arXiv:2601.06353v1 [math.OA] 9 Jan 2026

具有性质（T）的一类因子中的不变子代数分类

YONGLE JIANG* 和 HONGYI LI

摘要。设 $n \geq 2$ 和 $G_n = \mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$。我们对 $L(G_n)$ 中的所有 G_n-不变冯·诺伊曼子代数进行分类。对于 $n = 2$，这为 Jiang-Liu 先前的结果提供了一种替代证明。对于 $n \geq 3$，这给出了第一类不具有不变子代数刚性性质、但其相应群因子中的不变子代数仍可分类的性质（T）群。作为推论，$L(G_n)$ 存在唯一的极大 Haagerup G_n-不变冯·诺伊曼子代数。

1. 引言

性质（T）由 Kazhdan 的一篇论文引入 [Kaž67], ，是群的一种基本刚性性质，在数学的多个领域都有广泛应用，包括群论、动力系统和算子代数（概述见[BdlHV08] ）。它在众多刚性定理的证明中尤为重要。例如，在群论中，性质（T）在高秩格的 Margulis 正规子群定理中发挥着关键作用 [Mar91]。在算子代数中，它既是 Connes 关于具有可数对称群的因子的开创性研究的基础 [Con80] ，也是 Popa 关于余循环超刚性和轨道等价超刚性的卓越研究的基础 [Pop06a、Pop06b、Pop07a]。此外，它在冯·诺伊曼代数理论的许多刚性现象中居于核心地位，概述见 [Pop07b、Vae10、Ioa18、Hou23]。

设 Γ 为一个可数离散群——特别是半单李群中一个高秩格子子群 $\mathbb{G}$，且具有 Kazhdan 性质 (T)。本文研究群冯·诺依曼代数 $L(\Gamma)$中在 Γ的共轭作用下不变的冯·诺依曼子代数的分类，沿袭 [AB21、KP23、CD20]。

的主要动机之一是 [AB21，KP23] 寻求 Margulis 正规子群定理的非交换推广。现在，让我们从不同的角度来考察这一研究方向。首先，我们注意到近年来

日期：2026年1月13日。2020 数学主题分类。主要分类 46L10；次要分类 22D55、47C15。关键词与短语。性质（T）、不变冯·诺伊曼子代数、Haagerup 根、特征标。*通讯作者。

人们对具有性质（T）的 II_1 因子结构的关注日益增加，例如$L(\Gamma)$。目前，有两个方向的问题尤为突出。

第一种思路源自 Connes 的建议：将 $\Gamma < \mathcal{U}(L(\Gamma))$ 嵌入 $L(\Gamma)$ 的酉群，与将格 $\Gamma < \mathbb{G}$ 嵌入相应李群 $\mathbb{G}$ 之间，应当存在丰富的类比。具体而言，人们预期算子代数背景下的某些超刚性现象也应成立（相关讨论见 [Jon00,CP24, Pet14]）。这一方向的进展可参见例如 [Bek07, PT16, CP24, BH21, BBHP22, DP22, DGG+25] 及其中的参考文献。这一研究路线本质上考察 Γ 在酉群 $\mathcal{U}(L(\Gamma))$ 中的位置。

第二个主要问题是 Connes 关于群冯·诺依曼代数同构的刚性猜想。他猜想，若 Γ 是一个具有性质（T）的无限 icc（无限共轭类）群，那么对于任意群 Λ，任何同构 $L(\Gamma) \cong L(\Lambda)$ 都会推出 $\Gamma \cong \Lambda$。最近， [CIOS23], 在这一猜想方面取得了一项重要成果，他们构造出了一个满足该猜想性质的性质（T）群。注意， $L(\Gamma) \cong L(\Lambda)$ 蕴含它们的酉群之间存在同构。此外，当 Γ 是 icc 时，任何此类同构都会整体保持 $\mathbb{T}$（视为常值酉元）（因为 $\mathbb{T} = \mathcal{Z}(L(\Gamma)) \cap \mathcal{U}(L(\Gamma))$），因而诱导出一个同构 $\mathcal{U}(L(\Gamma))/\mathbb{T} \cong \mathcal{U}(L(\Lambda))/\mathbb{T}$。显然， Γ嵌入 $\mathcal{U}(L(\Gamma))/\mathbb{T} \cong \mathrm{Inn}(L(\Gamma))$，即 $L(\Gamma)$ 的内自同构群。

因此，这两个问题都与研究以下嵌入有关

$$\Gamma < \mathcal{U}(L(\Gamma))/\mathbb{T} \cong \mathrm{Inn}(L(\Gamma)),$$

即 Γ 在 $L(\Gamma)$ 上的共轭作用。因此，研究这种共轭作用或许有助于理解这两个著名问题。

在此背景下，受 [KP23], 启发，Amrutam 与第一作者最近提出并研究了一种新的特定刚性形式——称为不变子代数刚性（ISR）性质，见 [AJ23]。若一个可数离散群 G满足 ISR 性质，则其每个 G-不变冯·诺依曼子代数$L(G)$ 都具有 $L(N)$ 的形式，其中 $N \lhd G$ 是某个正规子群。换言之，对于 G， $L(G)$ 中不变子代数的格会受到严格限制，并且可以分类 G 。

虽然许多群都已被证明满足 ISR 性质，包括某些高秩格 [KP23], 具有平凡可 amenable 根的轴双曲群 [CDS23], 有限个非阿贝尔自由群的直和 [AJ23] 甚至广泛类别的可 amenable 群 [JZ24, DJ24, ADJS25], 但对于不具有 ISR 性质的 G ，其 G不变子代数结构却鲜为人知。事实上，迄今为止只有两篇相关论文。在 [JL23], 中，第一作者与 Liu 合作，分类了 $L(\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}))$ 中所有的不变冯·诺伊曼子代数。在与 Amrutam-Dudko-Skalski 的合作中 [ADJS25], ，我们构造了一个不具有 ISR 性质的可 amenable 群，但其不变冯·诺伊曼子代数

$L(G)$仍然可以分类。但对于具有性质（T）的群，情况如何？能否分类 $L(G)$中一个具有性质（T）但不具有 ISR 性质的群 G的所有不变冯·诺伊曼子代数？鉴于人们认为所有具有平凡可 amenable 根的非 amenable 群都可能具有 ISR 性质 [CDS23，DJ24], 因此，为了回答这些问题，自然会考虑具有非平凡可 amenable 根的性质（T）群。

本文旨在展示一类自然的具有性质（T）的群，它们不具备ISR性质，但对于这类群，仍然可以完整分类 G-不变冯·诺伊曼子代数 $L(G)$。以下是我们的主要结果，它完全回答了 [JL23中的问题4。1]。

定理 *1.1.* 设 $G_n = \mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$ $n \geq 2$。则冯·诺依曼子代数$P \subseteq L(G_n)$ 是 G_n-不变的，当且仅当或者 $P = L(H)$ 对某个正规子群$H \subseteq G_n$ 成立，或者 $P = A_d$ 对某个 $d \geq 1$成立，其中 $A_d := \{x \in L(d\mathbb{Z}^n) : \tau(xu_g) = \tau(xu_{g^{-1}})$ $\forall\, g \in d\mathbb{Z}^n\} \subsetneq L(d\mathbb{Z}^n)$，这里 τ 表示定义在 $L(G_n)$ 上的规范迹，其定义为 $\tau(x) = \langle x\delta_e;\ \delta_e\rangle$ 对任意 $x \in L(G_n) \subseteq B(\ell^2(G_n))$，并且 $d\mathbb{Z}^n = (d\mathbb{Z})^n$ 是 $\mathbb{Z}^n$的子群。

注意，G_n 是具有性质（T）的高秩格群 $n > 2$ [BdlHV08，例 1.7.4(i)]。这表明，在 $L(G_n)$内部，不变冯·诺伊曼子代数仅来自两个自然来源：正规子群，或代数作用的（可测）因子映射 $SL_n(\mathbb{Z})\curvearrowright d\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{T}^n$ 的半直积结构 G_n。我们指出，在可 amenable 的情形下，[ADJS25]中也得到了类似结果。

有了这个定理，我们便可证明存在一个唯一的极大 Haagerup 不变冯·诺伊曼子代数，如 [JL23]中所示。

推论 1.2。设 $G_n = \mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$。则 $L(\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})$ 在 n 为偶数时；而 $L(\mathbb{Z}^n)$ 在 n 为奇数时，是 $L(G_n)$ 中唯一的极大 *Haagerup* G_n-不变冯·诺伊曼子代数，其中 I_n 表示 $SL_n(\mathbb{Z})$中的单位矩阵。

关于证明方法。将我们对 $n > 2$ 的证明与 [JL23] 对 $n = 2$给出的证明进行比较，关键区别在于分类非 amenable 不变子因子所采用的策略，这也是整个证明中最困难的核心部分。

在 [JL23], 中，（非内 amenable 不变子代数的）分类直接由 [CDS23，定理 5.1] 得出，因为 G_2 是满足 [CDS23，定理 5.1] 中条件 2) 的 icc 精确群。我们指出，该定理的证明主要基于 Popa 强大的变形/刚性理论框架中发展出的技术。这一策略不适用于 G_n 并不令人意外，因为 $n > 2$。Chifan-Sinclair [CS13，定理 A] 证明，若群 G 满足这一条件，则 $L(G)$ 按 Ozawa [Oza04], 的意义是坚实的，即对于每个弥散 von Neumann 子代数 $A \subset L(G)$，$A' \cap L(G)$ 都是可 amenable 的。显然，对于 $n > 2$，若

我们取 $A = L(\mathbb{Z}) \subset L(\mathbb{Z}^n) \subset L(G_n)$，其中 $\mathbb{Z} = \langle e_1 \rangle$ 满足 $e_1 = (1, 0, \ldots\ldots, 0)^t \in \mathbb{Z}^n$，则 $L(SL_2(\mathbb{Z})) \subset A' \cap L(G_n)$。因此 $L(G_n)$ 并不坚实。

为了解决上述问题，我们采用了 [JZ24、DJ24] 在研究 ISR性质时发展出的特征标方法。新的关键在于引理2.2，我们在其中证明 $\mathbb{Z}^n$ 满足了 [DJ24]中引入的所谓不可因子化正则特征性质的一个修正版。

事实上，上述方法也一致适用于所有 $n \geq 2$ （见命题3.1），尽管由于 n 中存在非平凡中心，我们需要根据 $SL_n(\mathbb{Z})$ 的奇偶性拆分整个证明；当 n为偶数时尤其如此。即使对于 $n = 2$，这也为先前工作 [JL23]中的主定理提供了另一种证明。事实上，我们不再像P 中那样 [JL23], 通过考察可 amenable/非内 amenable 不变子代数来拆分证明，而是先对中心 $\mathcal{Z}(P)$ 进行分类（见引理3.6）。

最后，我们指出，尽管我们的证明并未直接诉诸 $G_n (n > 2)$ 的性质（T）或群-子群对 $(G_2, \mathbb{Z}^2)$的相对性质（T），但我们所使用的作用 $SL_n(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^n$ 的刚性现象，尤其是对其遍历测度的分类 [Bur91，命题 9] 以及对其因子作用的分类 [Wit94，例5，9],本身就是环境群刚性或群-子群对的相对刚性的间接体现。因此，$G_n (n > 2)$ 的性质（T）或群 - 子群对 $(G_2, \mathbb{Z}^2)$ 的相对性质（T）在我们的结果中发挥着隐含的支撑作用。

本文的组织。文章的详细安排如下：在本引言之后，我们将在第2节准备关于群方面以及与 G_n相关的动力学性质的引理，并证明 $SL_n(\mathbb{Z})$-不变特征标在 $\mathbb{Z}^n$ (引理2.2）上的不可因子化性质。除推论 1.2 的证明外，定理 1.1 的证明占据了第 3 节的全部篇幅。

致谢。J.Y.感谢Amrutam Tattwamasi博士提出[JL23，问题4。1]由此开启了本项目；他也感谢博士抽出时间阅读本文的早期版本并提出意见，这些意见极大地改善了本文的表述。他还感谢Amrutam Tattwamasi博士、Artem Dudko教授和Adam Skalski教授的合作 [ADJS25], ，他从中获益良多。本研究部分得到国家自然科学基金委员会（项目编号12471118）的资助。

2. 预备知识

本节准备关于群、特征和动力学性质的引理，它们与 $G_n = \mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$有关。

引理 2.1。设 $G = SL_n(\mathbb{Z})$ 适用于 $n \geq 2$。考虑自然群作用$G = SL_n(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^n$。那么，对于任意给定的正整数 $k \geq 1$， $\mathbb{T}^n$ 中至多有可数多个点，其 G-轨道包含 k个点。

证明。对于任意 $s=(s_{ij})_{1\le i,\ j\le n}\in G$ 以及 $z=(z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots,\ z_n)^t\in\mathbb{T}^n$，该作用定义为

$$z\overset{s}{\mapsto}sz=\begin{pmatrix} z_1^{s'_{11}}z_2^{s'_{12}}\cdots\ z_n^{s'_{1n}}\\ z_1^{s'_{21}}z_2^{s'_{22}}\cdots\ z_n^{s'_{2n}}\\ \cdots\cdots\\ z_1^{s'_{n1}}z_2^{s'_{n2}}\cdots\ z_n^{s'_{nn}}\end{pmatrix},$$

其中 $s'=(s^{-1})^T=(s'_{ij})_{1\le i,\ j\le n}$。

为避免符号冲突，我们直接用$\sqrt{-1}$ 表示虚数单位i。记 $z_i=e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_i}$ 为 $i=1$、……、n。假设 z的轨道大小为 k，即 $\#\mathrm{orb}(z)=\#\{gz:\ g\in G\}=k$。根据轨道-稳定子定理，$[G:\mathrm{stab}(z)]=k$，其中 $\mathrm{stab}(z)=\{g\in G:\ gz=z\}$。任取 $s\in\mathrm{stab}(z)$，等式 $sz=z$可转化为

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}(s'_{11}\theta_1+s'_{12}\theta_2+\cdots+s'_{1n}\theta_n)}\\ e^{2\pi\sqrt{-1}(s'_{21}\theta_1+s'_{22}\theta_2+\cdots+s'_{2n}\theta_n)}\\ \cdots\\ e^{2\pi\sqrt{-1}(s'_{n1}\theta_1+s'_{n2}\theta_2+\cdots+s'_{nn}\theta_n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_1}\\ e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_2}\\ \cdots\\ e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_n}\end{pmatrix},$$

$_n$这等价于 $\sum s'_{ij}\theta_j=\theta_j+2k_i\pi,\ \forall i=1$、……、$n$，其中 k_1、……、k_n 是$_{j=1}$整数。因此，向量 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1$、……、$\theta_n)^t$ 满足线性方程组 $((s^{-1})^T-I_n)\boldsymbol{\theta}\in($ $2\pi\mathbb{Z})^n$。如果存在一个 $s\in\mathrm{stab}(z)$使得 $\det((s^{-1})^T-I_n)\neq0$，那么对于某个整数向量 $\boldsymbol{b}\in(2\pi\mathbb{Z})^n$，有$\boldsymbol{\theta}=((s^{-1})^T-I_n)^{-1}\boldsymbol{b}$。

显然，为完成证明，只需验证 $\{s\in G:\det((s^{-1})^T-I_n)=0\}$不可能包含 G 的任何有限指数子群。注意，$\det((s^{-1})^T-I_n)=0$当且仅当 $\det(s-I_n)=0$。

注意，根据 [Jia23，命题 3，4]，存在某个 $s\in G$ 使得 s 的所有特征值的绝对值都不等于 1。因此，对于任意 $M\ge1$，s^M 的特征值都不等于 1。因此，$\det(s^M-I_n)\neq0$。由于我们可以取 $M\ge1$ 使得 s^M 属于任意给定的有限指数子群，证明得证。□

回顾一下，可数离散群 G 上的特征是一个映射 $\phi\colon G\to\mathbb{C}$，满足 ϕ 是幺元的（即 $\phi(e)=1$）、正定的（见 [BdlH20，定义 1.B.1]），且共轭不变（即对所有 s、$g\in G$，$\phi(sgs^{-1})=\phi(g)$）。注意，在阿贝尔群 G 上，特征的共轭不变条件自动成立。根据博赫纳定理，可数离散$\widehat{\ }$阿贝尔群 A 上的每个幺正正定函数都对应于庞特里亚金对偶 A[上的一个概率测度（参见 BdlHV08，定理 D.2.2]）。

以下引理是应用特征标方法所需的新要素，其灵感来源于 [DJ24，命题 3。13]。

引理 2.2。设 $n\ge2$。设 ϕ、ψ 是 $\mathbb{Z}^n$上的两个特征标。记 $\phi=\int_{\mathbb{T}^n}d\mu$、$\psi=\int_{\mathbb{T}^n}d\nu$，其中 μ 和 ν 是 $\mathbb{T}^n$上的概率测度。假设二者均为 μ

且 ν 是 $SL_n(\mathbb{Z})$-不变的，并且 $\phi(g)\psi(g) = 0$ 对所有 $e \neq g \in \mathbb{Z}^n$成立。那么 $\phi \equiv \delta_e$ 或$\psi \equiv \delta_e$，其中 e 表示 $\mathbb{Z}^n$中的单位元。

证明。根据 [Bur91，命题 9]，，我们知道 μ 和 ν 都是遍历 $SL_n(\mathbb{Z})$-不变测度的凸组合，其中这些测度要么是哈尔测度，要么是支撑在 $SL_n(\mathbb{Z})$-不变有限子集上的原子测度 $\mathbb{T}^n$。

∞ ∞记 $\mu = \lambda \cdot$哈尔 $+ \sum \lambda_i \mu_i$， $\nu = \lambda' \cdot$哈尔 $+ \sum \lambda'_i \nu_i$，其中所有 μ_i 和 $\nu_i{}_{i=1}$ $_{i=1}$均表示 $SL_n(\mathbb{Z})$-不变的某个原子测度，其定义在 $\mathbb{T}^n$ 上；而哈尔表示 $\mathbb{T}^n$上的哈尔测度。注意，根据引理 2.1以及以下事实，该和是可数和：∞ ∞1 $= \lambda + \sum \lambda_i = \lambda' + \sum \lambda'_i$ 所有系数均非负。$_{i=1}$ $_{i=1}$

注意，对于任意 $s \in \mathbb{Z}^n$，我们有

$$\phi(s) = \lambda \delta_e(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \int_{\mathbb{T}^n} \langle \chi, s \rangle d\mu_i(\chi),$$

$$\psi(s) = \lambda' \delta_e(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda'_i \int_{\mathbb{T}^n} \langle \chi, s \rangle d\nu_i(\chi).$$

在上述表达式中，若记 $s =$(s1、……、 sn)$^t \in \mathbb{Z}^n$ 和 $\chi =$(χ1、……、 χn)$^t \in \mathbb{T}^n$，则配对 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\langle -, - \rangle} \mathbb{T}$ 定义为 $\langle \chi, s \rangle := \prod_{i=1}^{n} \chi_i^{s_i} \in \mathbb{T}$.

我们旨在证明 $\lambda = 1$ 或 $\lambda' = 1$。假设结论不成立，则0 $\leq \lambda < 1$ 且 $0 \leq \lambda' < 1$。

由于 μ_i 是一个原子测度，其支撑在 $\mathbb{T}^n$ 中某个 SL_n(ℤ)-不变的有限子集上，因此存在某个有限指数子群 $G_i \in SL_n$(ℤ)，使得对于所有 $x \in$supp(μ_i)，都有 $\forall g \in G_i$， $gx = x$。注意，这意味着 $\forall v \in \mathbb{Z}^n$，我们有 $\langle gx, v \rangle = \langle x, v \rangle$，即对于所有 $v \in \mathbb{Z}^n$ 以及所有 $x \in$supp(μ_i)，都有 $\langle x, g^{-1}v - v \rangle = 1$。相应地，我们将与 v_i 关联的有限指数子群记作 F_i。

∞ ∞设 $c = \sum \lambda_i, c' = \sum \lambda'_i$。由于 $0 < c \leq 1$ 和 $0 < c' \leq 1$，我们可以找到一个足够大的$_{i=1}$ $_{i=1}$$I$，使得 $\sum \lambda_i > \frac{c}{2}$ 和 $\sum \lambda'_i > \frac{c'}{2}$。根据我们$_{i=1}$ - $_{i=1}$上文的解释，存在 H 的某个有限指数子群 SL_n(ℤ)，使得 $\forall g \in H$,$_I$ $_I$我们有 $\langle x, g^{-1}v - v \rangle = 1, \forall v \in \mathbb{Z}^n$, $\forall x \in$(⋃supp(μ_i)) ⋃(⋃supp(ν_j)) $\subset \mathbb{T}^n$.$_{i=1}$ $_{j=1}$注意，这里我们使用了前面提到的配对定义 $\langle -, - \rangle_I$具体而言，我们可以取 $H = \bigcap$($G_i \cap F_i$)，它仍然具有有限指数，因为有限指数子群的有限交仍是有限指数子群。现在，对于所有 $g \in H$ 和

所有 $v \in \mathbb{Z}^n$，我们有

$$\int_{\mathbb{T}^n} \langle \chi, g^{-1}v - v\rangle d\mu_i(\chi) = 1 = \int_{\mathbb{T}^n} \langle \chi, g^{-1}v - v\rangle d\nu_i(\chi), 1 \le i \le I.$$

因此，我们推得，对于任意 $g \in H$ 以及任意满足 s 的 $v \in \mathbb{Z}^n : = g^{-1}v - v \neq e$，都有

$$\begin{aligned} |\phi(s)| &= |0 + \sum_{i=1}^{I} \lambda_i + \sum_{i=I+1}^{\infty} \lambda_i \int_{\mathbb{T}^n} \langle \chi, s\rangle d\mu_i(\chi)| \\ &\ge \sum_{i=1}^{I} \lambda_i - \sum_{i=I+1}^{\infty} \lambda_i = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i - (c - \sum_{i=1}^{I} \lambda_i) = 2\sum_{i=1}^{I} \lambda_i - c > 0. \end{aligned}$$

因此，$\phi(s) \neq 0$。类似地，$\psi(s) \neq 0$。这与 $\phi(s)\psi(s) = 0$ 矛盾。□

众所周知，在任意可数离散群 G 中，都存在唯一最大的可 amen 正规子群，称为 G 的可 amenable 根，记作 $Rad(G)$。注意，$Rad(G)$ 包含 G 的所有可 amen 正规子群。我们将在下面的引理中确定 G_n 的可 amenable 根。

引理 2.3。令 $G_n = \mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$ $n \ge 2$,

$$Rad(G_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}^n, n \ is \ odd \\ \mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}, \ n \ is \ even, \end{cases}$$

其中，$Rad(G_n)$ 是 G_n 的可 *amenable* 根，而 I_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵。

证明。设 $H = \text{Rad}(G_n)$。令 $H\mathbb{Z}^n = \{hz \mid h \in H, z \in \mathbb{Z}^n\}$。由于 H 和 $\mathbb{Z}^n$ 都是 G_n 中的正规子群，因此它们的乘积 $H\mathbb{Z}^n$ 也是 G_n 中的正规子群。

考虑短正合列:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow H\mathbb{Z}^n \longrightarrow \frac{H\mathbb{Z}^n}{\mathbb{Z}^n} \cong \frac{H}{H \cap \mathbb{Z}^n} \longrightarrow 1,$$

这里 $\mathbb{Z}^n$ 是可 amenable 的。由第二同构定理，我们得到 $\frac{H\mathbb{Z}^n}{\mathbb{Z}^n} \cong \frac{H}{H\cap\mathbb{Z}^n}$。商群 $\frac{H}{H\cap\mathbb{Z}^n}$ 是可 amenable 的，因为 H 是可 amenable 的。由于可 amenable 性在群扩张下保持不变，因此 $H\mathbb{Z}^n$ 也是可 amenable 的。由可 amenable 根的极大性，我们得到 $H\mathbb{Z}^n \le H$。结合$\mathbb{Z}^n \le H\mathbb{Z}^n$，可得链 $\mathbb{Z}^n \le H\mathbb{Z}^n \le H$。因此，$H = \mathbb{Z}^n \rtimes K$，其中 $K = \{g \in SL_n(\mathbb{Z}) \mid (0, g) \in H\}$。任取 $g \in SL_n(\mathbb{Z})$ $k \in K$，我们计算得$(0, g)(0, k)(0, g)^{-1} = (0, gkg^{-1})$。由于 $H \lhd G_n$，我们有$(0, gkg^{-1}) \in H$，因此$gkg^{-1} \in K$。于是 $K \lhd SL_n(\mathbb{Z})$。此外，$K \cong \frac{H}{\mathbb{Z}^n}$ 和 H 是可 amenable 的，所以 K也是。—

众所周知，$SL_n(\mathbb{Z})$ 的可 amenable 根在偶数 n 时为 $\{\pm I_n\}$，在奇数 n 时为平凡子群。事实上，对于 $n \ge 3$，我们可以应用 Margulis 正规子群

定理（[Mar91，第四章]）来推断，可 amenable 根是 SL_n（$\mathbb{Z}$）中的有限正规子群， SL_n（$\mathbb{Z}$）（[Mor15，第 17 节。1]），因此它包含于 $n = 2$的中心内，故等于中心。对于 [JS21，这在命题 2 的证明中已有说明。10]。

由于 K 是 SL_n（$\mathbb{Z}$）的正规可 amenable 子群，因此我们有 $K \subseteq \{\pm I_n\}$。因此，$H = \mathbb{Z}^n \rtimes K \subseteq \mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}$。显然可以验证， $\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}$ 是 G_n 中的正规且可 amenable 子群。由 H 的极大性可得 $\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\} = H$。□

回顾一下，关于 [JS21], 群的 Haagerup 根（即最大的正规 Haagerup 子群）这一概念已有研究。尽管目前尚不清楚每个可数离散群是否都存在 Haagerup 根，但已有研究表明，对于$G_2 = \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$，其 Haagerup 根存在，且与其可 amenable 根一致，参见 [JS21，命题 2。10], 这一结果在 [Val24，命题 4 中1]推广到了其他半直积环境群。我们将上述关于 G_2 的 Haagerup 根的结果推广到所有 $n \geq 2$，这将用于推论1.2的证明。

引理 2.4。 设 $n \geq 2$ 和 $G_n = \mathbb{Z}^n \rtimes SL_n$（$\mathbb{Z}$）。则 G_n 具有 *Haagerup* 根：当 n 为奇数时为 $\mathbb{Z}^n$，当 n为偶数时为 $\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}$，其中 I_n 表示$n \times n$ 单位矩阵。

证明。对于 $n = 2$，这已在 [JS21，命题 2.10]中证明。我们不妨设$n \geq 3$。按照 [JS21，命题 2.10], 的证明，设 H 是 G_n 的任意一个具有 Haagerup 性质的正规子群，并且当 n 为偶数时为 $U_n = \mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}$，当 n为奇数时为 $U_n = \mathbb{Z}^n$。只需证明 $H \subseteq U_n$。显然， U_n 是可 amenable 的，并且是 G_n中的正规子群。因此 HU_n 是 G_n 中的一个具有 Haagerup 性质的正规子群。由于 $U_n \subseteq HU_n$，我们推出，对于某个$SL_n(\mathbb{Z})$中的正规子群 K_n，有 $HU_n = \mathbb{Z}^n \rtimes K_n$，且当 n为偶数时 $\{\pm I_n\} \subseteq K_n$。注意， K_n 也具有 Haagerup 性质。根据 Margulis 正规子群定理，这意味着，当 n 为偶数时 $K_n \subseteq C(SL_n(\mathbb{Z})) = \{\pm I_n\}$，而当 n为奇数时为平凡子群。换言之， $HU_n \subseteq U_n$。因此 $H \subseteq HU_n = U_n$。□

以下内容应当是众所周知的。由于我们未能在文献中找到合适的参考资料，因此决定附上证明。

引理 2.5。 设 $n \geq 2$。令 H 为 $\mathbb{Z}^n$的任意 $SL_n(\mathbb{Z})$-不变的子群，则对某个 $d \in \mathbb{Z}$, 有$H = d\mathbb{Z}^n$。

证明。 令 $d := min\{\gcd(|h_1|, \ldots, |h_n|) \mid (h_1, \ldots, h_n)^t \in H\}$。由于 $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ 有下界，这样的 d 存在。因此，存在 $(a_1, \ldots, a_n)^t \in H$，使得 $\gcd(a_1, \ldots, a_n) = d$。根据贝祖等式，我们得到 n 个整数 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$，使得 $x_1a_1 + \cdots + x_na_n = d$。

我们考察第一个坐标。由于 H 是 $SL_n(\mathbb{Z})$-不变的，因此有 $g_2(a_1,\dots,a_n)^t = (a_1+x_2a_2, a_2, \dots, a_n)^t \in H$，其中 $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \\ 0 & 1 & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix} \in SL_n(\mathbb{Z})$。于是

$$\begin{pmatrix} a_1+x_2a_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in H$$

类似地，对于任意 $i \neq 1$，我们有 $(a_ix_i, 0, \dots, 0)^t \in H$。若取 $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ x_1 & 1 & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix}$，则 $g_1(a_1,\dots,a_n)^t - (a_1,\dots,a_n)^t = (0, x_1a_1, 0, \dots, 0)^t \in H$。注意到 H 是一个子群，其 $SL_n(\mathbb{Z})$-不变性也意味着 $-SL_n(\mathbb{Z})$-不变性。因此，交换前两行得到 $(x_1a_1, 0, \dots, 0)^t \in H$，进而有 $(d, 0, \dots, 0)^t \in H$。交换这两行得到 $(0, \dots, 0, d, 0, \dots, 0)^t \in H$，其中 d 位于第 i 个位置，这表明 $d\mathbb{Z}^n \subseteq H$。

接下来，我们考虑反向包含。我们证明，对于任意 $x \notin d\mathbb{Z}^n$，都有 $x \notin H$。

假设 $x = (x_1,\dots,x_n)^t \notin d\mathbb{Z}^n$，也就是说 $\exists\, i, d \nmid x_i$，这表明对于某个满足 $0 < x_i' < d$ 的 x_i'，有 $x_i \equiv x_i' \bmod d$。若 $x \in H$，则有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i' \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \frac{x_i - x_i'}{d} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in H.$$

于是我们得到 $\gcd(x_1,\dots,x_i',\dots,x_n) < d$，这与 d 定义中的最小性相矛盾。□

注 2.6. 我们指出，上述引理也可以通过注意到以下事实来证明：对于任意满足 $1 = \gcd(|a_1|,\dots,|a_n|)$ 的 $v = (a_1,\dots,a_n)^t \in \mathbb{Z}^n$，存在某个 $g \in SL_n(\mathbb{Z})$，使得 g 的第一列等于 v。

根据上述注释，不难看出下面的引理成立。我们决定给出一个略有不同的证明。

引理 2.7. 设 $n \geq 2$ 和 $G_n = \mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$。设 $P \subseteq L(G_n)$ 是任意一个 G_n-不变的冯·诺依曼子代数。记 $E: L(G_n) \to P$ 为到 P 上的保持迹 τ 的条件期望。写作 $s = -I_n$，其中 I_n 是 $SL_n(\mathbb{Z})$ 中的 $n \times n$ 单位矩阵。假设 $E(s) = 0$。那么，对于所有 $v \in \mathbb{Z}^n$，$E(vs) = 0$ 当且仅当 $E(e_1s) = 0$，其中 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{Z}^n$。

证明。“仅当”方向显然成立。我们只需验证“如果”方向成立。假设 $E(e_1s) = 0$。现在我们对 $v \in \mathbb{Z}^n$ 的非零坐标数进行数学归纳法。

对于任意的 $v = (d,\ 0,\ \dots\dots,\ 0)^t \in \mathbb{Z}^n$，我们得到 $0 = vE(s)v^{-1} = E(vsv^{-1}) = E(v\sigma_s(v^{-1})s) = E((2d,\ 0,\ \dots\dots,\ 0)^ts)$；同理，$0 = vE(e_1s)v^{-1} = E((2d+1,\ 0,\ \dots\dots,\ 0)^ts)$。由于 $d \in \mathbb{Z}$ 是任意的，我们推得，对所有 $x_1 \in \mathbb{Z}$，$E((x_1,\ 0,\ \dots\dots,\ 0)^ts) = 0$。

基础情形 $k=1$。设 v 恰有一个非零坐标，即 $v=x_1e_i$:=$(0,\dots,0,x_1,0,\dots,0)^t$，其中 x_1 位于第 i 个位置；又设 $0\neq x_1\in\mathbb{Z}$，且 e_i:=$(0,\dots,0,1,0,\dots,0)^t$，其中 1 位于第 i 个位置。显然，我们可以找到一个矩阵$g_1\in SL_n(\mathbb{Z})$，使得 $g_1\cdot(x_1,0,\dots,0)^t=v$（其中 $g_1\cdot(x_1e_1)$ 表示矩阵左乘），因此有 $E(vs)=E(g_1(x_1e_1)g_1^{-1}s)=g_1E(x_1e_1s)g^{-1}=0$。因此，对于每个恰有一个非零坐标的向量，该结论都成立。

假设对于某个 $k\geq 1$，有 $E(ws)=0$，对所有满足 $||w||_0\leq k$ 的 $w\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ 均成立，其中 $||w||_0$ 表示 w 的非零坐标个数。

归纳步骤。设 $v=(x_1,x_2,\dots,x_n)^t$ 满足 $||v||_0=k+1$。显然，我们可以通过适当的矩阵 $g_{k+1}\in SL_n(\mathbb{Z})$ 对 v 的坐标重新排序，使其所有非零项都出现在前 $k+1$ 个位置。因此，不失一般性，我们可以假设 $v=(x_1,x_2,\dots,x_{k+1},0,\dots,0)^t$，$x_i\neq 0(1\leq i\leq k+1)$。考虑 v 的前两个坐标 x_1,x_2，令 $q=$ 为 $|x_1|$ 与 $|x_2|$ 的最大公因数。根据贝祖等式，可得两个整数 $a,b\in\mathbb{Z}$，使得 $x_1a-x_2b=q$，然后令 g :=$\begin{pmatrix} x_1/q & b & \\ x_2/q & a & \\ & & I_{n-2}\end{pmatrix}\in SL_n(\mathbb{Z})$。于是得到以下等式:

$$g\cdot\begin{pmatrix} q\\0\\x_3\\\vdots\\x_{k+1}\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1/q & b & \\ x_2/q & a & \\ & & I_{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} q\\0\\x_3\\\vdots\\x_{k+1}\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_{k+1}\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

取 w:=$(q,\ 0,\ x_3,\ \dots\dots,\ x_{k+1},\ 0,\ \dots\dots,\ 0)^t$。由于 w的第二个坐标为 0，其非零项为 $q,\ x_3,\ \dots\dots,\ x_{k+1}$，因此 $||w||_0\leq k$，故有 $E(ws)=0$。于是得到等式 $E(vs)=E(gwg^{-1}s)=gE(ws)g^{-1}=0$。因此，该命题对具有 $k+1$ 个非零坐标的向量成立。

由数学归纳法，$E(vs)=0$ 对每个满足$||v||_0=k$ 的非零向量 $v\in\mathbb{Z}^n$ 以及任意 $1\leq k\leq n$均成立。$v=0$ 的情形显然。因此，$E(e_1s)=0$推出，对所有 $v\in\mathbb{Z}^n$，$E(vs)=0$。□

3. 定理1.1 与推论 1.2 的证明

我们首先通过 [DJ24，JZ24], 中发展的特征方法，对不变子因子进行分类。该方法适用于所有 $n\geq 2$。

命题 3.1。设 P 是 G_n-不变子因子，且 $L(G_n)$，其中 $G_n=\mathbb{Z}^n\rtimes SL_n(\mathbb{Z})$ 且 $n\geq 2$。那么，存在 G 中的某个正规子群 N，使得$P=L(N)$。

证明。根据 [CDS23 定理 3.1], 的证明，存在某个正规子群 $N\lhd G_n$，使得 $L(N)=P\bar{\otimes}(P'\cap L(N))$。令 E_1: $L(G_n)\twoheadrightarrow P$、$E_2$: $L(G_n)\twoheadrightarrow P'\cap L(N)$ 为两个保迹的条件期望。通过定义 $\phi(g):=\tau(E_1(g)g^{-1})$ $\psi(g)=\tau(E_2(g)g^{-1})$ $\forall g\in G_n$，可在 G_n 上引入两个特征标 ϕ 和 ψ。

那么，根据 [JZ24命题 3.2], 证明中所用的计算，我们知道$\phi(g)\psi(g) = 0$ 对所有 $e \neq g \in N$。

注意到 $N\cap\mathbb{Z}^n$ 是 $SL_n(\mathbb{Z})$-不变子群 $\mathbb{Z}^n$。由 $N\cap\mathbb{Z}^n = \{0\}$ 或 $d_1\mathbb{Z}^n$，对于某个非零 $d_1 \in \mathbb{Z}$，根据引理 2.5可得。

如果 $N \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$，那么 $N \subseteq C_{G_n}(\mathbb{Z}^n) = \{A \in G_n | Av = vA, \forall v \in \mathbb{Z}^n\} = \mathbb{Z}^n$。因此， N是阿贝尔的，从而 $P \subseteq L(N)$ 是阿贝尔的，继而 $P = \mathcal{Z}(P) = \mathbb{C}$。

如果 $N\cap\mathbb{Z}^n = d_1\mathbb{Z}^n$ 对于某个非零 $d_1 \in \mathbb{Z}$，那么 $\phi|_{d_1\mathbb{Z}^n}$ 和 $\psi|_{d_1\mathbb{Z}^n}$ 是 $SL_n(\mathbb{Z})$-不变特征标 $d_1\mathbb{Z}^n$，其中 $\phi|_{d_1\mathbb{Z}^n}(g)\psi|_{d_1\mathbb{Z}^n}(g) = 0, \quad \forall e \neq g \in d_1\mathbb{Z}^n$。利用引理 2.2，我们只需考虑两种情况。

子情形 1. $\phi|_{d_1\mathbb{Z}^n} = \delta_e$。

那么我们只需验证对所有 $e \neq g \in N$，都有 $\phi(g) = 0$。令$g = vt = (v, t)$，其中 $v \in \mathbb{Z}^n$ 且 $t \in SL_n(\mathbb{Z})$。不失一般性，我们可以假设 $t \neq I_n$，即 $SL_n(\mathbb{Z})$ 中的 $n \times n$ 单位矩阵。

为了证明 $\phi(g) = 0$，我们将选取无穷多个合适的 $v_n \in d_1\mathbb{Z}^n$，其具体形式稍后确定。考虑 $g_n := v_n g v_n^{-1} = (v_n + v - \sigma_t(v_n)\ t) \in N$。这里 $\sigma_t(v_n) = t \cdot v_n$ 表示矩阵左乘。注意， $g_n g_m^{-1} = (v_n - v_m + \sigma_t(v_m) - \sigma_t(v_n)\ I_n) \in d_1\mathbb{Z}^n$。我们选取满足 $g_n g_m^{-1} \neq e$ 的 v_n；等价地，我们需要对所有 $n \neq m$，都有 $v_n - v_m \neq \sigma_t(v_n - v_m)$。例如，对于任意满足$\sigma_t(w) \neq w$ 的 $w \in d_1\mathbb{Z}^n$，我们可以取 $v_n := nw$，这是可行的，因为 $t \neq I_n$。于是得到 $\phi(g_n g_m^{-1}) = 0$，并且由 DJ24, 引理2.7] 可知 $\phi(g) = \phi(g_n) = 0$。这表明 $\phi|_N \equiv \delta_e$，于是我们有 $E_1(g) = 0, \quad \forall g \neq e$，从而得到 $P = \mathbb{C}$。

子情况 2. $\psi|_{d_1\mathbb{Z}^n} = \delta_e$.

这与上述证明类似，因此我们得出 $P' \cap L(N) = \mathbb{C}$，从而$L(N) = P$。□

定理的证明 *1.1.* 定理 1.1中的“若”方向容易验证，因此我们只需证明“唯若”方向。鉴于根据 n □3.3 命题和3.8 命题在按奇偶性分类具有非平凡中心的不变子代数时有所不同，我们将在下文分别记录这两个命题。

我们将本节分为两个小节。

3.1. **奇数 n的**证明。我们先准备一个命题 3.3证明所需的引理。

引理 3.2. 设 $G_n = \mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$ $n \geq 2$ 且 n 为奇数。设 $d \geq 1$ 且 $A_d := \{\sum_{v\in d\mathbb{Z}^n} c_v v : \quad c_v = c_{-v} \in \mathbb{C}, \forall v \in d\mathbb{Z}^n\} \subseteq L(d\mathbb{Z}^n)$。则 $A_d' \cap L(G_n) = L(\mathbb{Z}^n)$。

证明。 方向 $\supseteq$ 显然。我们只需验证 $\subseteq$ 成立。为此，只需（例如根据 [Pac85，引理 1。6]）验证商$\widehat{\quad}$作用 $SL_n(\mathbb{Z}) \curvearrowright d\mathbb{Z}^n/\sim$的本质自由性，其中记 $A_d \cong L^\infty(d\mathbb{Z}^n/\sim)$。

为验证这一点，不失一般性，我们可以假设 $d=1$。注意， $\sim$在 $\mathbb{T}^n$ 上的定义如下。对于任意 $z=(z_1,\ldots\ldots,\ z_n)$ $w=(w_1,\ \ldots\ldots,\ w_n)\in\mathbb{T}^n$， $z\sim w$当且仅当 $z_i=w_i$ 对所有 $1\leq i\leq n$ 成立，或 $z_iw_i=1$ 对所有 $1\leq i\leq n$ 成立。

任取 $e\neq g\in SL_n(\mathbb{Z})$，我们旨在证明对于 $\mathbb{T}^n$ 上的哈尔测度 μ，有

$$\mu(\{z\in\mathbb{T}^n:gz\sim z\})=0.$$

将 $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{T}^n$ 写成，其中 $z_k=e^{i\theta_k}$ 和 $\theta_k\in\mathbb{R}$ 对于 $1\leq k\leq n$ 成立。然后注意到， $gz\sim z$ 当且仅当对于某个 $k_i\in\mathbb{Z},1\leq i\leq n$，以下两个线性方程组中的至少一个成立，

$$(A-I_n)\begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots\\ \theta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2k_1\pi\\ \vdots\\ 2k_n\pi\end{pmatrix}\ \text{or}\ (A+I_n)\begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots\\ \theta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2k_1\pi\\ \vdots\\ 2k_n\pi\end{pmatrix},$$

其中我们记 $(g^{-1})^T:=A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\neq I_n$。

注意，映射 $\mathbb{R}^n\ni(\theta_1,\ldots,\theta_n)\overset{\Phi}{\mapsto}(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n})\in\mathbb{T}^n$ 将 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度 λ 与 μ 联系起来，即对于任意博雷尔集 $E\subseteq\mathbb{T}^n$，有 $\mu(E)=(2\pi)^n\lambda(\Phi^{-1}(E)\cap Q)$，其中 $Q=[0,2\pi)^n\subset\mathbb{R}^n$。因此，集合$\{z\in\mathbb{T}^n:gz\sim z\}$ 的哈尔测度为零，当且仅当对于所有 $k_i\in\mathbb{Z},1\leq i\leq n$，上述两个线性方程组在 $\mathbb{R}^n$ 中的解集的勒贝格测度为零。

对于第一个线性方程组，我们考虑以下三种情形。若 1 不是 A 的特征值，则对于给定的 $(k_1,\ldots,k_n)$，第一个方程有唯一解，因此在这种情形下，$\mathbb{T}^n$ 中至多有可数多个点满足 $gz=z$，故其测度为零。现在假设 1 是 A 的一个特征值，且 1 的重数至多为 $n-1$，那么对于每个固定的 $(k_1,\ldots,k_n)$，$(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ 至多有 $n-1$ 个自由坐标，因此满足 $gz=z$ 的 z 的测度仍为零。若 1 的重数为 n，由于 $A\neq I_n$， A 不可对角化，其 Jordan 标准形至少包含一个大小为 $m\geq 2$ 的 Jordan 块$J_m(1)$。因此，该线性方程组的系数矩阵满足 $\operatorname{rank}(A-I_n)\geq 1$，故解空间在 $\mathbb{R}^n$ 中的维数至多为 $n-1$，从而其勒贝格测度为零。

对于第二个线性方程组，我们可以采用与上面类似的论证。若 -1不是 A的特征值，那么对于每个固定的 $(k_1,\ \ldots\ldots,\ k_n)$，第二个方程都有唯一解。因此，满足 $gz\sim z$但不满足 $gz\neq z$的 z的测度为零。若 A 以 -1 为特征值，注意到由于 n 是奇数，它必定还有另一个不等于 -1 的特征值，因此对于每个固定的 $(k_1,\ \ldots\ldots,\ k_n)$，第二个方程的解至多有 $n-1$ 个自由坐标，所以测度仍为零。□

命题 3.3. 令 $G_n=\mathbb{Z}^n\rtimes SL_n(\mathbb{Z})$ $n\geq 3$ 且 n 为奇数。设 P 是 $(L(G_n)\ \tau)$中的一个 G_n-不变冯·诺依曼子代数。则

- 要么 $P = L(H)$ 对某个正规子群 $H \lhd G_n$成立；要么，
- $P = A_d$ 对于某个 $d \geq 1$，其中 $A_d \subset L(d\mathbb{Z}^n)$ 由 $A_d = \{x \in L(d\mathbb{Z}^n)$ 定义为：$\tau(xs) = \tau(xs^{-1})\ \forall s \in d\mathbb{Z}^n\}$，这与引理3.2中的定义一致。

证明。令 $\mathcal{Z}(P)$ 为 P 的中心。由于 $\mathcal{Z}(P)$ 是阿贝尔的，因而是可 amenable 的，且为 G_n-不变的，由 [AHO25, 定理 A]，我们可得 $\mathcal{Z}(P) \subseteq L(\mathrm{Rad}(G_n))$，其中 $\mathrm{Rad}(G_n)$ 表示 G_n 的可 amenable 根。根据引理 2.3，我们知道 $L(\mathrm{Rad}(G_n)) = L(\mathbb{Z}^n)$。注意，作为 $L(\mathbb{Z}^n)$ 中一个 $SL_n(\mathbb{Z})$- 不变的阿贝尔冯 · 诺伊曼子代数，$\mathcal{Z}(P) \cap L(\mathbb{Z}^n) = L^\infty(Y)$，其中因子映射$SL_n(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^n \to Y$ 对某个（可测）对象成立。注意，标准作用$SL_n(\mathbb{Z})$ 的所有（可测）因子均已在 [Wit94, 例 5.9], 中分类，因此我们得到 $\mathcal{Z}(P) \cap L(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{C}$, $L(d\mathbb{Z}^n)$ 或 A_d，其中 $d \geq 1$。于是，由 $\mathcal{Z}(P) \subseteq L(\mathbb{Z}^n)$，我们推出 $\mathcal{Z}(P) = \mathbb{C}$, $L(d\mathbb{Z}^n)$ 或 A_d，其中 $d \geq 1$。由于子因子情形，即 $\mathcal{Z}(P) = \mathbb{C}$ 的情形，已由命题 3.1 处理，因此我们只需考虑两种情形。

情形 1. $\mathcal{Z}(P) = L(d\mathbb{Z}^n)$ 对某个 $d \geq 1$ 成立。

断言。 $P = L(d\mathbb{Z}^n)$。

事实上，注意到 $P \subseteq \mathcal{Z}(P)' \cap L(G_n)$，我们只需验证

$$\mathcal{Z}(P)' \cap L(G_n) \subseteq L(\mathbb{Z}^n).$$

任取 $a \in L(d\mathbb{Z}^n)' \cap L(G_n)$。将 $a = \sum_{v\in\mathbb{Z}^n, g\in SL_n(\mathbb{Z})} \lambda_{v,g} u_{(v,g)}$, $\lambda_{v,g} \in \mathbb{C}$ 写成傅里叶展开，其中 $u_{(v,g)}$ 表示与群元素(v, g) 对应的酉元，且 $\sum_{v,g} |\lambda_{v,g}|^2 < \infty$。

对于任意 $k \in d\mathbb{Z}^n$，交换关系 $au_{(k,I_n)} = u_{(k,I_n)}a$ 给出

$$\begin{aligned} u_{(k,I_n)} a u_{(k,I_n)}^{-1} &= \sum_{v,g} \lambda_{v,g} u_{(k+v-g\cdot k,g)} = a = \sum_{v,g} \lambda_{v,g} u_{(v,g)} \\ &= \sum_{v,g} \lambda_{(k+v-g\cdot k),g} u_{(k+v-g\cdot k,g)}. \end{aligned}$$

比较等式两边关于 $u_{(k+v-g\cdot k,g)}$ 的系数，我们得到 $\lambda_{v,g} = \lambda_{(k+v-gk),g}$,$\forall k \in d\mathbb{Z}^n$ 以及 $g \in SL_n(\mathbb{Z})$。现在，固定 v 和 g，考虑集合

$$\#\{k + v - g \cdot k : k \in d\mathbb{Z}^n\} = \begin{cases} \infty, & g \neq I_n \\ < \infty, & g = I_n. \end{cases}$$

如果存在 $g \neq I_n$ 以及某个 $v \in \mathbb{Z}^n$ 使得 $\lambda_{v,\ g} \neq 0$，那么由恒等式$\lambda_{v,\ g} = \lambda_{(k+v-gk),\ g}$,$\forall k \in d\mathbb{Z}^n$，对于无穷多个 $w \in \{k + v - g \cdot k :\ k \in d\mathbb{Z}^n\}$，我们得到

$$\sum_{w\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{w,g}|^2 \geq \sum_{w\in\{k+v-g\cdot k : k\in d\mathbb{Z}^n\}} |\lambda_{w,g}|^2 = |\lambda_{v,g}|^2 \cdot \infty = \infty,$$

这与条件 $\sum|\lambda_{w,\ g}|^2<\infty$矛盾。因此，对于所有 $g\neq I_n$ 以及$w,\ gv\in\mathbb{Z}^n$，都有 $\lambda_{v,\ g}=0$。因此，$a=\sum\ \lambda_{v,\ I_n}u_{(v,I_n)}\in L(\mathbb{Z}^n).v\in\mathbb{Z}^n$

我们得到 $P\subseteq\mathcal{Z}(P)'\cap L(G_n)\ =L(\mathbb{Z}^n)$。因此， P是阿贝尔的，进而 $P=\mathcal{Z}(P)\ =L(d\mathbb{Z}^n)$。

情形 2. $\mathcal{Z}(P)\ =A_d$ 对于某个 $d\geq 1$。

断言。 $P=A_d$。

我们知道 $P\subseteq A_d'\cap L(G_n)\ =L(\mathbb{Z}^n)$ 由引理 3.2可知，这意味着 P是阿贝尔的，因此 $P=\mathcal{Z}(P)\ =A_d$。 □

3.2. **偶数 的证明**。 我们需要准备一个引理，它应与引理 3.2 进行比较。

引理 3.4. 设 $G_n=\mathbb{Z}^n\rtimes SL_n(\mathbb{Z})$ $n\geq 2$ 且 n 为偶数。设 $d\geq 1$ 和 $A_d:=\{\sum_{v\in d\mathbb{Z}^n}c_vv:\ c_v=c_{-v}\in\mathbb{C},\forall v\in d\mathbb{Z}^n\}\subseteq L(d\mathbb{Z}^n)$。则 $A_d'\cap L(G_n)\ \subset L(\mathbb{Z}^n\rtimes\{\pm I_n\})$。

证明。记 $X=\mathbb{T}^n$ 和 $Y=d\mathbb{Z}^n/\sim$。不失一般性，可假设 $d=1$。注意到 $\sim$通过 $z\sim w$定义在 $\mathbb{T}^n$ 上，其中 $z=(z_1,\ldots,z_n)$ $w=(w_1,\ldots,w_n)\in\mathbb{T}^n$，当且仅当对所有 $1\leq i\leq n$都有 $z_i=w_i$，或对所有 $1\leq i\leq n$都有 $z_iw_i=1$。因此我们有 $L(G_n)\cong L^\infty(X,\mu)\rtimes SL_n(\mathbb{Z})$ 和 $A_d\cong L^\infty(Y,\nu)$，其中 μ 是 X 上的哈尔测度，而 ν 是相对于因子映射 $\pi\colon SL_n(\mathbb{Z})\curvearrowright(X,\mu)\to(Y,\nu)$，定义在 Y 上的推前测度 $\pi_*\mu$。

设 $E\colon L^\infty(X,\mu)\to L^\infty(Y,\nu)$ 是一个条件期望。则 $E(f)(y)\ =\int_X f(x)d\mu_y(x)$，其中 $f\in L^\infty(X,\mu)$，而 $\mu=\int_Y\mu_yd\nu(y)$ 是关于 π 的测度分解。注意， E 满足 $E|_{L^\infty(Y,\nu)}=id$ 且 $E(\xi f)\ =E(\xi)f$， $\forall\xi\in L^\infty(X,\mu)$ $f\in L^\infty(Y,\nu)$。注意， E 也是忠实的，即若 $f\geq 0$ 属于 $L^\infty(X,\mu)$ 且 $E(f)\ =0$，则 $f=0$。事实上，对 ν-几乎处处的 y，有 $E(f)\ =0\Leftrightarrow\int_X f(x)d\mu_y(x)\ =0$。由于对 μ-几乎处处， $f(x)\geq 0$，我们推得对 μ_y-几乎处处的 x 以及对 ν-几乎处处的 y， $f(x)\ =0$。于是 $\mu\{x\colon f(x)\neq 0\}=\int_Y\mu_y(\{x\colon f(x)\neq 0\})d\nu(y)\ =0$，即 $f=0$。

任取 $a\in L^\infty(Y,\ \nu)'\cap[L^\infty(X,\ \mu)\rtimes SL_n(\mathbb{Z})]$。将其傅里叶展开写作 $a=\sum_{g\in SL_n(\mathbb{Z})}f_gg$，其中 $f_g\in L^\infty(X,\ \mu)$，而 g 是酉元$u_g=\sigma_g\otimes\lambda_g\in B(L^2(X,\mu)\otimes l^2(SL_n(\mathbb{Z}))$ 的缩写。对于任意 $\xi\in L^\infty(Y,\ \nu)$，交换关系$a\xi=\xi a$ 给出

$$a\xi=(\sum_g f_gg)\xi=\sum_g(f_g\sigma_g(\xi))g,$$
$$\xi a=\sum_g(\xi f_g)g.$$

比较系数 g，我们得到 $f_g(\sigma_g(\xi)\ -\xi)\ =0$，因此 $f_g^*f_g(\sigma_g(\xi)\ -\xi)\ =0$，其中 f_g^* 表示 f_g 的复共轭。对两边应用 $E(\cdot)$，

我们得到

$$0 = E(f_g^* f_g(\sigma_g(\xi) - \xi)) = E(f_g^* f_g)(\sigma_g(\xi) - \xi), \tag{1}$$

对所有的 $g \in SL_n(\mathbb{Z})$ 和 $\xi \in L^\infty(Y, \nu)$ 都成立。最后一个等式成立，是因为 $\sigma_g(\xi) - \xi \in L^\infty(Y, \nu)$。

下面的观察与3.2中用于偶数 n 的分块论证类似，证明也相似。下文记 $s = I_n$为 $n \times n$ 在 $SL_n(\mathbb{Z})$中的单位矩阵。

观察 3.5。对于任意 $g \in SL_n(\mathbb{Z}) \setminus \{I_n, s\}$，有 $\mu(\{z \in \mathbb{T}^n : \ gz \sim z\}) = 0$。

证明。记 $z = (z_1, \ldots\ldots, z_n) \in \mathbb{T}^n$，其中 $z_k = e^{i\theta_k}$ 且 $\theta_k \in \mathbb{R}$ 对 $1 \le k \le n$成立。然后注意到，$gz \sim z$ 当且仅当以下方程成立，其中 $(g^{-1})^T := A = (a_{ij})_{1 \le i,\ j \le n} \ne I_n$ 或 s,

$$(A - I_n) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_1\pi \\ \vdots \\ 2k_n\pi \end{pmatrix} \text{ or } (A + I_n) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_1\pi \\ \vdots \\ 2k_n\pi \end{pmatrix},$$

对某个 $k_i \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le n$。

对于第一个线性方程组，完全按照引理 3.2中的证明，我们考虑特征值 1 出现的情形，并得出$\mu(\{z \in \mathbb{T}^n : gz = z\}) = 0$。

对于第二个方程组，我们考虑以下三种情形。若 -1 不是 A的特征值，则对每个给定的 $(k_1, \ldots, k_n)$，第一个方程都有唯一解，因此在这种情形下，$\mathbb{T}^n$中满足 $gz \sim z$ 但不满足 $gz \ne z$的点至多可数，故为零测集。现在假设 -1 是 A的特征值，且 -1 的重数至多为 $n-1$，那么对于每个固定的 $(k_1, \ldots, k_n)$，$(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ 至多有 $n-1$ 个自由坐标，因此满足$gz \sim z$ 但不满足 $gz \ne z$ 的 z集合仍为零测集。若 -1 的重数为 n，则由于$A \ne s$，A 不可能可对角化，其 Jordan 标准形至少包含一个大小为 $m \ge 2$的 Jordan 块 $J_m(1)$。因此，线性方程组的系数矩阵满足 rank $(A + I_n) \ge 1$，故解空间的维数至多为 $n-1$，于是满足 $gz \sim z$ 但不满足 $gz \ne z$ 的 z 的测度同样为零。□

结合上述观察与（1），我们断言 $E(f_g^* f_g) = 0$ 对所有$g \notin \{I_n, s\}$均成立。由于 E 是忠实的，我们得到 $f_g = 0$ 对所有 $g \notin \{I_n, s\}$均成立，这表明 $a \in L^\infty(X) \rtimes \{\pm I_n\} \cong L(\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})$。

事实上，假设对于某些 $g \ne I_n$和 s，我们有 $E(f_g^* f_g) \ne 0$，这意味着$\nu(U) > 0$，其中 $U := \{y \in Y \mid E(f_g^* f_g)(y) \ne 0\}$。根据观察 3.5，$\nu\{y \in Y \mid gy = y\} = 0$。参见 [KL16，命题 4.22]，可知存在某个 $B \subseteq Y$，使得 $B \subseteq U$ with $\nu(B) \ge 0$ and $gB \cap B = \phi$。设 $\xi = \chi_B$,

B上的特征函数，那么对于几乎处处的 $y \in B$，我们得到 $0 = E(f_g^* f_g)(y)(\sigma_g(\xi) - \xi)(y) = -E(f_g^* f_g)(y)$，这与假设矛盾。□

下述引理将应用于 $Q = \mathcal{Z}(P)$，其中 P是 G_n-不变的冯·诺依曼子代数，且位于 $L(G_n)$中， n为偶数。

引理 3.6. 设 $n \geq 2$ 为偶数。设 $Q \subsetneq L(\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})$ 是一个 G_n-不变的阿贝尔冯·诺伊曼子代数。则 $Q \subseteq L(\mathbb{Z}^n)$ ，因此对于某个 $d \geq 1$，有 $Q = \mathbb{C}$,$L(d\mathbb{Z}^n)$ 或 A_d 。

证明。 令 $E\colon L(\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}) \to Q$为到 Q上的迹 τ-保持条件期望。为简洁起见，下面我们直接用 g 表示 $L(G_n)$中的典范酉元 u_g ，并使用记号 $\langle a, b\rangle$ 表示任意 $a, b \in L(G_n)$对应的 $\tau(b^* a)$。记 $s = -I_n \in SL_n(\mathbb{Z})$。

步骤 1. 我们利用 Q 的阿贝尔假设证明 $E(s) = 0$ 。

注意 $L(SL_n(\mathbb{Z}))' \cap L(\mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})) = L(\{\pm I_n\})$，例如利用 [AJ23，引理 2 直接计算即可得到7]。

由于 Q 是 G_n-不变的，我们推得对所有 $g \in SL_n(\mathbb{Z})$， $gE(s)g^{-1} = E(gsg^{-1}) = E(s)$。因此， $E(s) \in L(SL_n(\mathbb{Z}))' \cap L(\mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})) = L(\{\pm I_n\}) = L(\langle s\rangle)$。于是，我们可以写作 $E(s) = \lambda + \mu s$，其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$。注意到 $\lambda = \tau(E(s)) = \tau(s) = 0$。因此， $\mu^2 = (\mu s)^2 = E(s)E(s) = E(sE(s)) = E(s\mu s) = \mu$。由此可得 $\mu = 0$ 或 1。因此， $E(s) = 0$ 或 s。但是， $E(s) = s$ 不可能，理由如下。假设 $E(s) = s$，则有 $s \in Q$。并且 Q 是 G_n-不变的，这意味着对所有 $a \in \mathbb{Z}^n$， $(as)E(s)(as)^{-1} = (as)s(as)^{-1} = (2a)s \in Q$ 。于是我们可以推得，对所有 $a \in \mathbb{Z}^n$， $2a = [(2a)s]s = s[(2a)s] = (-2a)ss = -2a$ ，其中第二个等号成立是因为 Q 是阿贝尔的。这就产生了矛盾。因此我们已经证明 $E(s) = 0$，步骤 1 得证。

步骤 2. 我们证明 $Q \cap L(\mathbb{Z}^n) = Q$。

由于 $Q \cap L(\mathbb{Z}^n)$ 是 $L(\mathbb{Z}^n)$ 中的阿贝尔冯·诺伊曼子代数，且在 $SL_n(\mathbb{Z})$ 下不变，因此它等于某个（可测）因子映射 $SL_n(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{T}^n \to Y$ 对应的 $L^\infty(Y)$。根据 Wit94 中 Example 5.9], 对所有此类（可测）因子映射的完整分类（参见 [），我们可以推得 $Q \cap L(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{C}$、 $L(d\mathbb{Z}^n)$ 或 A_d （其中某个 $d \geq 1$）。因此，我们分三种可能性来证明，并说明事实上 $Q \cap L(\mathbb{Z}^n) = Q$ 始终成立。

情形 1. $Q \cap L(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{C}$。

我们断言 $Q = \mathbb{C}$。

首先注意，对于任意 $v \in \mathbb{Z}^n$，我们有

$$E(v) \in Q \cap L(\mathbb{Z}^n)' = Q \cap L(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{C},$$

为了得到第二个等式，我们用到了这样一个事实： $L(\mathbb{Z}^n)$ 是 $L(G_n)$ 中的极大阿贝尔冯·诺伊曼子代数。因此， $\forall v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$，我们得到 $E(v) = \tau(E(v)) = \tau(v) = 0$。

剩下需要证明的是 $E(vs)=0$ 对所有 $v\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$。根据引理 2.7，只需证明 $E(e_1s)=0$。

首先，注意到

$$E(e_1s)\in L(\{\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{z}\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}\})'\cap L(\mathbb{Z}^n\rtimes\{\pm I_n\})\subseteq L((\mathbb{Z},0,\dots,0)^t)\rtimes\{\pm I_n\}.$$

其中 $\boldsymbol{z}\in M_{1,\ n-1}(\mathbb{Z})$。因此，我们可以写作 $E(e_1s)=a+bs$，其中 $a,\ b\in L((\mathbb{Z},\ 0,\ \dots,\ 0)^t)$。

由 $\langle v-E(v)\ E(e_1s)\rangle=0$，可得 $\langle v,\ a\rangle=0$ 对所有 $v\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ 均成立。因此，$a\in\mathbb{C}$。接着，通过计算 $E(e_1s)$ 的迹，可得 $a=\tau(a+bs)=\tau(E(e_1s))=\tau(e_1s)=0$。因此，$E(e_1s)=bs$。

记 $b=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mu_ne_n$，其中 $\mu_n\in\mathbb{C}$ 且 $e_n=(n,\ 0,\ \dots,\ 0)^t$。令 $f_n=(0,\ n,\ 0,\ \dots,\ 0)^t\in\mathbb{Z}^n$。注意到 $f_n=g\cdot e_n$，其中 $g=\begin{pmatrix}0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & I_{n-2}\end{pmatrix}\in SL_n(\mathbb{Z})$。

因此，$E(f_1s)=E((g\cdot e_1)s)=E(ge_1g^{-1}s)=gE(e_1s)g^{-1}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mu_nf_ns$。

由 E 的 Q-双模性质可知，$E(e_1s)E(f_1s)=E(e_1sE(f_1s))$。下面具体计算两边。

$$E(e_1s)E(f_1s)=\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\mu_m\mu_n(m,-n,0,\dots,0)^t,$$

$$E(e_1sE(f_1s))=E(e_1s(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\mu_mf_ms))=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\mu_mE((1,-m,0,\dots,0)^t)=0,$$

其中，为了得到最后一个等式，我们用到了对所有 $v\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ 都有 $E(v)=0$ 这一事实。因此，对所有 $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$，都有 $\mu_m\mu_n=0$。于是，$\mu_n^2=0$，也就是说，对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 都有 $\mu_n=0$；等价地，$b=0$，因此 $E(e_1s)=0$。此情形的证明完成。

情形 2。 对某个 $d\geq1$，$Q\cap L(\mathbb{Z}^n)=L(d\mathbb{Z}^n)$。

我们断言 $Q=L(d\mathbb{Z}^n)$。

若 $d=1$，则 $L(\mathbb{Z}^n)\subseteq Q$，因此对所有 $v\in\mathbb{Z}^n$，都有 $E(v)=v$。于是 $E(vs)=vE(s)=0$。因此，$Q=L(\mathbb{Z}^n)$。

从现在起，我们假设 $d\geq2$。下面给出的证明与情形 1 的证明基本相同，只稍作修改；为求完整起见，我们仍将其记录如下。

首先，对于任意 $v\in\mathbb{Z}^n\setminus d\mathbb{Z}^n$，我们注意到 $E(v)=0$。

事实上，

$$E(v)\in Q\cap L(\mathbb{Z}^n)'=Q\cap L(\mathbb{Z}^n)=L(d\mathbb{Z}^n).$$

因此，由 $\langle v-E(v)\ E(v)\rangle=0$，我们推出 $\langle E(v)\ E(v)\rangle=0$，即 $E(v)=0$。

因此，对于任意 $v\in\mathbb{Z}^n$，要么 $E(v)=0$，要么 $v\in d\mathbb{Z}^n$；在这种情况下，$E(v)=v$。

剩下要证明的是 $E(vs)=0$ 对所有 $v\in\mathbb{Z}^n$成立。只需证明 $E(e_1s)=0$，根据引理 2.7。

首先，注意到

$$E(e_1s)\in L(\{\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{z}\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}\})'\cap L(\mathbb{Z}^n\rtimes\{\pm I_n\})\subseteq L((\mathbb{Z},0,\dots,0)^t)\rtimes\{\pm I_n\}.$$

其中 $z:=(\mathbb{Z},\ \mathbb{Z},\ \ldots,\ \mathbb{Z})_{1\times n-1}$。因此，我们可以写作 $E(e_1s)=a+bs$，其中 $a,\ b\in L((\mathbb{Z},\ 0,\ \ldots,\ 0)^t)$。

由 $\langle v-E(v)\ E(e_1s)\rangle=0$，我们推出 $\langle v,\ a\rangle=0$ 对所有 $v\in\mathbb{Z}^n\setminus d\mathbb{Z}^n$ 均成立。因此，$a\in L((d\mathbb{Z},\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)^t)\subset L(d\mathbb{Z}^n)\subseteq Q$。类似地，由 $\langle e_1s-E(e_1s)\ a\rangle=0$，我们推出 $\langle a,\ a\rangle=0$，即 $a=0$。因此，$E(e_1s)=bs$。

Th通过重复情形 1 证明的最后部分，我们推出 $b=0$.

情形 3。 $Q\cap L(\mathbb{Z}^n)=A_d$，其中某个 $d\geq 1$。

我们断言 $Q=A_d$。

首先，任取一个非零向量 $v\in d\mathbb{Z}^n$，我们有 $E(v)\in Q\cap L(\mathbb{Z}^n)'=Q\cap L(\mathbb{Z}^n)=A_d$。因此，我们可以写成 $E(v)=\sum\ \lambda_\omega\omega$，其对称傅里叶系数为，即$\omega\in d\mathbb{Z}^n\lambda_\omega=\lambda_{\omega^{-1}}$ 对所有 $\omega\in d\mathbb{Z}^n$ 均成立。注意，这里我们用 ω^{-1} 表示 $d\mathbb{Z}^n$ 中 ω 的逆元。

由 $0=\langle v-E(v)\ Q\rangle$，我们推出，对所有 $\omega_0\in_{\omega\in d\mathbb{Z}^n}d\mathbb{Z}^n$，$\langle v-\sum\ \lambda_\omega\omega,\ \omega_0+\omega_0^{-1}\rangle=0$。注意，取 $\omega_0\notin\{v,v^{-1}\}$ 后可得 $0=\lambda_{\omega_0}+\lambda_{\omega_0^{-1}}=2\lambda_{\omega_0}$。类似地，取 $\omega_0=v$ 后可推出 $\lambda_v=\lambda_{v^{-1}}=\frac{1}{2}$。因此，对所有 $v\in d\mathbb{Z}^n$，$E(v)=\frac{v+v^{-1}}{2}$。

其次，我们验证对所有 $v\in\mathbb{Z}^n\setminus d\mathbb{Z}^n$，$E(v)=0$。

注意，我们仍有 $E(v)\in Q\cap L(\mathbb{Z}^n)'=Q\cap L(\mathbb{Z}^n)=A_d$。因此，由于 $0=\langle v-E(v)\ E(v)\rangle$，我们推出对所有 $v\in\mathbb{Z}^n\setminus d\mathbb{Z}^n$，$\langle E(v)\ E(v)\rangle=0$，因为对于这样的 v，$\langle v,\ E(v)\rangle=0$，故 $E(v)=0$ 得证。

只需证明 $E(e_1s)=0$ 由引理 2.7。

再次地，我们仍有：对于所有 $z\in M_{1,\ n-1}(\mathbb{Z})$,

$$E(e_1s)\in L(\{\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}\})'\cap L(\mathbb{Z}^n\rtimes\{\pm I_n\})\subseteq L((\mathbb{Z},0,\ldots,0)^t)\rtimes\{\pm I_n\}.$$

因此，我们可以写成 $E(e_1s)=a+bs$，其中 $a,\ b\in L((\mathbb{Z},\ 0,\ \ldots,\ 0)^t)$。

由 $\langle v-E(v)\ E(e_1s)\rangle=0$，我们推得 $\langle v,\ a\rangle=0$ 对所有 $v\in\mathbb{Z}^n\setminus d\mathbb{Z}^n$ 均成立。因此，$a\in L((d\mathbb{Z},\ 0,\ \ldots,\ 0)^t)$。

接下来，由 $\langle e_1s-E(e_1s)\ A_d\rangle=0$，我们推得 $\langle a,\ A_d\rangle=0$，等价地，$a+\sigma_s(a)=0$。换言之，若我们写成 $a=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda_ie_{di}$，其中 $e_{di}=(di,\ 0,\ \ldots,\ 0)^t$，则

$$\lambda_i+\lambda_{-i}=0,\forall\ i\in\mathbb{Z}. \tag{2}$$

现在，记 $a=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda_ie_{di}$ 和 $b=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mu_je_j$，其中 $\lambda_i,\mu_j\in\mathbb{C}$ 对所有 i,j均成立。

因此，$E(f_1s)=E(ge_1g^{-1}s)=g(a+bs)g^{-1}=(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda_if_{di})+(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mu_jf_j)s$，其中$g=\begin{pmatrix}0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & I_{n-2}\end{pmatrix}\in SL_n(\mathbb{Z})$且 $f_j=(0,j,0,\ldots,0)^t\in\mathbb{Z}^n$。

接下来，注意到

$$\begin{aligned}E((e_1+e_{-1})s)&=E(e_1s)+E(e_{-1}s)=E(e_1s)+\sigma_s(E(e_1s))\\&=(a+bs)+\sigma_s(a+bs)=(a+\sigma_s(a))+(b+\sigma_s(b))s=(b+\sigma_s(b))s.\end{aligned}$$

同时，由于 $b+\sigma_s(b) \in A_d \subseteq Q$，我们推得 $(b+\sigma_s(b))s = E((e_1+e_{-1})s) = E(E((e_1+e_{-1})s)) = E((b+\sigma_s(b))s) = (b+\sigma_s(b))E(s) = 0$，即 $b+\sigma_s(b) = 0$，等价地，

$$\mu_k + \mu_{-k} = 0, \forall\ k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

接下来，我们具体计算恒等式 $E(e_1s)E(f_1s) = E(e_1sE(f_1s))$ 两边。

On t一方面，由于 $E(e_1s) = a+bs = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i e_{di} + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j e_j s$，我们得到 t

$$\begin{aligned} E(e_1s)E(f_1s) = &\left[\sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j \begin{pmatrix} di \\ dj \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j,k} \mu_j\mu_k \begin{pmatrix} j \\ -k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\ &+ \left[\sum_{i,j} \lambda_i\mu_j \begin{pmatrix} di \\ j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i,j} \lambda_i\mu_j \begin{pmatrix} j \\ -di \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right] s; \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} E(e_1sE(f_1s)) &= E(e_1s\left[(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i f_{di}) + (\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j f_j)s\right]) \\ &= \sum_i \lambda_i E(\begin{pmatrix} 1 \\ -di \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} s) + \sum_j \mu_j E(\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) \\ &= \sum_i \lambda_i g_i E(e_1s)g_i^{-1} + \sum_j \mu_j E(\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) \\ &= \sum_i \lambda_i \left[\sum_j \lambda_j g_i e_{dj} g_i^{-1} + \sum_k \mu_k g_i e_k g_i^{-1} s\right] + \sum_j \mu_j E(\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j \begin{pmatrix} dj \\ -d^2ij \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i,k} \lambda_i\mu_k \begin{pmatrix} k \\ -dik \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} s + \sum_j \mu_j E(\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}), \end{aligned}$$

其中 $g_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -di & 1 \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix} \in SL_n(\mathbb{Z})$。

由于在 $d=1$ 或 $d\geq 2$ 时，计算 $E((1,\ -j,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)^t)$ 的方式不同，因此我们需要分两种子情形来证明。

子情形 3-I: $d = 1$。

在这种情况下，由于我们已经证明对于所有 $v \in d\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n$，都有 $E(v) = \frac{v+v^{-1}}{2}$，因此可得

$$E((1,-j,0,\ldots,0)^t) = \frac{1}{2}\left[(1,-j,0,\ldots,0)^t + (-1,j,0,\ldots,0)^t)\right].$$

然后，我们可以继续上述计算，从而推导出

$$E(e_1sE(f_1s)) = \sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j \begin{pmatrix} j \\ -ij \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i,k} \lambda_i\mu_k \begin{pmatrix} k \\ -ik \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} s + \sum_j \mu_j \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

$$E(e_1s)E(f_1s) = \left[\sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j \begin{pmatrix} i \\ j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j,k} \mu_j\mu_k \begin{pmatrix} j \\ -k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \left[\sum_{i,j} \lambda_i\mu_j \begin{pmatrix} i \\ j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i,j} \lambda_i\mu_j \begin{pmatrix} j \\ -i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] s.$$

因此，我们可以推 deduce 出

(4)

$$\sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j \begin{pmatrix} j \\ -ij \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_j \mu_j \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j \begin{pmatrix} i \\ j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j,k} \mu_j\mu_k \begin{pmatrix} j \\ -k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

(5)

$$\sum_{i,k} \lambda_i\mu_k \begin{pmatrix} k \\ -ik \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i,j} \lambda_i\mu_j \begin{pmatrix} i \\ j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i,j} \lambda_i\mu_j \begin{pmatrix} j \\ -i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

现在我们可以比较 $(1, j, 0, \ldots, 0)^t$ 和 $(-1, j, 0, \ldots, 0)^t$ <style id='34}>在方程 (4) 两边的系数，分别得到

$$\lambda_1\lambda_{-j} + \frac{1}{2}\mu_{-j} = \lambda_1\lambda_j + \mu_1\mu_{-j},$$

$$\lambda_j\lambda_{-1} + \frac{1}{2}\mu_j = \lambda_{-1}\lambda_j + \mu_{-1}\mu_{-j}.$$

将上述两个方程相加，并应用 (2) 和 (3)，可得$2\lambda_1\lambda_{-j} = 0$ 对所有 $j \in \mathbb{Z}$。因此 $\lambda_1 = 0$。然后将其代入上面的第一个方程，得到$\frac{1}{2}\mu_{-j} = \mu_1\mu_{-j}$。因此，对于所有 $j \in \mathbb{Z}$，要么 $\mu_1 = \frac{1}{2}$，要么 $\mu_{-j} = 0$。

一旦我们有了 $\mu_j = 0$ 对所有 $j \in \mathbb{Z}$成立，即 $b = 0$，那么 $a = E(e_1s) = E(E(e_1s)) = E(a) \in Q \cap L(\mathbb{Z}^n)' = Q \cap L(\mathbb{Z}^n) = A_1$。回顾 (2) 成立，即 $\langle a, A_1\rangle = 0$。因此 $a = 0$；等价地，$E(e_1s) = 0$。所以，不妨设 $\mu_1 = \frac{1}{2}$，并试图导出矛盾。

我们计算等式两边$(-1, j, 0, \ldots\ldots, 0)^t$在（5）中的系数，得到$\lambda_j\mu_{-1} = \lambda_{-1}\mu_j + \lambda_{-j}\mu_{-1}$。将 $\lambda_{-1} = -\lambda_1 = 0$，$\mu_{-1} = -\mu_1 = -\frac{1}{2}$代入其中并应用（2），可得 $\lambda_j = 0$ 对所有 $j \in \mathbb{Z}$成立，即 $a = 0$。

于是，对于任意 $|i| \neq 0, 1$，我们计算等式 (4) 两边的 $(i, j, 0, \ldots, 0)^t$ 的系数，并对所有 $j \in \mathbb{Z}$ 使用 $\lambda_j = 0$，从而得到对所有$j \in \mathbb{Z}$都有 $0 = \lambda_i\lambda_j + \mu_i\mu_{-j} = \mu_i\mu_{-j}$。因此，对所有 $|i| \neq 0, 1$，都有 $\mu_i = 0$。回想 $\mu_0 + \mu_{-0} = 0$，即 $\mu_0 = 0$，因此我们已证明 $E(e_1s) = 0 + \frac{1}{2}(e_1 - e_{-1})s$。

于是，$E(e_3 s) = e_1 E(e_1 s) e_{-1} = -\frac{1}{2}(e_3 - e_1)s$。因此，

$$\begin{aligned} Q \ni E(e_3 s)E(e_1 s) &= \frac{1}{4}(e_3 - e_1)s(e_1 - e_{-1})s \\ &= \frac{1}{4}(e_3 - e_1)(e_{-1} - e_1) \\ &= \frac{1}{4}(e_2 - e_0 - e_4 + e_2) \in L(\mathbb{Z}^n) \setminus A_1. \end{aligned}$$

这与 $Q \cap L(\mathbb{Z}^n) = A_1$ 的假设相矛盾。

情形 3-II：$d \geq 2$。

在此情形下，$(1, -j, 0, \ldots, 0)^t \notin d\mathbb{Z}^n$，因此 $E((1, -j, 0, \ldots, 0)^t) = 0$，因为我们此前已经证明，对于所有 $v \in \mathbb{Z}^n \setminus d\mathbb{Z}^n$，$E(v) = 0$。因此，通过比较 $E(e_1 s)E(f_1 s)$ 和 $E(e_1 s E(f_1 s))$ 的计算，我们得到以下恒等式：

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \begin{pmatrix} di \\ dj \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j,k} \mu_j \mu_k \begin{pmatrix} j \\ -k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \begin{pmatrix} dj \\ -d^2 ij \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \begin{pmatrix} di \\ j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \begin{pmatrix} j \\ -di \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k \begin{pmatrix} k \\ -dik \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

根据（6），我们推得 $\mu_j \mu_k = 0$ 对所有 $(j, -k)^t \notin d\mathbb{Z}^2$均成立。特别地，$\mu_j = 0$ 对所有 $j \notin d\mathbb{Z}$均成立，因此，$b \in L((d\mathbb{Z}, 0, \ldots, 0)^t)$。

对于任意 $i \neq 0$ 和 $j \in \mathbb{Z}$，通过比较等式$(di, dj, 0, \ldots\ldots, 0)^t$ 两边的系数，我们从恒等式 (6) 和 (7) 得出

$$\lambda_i \lambda_j + \mu_{di} \mu_{-dj} = \lambda_{-\frac{j}{di}} \lambda_i, \forall\, i \neq 0, \forall\, j \tag{8}$$

$$\lambda_i \mu_{dj} + \lambda_{-j} \mu_{di} = \lambda_{-\frac{j}{di}} \mu_{di}, \forall\, i \neq 0, \forall\, j. \tag{9}$$

这里，如果 $(di) \nmid j$，则将 $\lambda_{-\frac{j}{di}}$ 视为 0。

将 $j = 1$ 代入 (8) 和 (9)，并利用 (3) 得出

$$\lambda_i \lambda_1 = \mu_{di} \mu_d, \forall\, i \neq 0, \tag{10}$$

$$\lambda_i \mu_d = \lambda_1 \mu_{di}, \forall\, i \neq 0. \tag{11}$$

T这意味着 $(\lambda_i^2 - \mu_{di}^2)\lambda_1 \mu_d = 0$ 以及 $\lambda_1^2 = \mu_d^2$（将 $i = 1$ 代入 (10)）).

将 $j = dik$ 代入 (8) 和 (9)，并利用 (2)，可得

$$\lambda_i \lambda_{dik} - \mu_{di} \mu_{d^2 ik} = \lambda_{-k} \lambda_i, \forall\, i \neq 0, \forall\, k, \tag{12}$$

$$\lambda_i \mu_{d^2 ik} - \lambda_{dik} \mu_{di} = \lambda_{-k} \mu_{di}, \forall\, i \neq 0, \forall\, k. \tag{13}$$

断言。$\lambda_i = \mu_{di} = 0$ 对所有 $i \neq 0$ 均成立。

首先，我们来验证 $\lambda_i - \mu_{di} = 0$ 对所有 $i \neq 0$。假设这不成立，那么对某个 $i \neq 0$，有 $\lambda_i - \mu_{di} \neq 0$。将 $j = i$ 代入（8），我们得出$\lambda_i^2 - \mu_{di}^2 = 0$。因此，我们有 $\lambda_i + \mu_{di} = 0$，从而 $\lambda_i = -\mu_{di}$。于是

利用这一关系，我们可由（12）和（13）推出 $\lambda_i(\lambda_{dik}+\mu_{d^2ik}) = \lambda_{-k}\lambda_i$以及 $\lambda_i(\lambda_{dik}+\mu_{d^2ik}) = -\lambda_{-k}\lambda_i$。因此，对所有 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $0 = \lambda_{-k}\lambda_i$，从而 $\lambda_i = 0$ 且$\mu_{di} = -\lambda_i = 0$，这与我们的假设 $\lambda_i - \mu_{di} \neq 0$ 矛盾。因此，我们已经证明，对所有 $i \neq 0$，都有 $\lambda_i = \mu_{di}$。接着，由（12）可得，对所有$i \neq 0$，都有 $\lambda_{-k}\lambda_i = 0$，从而对所有 $i \neq 0$，都有 $\lambda_i = 0$。这就完成了该断言的证明。

根据断言 2 以及对所有 $j \notin d\mathbb{Z}$ 均有 $\mu_j = 0$ 这一事实，我们推出 a，$b \in \mathbb{C}$，然后对 $E(e_1 s) = a + bs$ 取迹，得到 $a = 0$。对 $E(e_1 s) = bs$ 取 E，得到 $bs = E(bs) = bE(s) = 0$，即 $b = 0$，从而 $E(e_1 s) = 0$。

这就完成了引理 3.6 的证明。 □

注 3.7。 注意，在引理 3.6 的证明中，关于 Q 的阿贝尔假设仅在步骤 1 中需要，即用于证明 $E(s) = 0$。一旦我们有了 $E(s) = 0$，随后进行的步骤 2，即情形 1–3 的证明，就不再需要阿贝尔假设。这个观察对于证明命题3.8 是必要的。

我们来分类偶数 n 时 $L(G_n)$ 中所有的不变冯·诺伊曼子代数。

命题 3.8. 设 $G_n = \mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$ $n \geq 2$ 且 n 为偶数。设 P 是 $(L(G_n)\ \tau)$ 中一个 G_n-不变冯·诺伊曼子代数。那么

- 要么 $P = L(H)$，其中 $H \lhd G_n$ 是某个正规子群；要么，
- $P = A_d$ 对某个 $d \geq 1$，其中 $A_d \subset L(d\mathbb{Z}^n)$ 由 $A_d = \{x \in L(d\mathbb{Z}^n)\colon\ \tau(xs) = \tau(xs^{-1})\ \forall s \in d\mathbb{Z}^n\}$ 定义。

证明。根据 [AHO25定理 A] 和引理 2.3，我们知道中心 $\mathcal{Z}(P) \subset L(\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})$。将引理 3.6 应用于 $Q = \mathcal{Z}(P)$，我们可以分三种情况进行证明。

情形 1. $\mathcal{Z}(P) = \mathbb{C}$，即 P 是一个 G_n-不变子因子。
那么 $P = L(N)$ 对于某个正规子群 N（属于 G），由命题 3. 1.
情形 2. $\mathcal{Z}(P) = L(d\mathbb{Z}^n)$，其中 $d \geq 1$。
断言. $P = L(d\mathbb{Z}^n)$。
事实上，我们只需验证

$$P \subseteq \mathcal{Z}(P)' \cap L(G_n) \subseteq L(\mathbb{Z}^n).$$

Th证明与命题 3.3 中证明奇数 n 情形 1 的方法完全相同 .
情形 3. $\mathcal{Z}(P) = A_d$ 对于某个 $d \geq 1$。由引理 3.4，我们得到 $P \subseteq A_d' \cap L(G_n) \subset L(\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})$。**断言。** $P \in \{A_d\,(d \geq 1)\ L(2\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})\ L(\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})\}$。

证明。令 $E\colon L(\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}) \to P$为到 P 上保 τ-迹的条件期望。下文中，为简便起见，我们直接用 g 表示 $L(G_n)$ 中的典范酉元 u_g，并使用记号 $\langle a,\ b\rangle$ 表示对于任意 a，$b \in L(G_n)$ 的 $\tau(b^*a)$。记 $s = -I_n \in SL_n(\mathbb{Z})$。

注意到 $L(SL_n(\mathbb{Z}))' \cap L(\mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})) = L(\{\pm I_n\})$，例如可通过使用 [AJ23，引理 27]直接计算得到。

由于 P 是 G_n-不变的，我们可推得，对于所有$g \in SL_n(\mathbb{Z})$， $gE(s)g^{-1} = E(gsg^{-1}) = E(s)$。因此， $E(s) \in L(SL_n(\mathbb{Z}))' \cap L(\mathbb{Z}^n \rtimes SL_n(\mathbb{Z})) = L(\{\pm I_n\})$。于是，我们可以写成 $E(s) = \lambda + \mu s$, 其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$。然后，通过与引理 3.6 的证明完全相同的计算，我们得到 $E(s) = 0$ 或 s。

由于 $P \cap L(\mathbb{Z}^n)$ 是 $SL_n(\mathbb{Z})$-不变的，我们可以应用 [Wit94, Example 5.9]，推得对于某个 $d_1 \geq 1$， $P \cap L(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{C}$、 $L(d_1\mathbb{Z}^n)$ 或 A_{d_1}。注意， $P \cap L(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{C}$ 不可能成立，因为 $\mathbb{C} \neq A_d = \mathcal{Z}(P) \subseteq P \cap L(\mathbb{Z}^n)$。因此，我们只需考虑另外两种可能。

情形 3-I：对于某个 $d_1 \geq 1$， $P \cap L(\mathbb{Z}^n) = L(d_1\mathbb{Z}^n)$。

我们需要进一步区分 $E(s) = s$ 和 $E(s) = 0$ 这两种情形，它们分别对应于 $s \in P$ 是否成立。

子情形 1： $E(s) = 0$。

若 $d_1 = 1$，则 $L(\mathbb{Z}^n) \subseteq P$，从而对所有 $v \in \mathbb{Z}^n$， $E(v) = v$。因此， $E(vs) = vE(s) = 0$。于是， $P = L(\mathbb{Z}^n)$。所以， P 是阿贝尔的，这与 $\mathcal{Z}(P) = A_d$ 矛盾。

假设 $d_1 \geq 2$。根据注记 3.7，我们可以进行类似于引理 3.6 中情形 2 的计算，从而得到 $P = L(d_1\mathbb{Z}^n)$。因此 P 是阿贝尔的，这与 $\mathcal{Z}(P) = A_d$矛盾。

子情况 2： $E(s) = s$，即 $s \in P$。

如果 $d_1 = 1$，则有 $L(\mathbb{Z}^n) \subseteq P$和 $s \in P$，这意味着 $L(\mathbb{Z}^n) \rtimes \{\pm I_n\} \subseteq P$。由于根据假设 $P \subseteq L(\mathbb{Z}^n) \rtimes \{\pm I_n\}$，我们有 $P = L(\mathbb{Z}^n) \rtimes \{\pm I_n\}$，从而 $\mathcal{Z}(P) = A_1$。回忆 $\mathcal{Z}(P) = A_d$, 因此 $d = 1 = d_1$。

假设 $d_1 \geq 2$。首先，对于任意 $v \in \mathbb{Z}^n \setminus d_1\mathbb{Z}^n$，我们注意到 $E(v) = 0$。事实上，

$$E(v) \in P \cap L(\mathbb{Z}^n)' = P \cap L(\mathbb{Z}^n) = L(d_1\mathbb{Z}^n).$$

因此，由 $\langle v - E(v)\ E(v) \rangle = 0$，我们推出 $\langle E(v)\ E(v) \rangle = 0$，即 $E(v) = 0$。

因此，对于任意 $v \in \mathbb{Z}^n$，我们有 $E(v) = 0$或 $v \in d_1\mathbb{Z}^n$；在这种情况下，$E(v) = v$，因为 $L(d_1\mathbb{Z}^n) = P \cap L(\mathbb{Z}^n) \subset P$。

剩下要考虑的是，对所有 $v \in \mathbb{Z}^n$，都有 $E(vs)$。显然，我们有

$$E(vs) = E(v)s = \begin{cases} vs, & v \in d_1\mathbb{Z}^n \\ 0, & v \in \mathbb{Z}^n \setminus d_1\mathbb{Z}^n \end{cases}$$

总之，我们得到 $P = L(d_1\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})$，于是 $\mathcal{Z}(P) = A_{d_1}$。回想一下，在情形 3 中，$\mathcal{Z}(P) = A_d$，因此 $d = d_1$。

此外，任取 $v \in \mathbb{Z}^n$，我们有 $vsv^{-1} \in P$，即 $(v\sigma_s(v^{-1}))s \in P$，所以$v\sigma_s(v^{-1}) \in P$。注意，若将 $v = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)^t$ 写作，则 $v\sigma_s(v^{-1}) = 2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)^t$。因此 $L(2\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}) \subseteq P$。结合上述分析，我们推出 d_1 只能取值 1 或 2。由于 $d_1 \geq 2$，可得 $d_1 = 2$。

换句话说，在情形 3-II 中， P只能是 $L(\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})$或 $L(2\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})$。容易验证， $\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}$ 和 $2\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}$ 都是G_n的正规子群。

情形 3-II： $P \cap L(\mathbb{Z}^n) = A_{d_1}$，其中 $d_1 \geq 1$为某个元素。

同样，我们区分 $E(s) = 0$ 和 $E(s) = s$ 这两种情况。

子情形 1： $E(s) = 0$。

根据注记 3.7，我们可以进行与引理3.6 中情形 3 类似的计算，得到 $P = A_{d_1}$。因此 P 是阿贝尔的，且 $\mathcal{Z}(P) = P = A_{d_1}$。如果 $d = d_1$， P 恰好是A_{d_1}。回想一下， $\mathcal{Z}(P) = A_d$，我们还有 $d = d_1$。

子情况 2： $E(s) = s$。

在这个子情形中，我们知道 $s \in P$。

首先，任取非零向量 $v \in d_1\mathbb{Z}^n$，我们有 $E(v) \in P \cap L(\mathbb{Z}^n)' = P \cap L(\mathbb{Z}^n) = A_{d_1}$。因此，我们可以将 $E(v) = \sum_{\omega \in d_1\mathbb{Z}^n} \lambda_\omega \omega$ 写成具有对称傅里叶系数的形式。由 $0 = \langle v - E(v)\ P \rangle$，我们推得 $\langle v - \sum_{\omega \in d_1\mathbb{Z}^n} \lambda_\omega \omega,\ \omega_0 + \omega_0^{-1} \rangle = 0$ 对所有 $\omega_0 \in d_1\mathbb{Z}^n$均成立。注意，取 $\omega_0 \notin \{v, v^{-1}\}$，可得 $0 = \lambda_{\omega_0} + \lambda_{\omega_0^{-1}} = 2\lambda_{\omega_0}$。类似地，取 $\omega_0 = v$，我们推得 $\lambda_v = \lambda_{v^{-1}} = \frac{1}{2}$。因此，对所有 $v \in d_1\mathbb{Z}^n$， $E(v) = \frac{v+v^{-1}}{2}$。

其次，我们验证对所有 $v \in \mathbb{Z}^n \setminus d_1\mathbb{Z}^n$， $E(v) = 0$。

注意，我们仍有 $E(v) \in P \cap L(\mathbb{Z}^n)' = P \cap L(\mathbb{Z}^n) = A_{d_1}$。因此，由于 $0 = \langle v - E(v)\ E(v) \rangle$，我们推得对所有 $v \in \mathbb{Z}^n \setminus d_1\mathbb{Z}^n$， $\langle E(v)\ E(v) \rangle = 0$；这是因为对于这样的 v， $\langle v, E(v) \rangle = 0$，故 $E(v) = 0$ 得证。

我们来计算对所有 $v \in \mathbb{Z}^n$， $E(vs)$。

$$E(vs) = E(v)s = \begin{cases} \dfrac{v + v^{-1}}{2} s \in A_{d_1} \rtimes \{\pm I_n\}, & v \in d_1\mathbb{Z}^n \\ 0, & v \in \mathbb{Z}^n \setminus d_1\mathbb{Z}^n \end{cases}$$

总之，我们得到 $P \subseteq A_{d_1} \rtimes \{\pm I_n\}$。另一方面， $P \cap L(\mathbb{Z}^n) = A_{d_1}$和 $E(s) = s$推出 $A_{d_1} \subseteq P$和 $s \in P$，进而得到 $A_{d_1} \rtimes \{\pm I_n\} \subseteq P$，因此 $P = A_{d_1} \rtimes \{\pm I_n\}$。

此外，任取 $v \in \mathbb{Z}^n$，有 $vsv^{-1} \in P$，即 $(v\sigma_s(v^{-1}))s \in P$，因此$v\sigma_s(v^{-1}) \in P$。注意，若我们写作 $v = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)^t$，则 $v\sigma_s(v^{-1}) = 2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)^t$。因此 $L(2\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}) \subseteq P$。显然， $P = A_{d_1} \rtimes \{\pm I_n\})$ 与 $L(2\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}) \subseteq P$ 矛盾。□

通过对上述三种情形的分析，我们得出 P 出现在以下子代数列表中：

- $\mathbb{C}$， $L(d\mathbb{Z}^n)(d \geq 1)$ $L(2\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})$， $L(\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})$，
- $L(H)$（其中 $H \lhd G_n$ 是某个正规子群）， A_d $(d \geq 1)$。

除了 $P = A_d$ 的情形外，其余情形都可以表示为某个正规子群 $H \lhd G_n$ 的 $P = L(H)$。□

最后，给出推论 1.2的证明。

推论 1.2 的证明。设 P 是 G_n-不变的冯·诺依曼子代数，且包含于 $L(G_n)$ 中，并具有 Haagerup 性质。根据定理 1.1，存在某个 $n \geq 0$，使得 $P = A_n$；或者存在某个具有 Haagerup 性质的正规子群 $H \lhd G$，使得 $L(H)$。由引理 2.4 可知，$H \subseteq \mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\}$，其中 I_n 表示 $SL_n(\mathbb{Z})$ 中的单位矩阵。因此，在这两种情况下都有 $P \subseteq L(\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})$。注意，$L(\mathbb{Z}^n \rtimes \{\pm I_n\})$ 显然是 G_n-不变的，并具有 Haagerup 性质，因此它是具有这些性质的最大者。□

参考文献

[AB21] V. Alekseev 和 R. Brugger，《正规化子因子的刚性结果》，J. Operator Theory 86 (2021)，第 1 期，3–15 页。[ADJS25] T. Amrutam、A. Dudko、Y. Jiang 和 A. Skalski，《某些半直积群的冯·诺依曼代数的不变子代数刚性》（2025），arXiv：2507.12824。[AHO25] T. Amrutam、Y. Hartman 和 H. Oppelmayer，《群冯·诺依曼代数中的可 amen 子代数》，J. Funct. Anal. 288 (2025)，第 2 期，论文编号 110718，共 20 页。[AJ23] T. Amrutam 和 Y. Jiang，《关于不变冯·诺依曼子代数刚性性质》，J. Funct. Anal. 284 (2023)，第 5 期，论文编号 109804。[BBHP22] U. Bader 、 R. Boutonnet 、 C. Houdayer 和 J. Peterson，《乘积型算术群的特征可 amen 性》，Invent. Math. 229 (2022)，第 3 期，929–985 页。[Bek07] B. Bekka，《$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 上的算子代数超刚性》，$n \geq 3$，Invent. Math. 169 (2007)，第 2 期，401–425 页。[BdlH20] B. Bekka 和 P. de la Harpe，《群的酉表示、对偶与特征标》，数学调查与专著，第 250 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2020 年。[BdlHV08] B. Bekka、P. de la Harpe 和 A. Valette，《Kazhdan 性质 (T)》，新数学专著，第 11 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2008 年。[BH21] R. Boutonnet 和 C. Houdayer，《半单李群格上的平稳特征》，Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 133 (2021)，1–46 页。[Bur91] M. Burger，《SL(3,Z) 的 Kazhdan 常数》，J. Reine Angew. Math. 413 (1991)，第 10 期，36–67 页。[CD20] I. Chifan 和 S. Das，《由群在概率空间上逆有限作用的混合作用扩张所产生的冯·诺依曼代数的刚性结果》，Math. Ann. 378 (2020)，第 3–4 期，907–950 页。[CDS23] I. Chifan、S. Das 和 B. Sun，《由负曲率群产生的冯·诺依曼代数的不变子代数》，J. Funct. Anal. 285 (2023)，第 9 期，论文编号 110098。[CIOS23] I. Chifan、A. Ioana、D. Osin 和 B. Sun，《群的类 wreath 积及其冯·诺依曼代数 I：W^*-超刚性》，Ann. of Math. (2) 198 (2023)，第 3 期，1261–1303 页。[CS13] I. Chifan 和 T. Sinclair，《负曲率群的 II_1 因子的结构理论》，Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 46 (2013)，第 1 期，1–33 页。[Con80] A. Connes，《一个基本群可数的 II_1 型因子》，J. Operator Theory 4 (1980)，第 1 期，151–153 页。[CP24] D. Creutz 和 J. Peterson，《格及其交换子的特征刚性》，Amer. J. Math. 146 (2024)，第 3 期，687–711 页。[DP22] S. Das 和 J. Peterson，《II_1 因子的 Poisson 边界》，Compos. Math. 158 (2022)，第 8 期，1746–1776 页。

[DGG+25] A. Dogon、M. Glasner、Y. Gorfine、L. Hanany 和 A. Levit，《非一致高秩格具有特征刚性》（2025），arXiv：2507.21862。[DJ24]A. Dudko 和 Y. Jiang，《ISR 性质的特征方法》，arXiv 预印本 arXiv:2410.14517（2024）。[Hou23] C. Houdayer，《高秩格的非交换遍历理论》，ICM——国际数学家大会，第 4 卷，第 5–8 节，EMS Press，柏林，2023 年，第 3202–3223 页。[KL16] D. Kerr 和 H. Li，《遍历理论：独立性与二分性》，施普林格数学专著，Springer，Cham，2016 年。[Ioa18] A. Ioana，《冯·诺依曼代数的刚性》，《2018 年国际数学家大会论文集——里约热内卢》，第 III 卷，特邀报告，World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克，2018 年，第 1639–1672 页。[Jia23] Y. Jiang，《左右绕积作用的连续轨道等价刚性》，J. Funct. Anal. 285 (2023)，第 2 期，论文编号 109942，共 35 页。[JL23] Y. Jiang 和 R. Liu，《ISR 性质失效时的不变子代数》（2023），已被 J. Operator Theory 接收。[JS21]Y. Jiang 和 A. Skalski，《具有 Haagerup 性质的极大子群与冯·诺依曼子代数》，Groups Geom. Dyn. 15 (2021)，第 3 期，849–892 页。[JZ24] Y. Jiang 和 X. Zhou，《具有 ISR 性质的无限可和群的一个例子》，Math. Z. 307 (2024)，第 2 期，论文编号 23，共 11 页。[Jon00] V. F. R. Jones，《十个问题》，《数学：前沿与展望》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000 年，第 79–91 页。[KP23] M. Kalantar 和 N. Panagopoulos，《群及冯·诺依曼代数的不变子代数》，Ergodic Theory Dynam. Systems 43 (2023)，第 10 期，3341–3353 页。[Kaž67] D. A. Každan，《群的对偶空间与其闭子群结构之间的联系》，Funkcional. Anal. i Priložen. 1 (1967)，71–74 页（俄文）。[Mar91] G. A. Margulis，《半单李群的离散子群》，数学及其边缘领域成果（第 3 系列），[数学及相关领域成果（第 3 系列）],第 17 卷，Springer-Verlag，柏林，1991 年。[Mor15] D. W. Morris，《算术群导论》，Deductive Press，[出版地不详], 2015。[Oza04] N. Ozawa，《坚实冯·诺依曼代数》，Acta Math. 192 (2004)，第 1 期，111–117 页。[Pac85] J. A. Packer，《群测度因子中对应于商作用的子代数嵌入问题》，Pacific J. Math. 119 (1985)，第 2 期，407–443 页。[Pet14] J. Peterson，《高秩群格的特征刚性》（2014），未发表手稿，见链接：https://math.vanderbilt.edu/peters10/rigidity.pdf。[PT16] J. Peterson 和 A. Thom，《特殊线性群的特征刚性》，J. Reine Angew. Math. 716 (2016)，207–228 页。[Pop06a] S. Popa，《由具有 w刚性的群的可变形作用产生的 II_1 因子的强刚性 I》，Invent. Math. 165 (2006)，第 2 期，369–408 页。[Pop06b] ,《由具有 w刚性的群的可变形作用产生的 II_1 因子的强刚性 II》，Invent. Math. 165 (2006)，第 2 期，409–451 页。[Pop07a] ,《具有 w刚性的群的可变形作用的余循环与轨道等价超刚性》，Invent. Math. 170 (2007)，第 2 期，243–295 页。[Pop07b] ,《群作用与冯·诺依曼代数的变形与刚性》，国际数学家大会，第 I 卷，欧洲数学会，苏黎世，2007 年，第 445–477 页。

[Vae10] S.Vaes，冯·诺依曼代数及其不变量的刚性，《国际数学家大会论文集》第三卷，印度斯坦图书公司，新德里，2010年，第 1624–1650 页。[Val24] A. Valette，中的极大 *Haagerup* 子群 $\mathbb{Z}^{n+1} \rtimes_{\rho_n} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$，《数学研究》**275** (2024年)，第 3 期，263–283。[Wit94] D. Witte，齐性空间上幺幂平移的可测商，《美国数学会汇刊》**345** (1994年)，第 2 期，577–594。Yongle Jiang，大连理工大学数学科学学院，大连，116024，中国电子邮箱：yonglejiang@dlut.edu.cn Hongyi Li，大连理工大学数学科学学院，大连，116024，中国电子邮箱：hyli.math@gmail.com