arXiv:2601.06379v1 [math.HO] 10 Jan 2026

反例的编年史

Daniel Duarte

摘要

在˜20世纪60年代，约翰·纳什提出了一种解决代数簇奇点的´方法。五´十年的鼓舞人心的成果仍未能避免这一悲惨结局：该´方法一般而言并不奏效。本文讲述了纳什爆炸式崛起与´衰落的´历史。

引言´

在这些可以说是被迫保持理性的间歇期里，我确实成功地开展了一些颇为体面的数学研究。

–约翰·纳什，诺贝尔奖自传。

在代数几何中，我们研究由多项式方程组的解构成的几何对象。这些对象称为代数簇。该领域的一个基本问题是奇点消解，通俗地说，就是平滑化 簇中常出现的交叉点或尖点。这个问题已得到部分解决，而如今，寻找完整解法仍是一个受到深入研究的课题。

在20世纪60年代，小约翰·F·纳什提出了一种解决问题的方法，如今称为纳什爆破。这是一种用邻近点处的切触替代奇异点的过程。然而，由于精神问题的困扰，Nash未能完善他的方法；探索并付诸实践的任务留给了世人。1975年至2025年间，世界各地的数学家让Nash提出的方法焕发生机，取得了许多令人振奋的成果。直到一群拉丁美洲数学家发现了一个反例。

本文讲述纳什爆破的故事。在简要介绍问题求解和Nash方法之后，我们将按时间顺序回顾这五十年间取得的成果，可概括如下：

- 1975—1977年：最初成果的几年。1977—1990年：黄金时代，当时奇点理论领域的知名学者研究了这一问题。1990—2010年：匮乏时期，Nash爆炸相对被人遗忘。2010—2012年：理论插曲，在此期间，理论簇的Nash爆炸突然流行起来。2020—2024年：标志着对正特征域上的Nash爆炸展开研究的几年。2024年：反例之年。2025年：我们评述最新研究成果。
-
-
-
-

我们说明，重点将放在叙述这一问题演变的不同阶段上，避免或尽量减少每项成果所特有的技术细节。

谨以此文献给数学学界：过去五十年来，他们探索了一种既迷人又神秘的奇点消解方法。最终的答案是这些年来所有工作的结晶。

1. 奇点消解问题

我们先定义研究的基本对象。关于该对象、相关概念及其基本性质的详细介绍，可参阅任何一本代数几何入门教材（例如，[24]）。

定义´1.1. 设 $\mathbb{K}$ 是一个域，$S \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个子集。我们称由 S 定义的代数簇 为集合

$$\mathbf{V}(S) = \{p \in \mathbb{K}^n \mid f(p) = 0 \text{ para todo } f \in S\}.$$

我们从基础数学教育中就认识代数簇的例子：直线、抛物线、圆、椭圆和双曲线，都是使某个多项式为零的点集。现在来看几个不太熟悉的例子。

设 $f(x, y) = x^3 + x^2 - y^2$ 和 $g(x, y, z) = x^2 z - y^2$。由 f 和 g 定义的代数簇见图 1。

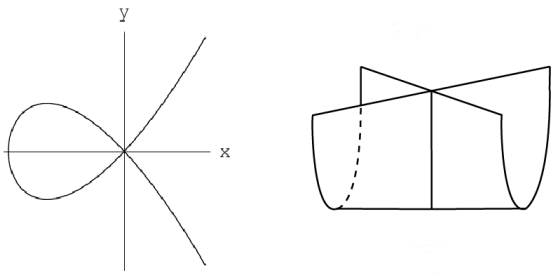

图 1：簇 $\mathbf{V}(f)$ 和 $\mathbf{V}(g)$。

请注意，曲线 $\mathbf{V}(f)$ 与我们在基础解析几何中熟悉的图形有一个显著区别：曲线 $\mathbf{V}(f)$ 上的点 $(0, 0)$ 是一个特殊点；抛物线上或圆上都没有行为类似的点。这个例子说明了奇点的概念。

不作正式定义，直观地说，我们将代数簇上切空间未定义的点称为奇点。我们将簇 X 的奇点集合记为 $\mathrm{Sing}(X)$。

现在我们可以陈述奇点消解问题：
给定一个代数簇 X，求一个簇 Y 和一个满射多项式函数 $\pi\colon\ Y \to X$，使得：

(i) $\pi : Y \setminus \pi^{-1}(\mathrm{Sing}(X)) \to X \setminus \mathrm{Sing}(X)$ *es una biyección.*

(ii) Y 没有奇点。

以下结果由 Heisuke Hironaka 提出，并因此使他在 1970年 获得了菲尔兹奖；它对特征为零的域上的问题给出了肯定的回答（也就是说，任何包含 $\mathbb{Q}$的域）。

定理 1.2. *[22]* 任何定义在特征为零的域上的代数簇，都可以实现奇点消解。

相反，对于特征为正的域（也就是说，任何包含某个素数 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的域），这个问题仍未解决，目前仍是一个受到广泛研究的课题。

2. Nash 爆炸

在 1996 年于马德里举行的世界精神病学大会上，John Nash 宣称：

> 我有一个想法，称为 *Nash* 爆炸，我曾与一位名叫 *Hironaka* 的杰出数学家讨论过。

他所说的这个想法，如今通常被称为 Nash 爆炸，约形成于 1963 年，当时他在普林斯顿的高等研究院访问（见 $[27, \text{第 } 42]$章）。

为了初步了解 Nash 爆炸，我们再次考虑曲线**V**（见图 1）。对于这条曲线，Sing（0，0）。其思路是利用曲线上非奇异点处的切空间构造一个簇。给定……，……在……处的切空间记作……。

首先，对于每个点（0，0），……是……中的一个一维向量子空间。相反，在原点处，曲线没有定义良好的切空间。

这里就引出了 Nash 的想法：将所有可能的切空间极限与奇点关联起来，这些切空间取自收敛到 (0,0) 的非奇异点点列。图2展示了一个收敛到奇点的点列，以及其中一个点的切线。旁边则是切线的两种可能极限，它们分别对应于以下直线：

$$l_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y = 0\}, \quad l_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}.$$

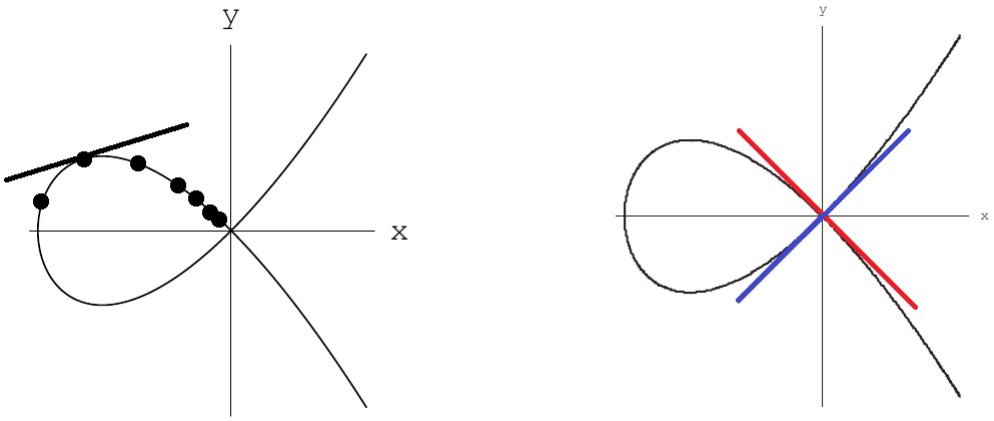

图 2：(0′，0) 处切空间的极限。

这样一来，在新的空间 C^* 中，奇点 $p = (0,0)$ 变成了两个不同的点对：(p, l_1) 和 (p, l_2)。奇点分裂了！（见图3）。

下面我们正式定义代数簇在 $\mathbb{K}^n$中的 Nash 爆炸´。

定义´2.1。设 $X \subset \mathbb{K}^n$ 是一个维数为 d 的不可约代数簇，其中维数一词被分隔为 dimen- si´on。记 $\text{Grass}_d(\mathbb{K}^n)$ 为 $\mathbb{K}^n$ 中维数为 d 的向量子空间的集合。现在考虑高斯映射：

$$G : X \setminus \text{Sing}(X) \to X \times \text{Grass}_d(\mathbb{K}^n),$$
$$p \mapsto (p, T_p X).$$

设 X^* 是 $\text{Grass}_d(\mathbb{K}^n)$ 中包含 G 的最小代数簇（即 $Im(G)$ 在 Zariski 拓扑´ıa 下的闭包）。设 ν：$X^* \to X$ 是投影 $X \times \text{Grass}_d(\mathbb{K}^n) \to X$ 到 X^* 的限制映射。二元组 (X^*, ν) 是 X 的 ***Nash*** 爆炸´。

于是便产生了这样一个问题：如果 X 是一个奇异簇，那么X^* 是否仍然是奇异簇？如果是，我们就重复这一过程。Nash提出的问题是：

¿Una iteración finita de la explosión de Nash da lugar a una variedad sin singularidades?

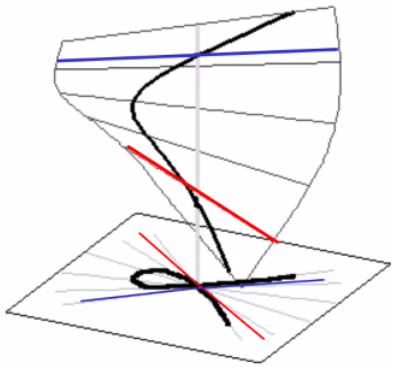

图3：正在展开的节点曲线。

如果答案是肯定的，这一过程便会产生一种规范算法，用于消解奇点。

注 ´2.2。 值得一提的是，约翰·纳什没有发表任何关于他所提出方法的内容。看来，他曾在一封私人信件中直接向 Hironaka 提出这个问题（见 [35]的引言）。另一方面，尽管这个问题通常归于 Nash，但它也出现在 J. G. Semple 早十年的研究中（见 [33]）。一些作者将 Semple 纳入其中，称之为*Semple-Nash ´*爆炸。

3. 历史（1975—2025年）

基本概念和待研究的问题确定之后，我们便可以开始讲述这个问题的历史。在接下来的几页中，我们将回顾过去五十年间关于 Nash 爆炸的消解性质所取得的成果。

3.1. 最初的结果（1975—1977年）

1975年奥古斯托·诺比莱以两个如今已可视为经典的结果，开创了对Nash爆破的研究：在特征为零的域上，该方法并非平凡；而在正特征下，遗憾的是它并不奏效。

定理 3.1。 *[28,* 定理 *1]*设 X 是定义在 $\mathbb{C}$上的代数簇。*Nash*爆破 $\nu: X^* \to X$ 是同构，当且仅当该簇 X没有奇点。

作为这一结果的推论，我们得到了对 Nash 问题的第一个肯定回答。

推论 3.2. *[28,* 推论 *1]Nash* 爆破解决了复曲线的奇点。

这个问题在特征为素数的域上却未能有同样的结果，Nobile 通过下面的例子说明了这一点。

例 3.3. [28, 例 1] 设 $C = \mathbf{V}(x^3 - y^2) \subset \mathbb{K}^2$，并假设域的特征为 2。首先，Nobile 指出，计算 C^* 等价于一种称为对 C 的雅可比理想进行爆破的操作，也就是理想 $\langle 3x^2, -2y\rangle$。通常将其记为:

$$C^* \cong Bl_{\langle 3x^2,-2y\rangle} C.$$

另一方面，由于 $\mathbb{K}$ 的特征为 2，我们有 $\langle 3x^2,\ -2y\rangle = \langle 3x^2\rangle$。理想爆破的一条基本性质告诉我们，爆破一个主理想是一个同构。因此:

$$C^* \cong Bl_{\langle 3x^2,-2y\rangle} C = Bl_{\langle 3x^2\rangle} C \cong C.$$

结论：¡$C^* \cong C$! 反复执行这一过程并不能消除 C 的奇点。

唉，Nash 爆破在正特征下甫一诞生便夭折了！数学学界满怀悲痛地为它安葬，并献上鲜花。从此，所有注意力都将集中于复数域。

这些年里还取得了另一项成果，出自 Vaho Rebassoo 之手。

定理 3.4。 *[30,* 定理 *3.1]*设 $S = \mathbf{V}(x^p y^q - z^r) \subset \mathbb{C}^3$，其中 p、q、$r \in \mathbb{N}$ 没有公因子。*Nash* 爆破解的迭代可以消解 S 的奇点。

3.2. 黄金时代（1977—1990年）

从 1977年 到 1990年 的这段时期将成为 Nash 爆破解的黄金时代。三位奇点理论领域的杰出人物将齐聚一堂，为这一方法注入强劲动力。

1977年至1982年间，Gerardo González-Sprinberg 发表了一系列文章，研究 Nash 问题的一个变体，即反复进行 Nash 爆炸后再取正规化。我们将这一变体称为*Nash* 爆炸 ´正规化（ENN）。
González-Sprinberg 引入了一些技术，使他能够借助凸几何工具研究某些曲面族的 ENN。这一新颖的方法将成为近五十年后发现反例的关键。

定理3.5。 ***(i)*** *[16, §2，定理 ´` 1]* 复正规 *toric* 簇的 *ENN* 与对对数 *Jacobian* 理想进行爆炸后取正规化的结果一致。

(ii) *[16, §2.3，定理 ´eor `eme] Laiteraci ´on de laENN* 解决了正规复 *t oric* 曲面的奇点。

(iii) *[17, §5]ENN* 的迭代解决了 *ADE* 复曲面的奇点。

ENN 开局非常出色!

观察 ´3.6。 对数 ´雅可比理想（第一部分）。在这段历史中，Nash 爆破解在 toric 语境中的主角登场了：对数雅可比理想。定理3.5（i）为组合描述正规化的复 toric 簇的 Nash 爆破解奠定了理论基础。正如我们将在叙述中看到的，这个理想将逐渐发展为尽可能一般的形式，也就是说，去除正规性条件，并适用于任意特征的域。达到这一一般性还需要四十多年。

就在同一年，Heisuke Hironaka 登场了。1979年，Hironaka 对 ENN 产生了兴趣，并为其有效性提供了新的证据。

[1]代数簇的正规化是一种消除余维一处奇点的过程。[2]在这段历史中扮演重要角色的 toric 簇，是具有组合结构描述的代数簇，其描述以半群或多面锥的形式呈现。

定理 3.7。 *[23,* 定理*]ENN* 的迭代使得任意复代数簇都能沿除子赋值进行局部一致化。[3]*,*

然而，Hironaka还证明了他的定理在维数二的情形下有如下推论：ENN 的迭代会产生令人惊叹的夹心曲面。Hironaka确信这种方法在维数二时行之有效，便将接力棒交给他的学生 Mark Spivakovsky，让他完成曲面的情形。Mark Spivakovsky于1990年完成了这项工作，这是一项规模惊人的成果，最终形成了一篇长达八十页的论文，发表于《数学年刊》。

定理 3.8。 *[35,* 定理 *2*。*1] ENN* 的迭代解决了复曲面的奇点。

黄金时代始于冈萨雷斯-斯普林伯格提出的问题，终于 Spivakovsky 的工作。对此，Spivakovsky 在引言中赠予我们一句话，概括了那些年的努力：

> 此外，我们对最小奇点消解的证明是对 *Gonz´ alez-Sprinberg* 关于循环商情形的证明的推广，并受其启发。

3.3. 匮乏时期（1990年-2010）

繁荣的年份之后，接踵而来的是匮乏的岁月。在三位奇点领域巨擘取得惊人进展之后，学界陷入了漫长的沉寂。接下来的二十年里，关于 Nash 问题的研究成果寥寥无几。

2003年，Monique Lejeune-Jalabert 和 Ana Reguera 的一篇论文附录中出现了一道短暂却重要的曙光。那里给出了定理3.5（i）的新证明（见 [26, 命题 A.1]）。这一新证明标志着迈出了第一步，为在不假设正规性的情况下，对环面簇的 Nash 爆炸进行组合结构描述。

[3]局部一致化是消解问题的一个较弱版本，其目标仅是消解由某个赋值确定的簇上的一个奇点。[4]夹心曲面是指被非奇异曲面支配、同时又支配非奇异曲面的曲面。

2006年，Monique Lejeune-Jalabert 给出了平面曲线情形的新证明。与由定理 3.1 通过诺特性论证推得的推论 3.2 不同，Lejeune-Jalabert 的方法明确展示了解析过程。

定理 3.9。 *[25, 定理 3.1]* 平面曲线的 *Nash* 爆破中，点的重数与该曲线一次二次变换中该点的重数相同。特别地，反复进行 *Nash* 爆破可以解消曲线的奇点。

最后，2009年 Wolfgang Ebelling 和 Sabir Gusein-Zade 重新提出了原来的问题，并给出了一个新的肯定答案。

定理 3.10。 *[15, 章节 1]* 一般复行列式簇的 *Nash* 爆破是非奇异的。

尽管这些结果当时在学界反响不大，但几年后它们将以十足的力量重新出现。

3.4. 理论篇章（2010—2012年）

突然间，砰！2010 年至 2012 年间，簇的 Nash 爆炸成为热门话题。在这段时期，四组数学家重新提出了那些问题：Pedro González 和 Bernard Teissier；Dima Grigoriev 和 Pierre Milman；Atanas Atanasov、Christopher Lopez、Alexander Perry、Nicholas Proudfoot 和 Michael Thaddeus；最后，还有本文作者本人——我们全心全意地投入到对簇情形下这两个问题的研究中。尽管每个团队都付出了巨大努力，并采取了不同的视角，簇情形仍然难以攻克；没有人能够在完全一般的情形下证明它。

定理 3.11。 下述陈述涉及复簇。

- *[1, 章节 6]* 在计算机上实现 *ENN* 的组合结构描述。我们计算了数千个维数为 *´3* 和 *4* 的例子，它们都得到了一个解消。*[21, 定理 2.1]* 定理*3.5* 的新证明 (ii)。此外，还给出了达到解消所需迭代次数的上
- 界。

- *[19,* 命题 *60]* 环面簇的 *Nash* 爆炸与对数雅可比理想的爆炸相同。
- *[19,* 定理 *109]* 沿极大秩赋值的局部一致化，适用于任意维数。*[10,* 定理 *6.6]*沿稠密赋值集的局部一致化，适用于二维。
-

观察 ′3.12。 雅可比对数理想 ′（第二部分）。 在其 ′起源中，簇的定义 ′包含了正规性 ′条件 ′。随着时间的推移，学界意识到，这一条件 ′并非严格必要；没有这一条件，理论同样具有吸引力。顺应这一趋势，Gonz ′ález 和 Teissier 得以通过去除正规性 ′假设，扩展 Gonz ′ález-Sprinberg 的定理 3.5（i）。

精疲力竭、士气低落之际，接下来是长达八年 ˜的新一轮沉寂，期间仅被 Daniel Green 的本科毕业论文 [20, 11]中对托里克曲线 ′情形的一次短暂探讨 ′打断 ′。

3.5. 正特征的回归（2024年）

于是，奇迹发生了。不是在第三天，而是在四十五年后，Nash 爆炸将在正特征域上复苏。

让我们回到过去，记得在1975年，Nobile 计算了一个例子，表明 Nash 爆炸无法在正特征下消解奇点（例 3.3）。通俗地说，这个例子并不具备正规性，而且是在最数学意义上的“不正规”！

在与 Luis Núñez-Betancourt 的合作中，我们成功证明，只要给代数簇添加正规性这一假设，Nobile 现象就会消失。

定理 3.13。 *[12,* 定理 *3.10]* 设 X 是一个定义在素特征域上的正规代数簇。*Nash* 爆破 ν ： $X^* \to X$是同构，当且仅当该簇 X 没有奇点。

不出所料，Nash 爆破不保留正规性，因此我们必须立即进行正规化。我们又回到了 ENN！

我们立即着手研究正特征下 ENN 的性质，成果很快便问世。由于这是一个尚未探索的领域，我们决定从零特征下已有的研究路径入手。Duarte-Núñez 团队迎来了 Jack Jeffries，共同取得了最初的成果。这项工作将零特征下关于环面簇 ENN 的所有已知结果推广到了正特征域。

定理 3.14。 *[13,* 定理 *1.9*、*2.5]*设 $p > 0$为基域 $\mathbb{K}$的特征。

(i) 环面簇的 *Nash* 爆破与对数雅可比理想的爆破模 p一致。*(ii)* *ENN* 的迭代可以解消 $\mathbb{K}$上的正规环面曲面的奇点。

注 ´3.15。 对数雅可比理想´（第三部分）。借用 Spivakovsky 的说法，我们关于一般特征的工作推广并受到了 Gonz´alez-Sprinberg、Lejeune-Jalabert、Re- guera、Gonz´alez 和 Teissier 工作的启发。至此，用于研究任意特征下环面簇的 Nash 爆破及其正规化版本的组合研究所需的理论工具已经准备就绪。

为了寻找新的族来探索正特征下的 ENN，我们与 Tha´ıs Dalbelo 和 Maria Aparecida Soares Ruas 开始了新的合作，并由此研究了 Ebelling 和 Gusein-Zade 对一般行列式簇所做的工作。

定理 3.16。 *[9,* 定理 *4.3]* 设 $\mathbb{K}$ 为一个素特征域。定义在 $\mathbb{K}$上的一般行列式 *2*-簇的 *Nash* 爆破是非奇异的。

此时， entusiasmo 已经难以抑制：Nash 爆破在素特征下有效！

现在，我们可以用一句话概括一般理论曲面和一般行列式 2-簇的证明思路：这些情形中涉及的组合结构并不依赖于域的特征。我们还知道，对于其他理论簇而言这并不成立（见 $[13,$ 章节 $3]$）。这引出了一个必然的问题：

在什么条件下，簇的 *Nash* 爆破的组合结构与特征无关？

这个问题将标志着终结的开始。

3.6. 反例（2024年）

为了解决此前提出的问题，智利人 Maximiliano Leyton 登场了。他沉着而睿智。在对墨西哥国立自治大学莫雷利亚校区数学科学中心进行的几次访问中，我们就此展开了讨论。各种想法纷纷涌现，项目也由此启动。后来，Maximiliano 邀请我前往智利的塔尔卡大学，继续合作。生活中的种种巧合让一场代数几何会议恰好在我访问期间于塔尔卡举行。

这次相聚名为 AGREGA（代数几何团队集结）。活动的流程如下：三位主讲人提出一些问题，所有与会者将在活动持续的一周内尝试解决。我当时就是三位主讲人之一。经过漫长——我得说，也相当折磨人——的讨论后，又有两人加入了我和 Max 组成的团队：Federico Castillo，一位来自哥伦比亚的编程高手；以及 Alvaro Liendo，一位意志坚定的智利人。团队终于齐了。

讨论始于一个问题：这些结论是否与特征无关。我和 Max 的想法基于一些简单的三维例子，可以手工计算。但随着不断迭代，计算变得越来越复杂。是时候将注记3.6、3.12和3.15中关于雅可比对数理想的组合结构描述付诸计算了。Federico 和 Alvaro 都是编程专家，他们用 SageMath 实现了相应的算法。这开启了一场紧张的计算探索：数月的计算、算法调试，以及寻找能在每次迭代中改进的不变量。然而一切都是徒劳：每个算出的例子最终都导向一个毫无明显原因或规律的奇点消解。这样的情况持续了好几个月，直到维数的一次跃升改变了一切。

很长一段时间里，计算都集中在三维的环面簇上。由于无法理解算法为什么在这种情况下似乎能够运行，这种挫败感促使我们将维数提升到四维。´这一步伴随着费德里科的一项观察。他对奇点论者的困境一无所知，却建议研究一个在其专业领域中通常会产生反例的族，即由 Reeves 锥定义的环面簇。没过多久，程序就陷入了循环（见图4）。



图4：发现反例的那一天。

警报声大作，反例已近在眼前！几个小时后，程序生成了如下生物：

$$X = \mathbf{V}(x_1x_6 - x_3x_5, x_4x_6 - x_2x_7, x_7^2 - x_2x_4x_5,\\ x_6x_7 - x_2^2x_5, x_3x_7 - x_1x_2^2, x_3x_4x_5 - x_1x_2x_7) \subset \mathbb{C}^7.$$

这个托里克簇有如下特点： X 的 Nash 爆破位于一个射影空间内，其覆盖由仿射托里克簇给出。命运无情地捉弄人，其中一个簇竟与 X 同构。换句话说， X 的 Nash 爆破包含一个与 X 完全相同的副本；重复这一过程也无法消除它的奇点。经过不断的计算机探索，我们还在正特征域上找到了反例。

这些例子催生了一篇文章 [3], ，该文已被《数学年刊》接受发表。

3.7. 终结? （2025年-. . . ）

鉴于这个反例表明，Nash 方法一般无法解决奇点，我们不禁要问：Nash 爆破是否已走到尽头？绝非如此！令人意外的是，它正焕发出新的活力。

近 ′年来，关于托里克簇的 Nash 问题出现了新的研究成果：两篇专门研究三 ′维问题的博士论文 [2, 34] ，一篇研究二维问题的硕士论文 [7], ，两篇针对二维新族给出肯定回答的论文 [14, 8],，三维问题的新正面证据 [4], ，一个新的三维反例 [5] ，以及最后一篇介绍算法计算机实现的论文 [6]。在另一个方向上，有一篇论文总结了 Nobile定理 [29] 的不同版本；最近还获得了该定理的一个实数域双Lipschitz版本 [32]。

亲爱的读者，这个故事尚未结束。

参考文献

[1] Atanasov, A., Lopez, C., Perry, A., Proudfoot, N., Thaddeus, M；用*Nash*爆破消解环面簇，《实验数学》，20卷，第3期，（2011），第288–303页。[2] Bird, J.；环面簇的正规化*Nash*爆破，学位论文，加州大学圣迭戈分校（2021）。[3] Castillo, F., Duarte, D., Leyton-Alvarez, M., Liendo, A.；*Nash*爆破无法消解四维及更高维的奇点，已接受发表于《数学年刊》，arXiv:2409:04688，（2025年）。[4]Castillo, F., Duarte, D., Leyton-Alvarez, M., Liendo, A.；环面簇的无特征正规化*Nash*爆破，arXiv:2501:09811，（2025年）。[5] Castillo, F., Duarte, D., Leyton-Alvarez, M., Liendo, A.；非正规化*Nash*爆破无法消解三维奇点，arXiv:2511:01772，（2025年）。

[6]Castillo, F., Duarte, D., Leyton-Alvarez, M., Liendo, A.；关于*Nash*爆破问题的计算方法，arXiv:2511:17862，（2025年）。[7] Cruz-Fuentes, A.；用正特征下的正规化*Nash*爆破消解环面曲面，学位论文，UNAM-UMSNH（2025年）。[8] Cruz-Fuentes, A.；由单次*Nash*爆破消解的正规环面曲面的分类，arXiv:2511:22021，（2025年）。[9] Dalbelo, T. M., Duarte, D., Soares R. M. A.；正特征下*2*-一般行列式簇的*Nash*爆破，《纯粹与应用数学季刊》，第21卷，第4期，（2025年），第1557–1575页。[10] Duarte, D.；环面曲面上的*Nash*修改，《西班牙皇家精确科学、物理与自然科学院杂志》A辑：数学，第108卷，第1期，（2014），第153–171页。[11] Duarte, D., Green Tripp, D.；环面曲线上的*Nash*修改，《奇点、代数几何、交换代数及相关主题》，施普林格·自然瑞士股份公司，（2018），第191–202页。[12] Duarte, D., Núñez-Betancourt, L.；正特征下的*Nash*爆破，《伊比利亚美洲数学杂志》，第38卷（第1期），（2022），第257–267页。[13] Duarte, D., Jeffries, J., Núñez-Betancourt, L.；素特征下环面簇的*Nash*爆破，《数学汇刊》，第75卷，（2024年），第629–637页。[14] Duarte, D., Snoussi, J.；正规环面曲面的*Nash*爆破：一个和两个线段的情形，《代数与几何贡献》，在线发表，（2025年）。[15] Ebeling, W., Gusein-Zade, S. M.；行列式奇点上*1*-形式的指标，《斯捷克洛夫数学研究所学报》，267（2009年），第119–131页。[16] Gonzalez-Sprinberg, G.；二维扇与*Nash*变换，《高等师范学校出版物》，巴黎（1977年），第1–68页。

[17] Gonzalez-Sprinberg, G；R ′有理双点的 *Nash* 消解，《傅里叶研究所年刊》，格勒诺布尔，第 32 卷，第 2 期（1982年），第 111–178 页。[18] Gonzalez-Sprinberg, G；关于轨形的*Nash*吹胀，《纯数学进展研究》第 56 卷（2009年），《奇点—新潟—富山》（2007年），第 133–149 页。[19] Gonz ´alez Perez, P. D., Teissier, B；环面几何与 *Semple-Nash* 修改，《西班牙皇家精确、物理与自然科学院杂志 A 辑：数学》，第 108 卷，第 1 期（2014年），第 1–48 页。[20] Green Tripp, D；*Nash* 修改 ′环面簇 ′，论文，墨西哥国立自治大学（2019年）。[21] Grigoriev, D., Milman, P；将二项式簇的 *Nash* 消解视为欧几里得除法。先验终止界，以及本质维数为 *2* 时的多项式复杂度，《数学进展》，第 231 卷（2012年），第 3389–3428 页。[22] Hironaka, H；特征零域上的代数簇奇点消解 *I* 和 *II*，《数学年刊》，第 79 卷，第 1、2 期（1964年），第 109–203 页、第 205–326 页。[23]Hironaka, H；关于*Nash*吹胀，《算术与几何》第二卷，《数学进展丛书》第 36 卷，Birkhäuser，波士顿，马萨诸塞州（1983年），第 103–111 页。[24] Hulek, K；初等代数几何，《学生数学文库》第 20 卷，美国数学学会（2003年）。[25] Lejeune-Jalabert, M；*Semple*塔中的点链，《美国数学杂志》，第 128 卷，第 5 期（2006年），第 1283–1311 页。[26] Lejeune-Jalabert, M., Reguera, A；环面曲面奇点的 *Denef-Loefer*级数，国际代数几何与奇点会议论文集（西班牙语）（塞维利亚，2001年），《伊比利亚美洲数学杂志》，第 19 卷（2003年），第 581–612 页。[27] Nasar, S；美丽心灵：约翰·福布斯·纳什传，西蒙与舒斯特，1998年。

[28] Nobile, A；*Nash* 吹胀的一些性质，《太平洋数学杂志》，第 60 卷（1975年），第 297–305 页。[29] Nobile, A；关于 *Nash* 修改的札记，arXiv:2404.09102，2024年。[30] Rebassoo, V；*Nash* 吹胀过程的解奇异化性质，学位论文，华盛顿大学（1977年）。[31] Sage 开发者。SageMath，Sage 数学软件系统（10.4 版），2024年。https://www.sagemath.org[32] Sampaio, E；*Nobile* 定理的实数与双 *Lipschitz* 版本，arXiv:2502.20631，2025年。[33] Semple, J. G；关于曲线与曲面元素几何的一些研究，《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）**4**（1954年），第 24–49 页。[34] Su´arez, R；*Nash* 修改 ´环面簇 ´维数 ´ *3*，论文，塔尔卡大学（2024年）。[35] Spivakovsky, M；夹层奇点与通过归一化 *Nash* 变换对曲面的解奇异化，《数学年刊》，（第 2 辑），第 131 卷，第 3 期（1990年），第 411–491 页。

D. DuarteCentro de Ciencias Matemáticas,
UNAM Campus Morelia.电子邮箱:
adduarte@matmor.unam.mx