与稳定性区域，从而提升鲁棒性评估能力。

致谢。第6节中用于模拟模型的程序由 Steve Kobl

ik。**附录**。令 且 定义如下，例如：， 。则，，其中我们利用了 ( ) ( ) ( ) 显然，这类不等式可推广至幂级数和某些有理函数。实际上，令， ；则， 。前一个不等式的左侧在时， 。

参考文献

[1] Aguirregabiria, J. M. 和 J. R. Etxebarria，“时滞微分方程的分形吸引域边界”，《物理快报A》，第122卷，第5期，第241–244页，1987年。[2] Andreev, A. S. 和 N. O. Sedova，“时滞系统稳定性分析中的Lyapunov–Razumikhin方法”，《自动化与遥控》，第80卷，第7期，第1185–1229页，2019年。[3] Arnold, V. I.，《常微分方程理论中的几何方法》。美国纽约州纽约：Springer，1983年。[4] Azbelov, N. V. 和 P. M. Simonov，《滞后微分方程的稳定性》，《稳定性与控制：理论、方法与应用》，第20卷。英国伦敦：泰勒-弗朗西斯，2003年。[5] Beresansky, L. E.，“线性时滞向量微分方程一致指数稳定性的简单检验”，《IEEE自动控制汇刊》，第67卷，第3期，第1537–1542页，2022年。[6] Briat, C.，《线性参数变化与时滞系统：分析、观测、滤波与控制》。德国柏林：Springer，2015年。[7] Burton, T.，《常微分方程与泛函微分方程的稳定性和周期解》。美国纽约州纽约：学术出版社，1985年。[8] Burton, T. 和 S. Zhang，“常微分方程与泛函微分方程中的有界性、周期性与稳定性统一理论”，《纯粹与应用数学年刊》，第145卷，第1–28页，1986年。[9] Cao, Y. Y.、Z. Lin 和 T. Hu，“受输入饱和影响的线性时滞系统稳定性分析”，《IEEE电路与系统汇刊I》，第49卷，第2期，第233–240页，2002年。[10] Challet, A. 等，“时滞系统的ISS框架：综述”，《数学控制、信号与系统》，第35卷，第237–306页，2023年。[11] Coutinho, D. F. 和 C. E. de Souza，“一类非线性时滞系统的时滞相关鲁棒稳定性与L2增益分析”，《自动化》，第44卷，第8期，第2006–2018页，2008年。[12] Daza, A.、A. Wagemakers 和 M. A. F. Sanjuán，“时滞系统中的和田性质”，《非线性科学与数值模拟通讯》，第43卷，第220–226页，2017年。[13] de Souza, C.-E. 和 D.-F. Coutinho，“估计一类非线性时滞系统的时滞相关稳定区域”，载于《第8届欧洲控制会议（ECC）论文集》，希腊科斯，2007年，第4825–4832页。[14] de Souza, C. E. 和 D. F. Coutinho，“非线性二次时滞系统的时滞相关区域稳定化”，《IFAC会议论文集》，第47卷，第3期，第10084–10089页，2014年。[15] Erneux, T.，《应用时滞微分方程》。美国纽约州纽约：Springer，2009年。[16] Fridman, E.，《时滞系统导论：分析与控制》。瑞士巴塞尔：比克豪泽，2014年。[17] Gil, M.，《向量时滞微分方程的稳定性》。瑞士巴塞尔：比克豪泽，2013年。[18] Gu, K. 和 S.-I. Niculescu，“时滞系统稳定性与控制的近期成果综述”，《动力系统、测量与控制杂志》，第125卷，第2期，第158–165页，2003年。[19] Gu, K.、V. L. Kharitonov 和 J. Chen，《时滞系统的稳定性》。美国马萨诸塞州波士顿：比克豪泽，2003年。[20] Halanay, A.，《微分方程：稳定性、振荡与时滞》。美国纽约州纽约：学术出版社，1966年。[21] Hale, J. K.，“自治泛函微分方程稳定性与不稳定性的充分条件”，《微分方程杂志》，第1卷，第452–485页，1965年。[22] Hale, J. 和 S. M. V. Lunel，《泛函微分方程导论》。美国纽约州纽约：Springer，1993年。

[23] Karafylis, I. 和 Z.-P. Jiang，《非线性系统的稳定性与镇定》。英国伦敦：Springer，2011年。
[24] 4, 1 44, 2016
Karafylis, I.、M. Malisoff、F. Mazenc 和 P. Pepe，“非线性时滞系统镇定：教程”，《微分方程进展》，第卷，页码–。[25] Kauderer, H.，《非线性力学》。德国柏林：Springer，1958年。[26] Kharitonov, V. I.，《时滞系统：Lyapunov函数与矩阵》。美国纽约州纽约：比克豪泽，2013年。[27] Kolmanovskii, V. 和 J.-P. Richard，“一些时滞线性系统的稳定性”，《IEEE自动控制汇刊》，第44卷，第5期，第984–989页，1999年。[28] Kolmanovskii, V. 和 A. Mishkis，《泛函微分方程理论与应用导论》。荷兰多德雷赫特：Kluwer，1999年。[29] Krasovskii, N.，《运动稳定性理论问题》。美国加利福尼亚州斯坦福：斯坦福大学出版社，1963年。[30] Lakshmanan, M. 和 D. V. Senthilkumar，《非线性时滞系统动力学》。德国柏林：Springer，2011年。[31] Liao, X.、L. Wang 和 P. Yu，《动力系统稳定性》。荷兰阿姆斯特丹：Elsevier，2007年。[32] Mazenc, F. 和 M. Malisoff，“Razumikhin定理的扩展以及时变系统中带时滞的Lyapunov–Krasovskii泛函构造”，《自动化》，第78卷，第1–13页，2017年。[33] Mazenc, F.、M. Malisoff 和 M. Krstic，“Halanay不等式的向量扩展”，《IEEE自动控制汇刊》，第67卷，第3期，第1453–1459页，2022年。[34] Melchor-Aguilar, D. 和 S.-I. Niculescu，“一类非线性时滞系统吸引域的估计”，《IMA数学控制与信息杂志》，第24卷，第4期，第523–550页，2007年。[35] Mondié, S.、G. Ochoa 和 B. Ochoa，“线性时滞系统的不稳定性条件：Lyapunov矩阵函数方法”，《国际控制杂志》，第84卷，第10期，第1601–1611页，2011年。[36] Naulin, R.，“带时变时滞的微分系统的不稳定性”，《数学分析与应用杂志》，第274卷，第305–318页，2002年。[37] Pinsky, M. A.，“某些非线性非自治系统解的双侧界及捕获域/稳定区域的逐次估计”，《非线性动力学》，第103卷，第517–539页，2021年。[38] Pinsky, M. A.，“某些多维非自治非线性系统解的稳定性与有界性”，《工程数学问题》，2022年，文章编号5098677。[39] Pinsky, M. A.，“某些多维时变非线性系统时间尺度的最优二分及其有界性/稳定性”，《数学控制、信号与系统》，第35卷，第125–158页，2023年。[40] Pinsky, M. A.，“具有时变系数的某些多维非线性系统捕获域/稳定区域与双侧解界的有效估计”，《非线性科学杂志》，第34卷，文章编号39，2024年。
[41] 2410 20674, 2025
Pinsky, M. A.，“一种约化向量时滞非线性系统的新方法：有界性与稳定性分析”，arXiv：。。[42] Pinsky, M. A.，“带时滞和变系数的某些向量非线性系统解范数的双侧界以及稳定性、不稳定性和有界性”，arXiv:2408.12750，2025年。[43] Razumikhin, B.，《遗传系统的稳定性》。俄罗斯莫斯科：Nauka，1988年。[44] Scholl, T. H.、V. Hagenmeyer 和 L. Gröll，“非线性时滞系统吸引域的基于范数的估计”，《非线性动力学》，第100卷，第3期，第2027–2045页，2020年。[45] Seuret, A. 和 F. Gouaisbaut，“时滞系统稳定性分析的LMI条件层级”，《系统与控制通讯》，第81卷，第1–7页，2015年。[46] Seuret, A.、S. Marx 和 S. Tarbouriech，“受状态时滞和饱和输入影响的系统吸引域的分层估计”，载于《欧洲控制会议（ECC）论文集》，意大利那不勒斯，2019年，第2915–2920页。[47] Taylor, S. R. 和 S. A. Campbell，“时滞微分方程中混沌鞍的近似”，《物理评论E》，第75卷，第4期，文章编号046215，2007年。[48] Villafuerte, R. 和 S. Mondié，“关于改进一类非线性时滞系统吸引域估计的研究”，《IFAC会议论文集》，第40卷，第23期，第227–232页，2007年。[49] Zhou, B. 和 A. V. Egorov，“时变时滞系统的Razumikhin和Krasovskii稳定性定理”，《自动化》，第71卷，第281–291页，2016年。