arXiv:2601.06350v1 [math.OA] 9 Jan 2026

ISR性质失效时的不变子代数

YONGLE JIANG* 和 RUOYU LIU

摘要。我们对 $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ 中 G-不变冯·诺依曼子代数进行了分类。这是首个针对不具备不变冯·诺依曼子代数刚性性质（简称 ISR 性质）的 i.c.c. 群，分类 $L(G)$ 中 G-不变冯·诺依曼子代数的结果，该性质由 Amrutam-Jiang 的工作提出。作为推论，我们证明 $L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \{\pm I_2\})$ 是 $L(G)$ 中唯一的极大 Haagerup G-不变冯·诺依曼子代数，其中 I_2 表示 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中的单位矩阵。

1. 引言

设 G 是一个可数离散群，$L(G)$ 是相应的群 von Neumann 代数。注意，G 通过共轭作用自然地作用于 $L(G)$。在 Alekseev-Brugger [AB21]，的初步工作之后，分类 G-不变冯·诺伊曼子代数（即在 G 的共轭作用下作为整体保持不变的子集）这一问题，近年来迅速受到广泛关注 [CD20,KP23, AJ23, CDS23, AHO25, JZ24]。这一研究方向至少有两种潜在应用。其一，在 $L(G)$ 中，每个 G-不变冯·诺伊曼子代数显然都是正则的，也就是说，它的正规化子生成整个环境 von Neumann 代数 $L(G)$。因此，极大阿贝尔 G-不变冯·诺伊曼子代数自动就是 $L(G)$ 中的 Cartan 子代数。由此，研究如何分类 $L(G)$ 中的 G-不变冯·诺伊曼子代数，或可为一个著名的开放问题提供线索：对于某些群类，$L(G)$ 中是否存在 Cartan 子代数 [Ioa18, Problem V],? 例如，具有正第一 L^2-Betti 数的 icc 群 [AJ23, Corollary 4.4]，或高秩单李群中的格，例如 $G = SL_3(\mathbb{Z})$ [KP23, Corollary 2.8]。另一种应用源自分类所谓不变随机 von Neumann 子代数的问题。这是 [AHO25] 引入的一个新概念。该概念可视为不变随机子群这一热门研究主题在 von Neumann 代数中的对应概念[AGV14, Gel18]。事实上，不难看出，且已有部分论述指出

日期：2026年1月13日。2020 数学学科分类主要分类 46L10；次要分类 20F67、47C15。关键词和短语。不变冯·诺依曼子代数、Haagerup 根、可 amenable 根。

*-通讯作者。

在 [AHO25，JZ24] 不变随机 von Neumann 子代数这一概念在不变随机子群与群上的特征标之间起到了桥梁作用[BdlH20]。此外，不变冯·诺伊曼子代数是最简单的情形，即狄拉克型不变随机冯·诺伊曼子代数。

对于上述分类问题，一个极端情形是，每个 G-不变冯·诺伊曼子代数 P in $L(G)$ 都满足：对于某个正规子群 $H \lhd G$，有 $P = L(H)$。一旦出现这种情形，我们就沿用 Amrutam-Jiang 在[AJ23]中的说法，称 G 具有不变冯·诺依曼子代数刚性性质（简称 ISR性质）。显然，由庞特里亚金对偶可知，无限阿贝尔群不具有 ISR性质。事实上， [AJ23 命题 3.1] 证明，若无限群 G 不是 icc 群（即不满足无限共轭类条件），则G 不具有 ISR性质。另一方面，已知许多可 amenable 根平凡的 icc 群具有 ISR性质，包括高秩单李群中的不可约格 [KP23], 非阿贝尔自由群及其有限直和 [AJ23], 所有可 amenable 根平凡的圆柱双曲群 [CDS23], 等。最近， $S_{\mathbb{N}}$ 这个（可 amenable 的）有限支撑置换群被证明具有 ISR性质，见 [JZ24]。除这一极端情形外，似乎尚无关于非阿贝尔背景冯·诺依曼代数中不变冯·诺依曼子代数分类的研究。因此，自然会问：如果 G不具有 ISR性质，我们能否对 $L(G)$ 中所有 G-不变冯·诺依曼子代数进行分类?

回顾一下，在 [AJ23, Example 3.5], Amrutam 和第一作者给出了一个例子，说明 i.c.c. 条件尚不足以推出 ISR 性质。更确切地说，文中证明，对于 $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$，存在一个 G-不变的冯·诺依曼子代数 $M \subsetneq L(\mathbb{Z}^2)$，使得对于 G 中任意正规子群 H， M 均不等于 $L(H)$。这个母群 G 及其相关作用 $\curvearrowright SL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^2 = \mathbb{Z}^2$ 在冯·诺依曼代数和可测群论的现代发展中发挥了重要作用。在 [Pop06], 中，Popa 证明了 $L(G)$ 的基本群是平凡的，从而解决了 R. V. Kadison 提出的一个长期悬而未决的问题。这也是 Popa 极具影响力的变形/刚性技术早期成果之一，综述参见 [Pop07, Ioa18, Vae10]。Ozawa 证明了 $L(G)$ 是坚固的 [Oza09] ，因此它是素的，也就是说，它不能分解为两个 II_1 因子的张量积。在 [Ioa10], 中，Ioana 为 $SL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^2$所定义的等价关系内部的所有遍历子等价关系建立了一个替代性原理。他还证明了 $L(G)$ 在 [Ioa12]中具有唯一的群测度空间 Cartan 子代数。随后，Popa 和 Vaes 将这一结果加强为唯一 Cartan 子代数，见 [PV14]。最近，作为研究 [JS21], 中提出的极大 Haagerup 性质概念的一个典型情形，第一作者证明了 $L(SL_2(\mathbb{Z}))$ 是一个极大 Haagerup 冯·诺依曼

子代数，其中 $L(G)$。关于极大 Haagerup 性质及上述结果推广的最新研究，参见 [Val24，JV23]。

鉴于研究 $L(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}))$ 各种结构性质的重要性，自然会想知道我们能否对其中所有不变冯·诺伊曼子代数进行分类。本文对这一问题给出了肯定的回答。

定理*1.1.* 设 $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$。那么，冯·诺伊曼子代数 $P \subseteq L(G)$ 是 G-不变的，当且仅当以下两种情况之一成立：$P = L(H)$，其中 $H \subseteq G$ 是某个正规子群；或者 $P = A_n$，其中 $n \geq 0$，且 $A_n := \{x \in L(n\mathbb{Z}^2) : \tau(xu_g) = \tau(xu_{g^{-1}}) \ \forall\, g \in G\}$，其中 τ 表示 $L(G)$ 上由 $\tau(x) = \langle x\delta_e, \delta_e\rangle$ 定义的典范迹，对任意 $x \in L(G) \subseteq B(\ell^2(G))$ 均成立。

在 [AHO25]，中，作者证明了一个引人注目的结果：对于任意可数离散群 G，$L(G_a)$ 是 $L(G)$ 中极大的 amenable G-不变冯·诺依曼子代数，其中 G_a 表示 G 中的可 amenable 根，即 G 中唯一的极大可 amenable 正规子群。作为群的可 amenable 根的一种自然推广，Haagerup 根的概念在 [JS21] 中得到考察。然而，目前仍不清楚每个可数群是否都存在 Haagerup 根（例如见 [JS21，问题 2.11]），尽管若干类群确实存在这种根，例如见 [JS21，命题 2.10] 和 [Val24，命题 4.1]。同样，正如 Amrutam 所提出的，也可以考虑 $L(G)$ 中极大的 Haagerup G-不变冯·诺依曼子代数这一概念。尽管一般而言，$L(G)$ 中此类子代数的存在性仍不清楚（对于不具有 Haagerup 性质的 G），我们针对一个特定的环境群，推导出与 [AHO25，定理 A] 平行的以下结果。据作者所知，这是该研究方向上首个已知结果。

推论1.2。令 $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$。则 $L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \{\pm I_2\})$ 是 $L(G)$ 中唯一极大的 *Haagerup* G-不变冯·诺依曼子代数，其中 I_2 表示 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中的单位矩阵。

接下来，我们简要谈谈定理 1.1 的证明。证明中，我们结合[CDS23，定理5。1] 与 [AHO25，定理A]，将研究简化到情形$P \subseteq L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \{\pm I_2\})$。然后，运用 [AJ23]，中介绍的技巧，还需要付出相当大的努力来证明 P 实际上属于 $L(\mathbb{Z}^2)$，除非 $P = L(d\mathbb{Z}^2 \rtimes \{\pm I_2\})$，其中 $d \in \{1, 2\}$。我们指出，类似的策略也可应用于广群积群 $\mathbb{Z} \wr F_2$，参见第 4 节。

本文结构如下：第2节回顾相关技巧后，我们将在第1.1 节证明定理1.2 节给出推论3。最后，在第4节汇集与本文相关的一些评注与开放问题。

本文中，我们通常用 τ 表示有限 von Neumann 代数上的迹，例如交叉积或群 von Neumann 代数上的迹；具体含义将由上下文确定。

致谢。本研究部分得到国家自然科学基金（项目编号：12001081、12271074）和中央高校基本科研业务费（项目编号：DUT19RC(3)075）的资助。本研究的部分工作是在 Y. J. 于 2023年10月访问哈尔滨工业大学数学研究院期间完成的。Y. J. 感谢 Simeng Wang 教授的邀请及访问期间的热情款待，并感谢 Adam Skalski 教授和 Amrutam Tattwamasi 博士就本文展开的有益讨论。

2. 预备知识

本节汇集证明定理1.1所需的相关技巧。

设 (A,ϕ) 是一个带迹冯·诺伊曼子代数，并配备迹 ϕ，且$H \curvearrowright (A,\phi)$ 是一个 ϕ- 保持作用。于是，我们可以构造交叉积冯 · 诺伊曼代数 $A \rtimes H$ [ADP19，第 5 节。2], 该代数配备迹 τ，定义为

$$\tau(\sum_h a_h u_h) = \phi(a_e), \text{ where } \sum_h a_h u_h \in A \rtimes H.$$

本文主要关注配备典范迹的情形 $A = L(\mathbb{Z}^2)$ 以及 $H = SL_2(\mathbb{Z})$。根据 Pontryagin 对偶性， $A \cong L^\infty(\mathbb{T}^2,\mu)$，其中 μ表示二维环面 $\mathbb{T}^2$上的哈尔测度。作用 $G \curvearrowright A$ 由对列向量进行典范左矩阵乘法诱导： $SL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{Z}^2$。容易验证，$L(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})) \cong L^\infty(\mathbb{T}^2,\mu) \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$。

以下命题是标准结果，但为求完整起见，我们决定给出其证明。

命题 2.1. 设 H 是任意可数离散群，且 $H \curvearrowright (A,\phi)$ 是带迹冯·诺依曼代数 (A,ϕ) 上的一个保持 ϕ-的作用。设 $L(H) \subseteq P \subseteq A \rtimes H$是一个冯·诺伊曼代数包含。记 $E: A \rtimes H \twoheadrightarrow P$ 为到 P上的保迹条件期望。那么， $P = B \rtimes H$ 属于某个 H-不变冯·诺伊曼子代数 $B \subseteq A$，当且仅当 $E(A) \subseteq A$。

证明. “仅当”方向显然，下面只需验证“当”方向成立。定义 $B = E(A)$。假设 $E(A) \subseteq A$ 推出 B 是 $A \cap P$中的一个冯·诺伊曼子代数。因此，我们只需验证 $P = B \rtimes H$。一方面，显然 $B \rtimes H \subseteq P$。另一方面，对于任意的 $a \in A$ 和 $h \in H$，有$E(au_h) = E(a)u_h$。于是，对于任意 $x \in P$，取一列范数一致有界的有限和 $\sum_h a_h^{(n)} u_h$，使其在强算子拓扑下逼近 x，由此推导出 $x = E(x)$ 可以由 $E(\sum_h a_h^{(n)} u_h) = \sum_h E(a_h^{(n)})u_h \in B \rtimes H$逼近。因此 $x \in B \rtimes H$。□

为便于后续使用，我们记录关于 $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$的以下事实。对于未解释的概念，请参阅 [CS13，CDS23] 。

命题2.2。群 $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ 是一个 *ICC* 精确群，满足 [CDS23，定理5中的条件2），1], 也就是说，它存在一个取值于弱ℓ^2-表示的真数组。

证明。容易验证，G是 ICC 群。G 的双精确性最早由 Ozawa 证明[Oza09]。请注意，在文献中，Ozawa 的双精确群类通常记作 $\mathcal{S}$，例如，[Oza06], [Sak09，注 19]。因此，根据 [CS13，定义 1.6 和命题 1.11], ，我们推导出 G 满足 [CDS23定理 5.1], 中上述条件2）[CS13，命题 1.9]中所述条件。□

3. 定理1.1 和推论1.2的证明

现在我们可以证明定理 1.1。

定理 1.1 中的“若”方向显然成立，因此我们只需证明“仅若”方向，并将其记录为一个命题。

命题 3.1。设 $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$。设 P 是 $(L(G)\ \tau)$ 中一个 G-不变的冯·诺依曼子代数。那么

- 或者 $P = L(H)$，其中 $H \lhd G$ 是某个正规子群；或者，
- $P = A_n$ 对于某个 $n \geq 0$，其中 $A_n \subset L(n\mathbb{Z}^2)$ 由 $A_n = \{x \in L(n\mathbb{Z}^2) : \tau(xs) = \tau(xs^{-1})\ \forall s \in n\mathbb{Z}^2\}$ 定义。

证明。首先，注意到 G 满足 [CDS23，定理 5.1] 中条件2），2.2中对此已有说明。因此，我们可以应用 [CDS23，定理 5.1]，推导出若 P 不是可 amenable 的，那么 $P = L(H)$，其中 $H \lhd G$是某个正规子群。

从现在起，我们可以假设 P 是可 amenable 的。记为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle s \rangle$，其中 $s = -I_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$。

注意到，G 的可 amenable 根为 $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，例如可由 [JS21，命题 2.10]得出。由 [AHO25，定理 A], 可知，$P \subseteq L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。因此，只需证明以下命题。

命题：若 $P \subseteq L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 且 P 是 G-不变的，则 $P \in \{\mathbb{C}, L(n\mathbb{Z}^2)(n > 0)\ A_n (n > 0)\ L(2\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\ L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\}$。

证明该命题。令 $E : L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to P$ 为到 P 上的保 τ 迹条件期望。下文为简便起见，直接用 g 表示 $L(G)$ 中的典范酉元 u_g，并使用记号 $\langle a,\ b \rangle$ 表示任意 $a,\ b \in L(G)$ 的 $\tau(b^*a)$。

注意到 $L(SL_2(\mathbb{Z}))' \cap L(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})) = L(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，这可通过直接计算得出，并使用 [AJ23，引理 2.7]。

由于 P 是 G-不变的，我们推导出对于所有 $g \in SL_2(\mathbb{Z})$，$gE(s)g^{-1} = E(gsg^{-1}) = E(s)$。因此，$E(s) \in L(SL_2(\mathbb{Z}))' \cap L(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})) = L(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。所以，我们可以写成 $E(s) = \lambda + \mu s$，其中 λ、$\mu \in \mathbb{C}$。注意到 $\lambda = \tau(E(s)) = \tau(s) = 0$。因此，$\mu^2 = (\mu s)^2 = E(s)E(s) = E(sE(s)) = E(s\mu s) = \mu$。由此可知，$\mu = 0$ 或 1。因此，$E(s) = 0$ 或 s。

情形 1: $E(s) = s$.

任取 $v \in \mathbb{Z}^2$，我们有 $vsv^{-1} \in P$，即 $(v\sigma_s(v^{-1}))s \in P$，因此 $v\sigma_s(v^{-1}) \in P$。注意，若我们写作 $v = (x,\ y)^t$，其中上标“t”表示行向量 $(x,\ y)$ 的转置，则 $v\sigma_s(v^{-1}) = 2(x,\ y)^t$。因此 $L(2\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \subseteq P$。

我们来证明，要么 $P = L(2\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，要么 $P = L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

注意，对任意 $a \in L(\mathbb{Z}^2)$，我们有 $E(a) \in L(\mathbb{Z}^2)' \cap L(G) = L(\mathbb{Z}^2)$。因此，$P = E(L(\mathbb{Z}^2)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，由命题 2.1 得出。因此，$E(L(\mathbb{Z}^2)) = P \cap L(\mathbb{Z}^2)$，且显然是 $SL_2(\mathbb{Z})$-不变的。根据 [Wit94，例 5.9]（这实质上是对 [Par92，定理 2.3]，的小幅修正；另见 [JS21，引理 3.5] 的证明），我们推导出，要么 $P \cap L(\mathbb{Z}^2) = L(n\mathbb{Z}^2)$，要么 $P \cap L(\mathbb{Z}^2) = A_n$，其中某个 $n \geq 0$。这里，$n\mathbb{Z}^2 = n\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z}$。结合 $L(2\mathbb{Z}^2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subseteq P$ 这一事实，我们可以推导出，对于 $n = 1$ 或 2，$P \cap L(\mathbb{Z}^2) = L(n\mathbb{Z}^2)$；等价地，$P = L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 或 $L(2\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

情形 2: $E(s) = 0$.

我们记录以下观察，以备后用。

观察：若 $E(s) = 0$，则对所有 $v \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow E(e_1 s) = 0$，都有 $E(vs) = 0$，其中 $e_1 = (1,0)^t \in \mathbb{Z}^2$。

观察的证明。我们只需验证 $\Leftarrow$ 成立。首先，对于任意 $v = (x, 0)^t \in \mathbb{Z}^2$，可得 $0 = vE(s)v^{-1} = E(vsv^{-1}) = E(v\sigma_s(v^{-1})s) = E((2x, 0)^t s)$；类似地，$0 = vE(e_1 s)v^{-1} = E((2x + 1, 0)^t s)$。由于 $x \in \mathbb{Z}$ 是任意的，我们推导出，对所有 $n \geq 1$，都有$E(e_n s) = 0$，其中 $e_n = (n, 0)^t$。接下来，任取 $v = (x, y)^t \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0\}$，令$n =$ 为$|x|$和 $|y|$的最大公约数。此处，若 $|x| = 0$（分别地，若 $|y| = 0$），则 $n := |y|$（分别地，$n := |x|$）。注意，存在某个 $g \in SL_2(\mathbb{Z})$，使得 $v = g \cdot e_n$，其中$g \cdot e_n$ 表示矩阵左乘。事实上，由 $n =$ 和$|x|$、$|y|$的最大公约数为1，可得

两个整数 $a, b \in \mathbb{Z}$，使得 $xa - yb = n$，则令 $g := \begin{pmatrix} \frac{x}{n} & b \\ \frac{y}{n} & a \end{pmatrix}$。

Hence $E(vs) = E((g \cdot e_n)s) = E(ge_n g^{-1} s) = E(g(e_n s)g^{-1}) = gE(e_n s)g^{-1} = 0$. □

由于 $P \cap L(\mathbb{Z}^2)$ 是 $SL_2(\mathbb{Z})$-不变的，我们可以应用 [Wit94，例 5，9] 推导出 $P \cap L(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{C}$, $L(n\mathbb{Z}^2)$ 或 A_n 对于某个 $n \geq 1$。我们通过考察三个子情形来展开证明。

子情形 I: $P \cap L(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{C}$。

我们断言 $P = \mathbb{C}$。

首先，注意到对于任意 $v \in \mathbb{Z}^2$，我们有

$$E(v) \in P \cap L(\mathbb{Z}^2)' = P \cap L(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{C},$$

在得到第二个等式时，我们用到了以下事实：$L(\mathbb{Z}^2)$ 是 $L(G)$ 中的极大阿贝尔自伴代数。因此，$\forall v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$，我们得到 $E(v) = \tau(E(v)) = \tau(v) = 0$。

接下来需要证明，对于所有 $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$，$E(vs) = 0$。根据上述观察，只需证明 $E(e_1 s) = 0$。

首先，注意到

$$E(e_1 s) \in L(\{\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\})' \cap L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \subseteq L((\mathbb{Z},0)^t) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

因此，我们可以写成 $E(e_1 s) = a + bs$，其中 $a, b \in L((\mathbb{Z},0)^t)$。

由 $\langle v - E(v)\ E(e_1 s)\rangle = 0$，可得，对所有 $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$，$\langle v, a\rangle = 0$。因此，$a \in \mathbb{C}$。接着，通过计算 $E(e_1 s)$ 的迹，可得 $a = \tau(a + bs) = \tau(E(e_1 s)) = \tau(e_1 s) = 0$。因此，$E(e_1 s) = bs$。

记 $b = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu_n e_n$，其中 $\mu_n \in \mathbb{C}$，并令 $f_n = (0, n)^t \in \mathbb{Z}^2$。注意到 $f_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot e_n$。因此，

$$E(f_1 s) = E(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} E(e_1 s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu_n f_n s.$$

由 E 的 P-双模性质，我们有 $E(e_1 s)E(f_1 s) = E(e_1 s E(f_1 s))$。下面具体计算两边。

$$E(e_1 s)E(f_1 s) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \mu_m \mu_n \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix},$$

$$E(e_1 s E(f_1 s)) = E(e_1 s(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu_m f_m s)) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu_m E(\begin{pmatrix} 1 \\ -m \end{pmatrix}) = 0,$$

其中，为得到最后一个等式，我们利用了对所有 $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$，$E(v) = 0$ 这一事实。因此，对所有 $(m,\ n) \in \mathbb{Z}^2$，都有 $\mu_m \mu_n = 0$。于是，$\mu_n^2 = 0$，即对所有 $n \in \mathbb{Z}$，$\mu_n = 0$；等价地，$b = 0$，从而 $E(e_1 s) = 0$。此子情形的证明至此完成。

子情形 II：对于某个 $n \geq 1$，$P \cap L(\mathbb{Z}^2) = L(n\mathbb{Z}^2)$。

我们断言 $P = L(n\mathbb{Z}^2)$。

若 $n = 1$，则 $L(\mathbb{Z}^2) \subseteq P$，从而对所有 $v \in \mathbb{Z}^2$，$E(v) = v$。因此，$E(vs) = vE(s) = 0$。于是，$P = L(\mathbb{Z}^2)$。

从现在起，我们假设 $n \geq 2$。下面给出的证明与子情形 I 的证明基本相同，只做了少许修改；为完整起见，我们将其记录如下。

首先，对于任意 $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus n\mathbb{Z}^2$，我们注意到 $E(v) = 0$。

事实上，

$$E(v) \in P \cap L(\mathbb{Z}^2)' = P \cap L(\mathbb{Z}^2) = L(n\mathbb{Z}^2).$$

因此，由 $\langle v - E(v)\ E(v)\rangle = 0$，我们推导出 $\langle E(v)\ E(v)\rangle = 0$，即 $E(v) = 0$。

因此，对于任意 $v \in \mathbb{Z}^2$，要么 $E(v) = 0$，要么 $v \in n\mathbb{Z}^2$；在这种情形下，$E(v) = v$。

我们还需证明 $E(vs) = 0$。根据上述观察，只需证明 $E(e_1 s) = 0$。

首先，注意到

$$E(e_1s) \in L(\{\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\})' \cap L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \subseteq L((\mathbb{Z},0)^t) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

因此，我们可以写成 $E(e_1s) = a + bs$，其中 $a, b \in L((\mathbb{Z},0)^t)$。

由 $\langle v - E(v)\ E(e_1s)\rangle = 0$，我们推导出 $\langle v, a\rangle = 0$ 对所有 $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus n\mathbb{Z}^2$ 均成立。因此，$a \in L((n\mathbb{Z},0)^t) \subset L(n\mathbb{Z}^2) \subseteq P$。类似地，由 $\langle e_1s - E(e_1s)\ a\rangle = 0$，我们推导出 $\langle a, a\rangle = 0$，即 $a = 0$。因此，$E(e_1s) = bs$。

那么，证明的最后一部分与子情形 I 的证明完全相同。

子情形 III：$P \cap L(\mathbb{Z}^2) = A_n$ 对某个 $n \geq 1$ 成立。

我们断言 $P = A_n$。

首先，任取非零向量 $v \in n\mathbb{Z}^2$，有 $E(v) \in P \cap L(\mathbb{Z}^2)' = P \cap L(\mathbb{Z}^2) = A_n$。因此，我们可以写成 $E(v) = \sum \lambda_\omega \omega$。由 $0 = \langle v - E(v)\ P\rangle$，我们推导出 $\langle v - \sum_{\omega \in n\mathbb{Z}^2} \lambda_\omega \omega,\ \omega_0 + \omega_0^{-1}\rangle = 0$ 对所有 $\omega_0 \in n\mathbb{Z}^2$ 均成立。注意，取 $\omega_0 \notin \{v, v^{-1}\}$，可以得到 $0 = \lambda_{\omega_0} + \lambda_{\omega_0^{-1}} = \lambda_{\omega_0}$.。同理，取 $\omega_0 = v$，我们推导出 $\lambda_v = \lambda_{v^{-1}} = \frac{1}{2}$。因此，对所有 $v \in n\mathbb{Z}^2$，$E(v) = \frac{v+v^{-1}}{2}$。

其次，我们检验对所有 $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus n\mathbb{Z}^2$，$E(v) = 0$。

注意，我们仍有 $E(v) \in P \cap L(\mathbb{Z}^2)' = P \cap L(\mathbb{Z}^2) = A_n$。因此，由于 $0 = \langle v - E(v)\ E(v)\rangle$，我们推导出对所有 $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus n\mathbb{Z}^2$，$\langle E(v)\ E(v)\rangle = 0$，因为对于这样的 v，$\langle v, E(v)\rangle = 0$，故 $E(v) = 0$ 得证。

剩下需要证明 $E(e_1s) = 0$。

再次，我们仍有

$$E(e_1s) \in L(\{\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\})' \cap L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \subseteq L((\mathbb{Z},0)^t) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

因此，我们可以写成 $E(e_1s) = a + bs$，其中 $a, b \in L((\mathbb{Z},0)^t)$。

由 $\langle v - E(v)\ E(e_1s)\rangle = 0$，我们推导出对所有 $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus n\mathbb{Z}^2$，$\langle v, a\rangle = 0$。因此，$a \in L((n\mathbb{Z},0)^t)$。

接下来，由 $\langle e_1s - E(e_1s)\ A_n\rangle = 0$，我们推导出 $\langle a, A_n\rangle = 0$，等价地，$a + \sigma_s(a) = 0$。换言之，若记 $a = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i e_{ni}$，则

$$\lambda_i + \lambda_{-i} = 0, \forall\ i \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

现在，记 $a = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i e_{ni}$ 和 $b = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j e_j$，其中 $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ 对所有 i, j 均成立。

Thus, $E(f_1s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} E(e_1s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i f_{ni}) + (\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j f_j)s.$

接下来，我们具体计算恒等式 $E\ e_1s\ E\ f_1s\ (= E\ e_1sE)\ f_1s\ )$(的两边。)

一方面，

$$E(e_1s)E(f_1s)=[\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\begin{pmatrix}ni\\nj\end{pmatrix}+\sum_{j,k}\mu_j\mu_k\begin{pmatrix}j\\-k\end{pmatrix}]+[\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j\begin{pmatrix}ni\\j\end{pmatrix}+\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j\begin{pmatrix}j\\-ni\end{pmatrix}]s;$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}E(e_1sE(f_1s))&=\sum_i\lambda_iE(\begin{pmatrix}1\\-ni\end{pmatrix}s)+\sum_j\mu_jE(\begin{pmatrix}1\\-j\end{pmatrix})\\&=\sum_i\lambda_i\begin{pmatrix}1&0\\-ni&1\end{pmatrix}E(e_1s)\begin{pmatrix}1&0\\ni&1\end{pmatrix}+\sum_j\mu_jE(\begin{pmatrix}1\\-j\end{pmatrix})\\&=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\begin{pmatrix}nj\\-n^2ij\end{pmatrix}+\sum_{i,k}\lambda_i\mu_k\begin{pmatrix}k\\-nik\end{pmatrix}s+\sum_j\mu_jE(\begin{pmatrix}1\\-j\end{pmatrix}).\end{aligned}$$

由于计算 $E(\begin{pmatrix}1\\-j\end{pmatrix})$ 的方式不同，我们需要分两种情形来证明。

子子情形1: $n=1$。

在这种情形下，容易验证 $E(\begin{pmatrix}1\\-j\end{pmatrix})=\frac{1}{2}[\begin{pmatrix}1\\-j\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\j\end{pmatrix}]$。因此，我们可以继续上述计算，推导出

$$E(e_1sE(f_1s))=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\begin{pmatrix}j\\-ij\end{pmatrix}+\sum_{i,k}\lambda_i\mu_k\begin{pmatrix}k\\-ik\end{pmatrix}s+\sum_j\mu_j\frac{1}{2}[\begin{pmatrix}1\\-j\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\j\end{pmatrix}],$$

$$E(e_1s)E(f_1s)=[\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}+\sum_{j,k}\mu_j\mu_k\begin{pmatrix}j\\-k\end{pmatrix}]+[\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}+\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j\begin{pmatrix}j\\-i\end{pmatrix}]s.$$

因此，我们可以推导出

$$\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\begin{pmatrix}j\\-ij\end{pmatrix}+\sum_j\mu_j\frac{1}{2}[\begin{pmatrix}1\\-j\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\j\end{pmatrix}]=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}+\sum_{j,k}\mu_j\mu_k\begin{pmatrix}j\\-k\end{pmatrix},\tag{2}$$

$$\sum_{i,k}\lambda_i\mu_k\begin{pmatrix}k\\-ik\end{pmatrix}=\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}+\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j\begin{pmatrix}j\\-i\end{pmatrix}.\tag{3}$$

接下来，注意到

$$\begin{aligned}E((e_1+e_{-1})s)&=E(e_1s)+E(e_{-1}s)=E(e_1s)+\sigma_s(E(e_1s))\\&=(a+bs)+\sigma_s(a+bs)=(a+\sigma_s(a))+(b+\sigma_s(b))s=(b+\sigma_s(b))s.\end{aligned}$$

同时，由于 $b+\sigma_s(b)\in A_1\subseteq P$，我们推导得出 $(b+\sigma_s(b))s=E((e_1+e_{-1})s)=E(E((e_1+e_{-1})s))=E((b+\sigma_s(b))s)=(b+\sigma_s(b))E(s)=0$，即 $b+\sigma_s(b)=0$，等价地，

$$\mu_k+\mu_{-k}=0,\forall\ k\in\mathbb{Z}.\tag{4}$$

现在我们可以分别比较等式两边 $\binom{1}{j}$ 和 $\binom{-1}{j}$ 的系数，从而由 (2) 推导得出

$$\lambda_1\lambda_{-j}+\frac{1}{2}\mu_{-j}=\lambda_1\lambda_j+\mu_1\mu_{-j},$$
$$\lambda_j\lambda_{-1}+\frac{1}{2}\mu_j=\lambda_{-1}\lambda_j+\mu_{-1}\mu_{-j}.$$

将上述两个方程相加，并应用 (1) 和 (4，得到 $2\lambda_1\lambda_{-j}=0$ 对所有 $j\in\mathbb{Z}$ 均成立。因此 $\lambda_1=0$。然后将其代入上面的第一个方程，得到 $\frac{1}{2}\mu_{-j}=\mu_1\mu_{-j}$。因此，对于所有 $\mu_1=\frac{1}{2}$ 或 $\mu_{-j}=0$ 均成立 $j\in\mathbb{Z}$。

一旦我们有了对所有 $j\in\mathbb{Z}$ 均成立的 $\mu_j=0$，即 $b=0$，那么 $a=E(e_1s)=E(E(e_1s))=E(a)\in P\cap L(\mathbb{Z}^2)'=P\cap L(\mathbb{Z}^2)=A_1$。回顾 (1) 成立，即 $\langle a,A_1\rangle=0$。因此 $a=0$；等价地，$E(e_1s)=0$。因此，我们可以假设 $\mu_1=\frac{1}{2}$，并尝试推导出矛盾。

我们计算 $\binom{-1}{j}$ 在（3）两边的系数，得到 $\lambda_j\mu_{-1}=\lambda_{-1}\mu_j+\lambda_{-j}\mu_{-1}$。将 $\lambda_{-1}=-\lambda_1=0$、$\mu_{-1}=-\mu_1=-\frac{1}{2}$ 代入其中，得到 $\lambda_j=0$ 对所有 $j\in\mathbb{Z}$ 均成立，即 $a=0$。

那么对于任意 $|i|\neq 0,1$，我们计算 $\binom{i}{j}$ 在（3）两边的系数，得到 $0=\lambda_i\lambda_j+\mu_i\mu_{-j}=\mu_i\mu_{-j}$。因此，$\mu_i=0$ 对所有 $|i|\neq 0,1$ 均成立。回想 $\mu_0+\mu_{-0}=0$，即 $\mu_0=0$，因此我们已经证明了 $E(e_1s)=0+\frac{1}{2}(\binom{1}{0}-\binom{-1}{0})s$。

于是，$E(\binom{3}{0}s)=\binom{1}{0}E(e_1s)\binom{-1}{0}=\frac{1}{2}(\binom{3}{0}-\binom{1}{0})s$。因此，

$$P\ni E(\binom{3}{0}s)E(e_1s)=\frac{1}{4}[\binom{3}{0}-\binom{1}{0}][\binom{-1}{0}-\binom{1}{0}]$$
$$=\frac{1}{4}[\binom{2}{0}-1-\binom{4}{0}+\binom{2}{0}]\in L(\mathbb{Z}^2)\setminus A_1.$$

这与 $P\cap L(\mathbb{Z}^2)=A_1$ 这一假设矛盾。

子子情形 II: 在此情形下，$n\geq 2$。$\binom{n}{-j}\notin n\mathbb{Z}^2$ 因此 $E(\binom{1}{-j})=0$，于是，通过比较 $E(e_1s)E(f_1s)$ 与 $E(e_1sE(f_1s))$ 的计算，我们得到以下恒等式：

$$\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\binom{ni}{nj}+\sum_{j,k}\mu_j\mu_k\binom{j}{-k}=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\binom{nj}{-n^2ij}, \tag{5}$$

$$\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j\binom{ni}{j}+\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j\binom{j}{-ni}=\sum_{i,k}\lambda_i\mu_k\binom{k}{-nik}. \tag{6}$$

由（5），我们推导出 $\mu_j\mu_k = 0$ 对所有 $(j,\ -k)^t \notin n\mathbb{Z}^2$。特别地，$\mu_j = 0$ 对所有 $j \notin n\mathbb{Z}$，因此，$b \in L((n\mathbb{Z},\ 0)^t)$。

接下来，注意到

$$\begin{aligned} E((e_1 + e_{-1})s) &= E(e_1 s) + E(e_{-1}s) = (a + bs) + \sigma_s(a + bs) \\ &= (a + \sigma_s(a)) + (b + \sigma_s(b))s = (b + \sigma_s(b))s. \end{aligned}$$

同时，由于 $b+\sigma_s(b) \in A_n \subseteq P$，我们推导出 $(b+\sigma_s(b))s = E((e_1+e_{-1})s) = E(E((e_1 + e_{-1})s)) = E((b + \sigma_s(b))s) = (b + \sigma_s(b))E(s) = 0$，即 $b + \sigma_s(b) = 0$，等价地，

$$\mu_k + \mu_{-k} = 0, \forall\ k \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

对于任意 $i \neq 0$ 和 $j \in \mathbb{Z}$，通过比较等式两边 $\binom{ni}{nj}$ 的系数，可由两个恒等式（5）和（6）推导出

$$\lambda_i\lambda_j + \mu_{ni}\mu_{-nj} = \lambda_{-\frac{j}{ni}}\lambda_i, \forall\ i \neq 0, \forall\ j \tag{8}$$

$$\lambda_i\mu_{nj} + \lambda_{-j}\mu_{ni} = \lambda_{-\frac{j}{ni}}\mu_{ni}, \forall\ i \neq 0, \forall\ j. \tag{9}$$

这里，如果 $(ni) \nmid j$，则将 $\lambda_{-\frac{j}{ni}}$ 视为 0。

将 $j = 1$ 代入（8）和（9），并利用（7）推导出

$$\lambda_i\lambda_1 = \mu_{ni}\mu_n, \forall\ i \neq 0, \tag{10}$$

$$\lambda_i\mu_n = \lambda_1\mu_{ni}, \forall\ i \neq 0. \tag{11}$$

这意味着 $(\lambda_i^2 - \mu_{ni}^2)\lambda_1\mu_n = 0$ 并且 $\lambda_1^2 = \mu_n^2$ (将 $i = 1$ 代入 (10))。将 $j = nik$ 代入 (8) 和 (9)，并利用 (1)，可得

$$\lambda_i\lambda_{nik} - \mu_{ni}\mu_{n^2ik} = \lambda_{-k}\lambda_i, \forall\ i \neq 0, \forall\ k, \tag{12}$$

$$\lambda_i\mu_{n^2ik} - \lambda_{nik}\mu_{ni} = \lambda_{-k}\mu_{ni}, \forall\ i \neq 0, \forall\ k. \tag{13}$$

命题 1：$\lambda_1\mu_n = 0$；等价地，$\lambda_1 = 0 = \mu_n$（因为 $\lambda_1^2 = \mu_n^2$）。

确实，反设不成立，即 $\lambda_1 = \pm\mu_n \neq 0$。由 (10) 可推导出 $\lambda_i = \pm\mu_{ni}$。在两种情形下，由 (12) 可推导出 $\lambda_{-k}\lambda_i = 0$ 对所有 $i \neq 0$ 以及 $k \in \mathbb{Z}$。特别地，$\lambda_i = 0$ 对所有 $i \neq 0$，这与 $\lambda_1 \neq 0$ 这一假设矛盾。

断言 2：$\lambda_i = \mu_{ni} = 0$ 对所有 $i \neq 0$。

首先，我们来验证对于所有 $i \neq 0$，$\lambda_i - \mu_{ni} = 0$。假设此结论不成立，那么对于某个 $i \neq 0$，有 $\lambda_i - \mu_{ni} \neq 0$。在 (8) 中令 $j = i$，可得 $\lambda_i^2 - \mu_{ni}^2 = 0$。因此，我们有 $\lambda_i + \mu_{ni} = 0$，从而 $\lambda_i = -\mu_{ni}$。然后利用这一关系，可由 (12) 和 (13) 推导出 $\lambda_i(\lambda_{nik} + \mu_{n^2ik}) = \lambda_{-k}\lambda_i$以及 $\lambda_i(\lambda_{nik} + \mu_{n^2ik}) = -\lambda_{-k}\lambda_i$。因此，对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，$0 = \lambda_{-k}\lambda_i$，从而 $\lambda_i = 0$ 和$\mu_{ni} = -\lambda_i = 0$，这与假设 $\lambda_i - \mu_{ni} \neq 0$ 矛盾。因此，我们已证明对于所有 $i \neq 0$，$\lambda_i = \mu_{ni}$。接着，由 (12) 可知，对于所有$i \neq 0$，$\lambda_{-k}\lambda_i = 0$，从而对于所有 $i \neq 0$，$\lambda_i = 0$。

根据断言 2 以及对于所有 $j \notin n\mathbb{Z}$， $\mu_j = 0$ 这一事实，我们推导出 a， $b \in \mathbb{C}$；然后对 $E(e_1 s) = a + bs$ 取迹，得到 $a = 0$。对 $E(e_1 s) = bs$ 取 E，得到 $bs = E(bs) = bE(s) = 0$，即 $b = 0$，因此 $E(e_1 s) = 0$。□

这就完成了命题3.1 的证明，从而也完成了定理1.1。 □

最后，我们来证明推论1.2。

推论1.2的证明。设 P 是 G-不变的 von Neumann 子代数，且包含于 $L(G)$ 中，并具有 Haagerup 性质。根据定理1.1， $P = A_n$ 对于某个 $n \geq 0$，或者 $L(H)$ 对于某个具有 Haagerup 性质的正规子群 $H \lhd G$。由 JS21，命题 2.10]，，我们知道 $H \subseteq \mathbb{Z}^2 \rtimes \{\pm I_2\}$，其中 I_2 表示 $SL_2(\mathbb{Z})$ 中的单位矩阵。因此，在两种情形下都有 $P \subseteq L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \{\pm I_2\})$。注意， $L(\mathbb{Z}^2 \rtimes \{\pm I_2\})$ 显然是 G-不变的，并且具有 Haagerup 性质，因此它是具有这些性质的极大者。□

4. 评注与开放问题

本节记录本文所采用策略的一些评注，以及值得进一步研究的开放问题。

注意，根据 [BO08，推论 15.3， $G = \mathbb{Z} \wr F_2$ 也是一个双精确群，9] 且其可 amenable 根为 $\oplus_{F_2}\mathbb{Z}$。因此，对于 G-不变的冯·诺依曼子代数 P，其中 $L(G)$，我们也可以采用本文所用的相同策略，推导出以下结论之一：对于某个非可和正规子群 $H \subseteq G$，有 $P = L(H)$；或者 $P \subseteq L(\oplus_{F_2}\mathbb{Z})$ 是 F_2-不变的。等价地，对于某个伯努利移位 $F_2 \curvearrowright (\mathbb{T}^{F_2}, \mu^{F_2})$ 的商作用 $F_2 \curvearrowright (Y, \nu)$，有 $P = L^\infty(Y, \nu)$。然而，似乎不可能明确描述所有商作用 $F_2 \curvearrowright (Y, \nu)$。

下面列出一些与本文相关的开放问题。

首先是找出更多不具有 ISR性质的 icc 群 G，使得可以对 $L(G)$ 中所有G-不变冯·诺依曼子代数进行分类。特别地，我们提出以下问题。

问题 4.1 (Amrutam 提出)。 设 $n \geq 3$。令 $G = \mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$ 以及$M = L(G)$。对 M 中所有 G-不变冯·诺依曼子代数进行分类。

问题 4.2。 在 [Val24]， *Valette* 研究了群$\mathbb{Z}^2 \rtimes GL_2(\mathbb{Z})$ =的一个非常优美的推广： G_1 至 $G_n := \mathbb{Z}^{n+1} \rtimes_{\rho_n} GL_2(\mathbb{Z})$，并证明所有 G_n*'s* 在极大 *Haagerup* 子群上的分类也类似。对所有 G_n-不变冯·诺依曼子代数进行分类，其中 $L(G_n)$ 对所有 $n \geq 2$。

其次，我们可以考虑一个一般性问题：在带迹冯·诺依曼代数 H 中，如何对所有 (M, τ)-不变冯·诺依曼子代数进行分类，其中 M 的选择适当，且 $H \subseteq \mathcal{U}(M)$ 是一个可数子群。秉承 [AH24 中的思路，猜想],提出以下问题。值得注意的是，在所有这些问题中，介于 $L(G)$ 与 M之间的中间冯·诺依曼子代数均由 [CD20、Wit94、Jia 进行分类。

问题 4.3。设 $G = F_2$ 为由两个生成元生成的非阿贝尔自由群，$\{G_n\}_{n\geq 1}$ 是 G 中一列递减的正规子群，其交为平凡群。考虑相应的余有限作用 $G \curvearrowright X := \varprojlim G/G_n$。对 $M = L^\infty(X) \rtimes G$ 中所有 G-不变冯·诺依曼子代数进行分类。

问题 4.4。设 $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes_\rho G$，其中 $\rho : G = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}) \to Aut(\mathbb{Z}^2)$ 是商映射 $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow SL_2(\mathbb{Z})$ 与嵌入$SL_2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow Aut(\mathbb{Z}^2)$的复合。分类 G-不变的冯·诺依曼子代数 $M = L(\Gamma)$。

问题 *4.5*。设 $M = L^\infty(X, \mu) \rtimes G$，其中 $G := PSL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright (X, \mu)$（如 [Jia21] 中所研究的）表示将中心子群作用 $\{\pm id\} \curvearrowright \mathbb{T}^2$ 以及该作用的核取商后得到的 $SL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^2$。$M$ 中的每个 G-不变冯·诺伊曼子代数是否都具有 $L^\infty(Y, \nu) \rtimes H$ 的形式，其中 $H \lhd PSL_2(\mathbb{Z})$ 是某个正规子群，而 $PSL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright (Y, \nu)$ 是作用 $PSL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright (X, \mu)$ 的一个商作用？

参考文献

[AGV14] M. Abért、Y. Glasner 和 B. Virág，关于不变随机子群的 Kesten定理，《Duke Math. J.》163 (2014)，第 3 期，465–488。[AB21] V. Alekseev 和 R. Brugger，关于归一化子因子的刚性结果，《J. Operator Theory》86 (2021)，第 1 期，3–15。[AH24] T. Amrutam 和 Y. Hartman，子代数、子群与奇异性，《Bull. Lond. Math. Soc.》56 (2024)，第 1 期，380–395。[AHO25] T. Amrutam、Y. Hartman 和 H. Oppelmayer，关于群冯·诺伊曼代数的可 amenable 子代数，《J. Funct. Anal.》288 (2025)，第 2 期，论文编号 110718，共 20 页。[AJ23] T. Amrutam 和 Y. Jiang，关于不变冯·诺依曼子代数刚性性质，《J. Funct. Anal.》284 (2023)，第 5 期，论文编号 109804。[ADP19] C. Anantharaman-Delaroche 和 S. Popa，II_1 factors 简介，2019，见 https://www.math.ucla.edu/~popa/Books/IIun.pdf。[BdlH20] B. Bekka 和 P. de la Harpe，群的酉表示、对偶与特征标，《数学综述与专著》，第 250 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2020。[BO08] N. P. Brown 和 N. Ozawa，C^*-代数与有限维逼近，《数学研究生教程》，第 88 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008。[CD 20] I. Chifan 和 S. Das，来自概率空间上群的余有限作用的混合扩张的冯·诺依曼代数的刚性结果，《Math. Ann.》378 (2020)，第 3–4 期，907–950。[CDS23] I. Chifan、S. Das 和 B. Sun，来自负曲率群的冯·诺依曼代数的不变子代数，《J. Funct. Anal.》285 (2023)，第 9 期，论文编号 110098。[CS13] I. Chifan 和 T. Sinclair，关于负曲率群的 II_1 factors 的结构理论，《Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.》(4) 46 (2013)，第 1 期，1–33。[Gel18] T. Gelander，关于不变随机子群与格的观点，《国际数学家大会论文集——里约热内卢 2018》，第二卷，特邀报告，World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克，2018，第 1321–1344 页。

[Ioa10] A. Ioana，$SL_2(\mathbb{Z})$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上的作用所诱导的子等价关系的相对性质（T），《Adv. Math.》224 (2010)，第 4 期，1589–1617。[Ioa12] ，Popa 的 $\mathcal{HT}$ factors 的群测度空间分解的唯一性，《Geom. Funct. Anal.》22 (2012)，第 3 期，699–732。[Ioa18] ，冯·诺依曼代数的刚性，《国际数学家大会论文集——里约热内卢 2018》，第三卷，特邀报告，World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克，2018，第 1639–1672 页。[Jia21] Y. Jiang， $L(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}))$ 中的极大 Haagerup 子代数，《J. Operator Theory》86 (2021)，第 1 期，203–230。[JS21]Y. Jiang 和 A. Skalski，具有 Haagerup 性质的极大子群与冯·诺伊曼子代数，《Groups Geom. Dyn.》15 (2021)，第 3 期，849–892。[JZ24] Y. Jiang 和 X. Zhou，具有 ISR性质的无限可近群的一个例子，《Math. Z.》307 (2024)，第 2 期，论文编号 23，共 11 页。[JV23] P. Jolissaint 和 A. Valette， $SL_2(\mathbb{Z})$ 在 $\mathbb{T}^n$ 上的线性作用：遍历及冯·诺依曼代数方面（2023），arXiv: 2311.02683。[KP23] M. Kalantar 和 N. Panagopoulos，关于群代数和冯·诺依曼代数的不变子代数，《Ergodic Theory Dynam. Systems》43 (2023)，第 10 期，3341–3353。[Oza06] N. Ozawa，II_1 factors 的 Kurosh 型定理，《Int. Math. Res. Not.》(2006)，文章编号 97560，共 21 页。[Oza09] ，坚实冯·诺依曼代数的一个例子，《Hokkaido Math. J.》38 (2009)，第 3 期，557–561。[Par92] K. K. Park，GL(2,Z) 在二维环面上的作用，《Proc. Amer. Math. Soc.》114 (1992)，第 4 期，955–963。[Pop06] S. Popa，具有贝蒂数不变量的一类 II_1 factors，《Ann. of Math.》(2) 163 (2006)，第 3 期，809–899。[Pop07] ，群作用与冯·诺依曼代数的变形与刚性，《国际数学家大会论文集》，第一卷，Eur. Math. Soc.，苏黎世，2007，第 445–477 页。[PV14] S. Popa 和 S. Vaes，任意双曲群作用所产生的 II_1 factors 的唯一 Cartan 分解，《J. Reine Angew. Math.》694 (2014)，215–239。[Sak09] H. Sako，群的测度等价刚性与双精确性，《J. Funct. Anal.》257 (2009)，第 10 期，3167–3202。[Vae10] S. Vaes，冯·诺依曼代数及其不变量的刚性，《国际数学家大会论文集》，第三卷，Hindustan Book Agency，新德里，2010，第 1624–1650 页。[Val24] A. Valette， $\mathbb{Z}^{n+1} \rtimes_{\rho_n} GL_2(\mathbb{Z})$ 中的极大 Haagerup 子群，《Studia Math.》275 (2024)，第 3 期，263–283。[Wit94] D. Witte，齐性空间上幺幂平移的可测商空间，《Trans. Amer. Math. Soc.》345 (1994)，第 2 期，577–594。

Yongle Jiang，数学科学学院，大连理工大学，大连，116024，中国电子邮箱地址：yonglejiang@dlut.edu.cn

Ruoyu Liu，数学科学学院，大连理工大学，大连，116024，中国

当 ISR 性质失效时的不变子代数 1

5现地址：中国大连市大连金普新区高城山中学，邮编 116100电子邮箱地址：liuruoyu0925@163.com