arXiv:2601.06376v1 [math.AG] 10 Jan 2026

球面簇的环面性与光滑性判据

GIULIANO GAGLIARDI、JOHANNES HOFSCHEIER 和 HEATH PEARSON

摘要。我们证明了若干等价的数值条件，分别刻画完备球面簇何时具有环面结构，以及任意球面簇沿任意给定 G-轨道的光滑性。这些条件以球面骨架为表述基础；球面骨架是球面簇 Luna-Vust 数据的粗略“子集”。我们的光滑性判据改进了经典判据，消除了对外部参考表的依赖。

1. 引言

本文在复数域上开展研究。

球面簇是一种正规不可约簇 X，它允许连通约化群 G代数作用，并且 Borel 子群 $B \subseteq G$ 在其中X有一个开轨道。球面簇自然推广了众所周知的环面簇和广义旗簇这两类簇；它们分别由格扇和标记 Dynkin 图在等变同构意义下组合刻画。整个球面簇类别具有丰富的几何性质，并可用兼具扇与表示论组合学的混合方式描述。

本文的结果是以球面骨架表述的两种几何性质的等价条件。球面骨架是完整球组合数据的一种较简单的粗化，它决定球面簇的未分次 Cox 环；这类似于约化群的根数据编码其几何核心，但并不能确定其同构类。我们给出了以下性质的等价组合条件：

（1）完备球面簇具有环面结构（定理 1.3），
（2）球面簇沿任意给定的 G轨道光滑（定理 1.5）。
这些结果是本文主定理（定理1.3）的推论，该定理证明了 [20,猜想 1。4]。

1.1. **主定理**。 回顾一下，球面簇由 *Luna-Vust* 数据分类；该数据将在第 2节引入，并在本文中直接使用。球面骨架是 Luna-Vust 数据的一个“子集”，最初在 [20] 中引入，旨在研究球面 Fano 簇的广义 Mukai 猜想。作者近期已在 [23] 中证明了这一猜想，而这也构成了本研究的出发点。

L令 R 为约化群 G 关于一个固定极大环面的根系
us$T \subset$
G，其单根为 $S \subseteq R$。

2020 数学主题分类。主要：14M27；次要：14M25、20G05。关键词与短语。组合光滑性判据，球面骨架，球面簇，环面簇。

定义 1.1 ([20, 定义 5.1])。 球面簇的球面骨架 $\mathscr{R}_X$ X是一个四元组，配备有两个映射

$$\mathscr{R}_X := (\Sigma, S^p, \mathcal{D}^a, \Gamma), \quad \varsigma\colon \mathcal{D}^a \to \mathcal{P}(S), \quad \rho'\colon \mathcal{D}^a \cup \Gamma \to \Lambda^* := \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z}).$$

这里， Λ 是由 X的球根 Σ 张成的 $\mathcal{M}$ 子格； S^p 是这样一组单根：其极小抛物子群稳定 X的每一种颜色； $\mathcal{D}^a$ 是 X的 a 型颜色集合；而 Γ 是 X的 G-不变素除子集合。对于 X 的任意颜色 $D \in \mathcal{D}$ （无论类型）， $\varsigma(D)$是这样一组单根：其对应的极小抛物子群不固定 D。对于每个 B-不变除子 $D \in \mathcal{D} \cup \Gamma$， ρ' 都关联一个对偶向量 $\rho'(D)\colon = \rho(D)|_{\Lambda^*}$。

球面簇 X 的反典范类有一个特定代表元，即

$$-K_X = \sum_{D \in \Delta} m_D D,$$

其中，系数 m_D 可由球面骨架得到（参见注 3.6），且$\Delta\colon = \mathcal{D} \cup \Gamma$ 表示 B-不变素除子集合 X （可从球面骨架 $\mathscr{R}_X$ 中提取）。

对于每个球面骨架 $\mathscr{R}_X$，我们关联一个多面体

$$\mathcal{Q}^*_{\mathscr{R}_X} := \bigcap_{D \in \Delta} \left\{ v \in \Lambda^*_{\mathbb{Q}} \,|\, \langle \rho'(D), v \rangle \geq -m_D \right\} \subseteq \Lambda_{\mathbb{Q}}.$$

此外，球面骨架还附带以下组合函数

$$\widetilde{\wp}(\mathscr{R}_X) := |R^+| - |R^+_{S^p}| - \sup \left\{ \sum_{D \in \Delta} m_D - 1 + \langle \rho'(D), \vartheta \rangle \;\middle|\; \vartheta \in \mathcal{Q}^*_{\mathscr{R}_X} \cap \mathrm{cone}(\Sigma) \right\},$$

其中 R_{S^p} 是由 S^p 生成的子根系，而 R^+ （分别为 $R^+_{S^p}$）是 R （分别为 R_{S^p}）的正根集合。

注 1.2。 此定义不同于 $\wp(\mathscr{R}_X)$ 中的定义， [20], 二者之间的关系如下： $\widetilde{\wp}(\mathscr{R}_X) = |R^+| - |R^+_{S^p}| - \wp(\mathscr{R}_X)$。此外，根据 $\widetilde{\wp}(\mathscr{R}_X)$， $\trianglelefteq |R^+| - |R^+_{S^p}|$ 要么是有理数，要么是负无穷，见 [20, 命题 5。6]。

现在我们陈述主要定理，该定理证明了 [20, 猜想 1。4], 并回答（1）。

定理 1.3。 设 X 是一个完备球面簇，则

$$\widetilde{\wp}(\mathscr{R}_X) \geq 0,$$

当且仅当 X 与某个环面簇同构时，等号成立。

现在我们引入回答（2）的光滑性判据。它利用了球面骨架上的以下操作。

定义 1.4 ([20, 定义 7。1])。 给定一个球面骨架 $\mathscr{R} = (\Sigma, S^p, \mathcal{D}^a, \Gamma)$ 以及一个子集 $I \subseteq \Delta$，定义另一个球面骨架如下。令 $S_I \subseteq S$ 为这样的单根构成的子集：其极小抛物子群不固定 I中的某个除子。令 R_I 为由 S_I生成的根系。现在定义

$$\begin{aligned}
\Sigma_I &:= \Sigma \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Z}} S_I, \\
S^p_I &:= S^p \cap S_I, \\
\mathcal{D}^a_I &:= \{\text{type } a \text{ colors with spherical roots in } \Sigma_I\}, \\
\Gamma_I &:= \{G\text{-invariant divisors in } I\}.
\end{aligned}$$

在 $\mathscr{R}$ 处的局部化 I 定义为球面骨架 $\mathscr{R}_I := (\Sigma_I,\ S_I^p,\ \mathcal{D}_I^q,\ \Gamma_I)$，并配备映射 $\rho'_I := \rho'|_{\Lambda_I^*}$ 和 $\varsigma_I := \varsigma|_{\mathcal{D}_I}$，其中 $\Lambda_I :=$ 张成$_{\mathbb{Z}}(\Sigma_I)$。

定理 1.5。设 X 是一个球面簇，$Y \subseteq X$ 是一个 G-轨道。设 $I \subseteq \Delta$ 是B-不变除子的集合，D 满足 $Y \subseteq D$。则 X 沿 Y 光滑，当且仅当 $\widetilde{\varphi}(\mathscr{R}_I) < 1$。

光滑性判据，定理1.5，由定理 1.3 和 [20, 定理 7。2] 得出。该判据基于 Camus 于 2001年 针对类型 A 球面簇[8], 的光滑性判据，第二作者在 2014 [18], 中将其推广到所有类型；2015年，前两位作者又基于球面骨架对其进行了猜想性重述 [20]。

我们注意到球面簇光滑性判据方向上的其他结果。球面簇的第一个光滑性判据由 Brion 于 1991年 获得 [2]。Pasquier 在 2006 [10] 和 Timashev [13] 于 2011年 独立获得了 horospherical 簇的组合光滑性判据。另一方面，2013年，Batyrev 和 Moreau[15] 利用弦论欧拉数证明了 horospherical 簇的一个光滑性判据，并猜想该判据可以推广到任意球面簇。Knop 和 Van Steirteghem 对光滑仿射球面簇进行了分类 2006 [9]。2017年，Pezzini 和 Van Steirteghem 对光滑仿射球面簇的权幺半群进行了组合分类 [21]。

1.2. **证明技巧**。对于每个球面簇，我们都可以关联一个量$\widetilde{\varphi}(X) := \widetilde{\varphi}(\mathscr{R}_X)$。本文的出发点是作者的以下结果，该结果曾用于证明文献 [23]中关于 $\mathbb{Q}$-阶乘性球面 Fano 簇的广义 Mukai 猜想。

定理 1.6 ([23, 定理 1 的推论6])。设 X 是一个完备的 $\mathbb{Q}$-*Gorenstein* 球面簇，则

$$\widetilde{\varphi}(X) \geq 0,$$

当且仅当 X 同构于一个环面簇时，$\widetilde{\varphi}(X) < 1$ 。

本文的主定理将定理 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 假设提升1.6，并证明了 $\widetilde{\varphi}(X) = 0$ 在 X 同构于环面簇时成立。在这两个步骤中，我们经常利用球面骨架的粗糙性所带来的灵活性。综合起来，这就证明了定理1.3。

现在我们来概述本文的结构。首先，在第3节中，我们介绍一种算法，该算法将完备球面簇 X 替换为完备的$\mathbb{Q}$-Gorenstein球面簇 X'，使得 $\widetilde{\varphi}(X) = \widetilde{\varphi}(X')$。在第 4 节中，我们证明该算法的正确性。接着，在第 5 节中，我们证明以下陈述："$\widetilde{\varphi}(X) = 0$ 当且仅当 X 同构于一个环面簇"，等价于 $\widetilde{\varphi}(V) = 0$，其中 V 是42个无重数空间族中的一个成员。最后，在第 7 节中，我们针对这42个族逐一明确验证这一等式，从而完成定理 1.3的证明。

在第 6节中，我们给出一些例子来说明光滑性判据定理 1.5。

2. 定义 $\widetilde{\varphi}$函数

本节简要概述球面簇的组合描述中定义 $\widetilde{\varphi}$（·）所需的相关内容。一般参考文献为 [13]。

本文中，G 表示一个连通约化代数群，$B \subseteq G$ 表示一个 Borel 子群，X 表示一个球面 G-簇，而 H 表示 X的开 B-轨道中一点的稳定子。

每个球面簇 X 都是一个 G-等变开嵌入：将一个 G-齐性空间G/H（其上有一个开 B-轨道）嵌入到一个正规不可约 G-簇中。这样的 G/H 称为球面齐性空间，而这样的嵌入 $G/H \hookrightarrow X$ 称为球面嵌入。

对于固定的 G，它们构成 G-球面簇组合分类的两个自然部分：

(1) 球面齐性空间的分类 G/H——由 *Luna* 数据分类，亦称为 球面齐性数据 (见 [13, 第30节。11] 或 [17]) 。(2) 固定球面齐性空间的球面嵌入分类 $G/H \hookrightarrow X$ G/H——由*Luna-Vust* 理论 中的着色扇 (见 [14])。

我们在本节介绍 Luna-Vust 理论，并在第 3 节按需介绍 Luna 数据的必要组成部分。

首先，我们为 X 关联其由 B-权构成的特征格

$$\mathcal{M} := \{\chi \mid \text{there exists } f_\chi \in \mathbb{C}(X) \text{ with } b \cdot f_\chi(x) = \chi(b) f_\chi(x) \text{ for all } x \in X, b \in B\} \subseteq \mathfrak{X}(B).$$

我们用 $\operatorname{rk} X$ 表示格 $\mathcal{M}$的秩。

记 $\Delta := \Delta_X$ 为 X中的 B-不变素除子的有限集合。与通过扇对环面簇进行分类的情形一样，对每个 $D \in \Delta$，都有一个对偶向量 $\rho(D) \in \mathcal{N} :=\operatorname{Hom}(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$，其定义为 $\langle \rho(D)\ \chi\rangle := \nu_D(f_\chi)$，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\mathcal{N} \times \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$ 是对偶配对。

与 X 的 G不变素除子相关联的对偶向量，是$\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_\mathbb{Q} := \mathcal{N} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ 中的本原向量，它们位于某个满维有理多面锥内，即赋值锥：

$\mathcal{V} :=$ 锥 $\{\rho(D) \mid D \in \Delta_X$ 对 G不变，其中 $G/H \hookrightarrow X\} \subseteq \mathcal{N}_\mathbb{Q}$.是一个球面嵌入

设 $G/H \hookrightarrow X$ 是一个球面嵌入。在 X中存在有限个 B不变素除子，记作 $\mathcal{D} \subseteq \Delta$，称为颜色，它们是球面齐性空间 G/H中 B不变除子的闭包。着色锥是一个有序对$(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$，满足 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ 且$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_\mathbb{Q}$ 是由 $\rho(\mathcal{F})$和 $\mathcal{V} \cap \mathcal{N}$中的有限个元素生成的严格凸锥，并且对所有 $D \in \mathcal{F}$都有 $\rho(D) \neq 0$，且 $\mathcal{C}^\circ \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$，其中 $\mathcal{C}^\circ$ 表示$\mathcal{C}$的相对内部。此外，着色锥$(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$的一个面是着色锥$(\mathcal{C}',\ \mathcal{F}')$，满足 $\mathcal{C}'$ 是通常凸几何意义下的 $\mathcal{C}$ 的面，且 $\mathcal{F}' = \{D \in \mathcal{F} \mid \rho(D) \in \mathcal{C}'\}$。

基于这一概念，可以定义一个着色扇，即由有限个着色锥组成的集合 $\mathbb{F} = \{(\mathcal{C}_i,\ \mathcal{F}_i)\}$，其中着色锥在 $\mathbb{F}$ 中的每个面也属于 $\mathbb{F}$，并且赋值锥中的每个点至多属于 $\mathbb{F}$中一个着色锥的相对内部。

接着，根据 Luna-Vust 理论，着色扇与 G/H的球面嵌入的同构类之间存在一一对应。此外，在此对应下，完备球面簇对应于覆盖赋值锥的着色扇 $\mathbb{F}$，即$\mathcal{V} \subseteq |\mathbb{F}|$ 其中 $|\mathbb{F}|$: $= \bigcup_i \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{N}_\mathbb{Q}$ 表示着色扇 $\mathbb{F}$的支撑。

在 [4, 命题 4 中，1], Brion 得到了反典范类的一个自然代表，它是以下 B不变除子的正线性组合

$$-K_X := \sum_{D \in \Delta} m_D D.$$

系数 $m_D \geq 1$ 可以利用 Luna 数据计算（见注3.6）。接下来，我们为 X 关联一个多面体：

$$Q^* := \bigcap_{D \in \Delta} \{v \in \mathcal{M}_\mathbb{Q} \mid \langle \rho(D), v\rangle \geq -m_D\} \subseteq \mathcal{M}_\mathbb{Q}.$$

当 X 完备时，Q^* 是一个多胞体。此外，若 X 是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein Fano，则 Q^* 是 X的反典范除子的矩多胞体的一个平移。

定义 2.1. 设 X 是一个球面簇，则

$$\widetilde{\wp}(X) \coloneqq \dim X - \operatorname{rk} X - \sup\left\{ \sum_{D\in\Delta} \left(m_D - 1 + \langle \rho(D), \vartheta\rangle\right) \,\middle|\, \vartheta \in Q^* \cap \mathcal{T} \right\},$$

其中 $\mathcal{T} \coloneqq -\mathcal{V}^\vee$ 是 $\mathcal{V}$ 的对偶锥的负锥。

注 2.2. 此定义与 $\wp(X)$ 在 [20]中的定义之间有如下关系：$\widetilde{\wp}(X) =$ 维数 $X -$ 秩 $X - \wp(X)$。

3. 定理 1.3中的不等式

本节证明，定理 $\mathbb{Q}$-戈伦斯坦假设 1.6 可以被提升。具体做法是通过对球组合数据进行操作，将完备情形化归到定理 $\mathbb{Q}$-戈伦斯坦情形1.6 。

特别地，给定完备球面簇 X的着色扇，在算法 3.13中，我们构造一个完备 $\mathbb{Q}$-戈伦斯坦球面簇 X' 的着色扇，使得 $\widetilde{\wp}(X) = \widetilde{\wp}(X')$ 保持不变，并且将同构于环面簇的球面簇映射到另一个同构于环面簇的球面簇。

在全文中，我们使用*Luna* 数据（也称为球面齐性数据）以组合方式描述球面齐性空间；详细内容请参见 [13, 第30节。11]或 [17]。

首先，我们对与球面嵌入的颜色 $D \in \mathcal{D}$ 相关联的对偶向量 $\rho(D) \in \mathcal{N}$ 作一些观察。

设 X 为一个 G-球面簇。记相对于固定的极大环面 $T \subseteq G$ 的 G的根系为 R，并令 $S \subseteq R$ 为与我们所选的 Borel 子群 $B \subseteq G$相对应的单根选取。若包含 B 且与 α相关联的极小抛物子群 P_α满足 $P_\alpha \cdot D \neq D$，则称颜色 $D \in \mathcal{D}$ 被 $\alpha \in S$ 移动。记 S^p 为不移动任何颜色的单根 X的集合。回忆一下，球面簇的颜色集分成以下三个互不相交的情形：

$$\text{a color } D \in \mathcal{D} \text{ is said to be of type } \begin{cases} a & \text{if } D \text{ is moved by some } \alpha \in S \cap \Sigma, \\ 2a & \text{if } D \text{ is moved by some } \alpha \in S \cap \frac{1}{2}\Sigma, \\ b & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注记 3.1. 我们列出以下关于颜色的性质，这些性质将在下文中用到，并且可直接由 Luna 数据的公理推出（例如参见 [13,定义 30.21]）：

- 类型为 a 的颜色成对出现，也就是说，对每个 $\alpha \in S \cap \Sigma$，都有两个颜色 D_α^+和 D_α^-，它们由 α 移动，且满足 $\rho(D_\alpha^+) + \rho(D_\alpha^-) = \alpha^\vee|_{\mathcal{M}}$。
- 对于所有 $\gamma \in \Sigma$，均有 $\langle \rho(D_\alpha^\pm)\ \gamma\rangle \leq 1$，且等号成立当且仅当 $\gamma = \alpha$。
- 每个球根都是单根的非负线性组合。我们用 $\operatorname{supp}\gamma \subseteq S$ 表示在 γ中出现的单根的集合。

定义 3.2. 若一对颜色 D_1, D_2 同向，则称其为同向的；如果存在有理数 $k > 0$使得 $\rho(D_1) = k\rho(D_2)$，则称它们同向。

命题 3.3。 假设 D_1、$D_2 \in \mathcal{D}$ 同向。那么以下两种情况必有其一：D_1、D_2 是类型为 a 且满足 $\rho(D_1) = \rho(D_2)$ 的一对颜色，或者 D_1、D_2 是类型为 b 的颜色。

命题 3.3 是以下两个命题的推论。

命题 3.4. 设 D 是类型为 a 或 $2a$ 的颜色，且 $D' \neq D$ 是一个非类型为 a 的颜色。那么 D 和 D' 不同向。

证明。设 $\gamma = \lambda\alpha \in \Sigma$ $(\lambda \in \{1,2\})$ 为与 D 相关联的球根。注意到$\langle \rho(D)\ \gamma\rangle > 0$。反设 $D' \neq D$ 是一个非 a 型颜色，并且与 D 同向，因此对于某些 $\ell > 0$ 和 $\alpha \neq \beta \in S$，有 $\rho(D') = \ell\beta^\vee|_{\mathcal{M}}$，且对于 $k > 0$，有 $\rho(D) = k\rho(D')$。由于 $\beta \notin \operatorname{supp}\gamma = \{\alpha\}$，可得 $0 < \langle \rho(D)\ \gamma\rangle = \langle k\rho(D')\ \gamma\rangle = k\ell\langle\beta^\vee,\ \gamma\rangle \leq 0$，因此不存在这样的 k。□

命题 3.5。设 D_1、D_2 是两个 a 型的同向颜色。那么 D_1 和 D_2 都由同一个单根 $\alpha \in S \cap \Sigma$ 移动，并且 $\rho(D_1) = \rho(D_2)$。

证明。假设 D_1 被 $\alpha \in S \cap \Sigma$ 移动，D_2 被 $\beta \in S \cap \Sigma$ 移动，并且对于某个 $k > 0$，$\rho(D_2) = k\rho(D_1)$。令 D_α^+, D_α^-（分别为 D_β^+, D_β^-）表示被 α（分别被 β）移动的 a 型颜色对。那么 $D_1 \in \{D_\alpha^-, D_\alpha^+\}$ 且 $D_2 \in \{D_\beta^-, D_\beta^+\}$。不失一般性，假设 $D_2 = D_\beta^+$。于是，由于 $\langle \rho(D_1)\ \alpha\rangle = 1$，我们有 $\langle \rho(D_\beta^+)\ \alpha\rangle = k$。颜色 $D_\beta^\pm$ 满足 $\langle \rho(D_\beta^+)\ \alpha\rangle + \langle \rho(D_\beta^-)\ \alpha\rangle = \langle\beta^\vee, \alpha\rangle$，因此 $k = \langle\beta^\vee, \alpha\rangle - \langle \rho(D_\beta^-)\ \alpha\rangle \in \mathbb{Z}$。那么，由于 $0 < k = \langle \rho(D_\beta^+)\ \alpha\rangle \leq 1$，唯一的可能是 $k = 1$。特别地，我们得到 $\alpha = \beta$。□

命题*3.3*的证明。若 D_1 和 D_2 并非同为 b类型，则 D_1 和 D_2的类型无序组，记为$(t_1,\ t_2)$，属于以下情形之一：

$$(t_1, t_2) \in \{(a,a), (a,2a), (a,b), (2a,2a), (2a,b)\}.$$

根据命题3.4，D_1 和 D_2 在上述每种情形中都不同向，但 D_1和 D_2 同为 a类型时除外；在这种情况下，命题3.5 表明 $\rho(D_1) = \rho(D_2)$。命题3.3的证明至此完成。□

注 3.6。我们列出球面簇 $X \leftarrow G/H$的标准球面反典范除子中系数 m_D 的一些性质。根据 [4, 定理 4。2]（另见 [5,§3。6] 或 [19, 定理 1。5]），G/H 的反典范层对应于 B-权 $\kappa = 2(\rho_S - \rho_{S^p})$；对于 $I \subseteq S$，我们用 ρ_I 表示由 I生成的根系中所有正根之和的一半。对于每个被单根 $\alpha \in S$移动的颜色 $D \in \mathcal{D}$，其系数 m_D 为：

$$\begin{aligned} m_D &= \frac{1}{2}\langle\alpha^\vee, \kappa\rangle = 1 && \text{对于类型为 } a \text{ 或 } 2a \text{ 的 } D, \\ m_D &= \langle\alpha^\vee, \kappa\rangle \geq 2 && \text{对于类型为 } b \text{的 } D \end{aligned}$$

命题 3.7。若对于某个 $\ell > 0$，$\ell\kappa \in \mathcal{M}$，则对于任意颜色对 D_1, D_2，要么$\rho(D_1)$ 与 $\rho(D_2)$ 张成不同的射线，要么 $\rho(D_1)/m_{D_1} = \rho(D_2)/m_{D_2}$。

证明。根据命题 3.3，有两种情况会使 $\rho(D_1)$ 和 $\rho(D_2)$ 张成同一条射线。若这两个颜色均为 a 型，则 $m_{D_1} = m_{D_2} = 1$，因此根据命题 3.3，$\rho(D_1) = \rho(D_2)$。若这两个颜色均为 b 型，且对于 $k > 0$，$\rho(D_1) = k\rho(D_2)$，则$\ell m_{D_1} = \langle \rho(D_1)\ \ell\kappa\rangle = \langle k\rho(D_2)\ \ell\kappa\rangle = k\ell m_{D_2}$。特别地，$k = m_{D_1}/m_{D_2}$，由此可得所述结论。□

命题 3.8。给定一个满足对所有 $\ell' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 都有 $\ell'\kappa \notin \mathcal{M}$ 的 *Luna* 数据，定义 $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \oplus \mathbb{Z}\kappa \subseteq \mathfrak{X}(B)$。应用以下两项修改后，即可得到真正的 *Luna* 数据

- 将 $\mathcal{M}$ 替换为 $\mathcal{M}'$，使得 $\mathcal{N}' = \operatorname{Hom}(\mathcal{M}', \mathbb{Z}) \cong \mathcal{N} \oplus \mathbb{Z}$，
- 将 $\rho\colon\ \mathcal{D} \to \mathcal{N}$替换为 $\rho'\colon\ \mathcal{D} \to \mathcal{N}' = \mathcal{N} \oplus \mathbb{Z};\ D \mapsto (\rho(D)\ m_D)$。

证明。 我们按照 [13,定义 3021] 中给出的公理编号，验证 Luna 数据的公理。

显然 $\Sigma \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$。首先，我们要求每个球根 $\gamma \in \Sigma$ 在$\mathcal{M}'$中都是本原的。事实上，由于 $\kappa \notin \mathcal{M}$，我们有 $\gamma = \gamma + 0\kappa \in \mathcal{M} \oplus \mathbb{Z}\kappa = \mathcal{M}'$，因此每个球根在 $\mathcal{M}'$中仍然是本原的。

注意，对所有 $\gamma \in \Sigma$，我们都有 $\gamma \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$，因此对于每个类型为 a 的颜色 $D \in \mathcal{D}$，有 $\langle \rho'(D)\ \gamma\rangle = \langle \rho(D)\ \gamma\rangle$。由此，修正的 Luna 数据满足公理 (A1)，这可由原始 Luna 数据推出。

设 $\alpha \in \Sigma \cap S$，并设 D_α^+，D_α^-为被 α 移动的类型为 a 的颜色对。则有

$$\rho'(D_\alpha^+) + \rho'(D_\alpha^-) = (\rho(D_\alpha^+), 1) + (\rho(D_\alpha^-), 1) = (\rho(D_\alpha^+) + \rho(D_\alpha^-), 2) = (\alpha^\vee|_{\mathcal{M}}, \langle \alpha^\vee, \kappa\rangle),$$

其中，最后一个等号用到了注记 3.6，即 $\langle \alpha^\vee,\ \kappa\rangle = 2$。这表明 $\rho'(D_\alpha^+) + \rho'(D_\alpha^-) = \alpha^\vee|_{\mathcal{M}'}$，因此验证了 [13, 定义 30。21]。

定义 30 中的公理 (A3) 显然成立。

令 $\alpha \in S \cap \frac{1}{2}\Sigma$。由注 3.6，我们有 $\langle \alpha^\vee,\ \kappa\rangle = 2$，因此 $\langle \alpha^\vee,\ \mathcal{M}'\rangle \subseteq 2\mathbb{Z}$。由于$\Sigma \subseteq \mathcal{M}$，根据原始 Luna 数据的公理 ($\Sigma$1) 可得 $\langle \alpha^\vee,\ \Sigma \setminus \{2\alpha\}\rangle \leq 0$。因此，修正的 Luna 数据满足公理 ($\Sigma$1)。

假设 $\alpha,\ \beta \in S, \alpha \perp \beta$ 和 $\gamma := \alpha + \beta \in \Sigma \cup 2\Sigma$。那么，球根 γ 对应一个颜色 $D \in \mathcal{D}$，它在反典范类中的系数为 $\langle \alpha^\vee,\ \kappa\rangle = \langle \beta^\vee,\ \kappa\rangle = m_D$。因此，根据原始 Luna 数据的公理 ($\Sigma$2)，可知 $\alpha^\vee = \beta^\vee$ 在 $\mathcal{M}'$ 上。

对于最后一条公理 (S)，还需证明对每个 $\alpha \in S^p$ 都有 $\langle \alpha^\vee, \kappa\rangle = 0$。这可由以下一般性观察得出：设 $I \subseteq S$ 是一个子集，ρ_I 是由 I 生成的根系中正根之和的一半。众所周知，ρ_I 等于由 I 生成的根系中的基本权之和。因此，对每个 $\alpha \in I$，都有$\langle \alpha^\vee, \rho_I\rangle = 1$。回到最初的问题：回忆 $\kappa = 2(\rho_S - \rho_{S^p})$。于是，对每个$\alpha \in S^p$，有 $\langle \alpha^\vee, \kappa\rangle = 2(\langle \alpha^\vee,\ \rho_S\rangle - \langle \alpha^\vee, \rho_{S^p}\rangle) = 0$，如所求。□

注记 3.9。 注意，命题 $\mathcal{V}'$ 3.8 中修正的 Luna 数据的赋值锥 满足 $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \oplus \mathbb{Q} \subseteq \mathcal{N}'_{\mathbb{Q}} = \mathcal{N}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}$ 其中 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$ 是原始 Luna 数据的赋值锥。

现在我们描述一类对应于 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 球面簇的着色扇（见注3.10）。接着，我们给出一种算法，将一个完备着色扇转换为该类中的一个完备着色扇。

注 3.10。 回顾一下，当且仅当每个着色锥 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 时，球面簇是 $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ 存在一个线性函数 $f_{(\mathcal{C},\mathcal{F})} \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 使得 $m_D = \langle \rho(D)\ f_{(\mathcal{C},\mathcal{F})}\rangle$ 对 $\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho(D)$ 的每条射线 $\mathcal{C}$ （其中 $D \in \Delta$），且 $m_{D'} = \langle \rho(D')\ f_{(\mathcal{C},\mathcal{F})}\rangle$ 对每个 $D' \in \mathcal{F}$ 都成立（例如参见[1,第3节中的第一个命题。1]）。

特别地，考虑一个着色扇，其中每个着色锥 $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ 都满足：

(1) $\mathcal{C}$ 是单纯锥，即 $\mathcal{C}$ 的射线由 $\mathbb{Q}$-线性无关的向量生成；(2) 对每个颜色 $D \in \mathcal{F}$，$\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho(D)$是 $\mathcal{C}$的一条射线；(3) 对每对具有相同射线 $\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho(D_1) = \mathbb{Q}_{\geq 0}\rho(D_2)$的颜色 $D_1, D_2 \in \mathcal{F}$，要求 $\rho(D_1)/m_{D_1} = \rho(D_2)/m_{D_2}$。

注意，这种着色扇对应的球面簇是 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 的。

注记 3.11。回顾第 2 节，每个着色锥 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$ 由一个严格凸有理多面锥 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$ 和一个子集 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ 组成，满足

$$\mathcal{C} = \operatorname{cone}(\{v_1, \ldots, v_n\} \cup \rho(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$$

对于某些 $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V} \cap \mathcal{N}$，使得 $\rho(D) \neq 0$ 对于 $D \in \mathcal{F}$，且 $\mathcal{C}$的相对内部与赋值锥相交，即 $\mathcal{C}^\circ \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$。如果 $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ 满足这些性质，但不一定满足与赋值锥的相交性质，我们就称其为一个抽象着色锥。我们将抽象着色扇 定义为抽象着色锥的集合，并要求扇中某个抽象着色锥的每个抽象有色面也属于该扇，且赋值锥中的每一点至多位于该扇中一个抽象着色锥的相对内部。显然，从抽象着色扇中移除那些不是真正着色锥的抽象着色锥，即可得到一个真正的着色扇。此外，容易证明，与赋值锥相交时，抽象着色扇及其对应的“真正”着色扇的支撑重合。

命题 3.12。对于每个完备球面簇 $X \hookleftarrow G/H$，存在一个完备$\mathbb{Q}$-*Gorenstein* 球面簇 $X' \hookleftarrow G/H'$，使得 $\widetilde{\varphi}(X') = \widetilde{\varphi}(X)$。

事实上，这种 X' 的 *Luna* 数据和着色扇可以取为算法 *3.13* 的输出。

算法 3.13。该算法的输入是完备球面簇 $X \hookleftarrow G/H$ 的着色扇 $\mathbb{F}$ 和 Luna 数据。

（1）首先，如果存在一个 $\ell > 0$ 使得 $\ell\kappa \in \mathcal{M}$，则记 $\mathbb{F}_3 := \mathbb{F}$，并转到步骤（4）。否则，用命题 3.8 中规定的新 Luna 数据替换 G/H 的 Luna 数据。令所得的球面齐性空间为 G/H'，并在相应的 G/H 记号后加撇号，以表示其关联的球组合数据。接下来转到步骤（2）。（2）注意，根据注记 3.9，新的 Luna 数据具有 $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \oplus \mathbb{Z}$，且颜色 $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$。利用该 Luna 数据，我们通过着色扇 $\mathbb{F}'$ 以组合方式定义一个嵌入 $G/H' \hookrightarrow X'$；其构造从这里的着色扇 $\mathbb{F}_2$ 开始，并在步骤（5）中完成为 $\mathbb{F}' := \mathbb{F}_5$。首先，我们描述 $D \in \Delta$ 的对偶向量 $\rho'(D) \in \mathcal{N}'$。映射 $\rho' \colon \Delta \to \mathcal{N}'$ 满足：对于颜色$D \in \mathcal{D}' = \mathcal{D}$，$\rho'(D) = (\rho(D)\ m_D)$，并且对于 G-不变除子 $X_i \in \Delta$，我们令 $\rho'(X_i) := (\rho(X_i),\ 1)$。$\mathbb{F}_2$ 的着色锥如下。设 $(D_i)_{i \in I}$ 且 $D_i \in \Delta$ 为与 $\mathbb{F}$ 中某个锥 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$ 的射线和颜色相对应的 B-不变除子族。那么，$\mathbb{F}_2$ 的着色锥为：

$$(\mathcal{C}', \mathcal{F}') := (\operatorname{cone}(\{\rho'(D_i) \mid i \in I\}), \mathcal{F}) \subseteq \mathcal{N}'_{\mathbb{Q}} = \mathcal{N}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q},$$

以及这类锥的有色面。在命题4.6中，我们证明 $\mathbb{F}_2$是真正的着色扇。

（3）接下来，我们引入两条新的射线 $\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho'(Y^{\pm}) := \mathbb{Q}_{\geq 0}((0, \ldots, 0)\ \pm 1) \subseteq \mathcal{N}'_{\mathbb{Q}}$，分别对应于两个 G-不变除子 Y^+、$Y^- \subseteq X'$。令 $\Delta' := \Delta \sqcup \{Y^+, Y^-\}$。在第 4.2 节中，我们构造一个包含 $\mathbb{F}_2$ 且纳入$\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho'(Y^{\pm})$ 的完备着色扇 $\mathbb{F}_3$。大致而言，对于每个从 $((0, \ldots, 0)\ +\infty)$“可见”的 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F}) \in \mathbb{F}_2$，通过引入一个新的着色锥 $(\mathcal{C}+\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho(Y^+)\ \mathcal{F})$ 来构造着色扇 $\mathbb{F}_3$。类似地，对于每个从 $((0, \ldots, 0)\ -\infty)$“可见”的 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F}) \in \mathbb{F}_2$，我们引入一个新的着色锥 $(\mathcal{C} + \mathbb{Q}_{\geq 0}\rho(Y^-)\ \mathcal{F})$。更多细节见第 4.2 节。现在将 $\mathbb{F}_2$ 替换为 $\mathbb{F}_3$。

（4）接下来，我们修改着色扇 $\mathbb{F}_3$，使得着色 $D \in \mathcal{F}$ 中使用的每个颜色 D，都张成该着色锥（$\mathcal{C}$，$\mathcal{F}$）的一条射线 $\mathcal{C}$。令 $J \subseteq \mathcal{D}'$ 为满足以下条件的颜色集：存在 $\mathbb{F}_3$ 的着色锥（$\mathcal{C}$，$\mathcal{F}$），使得 $D \in \mathcal{F}$，且 $\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho'$（D）不是 $\mathcal{C}$ 的一条射线。在第 4.1 节中，我们将星形细分（或称星细分）的概念推广到着色锥。借助这一工具，我们现在进行如下修改。对于每个 $D \in J$，添加一条由 ρ'（D）张成的新射线，并沿 $\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho'$（D）的方向对 $\mathbb{F}_3$ 进行星形细分。这将 $\mathbb{F}_3$ 替换为一个着色扇，其中部分着色锥被细分，使得$\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho'$（D）成为新细分锥的一条射线。将 $\mathbb{F}_3$ 替换为所得的着色扇，并对剩余的 $D \in J$ 继续此过程。我们将最终的着色扇记为 $\mathbb{F}_4$。

(5) 取 $\mathbb{F}_4$ 自步骤 (4) 得到的着色扇，并对 $\mathbb{F}_4$中的每个着色锥进行三角剖分，且不添加任何新的射线。最后，舍弃这个新着色扇中所有不是真正着色锥的抽象着色锥。所得着色扇$\mathbb{F}_5$ 是完备的。

The 该算法的输出是球面簇 $X' \hookleftarrow G/H$ 的着色扇 $\mathbb{F}' := \mathbb{F}_5$ $'$.

在第 4 节中，我们证明算法3.13 的正确性。

命题 *3.12* 的证明。 根据命题 4.4，只需证明其着色扇为算法 3.13 输出的球面簇X' 满足 $\widetilde{\wp}(X) = \widetilde{\wp}(X')$。首先，注意到维数 X – 秩 X 在步骤 (1) 中保持不变：

$$\begin{aligned}\dim G/H' - \operatorname{rk} G/H' &= (\operatorname{rk} \mathcal{M}' + |R^+| - |R^+_{S^p}|) - \operatorname{rk} \mathcal{M}' \\ &= |R^+| - |R^+_{S^p}| = \dim G/H - \operatorname{rk} G/H,\end{aligned}$$

其中， R_{S^p} 表示由 S^p张成的 R 子根系。

注意，算法 3.13 的后续步骤均不会改变 $\dim X - \operatorname{rk} X$。接下来，我们确认步骤（2）保留了 $\widetilde{\wp}(X)$ 中的线性规划。我们首先注意到，在 G/H' 的 Luna 数据中，只有 $\mathcal{M}$和 $\rho : \Delta \to \mathcal{N}$ 发生变化。此外， $\mathbb{F}$ 的射线与 $\mathbb{F}_2$的射线之间存在一一对应。因此，可以自然地将 X 中 B-不变除子 Δ的集合与由着色扇 $\mathbb{F}_2$给出的 $\widetilde{G/H'}$的球面嵌入中的相应集合对应起来。我们将后一个嵌入记为 X_2，并将 X_2 中对应于 $D \in \Delta$的B-不变除子记为 D。由上述观察可得

$$-K_{X_2} = \sum_{D \in \Delta} m_D \widetilde{D}.$$

也就是说，反典范类中的系数不变。因此，用于计算 $\widetilde{\wp}(X_2)$ 的多面体如下所示

$$Q_2{}^* = \bigcap_{D \in \Delta} \{v \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q} \mid \langle \rho'(\widetilde{D}), v \rangle \geq -m_D\}.$$

G/H'的尾锥为 $\mathcal{T}' = \operatorname{cone}(\Sigma') = \operatorname{cone}(\Sigma) = \mathcal{T} \times \{0\} \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}$，它包含于 $\mathcal{M}'_{\mathbb{Q}} = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}$的第一因子中。因此， $\widetilde{\wp}(X_2)$中的新优化区域为

$$Q_2^* \cap \mathcal{T}' = (Q^* \cap \mathcal{T}) \times \{0\}.$$

$\widetilde{}$新的目标函数是 $\sum_{D \in \Delta'} \rho'(D)$。令 π: $\mathcal{N}'_{\mathbb{Q}} = \mathcal{N}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q} \to \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$为到第一因子的投影$\widetilde{}$。不难验证， $\sum_{D \in \Delta} \rho'(D)$ 与 $\pi^*(\sum_{D \in \Delta} \rho(D))$ 在 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathcal{M}'_{\mathbb{Q}} = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}$ 上相同，因此这两个线性形式在 $Q_2^* \cap \mathcal{T}' =$上相等。

$(Q^* \cap \mathcal{T}) \times \{0\}$。由此立即可知，$\widetilde{\varphi}(X)$ 中的线性规划在步骤 (2) 后保持不变，而 $\widetilde{\varphi}(X)$ 保持不变，即 $\widetilde{\varphi}(X) = \widetilde{\varphi}(X_2)$。

在步骤（3）中，新的射线 $\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho(Y^{\pm})$ 导出以下集合：B-不变除子 $\Delta' = \Delta \sqcup \{Y^+, Y^-\}$，它们位于球面嵌入 $G/H' \hookrightarrow X_3$ 中，该嵌入由着色扇 $\mathbb{F}_3$给出。于是，X_3 的反典范类为

$$-K_{X_3} = \sum_{D \in \Delta} m_D \overline{D} + Y^+ + Y^-$$

这里，我们在每个 X_3 中对应于一个 X_2 中的 B-不变除子的 B-不变除子上方加一横线。为简便起见，我们稍微滥用记号，对 X_3 中的每个 B-不变素除子 D，都简单地记作 D ($D \in \Delta'$)。注意，除子 $Y^{\pm}$ 是 G-不变的，因此满足 $m_{Y^{\pm}} = 1$。特别地，在计算 $\widetilde{\varphi}(X_3)$ 时出现的和 $\sum_{D \in \Delta'}(m_D - 1)$，与在计算 $\widetilde{\varphi}(X)$（分别为 $\widetilde{\varphi}(X_2)$）时出现的和 $\sum_{D \in \Delta}(m_D - 1)$ 相同。$\widetilde{\varphi}(X_3)$ 中使用的多面体为

$$Q_3^* = Q_2^* \cap \{v \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q} \mid \langle \rho'(Y^+), v \rangle \geq -1\} \cap \{v \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q} \mid \langle \rho'(Y^-), v \rangle \geq -1\},$$

因此 $Q_3^* \cap \mathcal{T}' = Q_2^* \cap \mathcal{T}' = (Q^* \cap \mathcal{T}) \times \{0\}$。此外，线性形式 $\rho'(Y^{\pm})$ 在 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathcal{M}'_{\mathbb{Q}} = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}$ 上消失，因此在优化区域内将它们加入不会改变 $\widetilde{\varphi}(X_3)$ 中的目标函数，即

$$\sum_{D \in \Delta'} \rho'(D)|_{(Q^* \cap \mathcal{T}) \times \{0\}} = \sum_{D \in \Delta} \rho'(D)|_{(Q^* \cap \mathcal{T}) \times \{0\}} = \pi^* \left(\sum_{D \in \Delta} \rho(D) \right) \Bigg|_{(Q^* \cap \mathcal{T}) \times \{0\}}.$$

因此，$\widetilde{\varphi}(X)$ 中的线性规划在加入射线 $\rho(Y^{\pm})$ 后仍保持不变。因此，$\widetilde{\varphi}(X)$在步骤（3）中保持不变。

从定义显然可知，$\widetilde{\varphi}$ 仅取决于球面嵌入的 B-不变除子，而不取决于步骤（4）和（5）中对着色扇 $\mathbb{F}_3$ 所作的高维修改。因此，$\widetilde{\varphi}(X)$ 在算法 3.13下保持不变，且有 $\widetilde{\varphi}(X') = \widetilde{\varphi}(X)$。□

命题 3.14。设 X 为一个完备球面簇，则

$$\widetilde{\varphi}(X) \geq 0.$$

证明。设 X 为一个完备球面簇。根据命题3.12 和定理1.6，存在一个完备的 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 球面簇 X' 使得

$$\widetilde{\varphi}(X) = \widetilde{\varphi}(X') \geq 0.$$ □

4. 算法 3.13 的证明

本节证明算法3.13的正确性。首先，我们研究从托里克几何中的扇到完备球面簇的星形细分的“带颜色类比”，以完成算法4）的步骤3.13。本节最后给出算法3.13的证明。

4.1. 星形细分的带色类比。

在证明算法 3.13正确之前，我们先简要概述着色扇的星形细分。定义（有色）扇的星形细分有许多等价的方法。一种介绍扇的这些修改的方法，是通过扇的支撑中所含射线或锥的所谓“星”和“链”。不过，对于我们的情形，以下更直接（但不那么系统）的方法似乎更有用。

定义 4.1. 设 $\mathbb{F}$ 是一个着色扇。记 $\mathbb{F}^a$ 为相应的抽象着色扇，它是通过在 $\mathbb{F}$中着色锥的抽象有色面扩充 $\mathbb{F}$ 而得到的。注意，$\mathbb{F}^a$ 仍满足着色扇的条件，只是抽象着色锥的相对内部可能与赋值锥不相交。

按照 [12, 节 11], ，对于给定的颜色 $D \in \mathcal{D}$ 及 $\rho(D) \in |\mathbb{F}| = |\mathbb{F}^a|$，我们引入如下集合 $\mathbb{F}^a(D)$，它由以下锥组成：

- $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$，其中 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbb{F}^a$ 与 $\rho(D) \notin \mathcal{C}$相伴。
- $(\mathrm{cone}(\mathcal{C}', \rho(D))\ \mathcal{F}' \cup \{D\})$，其中 $(\mathcal{C}', \mathcal{F}') \in \mathbb{F}^a$ 与 $\rho(D) \notin \mathcal{C}'$ 以及 $\{\rho(D)\} \cup \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$相伴，其中 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbb{F}^a$。

The $\mathbb{F}^a(D)$ 中真正的着色锥集合 $\mathbb{F}^*(D)$ 称为 $\mathbb{F}$ 在 D 处的星形细分 。

注 4.2。 请注意，在定义 4.1 中，我们需要包含抽象有色面。例如，考虑以下设置： $\mathcal{V}$: $= \{x + y \leq 0\} \subseteq \mathbb{Q}^2$， $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3\}$，以及

$$\rho\colon \mathcal{D} \to \mathbb{Q}^2; \quad \begin{cases} \rho(D_1) = (1, 0) \\ \rho(D_2) = (0, 1) \\ \rho(D_3) = (-2, 1). \end{cases}$$

我们指出，这种“有色数据”并非球面簇的真正 Luna 数据。然而，在更高维的情形下，可能会出现我们现在要描述的现象。为便于说明，我们着重讨论 2 维情形。

考虑有色扇 $\mathbb{F}$，它由着色锥的所有（真正的）有色面组成$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$: $=$(锥$((-3{,}1), (1, 0))$ $\{D_1, D_2, D_3\}$）（见图 1）。也就是说，

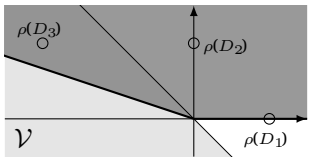

图 1. 注 4.2 的示意图4.2。

$$\mathbb{F} = \{(\mathcal{C}, \mathcal{F}), (\mathrm{cone}((-3, 1)), \{\}), (\{0\}, \{\})\}.$$

然而， $\mathbb{F}^a$ 还包括抽象着色面（锥$((1,\ 0))$ $\{D_1\}$）。

不难验证， $\mathbb{F}^*(D_3)$有两个极大锥，即

$$(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1) = (\mathrm{cone}((-3, 1), \rho(D_3)), \{D_3\}), \quad \text{and}$$
$$(\mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2) = (\mathrm{cone}(\rho(D_1), \rho(D_3)), \{D_1, D_3\}).$$

后一个锥由抽象面 (锥$(\rho(D_1))$ $\{D_1\}$)生成。如果我们不允许抽象面，则该锥不会出现，因此 $\mathbb{F}$ 和$\mathbb{F}^*($ $D)$ 的支撑将会不同。按照我们的定义，这种情况不会发生，正如我们在命题 4.3中所证明的那样。

命题 4.3。 设 $\mathbb{F}$ 是一个着色扇，且 $D \in \mathcal{D}$ 满足 $\rho(D) \in |\mathbb{F}|$。则 $\mathbb{F}^*(D)$ 是一个（真正的）着色扇，且满足 $|\mathbb{F}| \cap \mathcal{V} = |\mathbb{F}^*(D)| \cap \mathcal{V}$。

证明。根据定义 4.1，显然每个有色锥 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbb{F}^*(D)$ 都包含于某个有色锥 $(\mathcal{C}', \mathcal{F}') \in \mathbb{F}^a$ 中。注意， $\mathbb{F}^a(D)$ 中包含于 $\mathbb{F}^a$ 的固定有色锥 $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ 的有色锥集合，可以视为由锥 $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ 通过添加抽象有色面得到的扇 $\mathbb{F}^a_{\mathcal{C}'}$ 的星形细分。这里，如果有色锥 $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$

不包含 $\rho(D)$，我们就将星形细分视为平凡的（即不改变扇）。因此，只需考虑与满足 $\rho(D) \in \mathcal{C}'$ 的有色锥 $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ 相关联的有色扇 $\mathbb{F}_{\mathcal{C}'}$。

在这种情况下，根据托里克几何中星形细分的相应定义可知，$\{\mathcal{C} \mid (\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbb{F}^a_{\mathcal{C}'}(D)\}$ 是一个细分锥$\mathcal{C}'$的扇（托里克意义下）。特别地，每个 $\nu \in \mathcal{C}'$ 都恰好包含在一个锥 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbb{F}^a_{\mathcal{C}'}(D)$的相对内部中。移除 $\mathbb{F}^a_{\mathcal{C}'}(D)$中的面仍保持这一性质。

由此观察可直接验证，每个 $\nu \in \mathcal{V}$ 至多包含在 $\mathbb{F}^*(D)$的一个着色锥的相对内部中。事实上，假设存在 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1)$、$(\mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2) \in \mathbb{F}^*(D)$，使得 $\nu \in \mathcal{C}_1^\circ \cap \mathcal{C}_2^\circ$。由于 $\mathbb{F}$ 是一个着色扇且 $\nu \in \mathcal{C}_1^\circ \subseteq |\mathbb{F}|$，可知存在唯一的着色锥 $(\mathcal{C}', \mathcal{F}') \in \mathbb{F}$，它包含 ν 于其$\widetilde{\ }$相对内部中。根据星形细分的定义，存在 $(\mathcal{C}_i, \mathcal{F}_i) \in \mathbb{F}^a$，使得$\sim\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_i$。由于 $\nu \in (\mathcal{C}')^\circ$，并且 $\mathbb{F}^a$ 限制在 $\mathcal{V}$上时是托里克意义下的扇，因此$\widetilde{\ }$可得 $\mathcal{C}' \preceq \mathcal{C}_i$，即 $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}_i$的一个着色面。显然，$\mathbb{F}^a_{\mathcal{C}'}(D)$是 $\mathbb{F}^a_{\widetilde{\mathcal{C}}_i}(D)$的子扇。由于$\sim\nu \notin |\mathbb{F}^a_{\widetilde{\mathcal{C}}_i}(D)| \setminus |\mathbb{F}^a_{\mathcal{C}'}(D)| = \mathcal{C}_i \setminus \mathcal{C}'$，可得 $\nu \in |\mathbb{F}^a_{\mathcal{C}'}(D)|$，因此 $\mathcal{C}_i \in \mathbb{F}^a_{\mathcal{C}'}(D)$，因为它是 $\mathbb{F}^a_{\widetilde{\mathcal{C}}_i}(D)$中唯一一个包含 ν 于其相对内部的锥。类似地，可以证明 $\mathcal{C}_2 \in \mathbb{F}^a_{\mathcal{C}'}(D)$。由 $\mathbb{F}^a_{\mathcal{C}'}(D)$在托里克意义下是一个扇这一观察可得该结论，因此 $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$。

最后，注意到如果 $\nu \in \mathcal{V} \cap |\mathbb{F}|$，那么恰有一个锥 $(\mathcal{C}', \mathcal{F}') \in \mathbb{F}$ 满足 $\nu \in (\mathcal{C}')^\circ$。那么，在由着色锥 $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$ 得到的着色扇 $\mathbb{F}^a_{\mathcal{C}'}$ 的星形细分 $\mathbb{F}^a_{\mathcal{C}'}(D)$ 中，恰有一个 $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ 的相对内部包含 ν。显然，$(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbb{F}^a(D)$。

然而，显然 $\mathcal{C}^\circ \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$，因此 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbb{F}^*(D)$。这证明了 $|\mathbb{F}| \cap \mathcal{V} \subseteq |\mathbb{F}^*(D)| \cap \mathcal{V}$。反过来，根据定义 4.1，

$$|\mathbb{F}^*(D)| \cap \mathcal{V} \subseteq |\mathbb{F}^a| \cap \mathcal{V} = |\mathbb{F}| \cap \mathcal{V}. \qquad \square$$

4.2. 证明算法 3.13。本节中，我们证明命题 4.4，该命题断言算法 3.13 的正确性。以下令 $\pi\colon\ \mathcal{N}'_{\mathbb{Q}} = \mathcal{N}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q} \to \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$ 为到第一因子的投影，并记 $n \coloneqq$维 $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$。此外，我们将用 $\pm\rho = \mathbb{Q}_{\geq 0}(0, \pm 1) \subseteq \mathcal{N}'_{\mathbb{Q}} = \mathcal{N}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}$ 表示步骤（3）中引入的额外射线。最后，回顾一下，在算法 3.13 的步骤（2）中，我们在 $\mathbb{F}_2$ 中引入了由锥 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbb{F}$ 产生的锥，并用相同符号加撇号表示它们，即 $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$。

命题 4.4。 算法 *3.13*的输出是完整 $\mathbb{F}'$ 球面簇 $\mathbb{Q}$的着色扇，且该簇是 *Gorenstein* 的。

现在我们先确立一些中间结果，以便命题4.4 可由此作为推论得出。首先，我们需要以下一个简单但重要的观察。

命题 4.5。 设 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \in \mathbb{F}$。则

$$\pi^{-1}(\mathcal{C}) \cap |\mathbb{F}_2| = \mathcal{C}'.$$

证明。 包含关系“$\supseteq$”显然成立。

设 $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{F}_2$ 满足 $\pi(\sigma) \subseteq \mathcal{C}$。根据 $\mathbb{F}_2$ 的定义，存在 $(\mathcal{C}_0, \mathcal{F}_0) \in \mathbb{F}$，使得 $(\sigma, \varphi) \preceq (\mathcal{C}'_0, \mathcal{F}'_0)$。由于 $\pi(\sigma) \subseteq \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_0$，经过直接推导可知，对某个满足 $\tau \preceq \mathcal{C}$ 和 $\tau \preceq \mathcal{C}_0$ 的着色锥 $(\tau, \gamma) \in \mathbb{F}$，有 $\pi(\sigma) \subseteq \tau$。

对于着色锥 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1) \in \mathbb{F}$，记 $\Delta(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1)$ 为与着色锥 $(\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1)$ 相关联的 B-不变除子的集合。那么对于所有 $x \in \sigma$，都有如下形式的表达式$x = \sum_{D \in \Delta(\mathcal{C}_0, \mathcal{F}_0)} \lambda_D \rho'(D)$，其中 $\lambda_D \geq 0$。因此，$\pi(x) = \sum_{D \in \Delta(\mathcal{C}_0, \mathcal{F}_0)} \lambda_D \rho(D) \in \tau$。由于 $\tau \preceq \mathcal{C}_0$，我们得到 $\lambda_D = 0$ 对于 $D \in \Delta(\mathcal{C}_0, \mathcal{F}_0) \setminus \Delta(\tau, \gamma)$。因此 $x = \sum_{D \in \Delta(\tau, \gamma)} \lambda_D \rho'(D) \in \tau' \subseteq \mathcal{C}'$。$\square$

命题 4.6. $\mathbb{F}_2$ 是一个着色扇。

证明。我们证明，对于满足存在点$x \in \sigma_1^\circ \cap \sigma_2^\circ \cap \mathcal{V}' \neq \emptyset$的着色锥 $(\sigma_1,\ \varphi_1)$，$(\sigma_2,\ \varphi_2) \in \mathbb{F}_2$，有 $\sigma_1 = \sigma_2$。首先回顾一下，$\mathbb{F}_2$ 的着色锥是 $(\sigma,\ \varphi) \preceq (\mathcal{C}',\ \mathcal{F}')$，其中 $(\mathcal{C}',\ \mathcal{F}')$ 是由 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F}) \in \mathbb{F}$产生的真正的着色锥。因此，存在着色锥 $(\mathcal{C}_i,\ \mathcal{F}_i) \in \mathbb{F}$，使得 $(\sigma_i,\ \varphi_i) \preceq (\mathcal{C}_i',\ \mathcal{F}_i')$ 对于 $i = 1,\ 2$。

由于 $\mathbb{F}$ 是一个着色扇，存在一个着色锥 $(\mathcal{C},\mathcal{F}) \in \mathbb{F}$，满足 $\pi(x) \in \mathcal{C}^\circ$。此外，由于$\pi(\sigma_i^\circ) = \pi(\sigma_i)^\circ$，我们有 $\pi(x) \in \pi(\sigma_1)^\circ \cap \pi(\sigma_2)^\circ \subseteq \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$。由此可以直接证明，$(\mathcal{C},\mathcal{F}) \preceq (\mathcal{C}_1,\mathcal{F}_1)$、$(\mathcal{C}_2,\mathcal{F}_2)$，并且 $\pi(\sigma_i) \subseteq \mathcal{C}$。现在我们证明，对于 $\mathbb{F}_2$中相应的着色锥，面性质同样成立，即 $(\mathcal{C}',\mathcal{F}') \preceq (\mathcal{C}_1',\mathcal{F}_1')$、$(\mathcal{C}_2',\mathcal{F}_2')$。事实上，存在选取面 $\mathcal{C}$的线性泛函 $f_i \in \mathcal{C}_i^\vee$：即 $\{f_i = 0\} \cap \mathcal{C}_i = \mathcal{C}$。于是由命题 4.5可知，$(f_i,0) \in \mathcal{C}_i'^\vee$将 $\mathcal{C}'$ 选作 $\mathcal{C}_i'$的一个面。

回顾一下，$\pi(\sigma_i) \subseteq \mathcal{C}$。由命题 4.5，得 $\sigma_i \subseteq \mathcal{C}'$。利用 $(\sigma_i,\varphi_i) \preceq (\mathcal{C}_i',\mathcal{F}_i')$，以及 $(\mathcal{C}',\mathcal{F}') \preceq (\mathcal{C}_1',\mathcal{F}_1')$,$(\mathcal{C}_2',\mathcal{F}_2')$，可得 (σ_1,φ_1)、(σ_2,φ_2) 是 $(\mathcal{C}',\mathcal{F}')$ 的面。由于 $(\mathcal{C}',\mathcal{F}')$ 的各面构成一个着色扇，根据 $x \in \sigma_1^\circ \cap \sigma_2^\circ \cap \mathcal{V}'$ 可推得 $\sigma_1 = \sigma_2$。□

为证明 $\mathbb{F}_3$ 是一个着色扇，我们将借助 向量构型，并简要回顾所需的背景知识。关于这一广为人知的主题，我们以 [11]作为一般参考资料。

定义 4.7 ([11, 第 2 节.5])。一个向量构型是一个向量多重集：

$$\mathbf{A} := (v_i \mid i \in S) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

对于每个线性泛函 $\psi \in (\mathbb{R}^n)^*$，满足 $\psi(\mathbf{A}) \geq 0$，A 的面 沿方向 ψ 是其上的极大子构型 $S \subseteq \mathbf{A}$，在该子构型上 $\psi(S) = 0$。若 F是 S的一个面，则记作 $F \leq S$。

向量构型$\mathbf{A}$ 的多面体细分是由子构型$\mathscr{S}$组成的集合，称为胞腔，并满足以下性质：

(1) 对所有 $C \in \mathscr{S}$，若 $F \leq C$，则 $F \in \mathscr{S}$。(2) $\bigcup_{C\in\mathscr{S}} \operatorname{cone}(C) \supseteq \operatorname{cone} A$。(3) 对于 $\mathcal{C},\mathcal{C}' \in \mathscr{S}$，$\mathcal{C}^\circ \cap \mathcal{C}'^\circ \neq \emptyset$ 蕴含 $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$。

向量构型$\mathbf{A}$ 的提升是一个函数 $\omega\colon \mathbf{A} \to \mathbb{R}$，它为$\mathbf{A}$中的每个向量指定一个高度。提升会导出一个提升后的向量构型$\mathbf{A}^\omega := \{(v_i,\omega(v_i)) \mid i \in S\}$。

给定一个提升 $\omega\colon \mathbf{A} \to \mathbb{R}$，下方面 $\mathbf{A}^l$ 是 $\mathbf{A}^\omega$ 中沿着在最后一个坐标上取正值的线性泛函 ψ 方向的面。同理，上方面 $\mathbf{A}^u$ 是 $\mathbf{A}^\omega$ 中沿着在最后一个坐标上取负值的线性泛函 ψ 方向的面。

注 4.8. 对每个多面锥 $\sigma \subseteq \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}'$ 使用 $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$，即可直接证明：$\mathbf{A}^\omega$ 是下面（分别为上面）当且仅当，对于每个 $x \in \operatorname{cone}(F)$ 和 $\lambda > 0$，都有 $x - \lambda v_\rho \notin \operatorname{cone}(\mathbf{A}^\omega)$（分别为 $x+\lambda v_\rho \notin \operatorname{cone}(\mathbf{A}^\omega)$）。这里，$v_\rho$ 表示射线 ρ 的射线生成元。

我们需要以下结果：

引理 4.9 ([11, 引理 2.5.11])**.** 设 $\omega\colon \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ 是向量构型 $\mathbf{A}$ 的一个提升。若存在一个线性函数 $\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得 $(\omega+\ell)(\mathbf{A}) \geq 0$，则 $\mathbf{A}^l$ 的下面各面构成 $\mathbf{A}$ 的一个多面体细分，其胞腔为 $\pi(C)$，其中 C 是 $\mathbf{A}^l$ 的一个胞腔。这里，π 是忘掉最后一个坐标的投影。

向量构型与我们所讨论情形的关系在于，着色锥可以自然地解释为向量构型，而通常有必要考虑多重集。

定义 4.10。 我们将以下向量构型与着色锥 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$ 相关联：

$$\mathbf{A}_{(\mathcal{C},\mathcal{F})} \coloneqq \{v_1,\dots,v_{r_\mathcal{C}}\} \cup (\rho(D) \mid D \in \mathcal{F}),$$

其中，与 G-不变除子对应的 $\mathcal{C}$ 中各射线的本原射线生成元为 $\{v_1,\dots,v_{r_\mathcal{C}}\}$，而 $(\rho(D) \mid D \in \mathcal{F})$ 被视为一个多重集。

于是，$\mathbb{F}_2$ 中的锥可以自然地解释为来自 $\mathbb{F}$ 中锥的提升向量构型。

定义 4.11。 对于每个着色锥 $(\mathcal{C},\mathcal{F}) \in \mathbb{F}$，考虑 $(\mathcal{C}',\mathcal{F}') \in \mathbb{F}_2$。其关联的向量构型 $\mathbf{A}_{(\mathcal{C}',\mathcal{F}')}$ 是 $\mathbf{A}_{(\mathcal{C},\mathcal{F})}$ 的一个提升，其高度函数为 $\omega\colon \mathbf{A}_{(\mathcal{C},\mathcal{F})} \to \mathbb{R}$，定义为：对于 v_i（某个 G-不变除子的射线的本原射线生成元），$\omega(v_i) = 1$；对于 $D \in \mathcal{F}$，$\omega(\rho(D)) = m_D \geq 1$。

为了定义 $\mathbb{F}_3$，我们注意到 $\mathbb{F}$ 的着色锥具有以下细分：

命题 4.12。 对于每个 $(\mathcal{C},\mathcal{F}) \in \mathbb{F}$，存在对 $(\mathcal{C},\mathcal{F})$的两种抽象着色锥多面体细分：$\mathscr{S}^u(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 和 $\mathscr{S}_l(\mathcal{C},\mathcal{F})$，它们按照引理 *4.9*，分别由 $\mathbf{A}_{(\mathcal{C}',\mathcal{F}')}$ 的上面和下面导出。

证明。 由于 $\omega\colon \mathbf{A}_{(\mathcal{C},\mathcal{F})} \to \mathbb{R}$ 为正，根据引理 4.9，$\mathbf{A}_{(\mathcal{C}',\mathcal{F}')}$ 的下方面给出一个多面体细分 $\mathscr{S}_l(\mathcal{C},\mathcal{F})$ of $\mathbf{A}_{(\mathcal{C},\mathcal{F})}$。同样，由于 $\mathcal{C}$ 是严格凸的，存在一个线性函数 ℓ，其在 $\mathcal{C}\setminus\{0\}$上严格为正。因此，对充分大的 $\lambda > 0$，将引理 4.9 应用于高度函数 $-\omega + \lambda\ell$，$\mathbf{A}_{(\mathcal{C}',\mathcal{F}')}$ 相对于ω 的上方面给出一个多面体细分 $\mathscr{S}^u(\mathcal{C},\mathcal{F})$ of $\mathbf{A}_{(\mathcal{C},\mathcal{F})}$。

对于细分 $\mathscr{S}^u(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$、$\mathscr{S}_l(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$ 中的每个单元 S，我们自然地关联到由 S 生成的抽象着色锥，该锥继承了 S 中向量的着色。□

注 4.13。 对于着色锥 $(\sigma^u,\ \varphi^u) \in \mathscr{S}^u(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$，我们用 $((\sigma^u)',\ \varphi^u)$ 表示 $\mathbf{A}_{(\mathcal{C}',\mathcal{F}')}$ 对应的上面。类似地，对于 $\mathbf{A}_{(\mathcal{C}',\mathcal{F}')}$ 的下面，若 $(\sigma_l,\ \varphi_l) \in \mathscr{S}_l(\mathcal{C},\ \mathcal{F})$，则记作 $(\sigma_l',\ \varphi_l)$。

$\sim\ \sim$ $\sim\ \sim$设 $(\mathcal{C},\mathcal{F})$、$(\mathcal{C},\mathcal{F}) \in \mathbb{F}$ 为着色锥，且 $(\mathcal{C},\mathcal{F}) \preceq (\mathcal{C},\mathcal{F})$。命题 4.14 断言，细分 $\mathscr{S}^u(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 和 $\mathscr{S}^u(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 是“相容的”。

命题 4.14。 设 $(\mathcal{C},\mathcal{F}) \in \mathbb{F}$，且 $(\mathcal{C}',\mathcal{F}')$ 是 $\mathbb{F}_2$ 中的提升锥。假设存在一个面 $(\mathcal{C},\mathcal{F}) \preceq (\mathcal{C},\mathcal{F})$ 和 $(\sigma,\varphi) \in \mathscr{S}^u(\mathcal{C},\mathcal{F})$，满足 $\sigma' \subseteq \mathcal{C}'$。则 $\sigma \in \mathscr{S}^u(\mathcal{C},\mathcal{F})$。

证明。 这由备注 4.8 和命题 4.5显然。 □

定义 4.15。 现在我们可以定义着色锥的集合 $\mathbb{F}_3$；它由三类着色锥组成。首先，是 $\mathbb{F}_2$ 中的着色锥：

(1) $(\mathcal{C},\mathcal{F}) \in \mathbb{F}_2$.

其次，对于每个 $(\mathcal{C},\mathcal{F}) \in \mathbb{F}$，有以下真正的着色锥：

(2) $((\sigma^u)' + \rho, \varphi^u)$，其中 (σ^u,φ^u) 是 $\mathscr{S}^u(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 中的一个真正的着色锥。

(3) $(\sigma_l' + (-\rho)\ \varphi_l)$，其中 (σ_l,φ_l) 是 $\mathscr{S}_l(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 中的一个真正的着色锥。

命题 4.16。 $\mathbb{F}_3$ 是一个着色扇。

证明。 根据定义，很明显，集合 $\mathbb{F}_3$ 中的每个着色锥都是真正的着色锥，并且 $\mathbb{F}_3$ 中着色锥的着色面包含于 $\mathbb{F}_3$ 中。

还需证明，两个着色锥$(\mathcal{C}_1,\ \mathcal{F}_1)$、$(\mathcal{C}_2,\ \mathcal{F}_2)$ 属于 $\mathbb{F}_3$ 且满足 $\mathcal{C}_1^\circ \cap \mathcal{C}_2^\circ \cap \mathcal{V}' \neq \emptyset$ 时必定相同。我们根据定义 4.15中出现的所有类型的着色锥对，逐一验证这一点；我们用 $(A,\ B)$ 表示两个锥分别属于类型 A 和类型 B 的情形。

(1,1) 设 $(\mathcal{C}_1,\mathcal{F}_1)$、$(\mathcal{C}_2,\mathcal{F}_2)\in\mathbb{F}_2$。那么 $\mathcal{C}_1^\circ\cap\mathcal{C}_2^\circ\cap\mathcal{V}'\neq\emptyset$ 意味着 $(\mathcal{C}_1,\mathcal{F}_1)=(\mathcal{C}_2,\mathcal{F}_2)$，因为 $\mathbb{F}_2$ 是一个着色扇。(1,2) 设 $(\mathcal{C}_1,\mathcal{F}_1)\in\mathbb{F}_2$，并设 $(\sigma^u)'\in\mathbb{F}_2$ 是上面，使得 $(\mathcal{C}_2,\mathcal{F}_2):=((\sigma^u)'+\rho,\mathcal{F}_2)$。这些着色锥彼此不同。由于 $(\sigma^u)'$ 是上面，根据注 4.8，$((\sigma^u)'+\rho)^\circ\cap|\mathbb{F}_2|=\emptyset$。因为 $\mathcal{C}_1^\circ\subseteq|\mathbb{F}_2|$，所以得到 $\mathcal{C}_1^\circ\cap\mathcal{C}_2^\circ\cap\mathcal{V}'=\emptyset$。(1,3) 这与 (1,2) 类似。(2,2) 设 $(\sigma_1^u)'$、$(\sigma_2^u)'$ 是 $\mathbb{F}_2$中着色锥的上面，使得 $(\mathcal{C}_i,\mathcal{F}_i)=((\sigma_i^u)'+\rho,\mathcal{F}_i)$。假设存在某个 $x\in((\sigma_1^u)'+\rho)^\circ\cap((\sigma_2^u)'+\rho)^\circ\cap\mathcal{V}'$。那么，对于 $\tilde{x}_1\in(\sigma_1^u)'^\circ$、$\tilde{x}_2\in(\sigma_2^u)'^\circ$，有 $x=\tilde{x}_1+\lambda_1\nu_\rho=\tilde{x}_2+\lambda_2\nu_\rho$，且不失一般性地设 $\lambda_2\geq\lambda_1>0$。这里，我们用 ν_ρ 表示 ρ的一个射线生成元。由于 $(\sigma_1^u)'^\circ$ 是上面，根据注 4.8 以及 $\tilde{x}_1=\tilde{x}_2+(\lambda_2-\lambda_1)\nu_\rho$，我们有 $\lambda_1=\lambda_2=:\lambda$。因此，$x-\lambda\nu_\rho\in(\sigma_1^u)'^\circ\cap(\sigma_2^u)'^\circ\cap\mathcal{V}'$。由于 $\mathbb{F}_2$ 是一个着色扇，$(\sigma_1^u)'=(\sigma_2^u)'$ 且 $(\mathcal{C}_1,\mathcal{F}_1)=(\mathcal{C}_2,\mathcal{F}_2)$。(3,3) 这与 (2,2) 类似。(2,3) 假设 $(\sigma^u)'$、σ_l' 分别是 $\mathbb{F}_2$中着色锥的上面和下面，使得 $(\mathcal{C}_1,\mathcal{F}_1)=((\sigma^u)'+\rho,\mathcal{F}_1)$ 且 $(\mathcal{C}_2,\mathcal{F}_2)=(\sigma_l'+(-\rho)\ \mathcal{F}_2)$。此外，假设$x\in\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2\cap\mathcal{V}'\neq\emptyset$。根据 $\mathbb{F}_3$的定义，存在着色锥 (τ_1,φ_1)、$(\tau_2,\varphi_2)\in\mathbb{F}$，使得 $\sigma^u\in\mathscr{S}^u(\tau_1,\varphi_1)$ 且 $\sigma_l\in\mathscr{S}_l(\tau_2,\varphi_2)$。$\tau_i$的某个面包含 $\pi(x)$，且后者位于该面的相对内部。于是该面是真正的着色锥，且显然它分别包含 σ^u 和 σ_l。我们继续用 (τ_1,φ_1) 和 (τ_2,φ_2) 表示这些面，于是有 $(\sigma^u)^\circ\subseteq\tau_1^\circ$ 且 $\sigma_l^\circ\subseteq\tau_2^\circ$。由于$\pi(x)\in\tau_1^\circ\cap\tau_2^\circ\cap\mathcal{V}$，我们有 $(\tau_1,\varphi_1)=(\tau_2,\varphi_2)=:(\tau,\varphi)$。根据命题 4.14，$\sigma^u\in\mathscr{S}^u(\tau,\varphi)$ 且 $\sigma_l\in\mathscr{S}_l(\tau,\varphi)$。因此，存在一个线性泛函 ψ，其最后一个坐标为负，使得$\psi((\sigma^u)')=0$，$\psi(\sigma_l')\geq0$，且 $\psi(\rho)<0$。因此，$\psi(((\sigma^u)'+\rho)^\circ)=\psi((\sigma^u)'^\circ)+\psi(\rho^\circ)<0$，且 $\psi((\sigma_l'-\rho)^\circ)=\psi(\sigma_l'^\circ)-\psi(\rho^\circ)>0$。所以 $\mathcal{C}_1^\circ\cap\mathcal{C}_2^\circ\cap\mathcal{V}'=\emptyset$。

因此 $\mathbb{F}_3$ 是一个着色扇。 □

命题 4.17。 $\mathbb{F}_3$ 是一个完备着色扇。

证明。我们证明 $\mathcal{V}'\subseteq|\mathbb{F}_3|$。设$(x,\lambda)\in\mathcal{V}'$，则 $\pi(x,\lambda)=x\in\mathcal{C}$，其中某个$(\mathcal{C},\mathcal{F})\in\mathbb{F}$。由凸性，$(x\times\mathbb{Q})\cap\mathcal{C}'=[h^u,h_l]$，且$(x,h_l)\in\sigma_l'$和$(x,h^u)\in(\sigma^u)'$，其中某个 $\sigma^u\in\mathscr{S}^u(\mathcal{C},\mathcal{F})$，$\sigma_l\in\mathscr{S}_l(\mathcal{C},\mathcal{F})$。因此$(x,\lambda)$包含于$((\sigma^u)'+\rho)\cup|\mathbb{F}_2|\cup(\sigma_l'+(-\rho))\subseteq|\mathbb{F}_3|$。 □

现在我们可以完成命题4.4的证明。

命题的证明*4.4*。算法3.13 会终止，因为颜色的数量有限，并且每个阶段的抽象着色锥数量也有限。由于 $|\mathbb{F}_3|=|\mathbb{F}_4|$，根据命题4.17 和命题4.3，$\mathbb{F}_4$ 是完备的。在步骤（5）中，若且唯若抽象着色锥 σ 在 $\mathbb{F}_4$ 的三角剖分中的相对内部与赋值锥不相交时，才将其丢弃；这又等价于 σ 是一个非真正着色锥的抽象着色锥。因此，所得的抽象着色扇是真正的着色扇 $\mathbb{F}':=\mathbb{F}_5$ 且是完备的。

根据命题3.7，$\mathbb{F}'$ 中的每个着色锥都具有备注3.10所述的形式，因此我们构造出了着色扇 $\mathbb{F}'$，它对应于一个完备的 $\mathbb{Q}$-戈伦斯坦球面簇 X'。□

5. 环面簇与 $\widetilde{\varphi}$

我们继续使用上文的记号和假设。特别地，X 表示一个完备的 G-球面簇。本节将证明，$\widetilde{\varphi}(X)<1$ 当且仅当 X

同构于一个环面簇，当且仅当 $\widetilde{\varphi}(X) = 0$，由此完成定理1.3的证明。事实上，我们证明

$$\widetilde{\varphi}(X) < 1 \Rightarrow X \text{ 同构于一个环面簇 } \Rightarrow \widetilde{\varphi}(X) = 0 \Rightarrow \widetilde{\varphi}(X) < 1.$$

我们采用了 [20], 中的一种技术，其中注意到 $\widetilde{\varphi}(X)$ 只依赖于球面骨架，该概念在第 1节中引入。

注 5.1。球面骨架存在一种自然的同构概念（见 [20,第 5]节），并且根据设计，$\widetilde{\varphi}(X) = \widetilde{\varphi}(\mathscr{R}_X)$ 只依赖于 $\mathscr{R}_X$ 的同构类。为完整起见，并确保本文自洽，我们简要回顾两个球面骨架 $\mathscr{R}_1 = (\Sigma_1, S_1^p, \mathcal{D}_1^a, \Gamma_1, \varsigma_1, \rho_1')$ 和 $\mathscr{R}_2 = (\Sigma_2, S_2^p, \mathcal{D}_2^a, \Gamma_2, \varsigma_2, \rho_2')$ 何时被视为同构，记作 $\mathscr{R}_1 \cong \mathscr{R}_2$。设 $\mathscr{R}_1$（分别为 $\mathscr{R}_2$）的底层根系为 R_1（分别为 R_2）。如果存在根系的一个同构 $\varphi_R\colon R_1 \to R_2$ 以及两个双射 $\varphi_{\mathcal{D}}\colon \mathcal{D}_1^a \to \mathcal{D}_2^a$ 和 $\varphi_\Gamma\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$，使得 $\varphi_R(\Sigma_1) = \Sigma_2$、$\varphi_R(S_1^p) = S_2^p$，并且对每个 $D \in \mathcal{D}_1^a$，$\rho_1'(D) = \rho_2'(\varphi_{\mathcal{D}}(D)) \circ \varphi_R$ 在 Σ_1 上成立，同时对每个 $D \in \Gamma_1$，$\rho_1'(D) = \rho_2'(\varphi_\Gamma(D)) \circ \varphi_R$ 在 Σ_1 上成立，则称 $\mathscr{R}_1$ 和 $\mathscr{R}_2$ 同构。

注 5.2. 请注意，$\widetilde{\varphi}(\mathscr{R})$ 仅取决于球面骨架在以下等价关系下的代表元；该等价关系由 [20, 定理 6.7] 引入。对于 $\mathscr{R} = (\Sigma, S^p, \mathcal{D}^a, \Gamma)$，定义 $[\Gamma] := \{D \in \Gamma \mid \rho'(D) \neq 0 \in \Lambda^*\}$，以及 $[\mathscr{R}] := (\Sigma, S^p, \mathcal{D}^a, [\Gamma])$。那么，上述等价关系成立当且仅当 $\mathscr{R}_1 \sim \mathscr{R}_2$ if and only if $[\mathscr{R}_1] \cong [\mathscr{R}_2]$。

以下定理是证明定理 1.3 所需的一个关键结果。

定理 5.3 ([20, 定理 6.7])。一个完备的 G-球面簇 X 是环面簇，当且仅当 $\mathscr{R}_X \cong \mathscr{R}_V$ 对于 V 一个 G-无重数空间；即一个有理的G-表示，其结构为一个 G-球面簇（另见定义 5.7）。

注 5.4。结合注 5.2 和定理 5.3，我们得到以下用于判定环面簇的判据。设 X 是一个同构于环面簇的球面簇。那么，根据定理 5.3，$\mathscr{R}_X \cong \mathscr{R}_V$ 是一个 V 无重数空间。根据 [20, 注 6。10],在注 5.2中的等价关系下，若对某个球面簇 Y，$\mathscr{R}_Y \sim \mathscr{R}_X$，那么 $\mathscr{R}_Y$ 也是一个无重数空间的球面骨架。

根据定理 5.3，为证明等式 $\widetilde{\varphi}(X) = 0$ 在 X 同构于环面簇时成立，我们可以证明相应的等式对无重数空间成立：

命题 5.5。设 V 是一个无重数空间，则 $\widetilde{\varphi}(V) = 0$。

注 5.6。与本文作者同时且独立地，[22],Bravi 和 Pezzini 证明了 $\widetilde{\varphi}(X) \geq 0$ 在 X 具有约化的一般各向同性群这一特殊情形下成立。他们采用逐案验证的方式，对相应的球面骨架上的猜想进行验证，就像对 [20]中的对称簇所做的那样。在他们的工作中，他们通过对无重数空间的球面骨架和权幺半群进行抽象论证，证明了等式 $\widetilde{\varphi}(V) = 0$ 对 V 无重数空间成立（本文命题 5.5）。他们证明命题 5.5 的方法与本文所采用的方法不同。

根据以下命题 5.12，只需对一类更简单的无重数空间证明这一等式，即在几何等价意义下的不可分解饱和无重数空间。根据相关的球组合数据，这类无重数空间可以得到明确分类（见 [6] 和 [18]）。在证明命题5.12之前，我们先作一些初步观察。

定义 5.7。 回顾一下，无重数空间 是 G 到有限维向量空间 V 的有理表示 $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$，并且相对于诱导的线性 G-作用，它也是一个球形 G-簇。设 G_1 和 G_2 是两个连通约化群。若存在向量空间的一个同构 $\varphi\colon V_1 \to V_2$，它诱导出 $\mathrm{GL}(\varphi)\colon \mathrm{GL}(V_1) \to \mathrm{GL}(V_2)$，且满足 $\mathrm{GL}(\varphi)(\varrho_1(G_1)) = \varrho_2(G_2)$，则称两个无重数空间 $\varrho_1\colon G_1 \to \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\varrho_2\colon G_2 \to \mathrm{GL}(V_2)$ 几何等价。

若无重数空间 V 与 $\varrho'\colon G_1 \times G_2 \to \mathrm{GL}(V_1 \oplus V_2)$ 几何等价，其中 G_i 作用于 V_i，则称其为可分解的 。

设无重数空间 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ 有 s 个不可约直和项 V_i。若 $\varrho(G)$ 的中心环面的维数等于 s，则称 V 饱和 。

注 5.8。 注意，根据舒尔引理，无重数空间 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ 是饱和的，当且仅当 $(\mathbb{C}^*)^s$ 包含于 $\varrho(G)$的中心，且第 i 个 $\mathbb{C}^*$因子通过标量乘法作用于 V_i。特别地，两个定义 [6, 第 5] 节中的定义 [7, 定义 2。3] 等价。

此外，请注意，根据饱和的定义可知，只需扩大 G 的中心环面，使 G 映射到 $\mathrm{GL}(V)$ 的中心环面上，就能使非饱和的无重数空间变为饱和。

处理无重数空间 $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ 时有一个技术上的微妙之处：它们自然带有两个由连通约化群给出的作用，分别是 G 的作用和 $\varrho(G) \subseteq \mathrm{GL}(V)$ 的作用。研究将 V 视为球面 G 变种和 $\varrho(G)$-变种时，其球面骨架之间的关系，是一个有趣的问题。一般而言，它们的球面骨架未必在上述意义下同构（即使考虑等价类），因为它们的“环境根系”可能无法比较。不过，对于球面骨架存在“最小环境根系”这一自然概念，这使我们可以将 V 的两个球面骨架视为同构。这项研究相当技术性；而由于我们只需比较这两个“球面作用”的 $\widetilde{\varphi}$ 函数，以下较简单的陈述便足以满足我们的目的。

引理 5.9。 设 $X_{G/H} \hookleftarrow G/H$ 是一个 G-球面簇。假设 $K \trianglelefteq G$ 是一个满足 $K \subseteq H$的闭正规子群，那么对于 $\mathfrak{G} := G/K$ 和 $\mathfrak{H}\colon = H/K$，我们有 $X \hookleftarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$是一个 $\mathfrak{G}$-球面簇，且 $\widetilde{\varphi}(X_{G/H}) = \widetilde{\varphi}(X_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}})$。

证明。 回顾 $\widetilde{\varphi}(X)$ 的定义：

$$\widetilde{\varphi}(X) = \dim X - \operatorname{rk} X - \sup\left\{ \sum_{D\in\Delta} \left(m_D - 1 + \langle \rho(D), \vartheta\rangle\right) \,\middle|\, \vartheta \in Q^* \cap \mathcal{T} \right\},$$

其中 Q^* 由 B-不变除子所诱导的赋值以及这些 B-不变除子在球反典范除子中的系数唯一确定。因此，为了证明 $\widetilde{\varphi}(X_{G/H}) = \widetilde{\varphi}(X_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}})$，只需验证相对于 Borel 子群的半不变有理函数的权格可以通过某种方式对应起来，使得赋值锥重合，且球反典范除子相等。换言之，我们需要证明 G/H 和 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 的 Luna-Vust 理论一致，并且 $-K_{G/H} = -K_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}$也成立。

令 $\pi\colon G \to \mathfrak{G} = G/K$为自然商，从而得到一个同构 $\varphi\colon G/H \to \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$。固定一个极大环面和 Borel 子群 $T \subseteq B \subseteq G$，则 $\pi(T) \subseteq \mathfrak{B} := \pi(B) \subseteq \mathfrak{G}$ 分别是 $\mathfrak{G}$的相应极大环面和 Borel 子群。令 $\mathcal{M} := \mathbb{C}(G/H)^{(B)}/\mathbb{C}^*$ 为 G/H的特征格，$\mathfrak{M} := \mathbb{C}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})^{(\mathfrak{B})}/\mathbb{C}^*$ 为 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$的特征格。那么 φ诱导出特征格的一个同构 $\varphi^*\colon \mathfrak{M} \to \mathcal{M}$，以及对偶格的一个同构 $\varphi_*\colon \mathcal{N} \to \mathfrak{N}$。

在此同构下，G/H 和 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 的赋值锥重合，即 $\varphi_*(\mathcal{V}) = \mathfrak{V}$（利用赋值锥与 $\mathbb{C}(G/H)$（分别为 $\mathbb{C}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$）上的 G不变（分别为 $\mathfrak{G}$不变）赋值之间众所周知的对应关系）。最后，φ 在 G/H 的 B轨道与 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 的 $\mathfrak{B}$轨道之间诱导出一个双射，使得对于 G/H的每个 B 轨道 Y，相应的$\mathfrak{B}$轨道为 $\varphi(Y)$，且 $\varphi\colon Y \to \varphi(Y)$是一个 B等变同构。因此，G/H 与 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$的 Luna-Vust 理论相同。特别地，它们的球面嵌入可以自然地对应起来。

接下来我们证明 $-K_{G/H} = -K_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}$。令 $U \subseteq G/H$ 为开 B-轨道，并令 $s \in \Gamma(U, \hat{\omega}_{G/H})$ 为一个满足 $\operatorname{div}(s) = -K_{G/H}$ 的生成元。注意，s在相差一个常数倍的意义下是唯一确定的。上文已经看到，φ 在开 B-轨道 U 与开 $\mathfrak{B}$-轨道 $\varphi(U) \subseteq \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$之间诱导了一个同构。在此同构下，$\hat{\omega}_{G/H}$ 与 $\hat{\omega}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}$ 相对应，而生成元 s 对应于生成元 $\mathfrak{s} \in \Gamma(\varphi(U), \hat{\omega}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}})$。根据[19, 定理 1.4], ，生成元 s 由如下性质唯一确定：它沿每个球面嵌入 $G/H \hookrightarrow X$中的每个 G-不变除子都以一阶消失。由于 G/H 与 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 的 Luna-Vust 数据相同，生成元 $\mathfrak{s}$ 也具有相同性质，因此 $-K_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}} = \operatorname{div}(\mathfrak{s}) = \operatorname{div}(s) = -K_{G/H}$。□

推论 5.10。设 $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个无重数空间。那么，将 V 视为 G-或 $\varrho(G)$-球面簇时的 $\widetilde{\wp}$-函数一致，即 $\widetilde{\wp}(V_G) = \widetilde{\wp}(V_{\varrho(G)})$。

证明。将引理 5.9应用于 G-球面簇 V和 $K = \ker \varrho$，即可直接得到。□

推论 5.11。设 $\varrho_1\colon G_1 \to \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\varrho_2\colon G_2 \to \mathrm{GL}(V_2)$ 是几何等价的无重数空间。那么 $\widetilde{\wp}(V_1) = \widetilde{\wp}(V_2)$。

证明。根据推论 5.10，我们可以将 V_i 视为 $\varrho(G_i)$-球面簇。注意，假设 V_1 和 V_2 几何等价意味着存在一个代数群的同构$\varrho(G_1) \cong \varrho(G_2)$ 以及一个线性同构 $V_1 \cong V_2$，该同构相对于以下对应关系是等变的：$\varrho(G_1) \cong \varrho(G_2)$。现在结论直接成立。□

命题 5.12。假设对每个不可分解的饱和无重数空间V'，都有 $\widetilde{\wp}(V') = 0$。那么对每个无重数空间 V，都有 $\widetilde{\wp}(V) = 0$。

证明。设 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$是一个具有 s 个不可约直和项V_i的 G-无重数空间。由舒尔引理，$\varrho(G)$ 的中心环面的维数不大于 s。于是，通过将 G 替换为 $G' = G \times (\mathbb{C}^*)^k$，其中 $k \geq 0$ 取适当值，我们可以得到一个饱和的$\rightsquigarrow G'$-无重数空间 V（同一个线性空间 V，但具有“扩大的作用”）。显然，添加环面因子会保留球面骨架，即 $\mathscr{R}_{\widetilde{V}} = \mathscr{R}_V$，因此特别有$\rightsquigarrow \widetilde{\wp}(V) = \widetilde{\wp}(V)$。所以我们可以假设 V是饱和的。

现在假设 V是可分解的。那么根据推论5.11，我们可以假设$G = G_1 \times G_2$和 $V = V_1 \oplus V_2$，其中 G_i作用于 V_i。注意，从球面几何的角度来看，V 是两个球面簇 $G_1/H_1 \hookrightarrow V_1$ 和 $G_2/H_2 \hookrightarrow V_2$的直积。因此，$V$ 的 Luna 数据可分解为V_1 和 V_2 的两个 Luna 数据的直积（例如，参见 [16, 附录]。现在很容易验证

$$\widetilde{\wp}(V) = \widetilde{\wp}(V_1) + \widetilde{\wp}(V_2).$$

因此，根据推论 5.11，证明 $\widetilde{\wp}(V') = 0$ 对几何等价意义下每个饱和无重数空间都成立，即可推出 $\widetilde{\wp}(V) = 0$。□

命题 5.5 的证明。 在第 7 节中，通过对 $\widetilde{\varphi}(V) = 0$ 进行显式求解，证明了几何等价意义下不可分解的饱和无重数空间满足等式 V，其中针对 $\widetilde{\varphi}(V)$ 在 [6]中的每种情形分别求解线性规划。由命题 5.12，即可得出该等式在一般情形下也成立。□

这就完成了定理 1.3 的证明。

定理 1.3 的证明。 根据命题 3.14，还需证明:

$$\widetilde{\varphi}(X) < 1 \Rightarrow X \text{ isomorphic to a toric variety} \Rightarrow \widetilde{\varphi}(X) = 0 \Rightarrow \widetilde{\varphi}(X) < 1.$$

证明策略是将算法 3.13 应用于 X，以得到一个完备的 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 球面簇 X'。然后我们使用定理 1.6。通过研究算法3.13与 X 和 X' 的球面骨架之间的相互作用，即可完成证明。

首先，假设 $\widetilde{\varphi}(X) < 1$。根据定理 1.6， X' 同构于一个环面簇，因此，根据定理 5.3，$\mathscr{R}_{X'} \cong \mathscr{R}_{V'}$ 对于无重数空间 V'。我们需要证明 X同构于一个环面簇。为此，我们研究算法3.13与 X的球面骨架之间的相互作用。显然，算法3.13 中的修改不会改变球面骨架 $\mathscr{R}_X \sim \mathscr{R}_{X'}$的等价类（见备注 5.2）。因此，根据备注 5.4， $\mathscr{R}_X \cong \mathscr{R}_V$ 对于无重数空间 V。于是，根据定理 5.3， X 同构于一个环面簇。

其次，我们需要证明 $\widetilde{\varphi}(X) = 0$ 当 X 同构于一个环面簇时成立。根据定理5.3， X 同构于一个环面簇等价于 $\mathscr{R}_X \cong \mathscr{R}_V$ 对于一个无重数空间 V成立。因此， $\widetilde{\varphi}(X) = \widetilde{\varphi}(V) = 0$ 由命题5.5得证。□

6. 例子

本节中我们将举例说明定理1.5。我们给出一个奇异的局部阶化简单嵌入的例子。这是一种非环面现象，因为对于环面簇，光滑性与局部阶化性等价。

例 6.1。考虑光滑圆锥曲线簇 $G/H = \mathrm{SL}_3/Z(\mathrm{SL}_3)\mathrm{SO}_3$ （参见 [3, 表 A]）。我们有 $\mathcal{M} = \mathbb{Z}(2\alpha_1) \oplus \mathbb{Z}(2\alpha_2)$，两个 2a 型的颜色 D_1, D_2，其球根为$\Sigma = \{2\alpha_1, 2\alpha_2\}$，以及对偶向量 $\rho(D_1) = (2, -1)$，$\rho(D_2) = (-1, 2) \in \mathcal{N}$。具有着色锥（$\mathrm{cone}((-1,0),(2,-1)) \{D_1\}$）的简单嵌入 X是所有圆锥曲线的参数空间 $\mathbb{P}^5$，它有一个球面边界除子 X_1，且 $\Delta = \{X_1, D_1, D_2\}$。多胞体$Q^*$是三角形 $\mathrm{conv}((-1,-1),(1,0),(1,3))$，尾锥 $\mathcal{T} = \mathrm{cone}(\Sigma)$ 是 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$的正正交象限。作为示例，我们将定理 1.5 应用于 $\mathbb{P}^5 \hookleftarrow G/H$的唯一闭合 G-轨道 Y。 $\mathbb{P}^5 \hookleftarrow G/H$ 的球面骨架是

$$\mathscr{R} = (\Sigma = \{2\alpha_1, 2\alpha_2\}, S^p = \emptyset, \mathcal{D}^a = \emptyset, \Gamma = \{X_1\}).$$

具有 $Y \subseteq D$ 的 B-不变素除子 D 为 $D \in I = \{X_1, D_1\}$，新的单根为 $S_I = \{\alpha_1\}$，而 $\mathscr{R}$ 在 I 处的局部化为

$$\mathscr{R}_I = (\Sigma_I = \{2\alpha_1\}, S_I^p = \emptyset, \mathcal{D}^a = \emptyset, \Gamma_I = \{X_1\}).$$

于是 $\rho'_I(D_1) = 2 \in \Lambda_I^*$，且 $\rho'_I(X_1) = -1 \in \Lambda_I^*$。由于 D 不是 b 型，我们有 $(m_D)_I = (m_{X_1})_I = 1$，因此 $\mathcal{Q}^*_{\mathscr{R}_I} \cap \text{锥}(\Sigma_I) = [0,1] \subset (\Lambda_I)_{\mathbb{Q}}$。最后， $\widetilde{\varphi}(\mathscr{R}_I) = 0$，所以根据定理 1.5， $\mathbb{P}^5$ 沿着 Y 光滑，正如预期。

例 6.2 （奇异局部析因簇）。 设 X 是一个带有着色锥 $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$的简单球面嵌入，且未取颜色 $\mathcal{F} = \emptyset$，并且 $\mathcal{C}$ 是光滑锥。由定理 1.5， X 是光滑的。然而，当 $\mathcal{F} \neq \emptyset$时， X 可能是奇异的。

例如，考虑球面齐性空间 $G/H = (\mathrm{SL}_2 \times \mathbb{C}^*)/T' \times \mathrm{SL}_2/T$，其中 T' 是 SL_2，的对角环面，其作用在 $\mathbb{C}^*$ 上的特征为 ω；而 T 是 SL_2 的对角环面。它有 $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^3$，$(\rho(D) \mid D \in \mathcal{D}) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,1))$，其赋值锥为 $\mathcal{V} = \mathrm{cone}((1,-1,0),(-1,1,0),(-1,-1,0),(0,0,-1))$。设 $G/H \hookrightarrow X$ 是一个简单球面嵌入，其着色锥的射线为 $(-1,-1,-1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$。这是一个光滑锥，取了一个颜色，因此 X 是局部阶乘的。我们计算 $|R^+| - |R^+_{S^p}| = 2$，$\sum_{D\in\Delta}(m_D - 1) = 0$，以及 $\sum_{D\in\Delta}\rho(D) = (0,0,1)$。由此我们计算出$\widetilde{\wp}(X) = 1$，因此根据定理 1.5，$X$ 是局部阶乘的，但并不光滑；这种情况不会出现在托里克几何中。

7. $\widetilde{\wp}$ 不可分解饱和无重数空间的

在本节中，我们证明 $\widetilde{\wp}(V) = 0$ 对于 V 一个不可分解饱和无重数空间，在几何等价意义下，利用 Knop 对这些球面簇的穷尽列表 [6, 第 5] 节。在每种情形下，我们都找到了一个显式值 $\vartheta \in Q^* \cap \mathcal{T}$，它使线性规划 $\widetilde{\wp}(V)$ 的取值为零。于是，下面的命题7.1 推出 $\widetilde{\wp}(V) = 0$。

命题 7.1。设 V 是一个无重数空间，则 $\widetilde{\wp}(V) \geq 0$。

证明。根据 [20, 引理 7。3], 无重数空间的球面骨架与某个完备球面簇的球面骨架同构。该不等式现由命题3.14得出。□

根据命题 7.1，这个显式值 $\vartheta_{\mathrm{argmax}} := \vartheta$ 是线性规划 $\wp(V)$ =维数 V –秩 $V - \widetilde{\wp}(V)$ 的解，并证明了等式 $\widetilde{\wp}(V) = 0$。在下表中，$\vartheta_{\mathrm{argmax}}$ 的值用 Knop 列表中各无重数空间的球根表示。每种情况下，我们用 λ_i 表示 i，即按照 [6]中的编号顺序排列的第 [18], 个球根。Gagliardi 已计算出这些无重数空间各自的 Luna 图，全文沿用该论文中的案例编号。

设 V 是一个 G-无重数空间，则计算 $\vartheta_{\mathrm{argmax}}$ 时，我们使用如下结论。由于 V 是仿射球面簇，根据 [14, 定理 6.7], 它是一个具有着色锥 $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 的简单球面嵌入。由于原点是 V 的 G-不动点，根据轨道-锥对应 [14, 定理 6.6], , $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 是一个最大维数的着色锥。此外，由于 V 具有阶乘性，其着色锥中射线 $\{\rho(D) \mid D \in \Delta\}$ 的本原射线生成元构成 $\mathcal{N}$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。进一步地，每个 B-不变主除子 $D = \mathrm{div}(f_\chi)$ 的 B-权 χ 构成 $\mathcal{M}$ 的相应对偶基 $\{\chi_D \mid D \in \Delta\}$。在这个基下，线性规划 $\wp(V)$ 的目标函数是一个向量各分量之和，而 $Q^* = (-m_D \mid D \in \Delta) + (\mathcal{M}_{\mathbb{Q}})_{\geq 0}$ 是正正交象限的平移。这里，$(-m_D \mid D \in \Delta)$ 表示 $\mathcal{M}$ 中的点，其“第 D 个”坐标等于 $-m_D$。将每个球根 λ_i 用 χ_D 表示，在每种情况下，我们都能找到一个值 $\vartheta_{\mathrm{argmax}} = \sum_i a_i\lambda_i$，使得系数 a_i 满足线性递推关系。

7.1. 显式值 $\vartheta_{\mathrm{argmax}}$。 以下列表给出了每个在几何等价意义下的不可分解饱和无重数空间X所对应的线性规划 $\widetilde{\wp}(X)$的解 $\vartheta_{\mathrm{argmax}}$。

为方便起见，将 k 模 2 的值记为 δ_k。

(1) $\mathrm{SL}_n \times \mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上，具有 $n \geq 2$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}} = 0$。(2) $\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^{2n}$ 上，具有 $n \geq 2$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}} = 0$。

(3) $\mathrm{Spin}_{2n+1}\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^{2n+1}$ 上，具有 $n\geq 2$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=\lambda_{1}$。(4) $\mathrm{Spin}_{2n}\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^{2n}$ 上，具有 $n\geq 3$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=\lambda_{1}$。(5) $\mathrm{SL}_n\times\mathbb{C}^*$ 在 $S^2(\mathbb{C}^n)$ 上，具有 $n\geq 2$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k(k+1)\lambda_{n-k}$。(6) $\mathrm{SL}_n\times\mathbb{C}^*$ 在 $\Lambda^2(\mathbb{C}^n)$ 上，具有奇数 $n\geq 5$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor-1}k(2k+1)\lambda_{\lfloor n/2\rfloor-k}$。(7) $\mathrm{SL}_n\times\mathbb{C}^*$ 在 $\Lambda^2(\mathbb{C}^n)$ 上，具有偶数 $n\geq 6$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=\sum_{k=1}^{n/2-1}k(2k-1)\lambda_{n/2-k}$。(8) $\mathrm{SL}_n\times\mathrm{SL}_n\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$ 上，具有 $n\geq 2$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=\sum_{k=1}^{n-1}k^2\lambda_{n-k}$。(9) $\mathrm{SL}_n\times\mathrm{SL}_{n'}\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^{n'}$ 上，具有 $n>n'\geq 2$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=\sum_{k=1}^{n-1}k(k+n-n')\lambda_{n-k}$。(10) $\mathrm{SL}_2\times\mathrm{Sp}_{2n'}\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^{2n'}$ 上，具有 $n'\geq 2$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=(2n'-1)\lambda_1+\lambda_2$。(11) $\mathrm{SL}_3\times\mathrm{Sp}_4\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^4$ 上，具有 $n'\geq 2$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=8\lambda_1+3\lambda_2+6\lambda_3+2\lambda_4$。(12) $\mathrm{SL}_3\times\mathrm{Sp}_{2n}\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}^{2n'}$ 上，具有 $n'\geq 3$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=4n\lambda_1+(2n-1)\lambda_2+3\lambda_3+(4n-2)\lambda_4+(2n-2)\lambda_5$。(13) $\mathrm{SL}_4\times\mathrm{Sp}_4\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^4$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=12\lambda_1+5\lambda_2+9\lambda_3+4\lambda_4+\lambda_5$ 上。(14) $\mathrm{SL}_n\times\mathrm{Sp}_4\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^4$ 上，具有 $n\geq 5$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=(4n-4)\lambda_1+(2n-3)\lambda_2+(3n-3)\lambda_3+(2n-4)\lambda_4+(n-3)\lambda_5$。(15) $\mathrm{Spin}_7\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^8$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=\lambda_1$ 上。(16) $\mathrm{Spin}_9\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^{16}$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=\lambda_1+5\lambda_2$ 上。(17) $\mathrm{Spin}_{10}\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^{16}$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=5\lambda_1$ 上。(18) $G_2\times\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}^7$、$\vartheta_{\mathrm{argmax}}=\lambda_1$ 上。

(19) $E_6 \times \mathbb{C}^*$ 作用于 $\mathbb{C}^{27}$,$\vartheta_{\text{argmax}} = 10\lambda_1 + \lambda_2$. (20) $\text{Spin}_8 \times \mathbb{C}^*$ 作用于 $\mathbb{C}^8 \oplus \mathbb{C}^8$, $\vartheta_{\text{argmax}} = \lambda_1 + \lambda_2$. (21) $\text{SL}_2 \times(\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$,$\vartheta_{\text{argmax}} = \lambda_1$. (22) $\text{SL}_n \times(\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$，具有 $n \geq 3$,$\vartheta_{\text{argmax}} = (n-1)\lambda_1$. (23) $\text{SL}_n \times(\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $\mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*$，具有 $n \geq 3$,$\vartheta_{\text{argmax}} = \lambda_1$. (24) $\text{SL}_n \times(\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $\mathbb{C}^n \oplus \Lambda(\mathbb{C}^n)$，具有 $n \geq 3$,$\vartheta_{\text{argmax}} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{2}k(k+1)\lambda_{n-1-k}$. (25) $\text{SL}_n \times(\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^n)^* \oplus \Lambda(\mathbb{C}^n)$, 具有偶数 $n \geq 4$,$\vartheta_{\text{argmax}} = \sum_{k=1}^{n-2}(\frac{1}{2}k(k-1) + (n-1)\delta_k)\lambda_{n-1-k}$. (26) $\text{SL}_n \times(\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^n)^* \oplus \Lambda(\mathbb{C}^n)$，具有奇数 $n \geq 5$,$\vartheta_{\text{argmax}} = (n-1)\lambda_{n-2} + \sum_{k=1}^{n-3}(\frac{1}{2}k(k+1) + (n-1)\delta_k)\lambda_{n-2-k}$. (27) $\text{SL}_n \times \text{SL}_{n'} \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}) \oplus \mathbb{C}^{n'}$，具有 $2 \leq n < n' - 1$,$\vartheta_{\text{argmax}} = \sum_{k=1}^{n-1} k(n'-n+k)\lambda_k + \sum_{k=1}^{n'-1} k(n'-n+k-1)\lambda_{n-1+k}$. (28) $\text{SL}_n \times \text{SL}_{n'} \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}) \oplus \mathbb{C}^{n'}$，具有 $2 \leq n = n' - 1$, $\vartheta_{\text{argmax}} = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)\lambda_k + \sum_{k=1}^{n} k^2\lambda_{n-1+k}$. (29) $\text{SL}_n \times \text{SL}_{n'} \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}) \oplus \mathbb{C}^{n'}$，具有 $2 \leq n = n'$,$\vartheta_{\text{argmax}} = \sum_{k=1}^{n-1} k^2\lambda_k + \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)\lambda_{n-1+k}$. (30) $\text{SL}_n \times \text{SL}_{n'} \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}) \oplus \mathbb{C}^{n'}$，具有 $2 \leq n' < n$, $\vartheta_{\text{argmax}} = \sum_{k=1}^{n'-1}(k(n-\bar{n'}+k) - n + n')\lambda_k + \sum_{k=1}^{n'-1} k(n-n'+k+1)\lambda_{n'}$

–

–

$-1+k_\circ$

(31) $\text{SL}_n \times \text{SL}_{n'} \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}) \oplus (\mathbb{C}^{n'})^*$，其中 $2 \leq n < n' - 1$, $\vartheta_{\text{argmax}} = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+n'-n)\lambda_k + \sum_{k=1}^{n}(k(k+n'-n-3)+(2n-n'+2))\lambda$

$n-1+k_\circ$

(32) $\text{SL}_n \times \text{SL}_{n'} \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}) \oplus (\mathbb{C}^{n'})^*$，具有 $2 \leq n = n' - 1$, $\vartheta_{\text{argmax}} = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)\lambda_k + \sum_{k=1}^{n}(n+(k-1)^2)\lambda_{n-1+k\circ}$ (33) $\text{SL}_n \times \text{SL}_{n'} \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}) \oplus (\mathbb{C}^{n'})^*$，具有 $2 \leq n = n'$,$\vartheta_{\text{argmax}} = \sum_{k=1}^{n-1} k^2\lambda_k + \sum_{k=1}^{n-1}(n+k(k-1))\lambda_{n-1+k\circ}$ (34) $\text{SL}_n \times \text{SL}_{n'} \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{n'}) \oplus (\mathbb{C}^{n'})^*$，具有 $2 \leq n' < n$,$\vartheta_{\text{argmax}} = \sum_{k=1}^{n'-1} k(n-n'+k)\lambda_k + \sum_{k=1}^{n'-1}(k(n-n'+k-1) - n')\lambda_{n'-1+}$

$k\cdot$

(35) $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$, $\vartheta_{\mathrm{argmax}} = \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3$。(36) $\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$，具有 $n \geq 3, \vartheta_{\mathrm{argmax}} = (n-1)\lambda_1 + (n+1)\lambda_2 + \lambda_3$。(37) $\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_{n''} \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{n''})$，具有 $n \geq n'' \geq 3, \vartheta_{\mathrm{argmax}} = (n-1)\lambda_1 + (n+n''-1)\lambda_2 + (n''-1)\lambda_3$。(38) $\mathrm{Sp}_{2n} \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $\mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}^{2n}$，具有 $n \geq 2, \vartheta_{\mathrm{argmax}} = (2n-1)\lambda_1 + \lambda_2$。(39) $\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{SL}_2 \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}^2$，具有 $n \geq 2, \vartheta_{\mathrm{argmax}} = (2n-1)\lambda_1 + \lambda_2 + (2n+2)\lambda_3$。(40) $\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$，具有 $n \geq 2, \vartheta_{\mathrm{argmax}} = (2n-1)\lambda_1 + \lambda_2 + (2n+1)\lambda_3 + \lambda_4$。(41) $\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_{n''} \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{n''})$，具有 $n \geq 2$, $n'' \geq 3, \vartheta_{\mathrm{argmax}} = (2n-1)\lambda_1 + \lambda_2 + (2n+n''-1)\lambda_3 + (n''-1)\lambda_4$。(42) $\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{Sp}_{2n''} \times (\mathbb{C}^*)^2$ 作用于 $(\mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2n''})$，具有 $n \geq 2$, $n'' \geq$

3,

$$\vartheta_{\mathrm{argmax}} = (2n-1)\lambda_1 + \lambda_2 + (2n+2n''-1)\lambda_3 + (2n''-1)\lambda_4 + \lambda_5.$$

参考文献

[1] Michel Brion. “球面簇的皮卡群与特征数”。载于：《杜克数学杂志》58 (1989)，第 397–424 页。[2] Michel Brion. “关于球面簇的几何”。载于：《赫尔维蒂数学评论》66.2 (1991)，第 237–262 页。doi: 10.1007/BF02566646。url: https://eudml.org/doc/140232。[3] Bert W. Wasserman. “秩二美妙簇”。载于：《变换群》1 (1996)，第 375–403 页。[4] Michel Brion. “球面簇中的曲线与除子”。载于：代数群与李群。第 9 卷。澳大利亚数学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，1997，第 21–34 页。url: https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1635672.[5] Domingo Luna. “球面簇的大胞腔”。载于：代数群与李群。第 9 卷。澳大利亚数学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，1997，第 267–280 页。isbn: 0-521-58532-5。[6] Friedrich Knop. “关于无重数空间的一些注记”。载于：表示理论与代数几何。北约高级研究院系列 514 (1998)。doi: 10.1007/978- 94- 015-9131-7_7.[7] Andrew S. Leahy. “无重数表示的分类”。载于：《李理论杂志》8.2 (1998)，第 367–391 页。issn: 0949-5932。[8] Romain Camus. “a 型球面簇的光滑性判据”。博士论文。约瑟夫·傅里叶大学 (格勒诺布尔 I)，2001。[9] Friedrich Knop 和 Bart Van Steirteghem. “光滑仿射球面簇的分类”。载于：《变换群》11.3 (2006)，第 495–516 页。doi: 10.1007/s00031- 005-1116-3。url: https://doi.org/10.1007/s00031-005-1116-3。

[10] Boris Pasquier. “Fano 类 horospherical 簇”。法语。导师：Michel Brion。博士论文。Université JosephFourier (GrenobleI)，2006。url: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00116977。[11] Jesús A. De Loera、Jörg Rambau 和 Francisco Santos。《三角剖分》。第 25 卷。算法与计算数学。算法与应用结构。施普林格出版社，柏林，2010，第 xiv+535 页。isbn: 978-3-642-12970-4。doi: 10.1007/978-3-642-12971-1。url: https://doi.org/10.1007/978-3-642-12971-1。[12] David A. Cox、John B. Little 和 Henry K. Schenck。《环面簇》。第 124 卷。数学研究生教程。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2011，第 xxiv+841 页。isbn: 978-0-8218-4819-7。doi: 10.1090/gsm/124。url: https://doi. org/10.1090/gsm/124。[13] Dmitry Ti mashev。《齐性空间与等变嵌入》。施普林格出版社，柏林、海德堡，2011。doi: 10.1007/978-3-642-18399-7。[14] Friedrich Knop. “球面嵌入的 Luna-Vust 理论”。2012。url: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16795874。[15] Victor V. Batyrev 和 Anne Moreau. “horospherical 簇的弧空间与动机积分”。载于：Compositio Mathematica 149.8 (2013)，第 1327–1352 页。doi: 10.1112/S0010437X13007124。eprint: arXiv:1203.0671。[16] Paolo Bravi. “本原球面系统”。载于：美国数学会会刊 365.1 (2013)，第 361–407 页。issn: 0002-9947,1088-6850。doi: 10.1090/S0002-9947-2012-05621-2。url: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2012-05621-2。[17] Paolo Bravi 和 Guido Pezzini. “约化群的 wonderful 子群与球面系统”。载于：代数杂志 409 (2014)，第 101–147 页。issn: 0021-8693,1090-266X。doi: 10.1016/j.jalgebra.2014.03.018。url: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra. 2014.03.018。[18] Guiliano Gagliardi. “球面簇的组合光滑性准则”。载于：manuscripta math 146 (2015)，第 445–461 页。doi: 10.1007/s00229-014-0713-7。[19] Guiliano Gagliardi 和 Johannes Hofscheier. “Gorenstein 球面 Fano 簇”。载于：Geom Dedicata 178 (2015)，第 111–133 页。doi: 10.1007/s10711-015-0047-y。[20] Giuliano Gagliardi 和 Johannes Hofscheier. “对称簇的广义 Mukai 猜想”。载于：美国数学会汇刊 369.4 (2016)，第 2615–2649 页。issn: 1088-6850。doi: 10.1090/tran/6738。[21] Guido Pezzini 和 Bart Van Steirteghem. “光滑仿射球面簇的权幺半群的组合刻画”。载于：《变换群》22.4 (2017)，第 979–995 页。doi: 10.1007/s00031-017-9443-2。eprint: arXiv:1510.04266。[22] Paolo Bravi 和 Guido Pezzini. 具有约化的一般各向同性群的球面簇的广义 Mukai 猜想。2025。arXiv: 2501.04405 [math.AG]。url: https://arxiv.org/abs/2501.04405。[23] Giuliano Gagliardi、Johannes Hofscheier 和 Heath Pearson. 球面簇的广义 Mukai 猜想。2025。arXiv: 2502.21155 [math.AG]。url: https: //arxiv.org/abs/2502.21155。

(G. Gagliardi) d-fine AG，Brandschenkestrasse 150，8002 苏黎世，瑞士

(J. Hofscheier 和 H. Pearson) 诺丁汉大学数学科学学院，诺丁汉，NG7 2RD，英国电子邮箱：{johannes.hofscheier, heath.pearson}@nottingham.ac.uk