arXiv:2601.06390v1 [stat.ME] 10 Jan 2026

基于蒙特卡洛近似的多层网络公共不变子空间经验似然检验

Qianqian Yao[1]

[1] 北达科他州立大学统计学系，美国北达科他州法戈，电子邮箱：
qianqian.yao@ndsu.edu

摘要： 多层（或多重）网络被广泛用于表示日益复杂的现实系统中对象之间各种各样的关系模式。识别网络层之间的公共不变子空间已成为一个活跃的研究领域，因为这样的子空间可以滤除层特异性噪声、促进跨网络比较、降低维数，并提取具有科学意义的共享结构特征。检测公共子空间的一种统计方法是进行假设检验，以评估观测到的网络是否共享共同潜在结构。本文提出一种基于经验似然（EL）的检验方法来实现这一目的。原假设认为所有网络层共享相同的不变子空间，而备择假设则认为至少两个层的子空间不同。我们通过蒙特卡洛近似研究所提检验的渐近行为，并通过大量模拟评估其有限样本性能。模拟结果表明，所提方法具有令人满意的检验水平和检验功效，其实际效用还通过一项真实数据应用得到进一步说明。

MSC2020 学科分类： 60K35; 05C80; 62G10.
关键词和短语： 多层图，公共不变子空间，经验似然检验，蒙特卡洛近似，模拟。

1. 引言

图（或网络）是广泛使用的数据结构，也是用于对复杂系统中相互连接的数据进行建模的通用语言。从根本上说，图由一组表示对象的节点和一组表示这些对象成对之间相互作用或关系的边构成。图数据广泛存在于各种应用领域。例如，图可用于对社交网络建模，其中节点表示个人或实体，边通常表示友谊、合作、互动或其他社会联系 [26]。图模型还用于对量子化学中的分子建模，并应用于催化剂发现、药物发现等领域，以预测

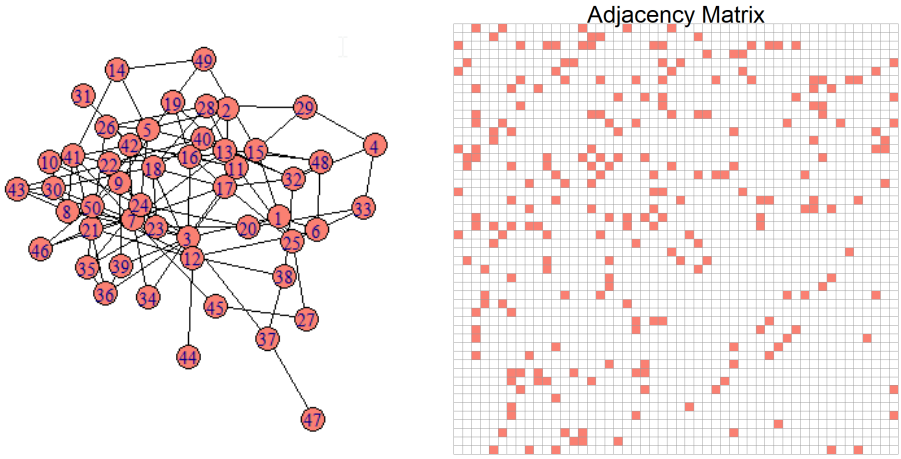


图 1：网络或图及其邻接矩阵：节点大小 $n = 50$

分子的性质。分子中的原子被建模为节点，两个原子之间的化学键被建模为边 [19, 41, 12, 45]。除此之外，网络还应用于许多其他领域，包括事件图、计算机网络、疾病通路、食物网、粒子网络、地下交通系统、经济和金融网络、通信系统等。尽管其中有些例子广为人知，而另一些则更为专业，但它们共同展现了图模型在现实世界系统中的广泛而多样的应用。

图最常见的数学表示之一是邻接矩阵，其中行和列对应图节点，数值表示节点对之间是否存在边。在本工作中，节点的索引为 1，2，.....，n，邻接矩阵的大小为 $n \times n$。我们假设该图是无权图，因此邻接矩阵仅包含二进制元素：1 和 0。具体而言，$A_{ij} = 1$ 如果节点 i与节点 j之间存在一条边，并且 $A_{ij} = 0$如果二者之间不存在边。所有对角线元素均设为 0，因为不考虑自连接（从节点到其自身的边）。我们还假设该图是无向图，也就是说，只要节点 i 与节点 j 相连，j 无论边是从节点 i指向节点 i 还是从节点 j 指向节点$A_{ij} = 1$，都不作区分；$A_{ji} = 1$因此，邻接矩阵是对称的。图 1 展示了一个包含 50 个节点的图及其对应的邻接矩阵，其维数为50×50。邻接矩阵中着色的单元格表示存在边。从可视化结果可以看出，邻接矩阵是对称的，且对角线上元素均为零。

由于应用广泛，图数据挖掘在过去几十年中备受关注。例如，[2, 47] 研究了在随机图中检验稠密子图是否存在的信息论阈值

。 [5] 设计了一种递归二分算法，用于检测网络中的社区结构。 [21] 提出了最优多边形检验，用于检验异质网络中的社区结构。现有的大多数方法都是针对单层网络开发的。然而，将这些方法扩展到多层网络——这一日益重要的复杂系统建模框架——带来了新的挑战。为此，我们转而探讨多层网络。

多层网络是由多个网络组成的集合，通过将一组固定的对象或实体表示为节点，并捕捉它们在不同层之间的各种关系，来建模复杂系统。给定一组固定的节点，每种关系都由一个独立的网络层表示。这些层共同构成多层网络，其中每一层都编码了同一组节点之间某种特定的交互或连接模式。多层网络是强大的建模工具，可用于表示单个网络或图无法充分捕捉的多种交互类型。例如，在多层社交网络中，一层可以表示个人友谊，另一层表示职业合作，第三层表示共同兴趣或活动 [31]。一个具体的例子是 [29], 中介绍的 CS-Aarhus 数据集，其中包含奥胡斯大学计算机科学系 61 名员工的多层社交网络。这些网络基于无向、无权且不含自环的假设构建，涵盖五种线上和线下关系。图 2 展示了这五层，每层都包含代表员工的相同 61 个节点。具体而言，第一层表示共同午餐，第二层表示 Facebook 联系关系，第三层表示出版物的共同署名，第四层编码休闲活动，第五层表示工作关系。

文献中讨论了多种类型的多层网络。同一层内节点之间的边称为层内连接，而连接不同层中节点的边称为层间连接。当层间边连接某个节点与其在其他层中的对应节点（即代表同一实体的节点）时，形成的结构称为多重网络。相反，如果层间边连接的是不同层中代表不同实体的节点，则该网络称为互联网络。在这项工作中，我们关注定义在共同节点集合上的多层网络（也称为多重网络），其中边仅出现在各个独立层内 [13, 14, 25, 8, 3, 36, 35, 23, 42, 39]。这种设置对应于多重网络结构。这类多层网络在真实世界网络建模中有许多应用。例如，在多层脑网络中，节点代表脑区，各层中的边可以编码不同频段的活动、不同任务的活动，以及

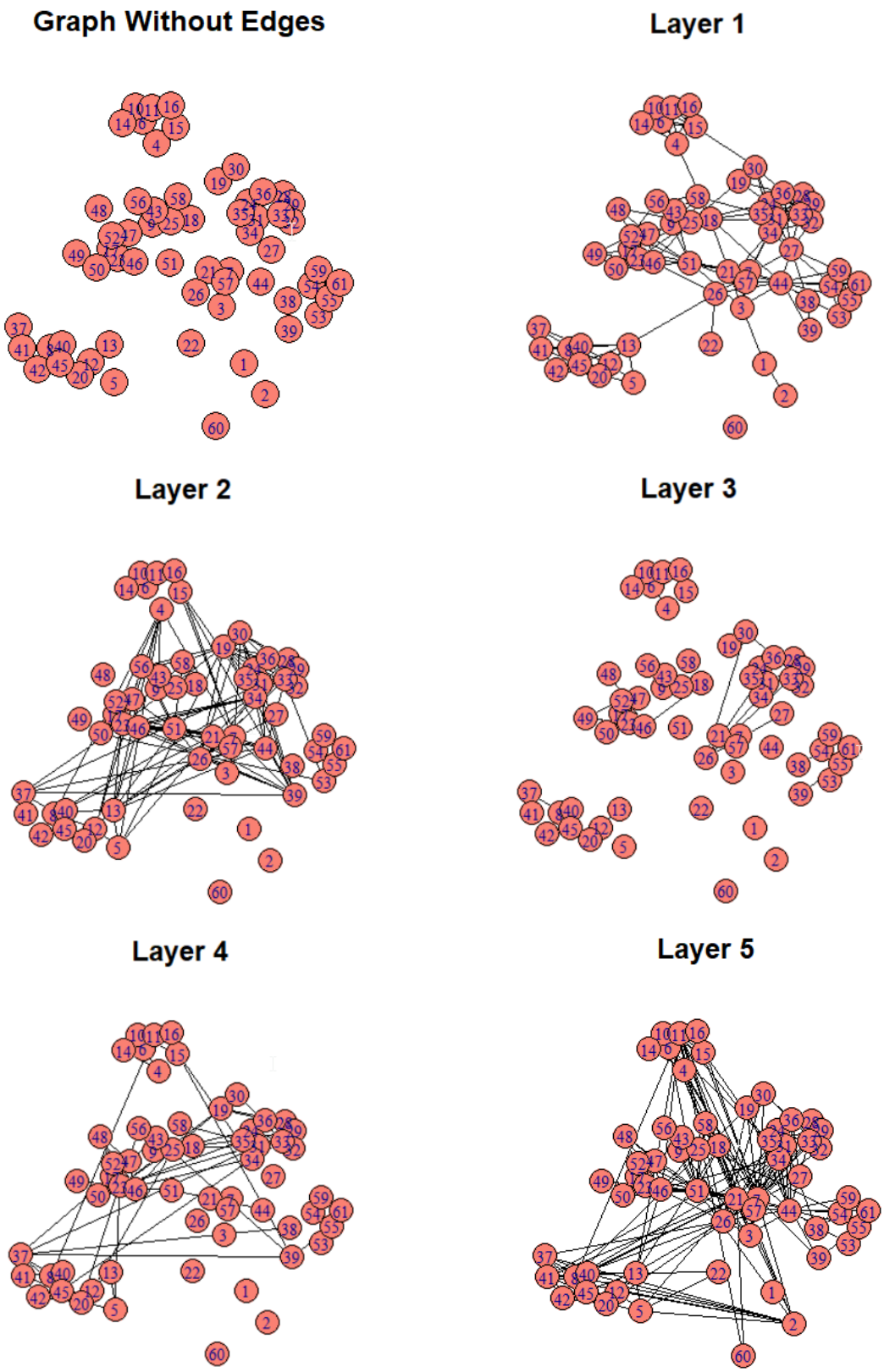


图 2：五层真实世界 CS-Aarhus 网络

功能连接 [13]。文中深入探讨了多层网络在生物医学中的应用 [20]。文献 [22]提出了多层网络分析及其在流行病学研究问题中的应用概述。多层网络方法还被应用于通过多方面的网络化系统研究和量化动物行为[18]。

多层网络是用于对社区或系统建模的一组网络，其中每一层代表该系统内不同的交互模式。由于每一层都从不同角度呈现同一组底层实体，因此识别所有层共有的结构特征，是深入了解整个系统或社区的一种有效方法。在网络分析中，社区检测旨在识别节点群组（社区）：群组内部连接紧密，而与其他群组的连接稀疏。在多层网络的背景下，公共不变子空间指的是一组在所有层中都呈现一致结构模式的节点。也就是说，在某一层中属于同一社区的节点，很可能在其他层中也属于同一社区。因此，识别多层网络中的公共不变子空间，可以理解为揭示不同层之间共享的社区结构。检测此类公共不变子空间，有助于识别在多层结构中保持稳定、且具有相似角色或特征的节点。从数学上说，多层网络的公共不变子空间是一个共享的潜在空间，能够一致地捕捉所有层中的底层结构模式和交互。这个公共不变子空间充当统一表示，整合了各层中蕴含的异质关系信息。这有助于将多层结构整合到一个连贯的框架中，开展联合分析与学习。此外，公共不变子空间还可作为衡量多层网络相似性的基。通过依据共享的子空间结构比较网络，可以将多层网络聚类或分类为若干组，其中各组所含的层呈现相似的潜在模式。

图3 展示了一个由六个节点组成的三层多层网络示例，其中节点 1、4、5 和 6 在所有层中始终保持连接。这些节点构成了三个层共享的公共子空间或公共社群。相比之下，图4 展示了不存在公共子空间的多层网络，因为没有一组节点在所有三个层中都表现出一致的结构关系。然而，随着网络规模增大，仅通过可视化来识别多层网络中的公共子空间会越来越困难。因此，开发用于分析

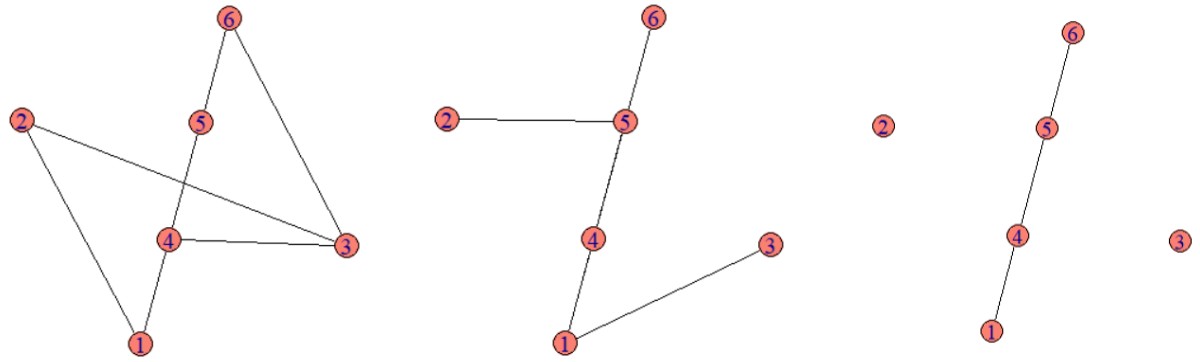


图 3：3 层多层网络：共享公共子空间

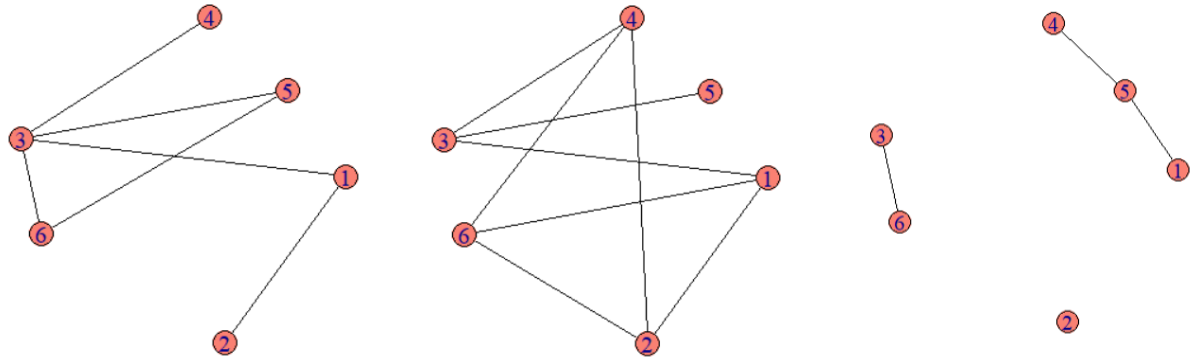


图 4：3 层多层网络：不共享公共子空间

多层网络中的公共子空间的严格方法，是一个活跃的研究领域。

关于多层网络中的公共子空间分析，已有一些工作，例如 [1, 50, 43, 9, 3, 36, 35, 48]。给定一组网络，Arroyo等人 2021 [3]假设所有网络共享公共子空间；Pensky 和 Wang 2024 [36, 35] 假设部分网络共享公共子空间，而部分网络不共享，并且可以将网络划分为若干簇，使得同一簇内的网络具有公共子空间。然而，在现实中，所有网络是否共享公共不变子空间，或者多层网络中的部分网络是否共享公共子空间，都是未知的。在多层网络中检测公共子空间时，假设检验为评估是否存在这种共享结构提供了一个具有原则性的统计框架。该方法在我们更早的工作中 [48]得到发展。原假设表明，所有网络层共享同一个公共不变子空间，而备择假设则认为至少有两个层不共享公共不变子空间。

经验似然（EL）由 Owen [32, 33], 首次提出，是一种非参数的

统计推断方法，兼具基于似然的方法的灵活性与经验数据的稳健性。经验似然方法也在 [24, 27] 中进行了讨论。与传统的参数似然方法不同，经验似然无需设定底层数据分布，而是利用满足经验约束的概率权重，直接根据观测数据构造似然函数。由于具有非参数性质，EL 在保持良好检验功效的同时，能够稳健应对模型设定错误，因此成为一种强大的工具，广泛应用于生物统计学、计量经济学和机器学习等领域的现代统计应用 [15, 30, 34, 37, 49]。

本文基于我们早期工作 [48] 中提出的模型，提出了经验似然（EL）检验。我们通过蒙特卡洛近似研究所提检验的渐近行为，并通过大量模拟考察其有限样本表现。在许多相同的模拟设置下，经验似然检验（EL检验）在 [48] 中表现出比加权度差异检验（WDDT）更高的检验功效，展现出优势。通过一项真实数据应用，进一步展示了该方法的实用价值。本文拓展了经验似然方法的应用范围，也丰富了统计学家和数据科学家可用的方法工具箱。

本文结构安排如下。第2 节正式介绍模型和假设。第3 节提出经验似然（EL）检验。第4 节介绍极限分布的蒙特卡洛近似。第5 节报告模拟结果，并考察多层网络的特征如何影响检验性能和稳健性。第6节通过一项真实数据应用展示所提方法的实用价值。最后，第7节讨论结果并总结全文。

记号：本文通篇采用巴赫曼–朗道记号。设 a_n 和 b_n为两个正数列。若 $c_1 b_n \le a_n \le c_2 b_n$ 对某些正常数c_1、c_2成立，则记为 $a_n = \Theta(b_n)$。若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$，则记为 $a_n = \omega(b_n)$。若 $a_n \le c b_n$ 对某些正常数 c成立，则记为 $a_n = O(b_n)$。若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$，则记为 $a_n = o(b_n)$。设 X_n、X 为随机变量。若 $\frac{X_n}{a_n}$依概率有界，则记为$X_n = O_P(a_n)$。若当 n 趋于无穷时，$\frac{X_n}{a_n}$依概率收敛于零，则记为 $X_n = o_P(a_n)$。设 $\mathbb{E}[X]$ 和 $Var(X)$分别表示随机变量 X 的期望和方差。对于正整数 n、i、j、k，记为 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$，而 $i \ne j \ne k$ 表示 $i \ne j$、$j \ne k$、$k \ne i$。给定正整数 t，$\sum_{i_1 \ne i_2 \ne \ldots \ne i_t}$表示对满足 $|\{i_1, i_2, \ldots, i_t\}| = t$的 $[n]$ 中的所有整数 i_1、i_2、……、i_t 求和。$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_t}$表示对满足 $i_1 < i_2 < \cdots < i_t$的 $[n]$ 中的所有整数 i_1、i_2、……、i_t 求和。对于向量 $W = (W_1$、W_2、……、$W_m) \in \mathbb{R}^m$ 以及正整数 q，$||W||_q = (\sum_i^m |W_i|^q)^{\frac{1}{q}}$。

2. 模型与假设

我们研究所有层具有相同节点集、且边仅连接各层内部节点的多层网络 [13, 14, 25, 8, 3, 36, 35]。具体而言，该多层网络由 L 个图 G_1，G_2、……、G_L组成，其中 $G_l = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_l)$，$\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, n\}$ 为节点集，$\mathcal{E}_l$ 表示图 G_l [1]中的边集。假设每一层中的图均为无向、无权且不含自环。每个图 G_l 由一个 $n \times n$ 对称邻接矩阵 A_l表示，其中若节点 i和 j 在第l层中由一条边连接，则$A_{l,\,ij} = 1$；否则$A_{l,\,ij} = 0$ 。此外，所有对角元素均满足 $A_{l,\,ii} = 0$，这表明图中没有自环。多层网络的一个典型例子是脑网络，其中节点代表脑区，边刻画两个脑区之间的相互作用 [13, 14, 40]。多层脑网络具有相同的节点，且不同网络的节点之间没有边相连。

本节介绍相关模型，并提出一个用于检验公共不变子空间的模型。我们首先考虑单个网络的随机异质图模型，如定义 2.1 中所定义。

定义 2.1（随机异质图（Erd˝os–R´enyi 1960年；Bollob´as 等，2007年））。一个随机异质图由邻接矩阵 $A = (A_{ij})$定义，其中

$$A_{ij} \overset{i.i.d.}{\sim} Bernoulli(P_{ij}), \quad for\ i < j,$$

其中 $P_{ij} \in [0, 1]$。这里，$P = (P_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 概率矩阵，且集合为 $P_{ii} = 0$。邻接矩阵 A满足以下对称性：

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad A_{ii} = 0,$$

其上三角元素 A_{ij}（对于 $i < j$）相互独立。

根据无向无权图的假设，邻接矩阵满足 $A_{ij} = A_{ji}$。此外，无自环的假设意味着 $A_{ii} = 0$ 对所有 i均成立。某些随机图模型可能会生成 P 含有非零对角元素的概率矩阵。为确保与 $A_{ii} = 0$这一图假设一致，我们在定义 $\mathbb{E}[A_{ii}] = P_{ii} = 0$ 中规定每个对角元素的期望值满足2.1。因此，在本工作中，我们对随机图模型作出以下模型假设：

$$P_{ii} = 0, \quad \text{for all } i \in [n].$$

[1] G_l 或 $G^{(l)}$，A_l 或 $A^{(l)}$ 是本文中用于表示多层网络第 l 层图或邻接矩阵的符号。

伯努利随机图模型最早由 Erd˝os 和 R´enyi 于 [17, 16],提出，因此也称为 Erd˝os–R´enyi 随机图模型。在该模型中，边概率通过一个与邻接矩阵 A维数相同的概率矩阵 P来定义。 [6]提出了 Erd˝os–R´enyi 随机图的一种推广，并在 [28], 中进一步讨论。在该模型中，节点 i 和 j 之间存在边的概率并非常数（即具有异质性），而是由矩阵 P =(P_{ij})指定。这类模型通常称为随机异质图模型。多层网络中的每一层都可以用随机异质图模型建模。因此，多层网络的随机图模型通过对每一层独立应用随机异质图模型来构建。

在深入讨论多层网络的随机图模型之前，先简要介绍一些线性代数中的相关术语。有关更详细的定义，请参见 [38, 4]。子空间是 $\mathbb{R}^n$ 中向量空间的子集 V，并且其本身也是一个有限维向量空间。如果这个有限维向量空间的基是 $span\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ 中的向量列表，且这些向量是线性无关的，那么该子空间的维数就是这些线性无关向量的数量。如果向量列表 V 中只有取 a_1，……， $a_m \in \mathbb{R}$ 才能使 $a_1v_1 + \ldots a_mv_m$ 等于 0，且该取值为 $a_1 = \cdots = a_m = 0$，则称该向量列表线性无关。

从向量空间 V 到向量空间 W的线性映射（也称为线性变换）记作 $L(V, W)$，是满足以下性质的函数 T：$V \to W$：1）可加性：$T(u+v) = T(u)+T(v)$，对所有 u、$v \in V$ 均成立；2）齐次性：$T(\lambda v) = \lambda T(v)$。从一个向量空间到其自身的线性映射记作 $\mathcal{L}(V)$。例如，恒等映射记作 I，是定义在某个向量空间上的函数，它将每个元素映射到自身。具体而言，$I \in L(V)$定义为 $Iv = v$。设矩阵 $A \in \mathcal{L}(V)$，若子空间 V 满足 $v \in V$蕴含 $Av \in V$，则称其在 A 下不变。例如，设 λ_1、λ_2、……、λ_d 是 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的不同特征值，v_1、v_2、……、v_d 是相应的标准正交特征向量，其中 $d \le n$，则 v_1、v_2、……、v_d 线性无关，并且 $V = span\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ 构成 A的一个 d 维子空间。根据谱定理，$AV = V\Lambda$，其中 Λ =diag(λ_1、……、λ_d)。于是，子空间 $V = span\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ 在 A下不变。

设矩阵 A 是一个元素属于 $\mathbb{R}$ 的 n 阶方阵，则 A 的行秩 是其线性无关 行的张成空间的维数，等价于 A 在 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关 行数； A 的列秩 是其线性无关 列的张成空间的维数，等价于 A 在 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关列数。矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的秩是 A 的列秩。

给定一个包含 n 个节点的 L 层多层网络 A_1，A_2，……，A_L，

每层由一个对称邻接矩阵 $A_l \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示，其中 $l = 1, \ldots\ldots, L$ 是基于随机异质图 模型得到的。对每个 $\mathbb{E}[A_l]$进行特征分解：

$$\mathbb{E}[A_l]V_l = V_l\Lambda_l, \quad \text{or equivalently,} \quad \mathbb{E}[A_l] = V_l\Lambda_l V_l^\top,$$

其中， $V_l \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 是一个由特征向量组成的正交矩阵，表示 $\mathbb{E}[A_l]$的一个 d 维子空间；$\Lambda_l \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 是一个特征值对角矩阵，其中 $d \le n$。对于多层网络，为捕捉所有层共有的底层结构，需要进一步推广这一分解。以下模型专为多层网络设计。

定义 2.2 (公共子空间独立边图（Arroyo 等人，2021 年）**)**。 令$V = (V_1, V_2, \ldots, V_n)^\top \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 为一个具有标准正交列的矩阵，并令 $R_1, \ldots, R_L \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 为对称矩阵，使得

$$0 \le V_i^\top R_l V_j \le 1 \quad \textit{for all } i, j \in [n],\ l \in [L].$$

那么，随机邻接矩阵 $A_1, \ldots, A_L$ 联合服从秩为 d 、参数为V和 $R_1, \ldots, R_L$ 的公共子空间独立边（*COSIE*）图模型；若对每一层 $l = 1, \ldots, L$，在给定 V和 R_l的条件下， A_l 的各项相互独立且服从

$$\mathbb{P}(A_l) = \prod_{i<j} \left(V_i^\top R_l V_j\right)^{A_{ij}^{(l)}} \left(1 - V_i^\top R_l V_j\right)^{1-A_{ij}^{(l)}}.$$

等价地，令 $P_{ij}^{(l)} = V_i^\top R_l V_j$，该模型可表示为

$$\mathbb{P}(A_l) = \prod_{i<j} \left(P_{ij}^{(l)}\right)^{A_{ij}^{(l)}} \left(1 - P_{ij}^{(l)}\right)^{1-A_{ij}^{(l)}}.$$

多层网络邻接矩阵的联合分布写为

$$A_1, \ldots, A_L \sim \mathit{COSIE}(V; R_1, \ldots, R_L),$$

其中， $V \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 是共享潜在子空间，每个 $R_l \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 是层特定得分矩阵。

该公共子空间独立边图模型（*COSIE*）是在 [3]中提出的。在这项工作中，作者针对多个异质网络提出了一个模型，其中每个网络共享一个公共潜在子空间结构，并引入了一种谱算法，用于估计多层网络中的公共不变子空间。考虑一个集合

包含 L 个网络，其邻接矩阵为 $A_l \in \{0,1\}^{n\times n}$，其中 $1 \le l \le L$，每条边都被建模为相互独立的伯努利随机变量，第 l 个网络的期望邻接矩阵可以分解为

$$\mathbb{E}[A_l] = VR_lV^\top,$$

其中，$V \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 是一个具有标准正交列的矩阵，表示一个在所有网络间共享的 d 维子空间。矩阵 $R_l \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 是图特定得分矩阵，可能随网络而变化，且不一定是对角矩阵。这种表述使每个网络都可以具有自身的预期边结构，同时捕捉共享潜在子空间信息。

定义 2.3 (DIverse MultiPLEx 广义点积图（Pensky 和 Wang（2024））)。考虑在同一组 n 个顶点 $[n] = \{1, ..., n\}$上有 L 层网络，其中连接概率张量 $\mathcal{P} \in [0,1]^{n\times n\times L}$ 由层 $P^{(l)}$、$l \in [L]$构成，这些层可以按照公共子空间结构或社区划分划分为 M 个组。给定标签函数 c：$[L] \to [M]$，$l \in [L]$ 的概率矩阵 P（l）定义为

$$P^{(l)} = V^{(m)}Q^{(l)}\left(V^{(m)}\right)^\top, \quad where\ m = c(l),\ m \in [M],$$

其中，$Q^{(l)} = \left(Q^{(l)}\right)^\top$ 和 $V^{(m)}$ 是具有标准正交列的矩阵，且 $P^{(l)}$ 的所有元素均位于区间 $[0,1]$内。

定义2.3 介绍了*DIverse MultiPLEx* 广义点积图（*DIMPLE-GDPG*）模型。文献 [36] 提出的 DIMPLE-GDPG 模型推广了文献 [3]介绍的 COSIE 随机图模型。DIMPLE-GDPG 模型假设多层网络中存在 M 个不同的子空间，而 COSIE 模型假设所有层共享一个单一公共不变子空间。多层网络中的期望邻接矩阵可分解为

$$\mathbb{E}[A^{(l)}] = V^{(m)}Q^{(l)}\left(V^{(m)}\right)^\top,$$

其中，$V^{(m)} \in \mathbb{R}^{n\times d}$ 是表示第 m 个 d 维子空间的同质性矩阵，$Q^{(l)}$ 是层 l的异质性得分矩阵。每个邻接矩阵 $A^{(l)}$ 都有一个不同的异质性成分 $Q^{(l)}$，这表明多层网络具有异质性。

在这项工作中，我们旨在检验多层网络中是否存在一个共享的公共不变子空间，还是存在多个不同的子空间。我们从最简单的情形入手，假设 V是一个表示一维子空间的向量。因此，我们基于定义*2.2*，提出多层网络的 [48],秩一度校正随机图模型。

和定义2.3，并假设同质性矩阵 V 的维数为一。具体表述见定义2.4。

定义 2.4 (秩-1随机多层异质图（Yuan 和 Yao（2025））)。给定正整数 L，令 W_l 为 $[0,1]^n$ 中的一个向量，使得对于所有 $l \in [L]$，$\|W_l\|_2 = 1$；并令 ρ_l 为一个可能依赖于 n 的正数列。若多层网络$A_1, A_2, \ldots, A_L$服从随机多层异质图模型 $\mathcal{G}_n(W_1, W_2, \ldots, W_L)$，则

$$\mathbb{P}(A_{l,ij} = 1) = \rho_l W_{l;i} W_{l;j}, \quad i < j, \tag{1}$$

whe若 $A_{l,\,ii} = 0$、$A_{l,\,ij} = A_{l,\,ji}$、$A_{l,\,ij}$ *(*$1 \le i < j \le n$*,* $1 \le l \le L$*)* 相互独立 $nt.$

定义2.4定义了这样一种多层网络，其中每一层都是秩-1度校正 Erd˝os–R´enyi 随机图。节点 i 在 A_l 中的期望度与 $W_{l;i}$成正比。因此，W_l 是中 A_l的度校正参数。矩阵 A 的秩是列秩，即由线性无关的列张成的空间的维数，或者等价地说，是 A在 $\mathbb{R}^n$ [38, 4] 中的线性无关列的数量。邻接矩阵 A 是两个向量的外积：

$$\mathbb{E}[A_l] = \rho_l W_l W_l^\top. \tag{2}$$

也可以等价地写为：

$$\mathbb{E}[A_l] = [\rho_l w_1 W_l, \rho_l w_2 W_l, \ldots, \rho_l w_n W_l],$$

其中，w_i 是度校正参数 W_l 向量 [2]中的元素。因此，邻接矩阵 A 是一个秩一矩阵。因此，$\mathcal{G}_n(W_1, W_2, \ldots\ldots, W_L)$ 中所有层的每个网络都是一个秩一度校正 *Erd˝os–R´enyi* 随机异质图。

单层随机异质图 $\mathcal{G}_n(W_1)$也与 [11], 中广为人知的 Chung-Lu 模型有关，其中 W_1 是一个由 n 非负实数组成的向量，且$\rho_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n W_{1;i}}$。如果我们将 [11] 中的 W替换为 $\widetilde{W} = \frac{W}{\|W\|_2}$，那么 Chung-Lu 模型 [11] 就是 $\mathcal{G}_n(\widetilde{W})$。秩一度校正随机图已被广泛用于对真实世界网络建模 [10, 7, 46]。

我们在定义 $\mathcal{G}_n(W_1, W_2, \ldots\ldots, W_L)$ 中提出的随机多层异质图模型与 2.4 中定义的模型有关 [3, 36, 35]。若 $W_1 = W_2 = \cdots = W_L = W$，则 $\mathcal{G}_n(W_1, W_2, \ldots\ldots, W_L)$ 是 [3]中的公共子空间独立边随机图模型的一个特例。在此情形下，多层网络 A_l（$1 \le l \le L$）共享由 W表示的相同度校正参数（或一维子空间），并且

[2] w_i 和 $W_{l,\,i}$ 均用于表示 W_l 中的元素。

由于各 ρ_l互不相同，因此同时具有足够的异质性。当部分向量W_1， W_2，……， W_L 相等时， $\mathcal{G}_n$（W_1， W_2，……， W_L）是 [36, 35]中的多样化多层网络模型的一个特例。在此情景下，多层网络 A_l （$1 \le l \le L$）可划分为若干簇，使得同一簇中的网络具有相同的度校正参数（或一维子空间）。 [36, 35]提出了若干算法，可在一般情形下恢复潜在簇并估计公共子空间。

文献中提出的估计方法 [3, 36, 35] 依赖于这样一个假设：多层网络的部分或全部层共享一个公共不变子空间。然而，在实践中，这一假设是否成立通常并不明确。在这项工作中，我们首次通过正式的假设检验框架来处理这一问题。具体而言，我们假设子空间是一维的，并采用定义2.4中描述的模型。

给定多层网络 A_1， A_2、…、 $A_L \sim \mathcal{G}_n(W_1$， W_2、…、 $W_L)$，我们感兴趣的是检验以下假设

$$H_0 : W_1 = W_2 = \cdots = W_L, \qquad H_1 : W_{l_1} \neq W_{l_2}, \text{ for some } l_1 \neq l_2. \tag{3}$$

在 H_0 下，图 A_1， A_2、…、 A_L 具有相同的度校正参数。在H_1 下，至少存在两张图，其度校正参数不同。

3. 经验似然检验

经验似然（EL）由 Owen 首次提出 [32, 33], ，是一种非参数统计推断方法，它结合了基于似然的方法的灵活性与经验数据的稳健性。经验似然方法也见 [24, 27]。与传统的参数似然方法不同，经验似然无需指定底层数据分布，而是利用满足经验约束的概率权重，直接根据观测数据构造似然函数。由于具有非参数性质，EL 在保持良好效率的同时，还能抵御模型设定错误，因此是现代统计应用中的有力工具。本章将经验似然框架应用于检验多层网络的公共不变子空间（如式（3）所述），并通过模拟考察其经验表现。

定义 3.1 (Owen 1988；Owen 2001；Lazar 2021)。 给定一个随机样本 $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{R}^d$，其中 $d \ge 1$，来自均值为 $\mu \in \mathbb{R}^d$ 的未指定分布 F 。设 w_i 为分布函数 F 赋予观测值 X_i的权重。非参数似然 $R(F) = \prod_{i=1}^n nw_i$ 的比值，其中 $w_i \ge 0$ 对所有 i 和 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ 均成立。样本中可能存在也可能不存在并列值

随后，均值的经验似然比函数定义为

$$R_n = \max\left\{ \prod_{i=1}^{n} nw_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} w_i X_i = \mu,\ w_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}.$$

Owen [32, 33] 表明，经验似然比渐近服从卡方分布，这也是 Wilks 提出的参数似然比检验的通常渐近结果 [44]，并表明经验似然所代表的特定非参数偏移造成的损失很小。

定理 3.2 (Owen 1988；Owen 2001；Lazar 2021)。设 $X_1, X_2, ..., X_n \in \mathbb{R}^d$（其中 $d \geq 1$）为具有共同分布 F_0 、均值为 μ_0 且有限方差协方差矩阵 V_0 的秩为 $q > 0$的独立随机变量。那么， $-2logR_n$ 依分布收敛于一个$\chi^2_{(q)}$ 随机变量，当 $n \to \infty$时。

基于定理 3.2，我们将经验似然检验（EL 检验）定义如下：

$$\text{Reject } H_0 \text{ at significance level } \alpha, \text{ if } -2\log R_n > \chi^2_{q,1-\alpha},$$

其中 $\chi^2_{q,\ 1-\alpha}$表示上侧 α临界值，或等价地，表示自由度为 q 的卡方分布的第 100$(1-\alpha)$ % 百分位数。通常 $q = d$，但若 $q < d$，则意味着 X_i 被限制在一个更小的子空间内。因此，极限分布中的自由度也相应调整。定理 3.2 保证 EL 检验的第一类错误在渐近意义下等于 α。

我们针对假设检验问题（3）提出经验似然比检验（EL 检验）。定义加权度差数据如下：

$$X_i = \sum_{l=2}^{L} \left[\left(\frac{d_{1,i}}{\sqrt{P_1}} - \frac{d_{l,i}}{\sqrt{P_l}} \right)^2 - \frac{d_1}{P_1} - \frac{d_l}{P_l} \right], 1 \leq i \leq n. \tag{4}$$

其中 $P_l = \sum_{i \neq j \neq k} A_{l,\ ij} A_{l,\ jk}$, $d_{l;i} = \sum_j A_{l,\ ij}$ 和 $d_l = \sum_{i,\ j} A_{l,\ ij}$，对于每个 $l \in [L]$。

在（4）中，术语$\frac{d_{1,i}}{\sqrt{P_1}} - \frac{d_{l,i}}{\sqrt{P_l}}$ 表示节点 i在 A_1中的度$d_{1,i}$ 与节点 i 在 A_l中的度 $d_{l,i}$ 之间的加权差。并且，$(1 \leq l \leq L, 1 \leq i \leq n)$是参数$W_{l;i}\ (1 \leq l \leq L, 1 \leq i \leq n)$的估计量。因此， $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d_{1,i}}{\sqrt{P_1}} - \frac{d_{l,i}}{\sqrt{P_l}} \right)^2$ 衡量了 W_1与 W_l之间的差异。术语 $\frac{d_1}{P_1} + \frac{d_l}{P_l}$ 对 $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d_{1,i}}{\sqrt{P_1}} - \frac{d_{l,i}}{\sqrt{P_l}} \right)^2$进行了中心化。因此，$X_i$ 衡量了 $i \in n$下多层网络中 A_1 与 A_l 之间节点度差异的总和。如果 X_i的均值等于0（即原假设成立），则图 $A_1, A_2, \ldots, A_L$具有相同的度校正参数。否则，至少存在两张图，其度校正参数不同。

加权度差数据 X_i，定义见（4），表示多层网络中节点 i的加权度差，其中 $1 \le i \le n$。这些数据并非相互独立，因此定理3.2 是否仍然成立尚不明确。以下两个示例也曾在 [48]，我们此前关于使用加权度差检验检验多层网络公共不变子空间的工作中进行过讨论。这些示例所施加的约束旨在满足 [48] 中所需的理论假设，且预计也符合定理3.2的条件。在对极限分布进行严格的数学证明之前，本研究通过蒙特卡洛近似考察所提出的经验似然检验统计量的经验分布，相关内容见第4节。所得经验分布为定理3.2的有效性提供了数值证据。第5 节的模拟研究进一步考察了所提出的经验似然检验的第一类错误率和检验功效。

例3.1。 对于正常数 r, λ_l，其中 $\lambda_l \le 1$ 和 $r > 1$，令 $W_{l,i} = \frac{\lambda_l \sqrt{r}}{\sqrt{n}}$，当$1 \le i \le \frac{n}{r}$且 $W_{l,i} = \sqrt{\frac{r}{r-1}} \frac{1}{(1-\lambda_l^2)\sqrt{n}}$时，其中 $\frac{n}{r} < i \le n$。简单计算可得

$$\|W_l\|_1 = \Theta(\sqrt{n}), \quad \|W_l\|_2 = 1, \quad \|W_l\|_4^4 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

若 $\lambda_l = \lambda_1$，则 $\min_{1 \le l \le L}\{\rho_l\} = \omega(1)$，$\rho_l = o(\sqrt{n})$。此外，直接计算可得

$$\sum_{i=1}^{n} W_{1,i} W_{l,i} = \lambda_1 \lambda_l + \sqrt{(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_l^2)}.$$

若 $\lambda_l \ne \lambda_1$，则存在一个正常数 ϵ，使得 $\sum_{i=1}^{n} W_{1,i} W_{l,i} \le 1 - \epsilon$。$\lambda_1$ 与 λ_l之间的差异越大，$\sum_{i=1}^{n} W_{1,i} W_{l,i}$越小。

例3.2。 设 m, β_l 为关于 $l \in [L]$的非负常数。记

$$S_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} i^m.$$

当 m 为正整数时，$S_{n,m}$ 由福尔哈伯公式给出。对于任意正数常量 m，容易验证

$$S_{n,m} = \frac{n^{m+1}}{m+1}\left(1 + o(1)\right). \tag{5}$$

Let

$$W_{l,i} = \frac{i^{\beta_l}}{\sqrt{S_{n,2\beta_l}}}.$$

根据 $S_{n,\ m}$ 和 (5)，可得

$$\|W_l\|_1 = \sum_{i=1}^{n} W_{l,i} = \frac{1}{\sqrt{S_{n,2\beta_l}}} \sum_{i=1}^{n} i^{\beta_l} = \Theta\left(\sqrt{n}\right),$$

$$\|W_l\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} W_{l,i}^2 = \frac{1}{S_{n,2\beta_l}} \sum_{i=1}^{n} i^{2\beta_l} = 1,$$

$$\|W_l\|_4^4 = \sum_{i=1}^{n} W_{l,i}^4 = \frac{1}{S_{n,2\beta_l}^2} \sum_{i=1}^{n} i^{4\beta_l} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

节点 i 在 A_l 中的期望度为 $i^{\beta_l}\Theta\left(\frac{\rho_l}{n^{\beta_l}}\right)$。因此，这些网络具有高度异质性。若 $\beta_l = \beta_1$，$\min_{1\le l\le L}\{\rho_l\} = \omega(1)$，$\rho_l = o(\sqrt{n})$。此外，直接计算可得

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} W_{1,i}W_{l,i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i^{\beta_1}}{\sqrt{S_{n,2\beta_1}}} \frac{i^{\beta_l}}{\sqrt{S_{n,2\beta_l}}} \\
&= (1+o(1)) \frac{n^{\beta_1+\beta_l+1}}{\beta_1+\beta_l+1} \frac{\sqrt{(2\beta_1+1)(2\beta_l+1)}}{\sqrt{n^{2\beta_1+2\beta_l+2}}} \\
&= (1+o(1)) \frac{\sqrt{(2\beta_1+1)(2\beta_l+1)}}{\beta_1+\beta_l+1}.
\end{aligned}$$

若 $\beta_l \neq \beta_1$，则存在一个正常数 ϵ，使得 $\sum_{i=1}^{n} W_{1,\ i}W_{l,\ i} \le 1-\epsilon$。$\beta_1$ 与 β_l 之间的差异越大，$\sum_{i=1}^{n} W_{1,\ i}W_{l,\ i}$ 越小。

4. 零分布的蒙特卡洛近似

使用示例 3.1 和示例 3.2生成多层网络。在这些蒙特卡洛模拟设置中，我们知道生成的多层网络是否共享公共子空间这一真实情况。因此，我们通过蒙特卡洛模拟研究其有限样本行为。在原假设下，根据指定模型生成多层网络，且各层共享一个不变子空间。对于每次模拟，都会计算检验统计量，并重复这一过程 10,000 次。由此得到的经验分布可近似检验统计量的零分布，从而评估其分布性质并获得基于模拟的临界值。

我们首先基于示例3.1，通过蒙特卡洛近似研究经验分布。也就是说，向量 $W_l = (W_{l,\ 1},\ W_{l,\ 2},\ \ldots,\ W_{l,\ n})$ $(1 \le l \le L)$ 定义为

$$W_{l,i} = \frac{\lambda_l\sqrt{r}}{\sqrt{n}}, \quad 1 \le i \le \frac{n}{r},$$

$$W_{l,i} = \frac{\sqrt{\frac{r}{r-1}(1-\lambda_l^2)}}{\sqrt{n}}, \quad \frac{n}{r} < i \le n,$$

其中 $0 < \lambda_l \le 1$ 和 $r > 1$。参数 ρ_l 定义为 $\rho_l = n^{\tau_l}$。随后，网络 A_l 由（1）生成，其中 $A_{l,\ ij} = A_{l,\ ji}$, $A_{l,\ ij}\ (1 \le i < j \le n, 1 \le l \le L)$ 相互独立。

设 $r = 2$、$L = 3$、$n = 400$。记 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_L)$ 为 $\tau_l \in \{0.3, 0.2, 0.4, 0.1\}$，并记 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_L)$ 为 $\lambda_l \in \{0.8, 0.7, 0.6, 0.5\}$。生成的多层网络中的每一层由两个参数刻画：

$$A_l \sim \mathcal{G}_n(\tau_l, \lambda_l)$$

多层网络则由其对应的参数向量表示。例如，三层网络可表示为：

$$(A_1, A_2, A_3) \sim \mathcal{G}_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}) \quad \text{where } \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3), \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

为考察参数 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 之间的相互作用是否会影响检验性能，我们针对三层网络考虑了四种情景，如表 1（例 3.1）所示。第一列给出了原假设下的三种设置，第二、第三和第四列则对应备择假设下的设置。我们首先绘制第一列中三种原假设设置的经验分布，然后考察第四列备择假设设置下的经验分布。零分布的蒙特卡洛近似结果见图 5。红色曲线表示自由度为 1 的卡方分布。经验似然检验统计量的经验密度与理论卡方密度高度吻合，为定理 3.2提供了数值证据。图 6 展示了备择假设下的蒙特卡洛近似结果。在备择假设下，EL 检验统计量近似服从正态分布。这一行为与中心极限定理一致，因为在固定备择假设下，由于估计方程中的随机波动不断累积，检验统计量会收敛到正态分布。

在第二个模拟中，网络由示例3.2中指定的模型生成。也就是说，向量 $W_l = (W_{l,\ 1}, W_{l,\ 2}, \ldots, W_{l,\ n})\ (1 \le l \le L)$ 的定义如下：

$$W_{l,i} = \frac{i^{\beta_l}}{\sqrt{S_{n,2\beta_l}}},$$

其中，$S_{n,\ m} = \sum_{i=1}^{n} i^m$、$m$ 和 β_l 是 $l \in [L]$ 的非负常数。

$L=3,\ r=2$				
情景 1				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.3, 0.2,0.4)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8,0.8)	(0.8, 0.7,0.7)	(0.8, 0.6,0.6)	(0.8, 0.5,0.5)
情景 2				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.3, 0.2,0.4)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8,0.8)	(0.8, 0.7,0.6)	(0.8, 0.7,0.5)	(0.8, 0.6,0.5)
情景3				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.4, 0.3,0.2)	(0.4, 0.3,0.2)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8,0.8)	(0.8, 0.7,0.6)	(0.8, 0.7,0.5)	(0.8, 0.6,0.5)
情景 4				
$\boldsymbol{\tau}$	(0。2, 0。3, 0。4)	(0.2, 0.3,0.4)	(0。2, 0。3, 0。4)	(0.2, 0.3,0.4)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8,0.8)	(0.8, 0.7,0.6)	(0.8, 0.7,0.5)	(0.8, 0.6,0.5)

TABLE 1三层多层网络的四种情景示例 *3.1*

令 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4)$ 满足 $\beta_l\in\{1,2,3,4\}$，且 $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_L)$ 满足 $\tau_l\in\{0.3,0.2,0.4,0.1\}.\rho_l$ 定义为 $\rho_l=n^{\tau_l}$。此外，设 $L=3,\ n=400$。然后根据（1）生成 A_l。生成的多层网络中的每一层由两个参数表征：

$$A_l\sim\mathcal{G}_n(\tau_l,\beta_l)$$

多层网络由其对应的参数向量表示。例如，三层网络可以表示为：

$$(A_1,A_2,A_3)\sim\mathcal{G}_n(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\beta})\quad\text{where }\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\tau_3),\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3).$$

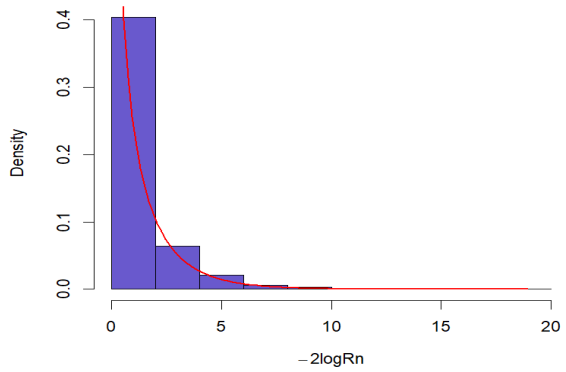
示例的四种情景 3.2 汇总于表 2。第一列列出了原假设的三种配置，第三列则包含四种备择设定。这些情景用于考察原假设和备择假设下经验似然（EL）检验统计量的经验分布。图 7 展示了原假设下的蒙特卡罗近似，图 8 展示了备择假设下的相应结果。结论与示例3.1一致。在原假设下，EL 检验统计量的经验密度与 $\chi^2_{q=1}$分布十分接近，为定理 3.2提供了数值支持。在备择假设下，EL 检验统计量近似服从正态分布，这与中心极限定理相符。

5. 模拟研究

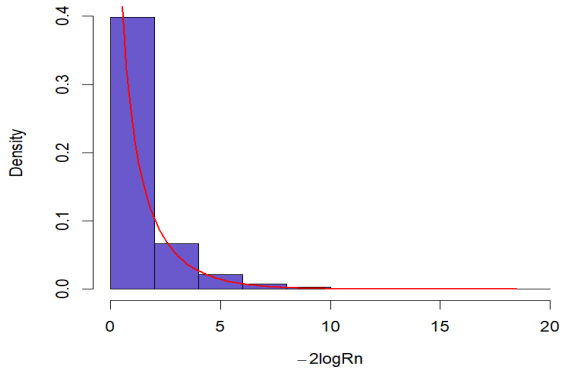
本节通过模拟多层网络研究所提出的 EL 检验的性能。

三层网络 $L=3$				
情景 1				
τ	(0.3, 0.2,0.4)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.3, 0.2,0.4)
β	(1, 1, 1)	(1, 2, 2)	(1,3,3)	(1, 4, 4)
情景 2				
τ	(0.3, 0.2,0.4)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.3, 0.2,0.4)
β	(1, 1, 1)	(1, 2, 3)	(1, 2, 4)	(1,3,4)
情景3				
τ	(0.4, 0.3,0.2)	(0.4, 0.3,0.2)	(0.4, 0.3,0.2)	(0.4, 0.3,0.2)
β	(1, 1, 1)	(1, 2, 3)	(1, 2, 4)	(1,3,4)
情景 4				
τ	(0。2, 0。3, 0。4)	(0.2, 0.3,0.4)	(0.2, 0.3,0.4)	(0.2, 0.3,0.4)
β	(1, 1, 1)	(1, 2, 3)	(1, 2, 4)	(1,3,4)

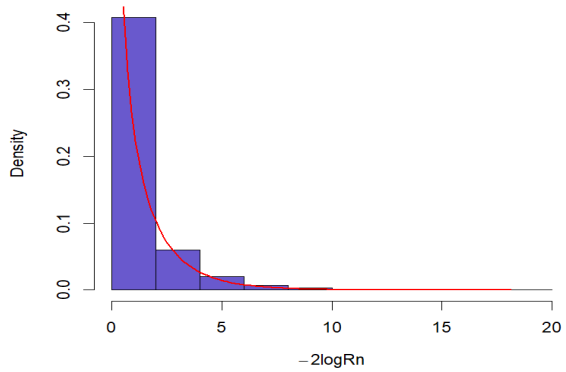
TABLE 2三层多层网络的四种情景示例 *3.2*



$\mathcal{G}_n(\tau=(0.3,\ 0.2,\ 0.4)\ \lambda=(0.8,\ 0.8,\ 0.8))$

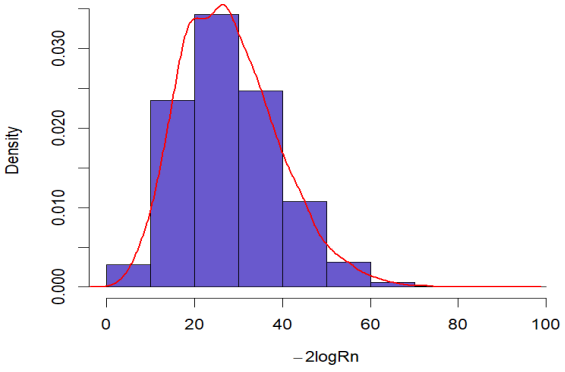


$\mathcal{G}_n(\tau=(0.4,\ 0.3,\ 0.2)\ \lambda=(0.8,\ 0.8,\ 0.8))$

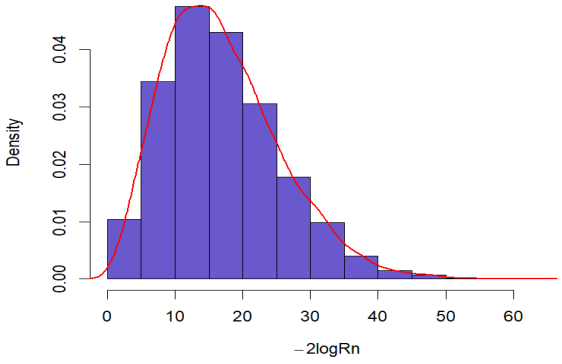


$\mathcal{G}_n(\tau=(0.2,\ 0.3,\ 0.4)\ \lambda=(0.8,\ 0.8,\ 0.8))$

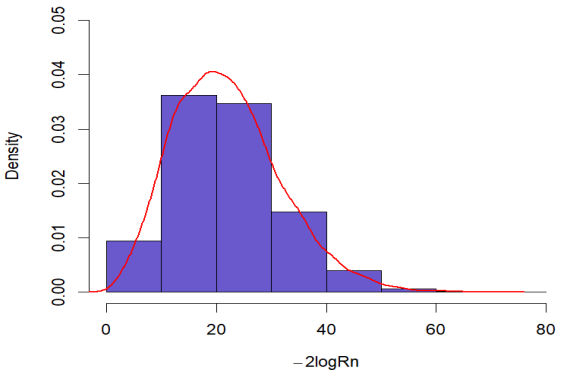
图 5：原假设下的蒙特卡洛近似



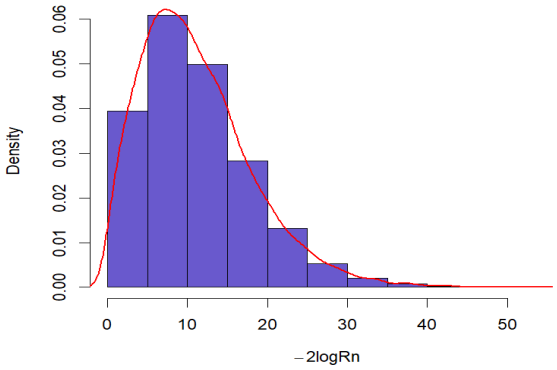
$\mathcal{G}_n(\boldsymbol{\tau}=(0.3,0.2,0.4)\ \boldsymbol{\lambda}=(0.8,0.5,0.5))$



$\mathcal{G}_n(\boldsymbol{\tau}=(0.3,\ 0.2,\ 0.4)\ \boldsymbol{\lambda}=(0.8,\ 0.6,\ 0.5))$

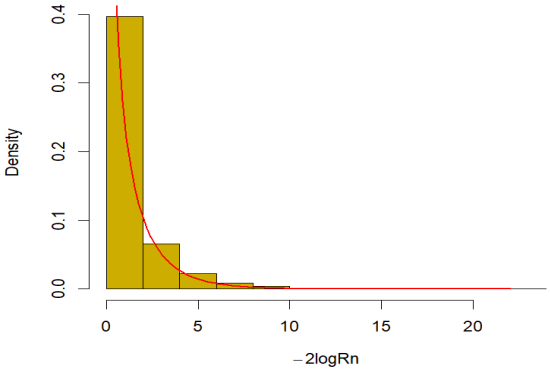


$\mathcal{G}_n(\boldsymbol{\tau}=(0.4,0.3,0.2)\ \boldsymbol{\lambda}=(0.8,0.6,0.5))$

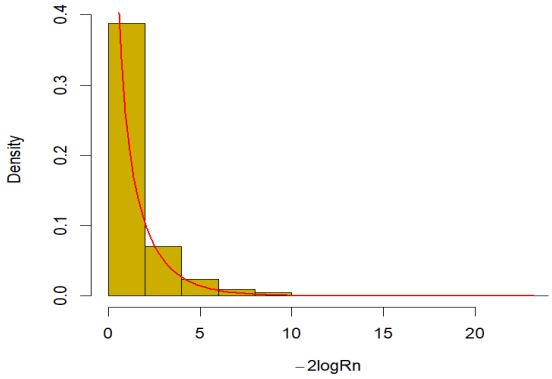


$\mathcal{G}_n(\boldsymbol{\tau}=(0.2,0.3,0.4)\ \boldsymbol{\lambda}=(0.8,0.6,0.5))$

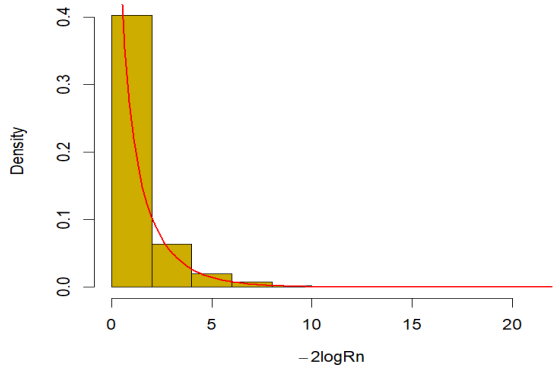
图6：备择假设下的蒙特卡洛近似



$\mathcal{G}_n(\tau = (0。3,\ 0。2,\ 0。4)\ \lambda = (1,\ 1,\ 1))$

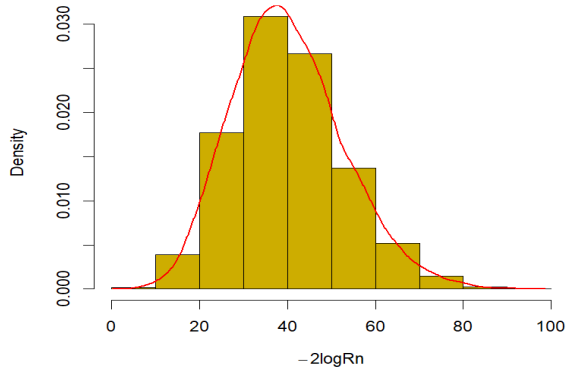


$\mathcal{G}_n(\tau = (0.4, 0.3, 0.2)\ \lambda = (1,1,1))$

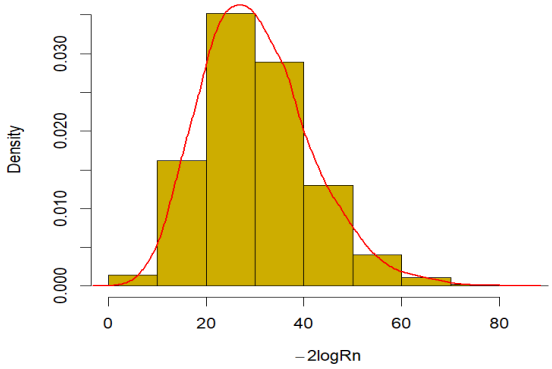


$\mathcal{G}_n(\tau = (0.2, 0.3, 0.4)\ \lambda = (1,1,1))$

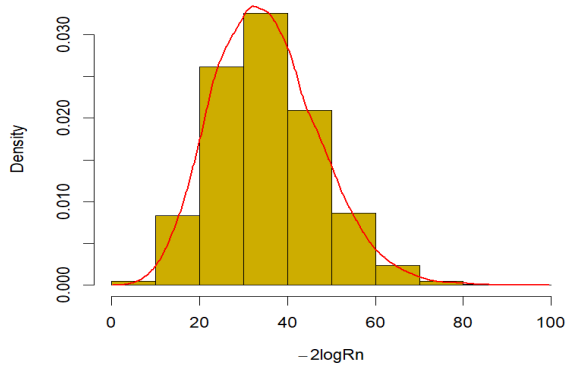
图 7：原假设下的蒙特卡洛近似



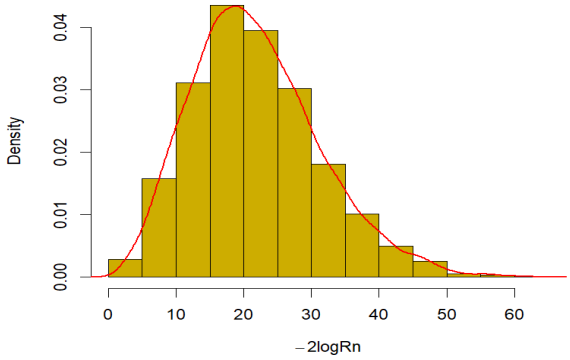
$\mathcal{G}_n(\tau = (0.3, 0.2, 0.4)\ \lambda = (1,4,4))$



$\mathcal{G}_n(\tau = (0.3, 0.2, 0.4)\ \lambda = (1,3,4))$



$\mathcal{G}_n(\tau = (0.4, 0.3, 0.2)\ \lambda = (1,3,4))$



$\mathcal{G}_n(\tau = (0.2, 0.3, 0.4)\ \lambda = (1,3,4))$

图 8：备择假设下的蒙特卡洛近似

5.1. 模拟

为评估 EL 检验的经验表现，我们在原假设和备择假设下分别进行了 1,000 次重复模拟。在原假设 H_0：$W_1 = \cdots = W_L$ 下，H_0 被拒绝的重复模拟比例可作为模拟第一类错误率的估计，代表错误拒绝原假设的概率。相反，在备择假设 $H_1 : W_{l_1} \neq W_{l_2}$ 对某个 $l_1 \neq l_2$ 成立时，拒绝比例可作为模拟检验功效的估计，反映正确检测出各层之间存在差异的概率。在这项模拟研究中，我们将名义（渐近）第一类错误率设为 0.05。我们模拟层数为 $L \in \{2, 3, 4\}$、网络规模为 $n \in \{200, 250, 300, 350, 400\}$ 的多层网络。对于每一层 l，参数 ρ_l 定义为 $\rho_l = n^{\tau_l}$，其中 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1、\ldots\ldots、\tau_L)$ 且 $\tau_l \in \{0.3, 0.2, 0.4, 0.1\}$，以确保每个$\tau_l < 0.5$。

在第一次模拟中，我们考虑例3.1中指定的模拟设置。取$r \in \{1.5, 2, 2.5, 3\}$。令 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_L)$ 和 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_L)$ 为 $\lambda_l \in \{0.8, 0.7, 0.6, 0.5\}$。在 H_0 下，$\lambda_1 = \cdots = \lambda_L = 0.8$。也就是说，所有的 λ_l 都相等，因此 W_l 也相同。在 H_1下，我们考虑两种情况。第一种情况对应于 $\lambda_1 = 0.8$ 和 $\lambda_2 = \cdots = \lambda_L \in \{0.7, 0.6, 0.5\}$。第二种情况下，$\lambda_1 = 0.8$、$\lambda_2$、$\ldots$、$\lambda_L \in \{0.7, 0.6, 0.5\}$ 和 λ_2、$\ldots$、λ_L 并不相等。两层网络的模拟结果见表 3，三层网络的模拟结果见表 4 和表 5，四层网络的模拟结果见表 6 和表 7。这些表中由 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 表示的每个多层网络，相应的假设也一并列出。每个假设对应的 $Difference$ 也予以报告。
$Difference$计算如下

$$Difference = \sum_l |\lambda_1 - \lambda_l|, \quad \text{where } \lambda_l \in \boldsymbol{\lambda}. \tag{6}$$

模拟得到的第一类错误列于表3–7 中，在 $W_1 = \cdots = W_L$。大多数结果接近 0.05，表明定理3.2 对于较小的网络规模也表现良好 n。随着 n 增大，第一类错误的表现变得更好。对于固定的 r、L 和 λ，随着网络规模 n 增大，检验功效提高。对于固定的 r、L 和 n，随着 $Difference$ 增大，检验功效提高。此外，最大检验功效几乎为 1。这些结果表明 EL 检验的检验功效具有一致性。表3至7中以粗体显示的功效值表明，在相同设置下，EL 检验达到的检验功效高于或等于我们早期工作中的 WDDT 检验 [48] 。

在第二次模拟中，网络根据示例中指定的模型生成3.2。令 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$满足 $\beta_l \in \{1, 2, 3, 4\}$。在 H_0，$\beta_1 = \cdots = \beta_L = 1$。在此

情景下， $W_1 = \cdots = W_L$。在 H_1下，有两种情景。在第一种情景中， $\beta_1 = 1$和 $\beta_2 = \cdots = \beta_L \in \{2, 3, 4\}$。在第二种情景中， $\beta_1 = 1$， β_2，.. ., $\beta_L \in \{2, 3, 4\}$ 和β_2，. . ., β_L 彼此不相等。表 8 展示了双层网络的结果，表 9 展示了三层网络的结果，表 10 展示了四层网络的结果。对于表中由 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 表示的每个多层网络，相应的假设列于网络下方。表中还报告了与每个假设相关的 $Difference$。 $Difference$ 按如下方式计算

$$Difference = \sum_{l} |\beta_1 - \beta_l|, \quad \text{where } \beta_l \in \boldsymbol{\beta}. \tag{7}$$

表8–10 的第二列显示，当$n \geq 300$时，大多数第一类错误接近 0.05。该结果表明，定理3.2适用于较小的网络规模 n，且当 n 变大时，性能更好。对于固定的 L， $\boldsymbol{\beta}$，检验功效随着网络规模 n 的增大而提高。对于固定的 L， n，检验功效随着 $Difference$ 的增大而提高。此外，最大检验功效为 1。这些发现表明，EL 检验的检验功效是一致的。表8–10 中的粗体功效值表明，在相同设置下，EL 检验达到的检验功效高于或等于 WDDT 检验。就检验功效而言，EL 检验相较于我们早期工作中的 WDDT 检验具有明显优势 [48] 。

5.2. 影响 *EL* 检验性能的因素

表1 中的每个情景（例如3.1 ）以及表2 中的每个情景（例如3.2 ）均由四个多层网络组成。为评估多层网络的配置如何影响检验性能，我们在每个情景中对每个多层网络内层的顺序进行循环置换，依次将每个网络作为第一层，然后评估所得的检验结果。从原始顺序（A_1、 A_2、 A_3）开始，我们考虑以下循环置换：（A_2、 A_3、 A_1）和（A_3、 A_1、 A_2）。我们将一个置换集定义为

$$\{(A_1, A_2, A_3),\ (A_2, A_3, A_1),\ (A_3, A_1, A_2)\}. \tag{8}$$

首先，对表 1 中每种情景下每个多层网络的排列进行检验，例如3.1 。对于每种情景，EL 检验的相应结果分别列于表 13–16中。这些表格的第二列列出了每种情景中的四个多层网络，第三列和第四列包含循环排列。每种排列中的最高功效值以**粗体**显示。我们观察到，第一层中 $Difference$、 τ_1和 λ_1取值较大的多层网络往往能产生更高的模拟功效。当

EL 检验：双层网络 $L = 2$				
$\boldsymbol{r = 1.5}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8)	(0.8, 0.7)	(0.8, 0.6)	(0.8, 0.5)
假设	$W_1 = W_2$	$W_1 \neq W_2$	$W_1 \neq W_2$	$W_1 \neq W_2$
$Difference$	0	0.1	0.2	0.3
$n = 250$	0.050	0.070	0.299	0.807
$n = 300$	0.053	0.082	0.377	0.896
$n = 350$	0.048	0.082	0.498	**0.970**
$n = 400$	0.054	0.093	**0.590**	**0.985**
$\boldsymbol{r = 2}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8)	(0.8, 0.7)	(0.8, 0.6)	(0.8, 0.5)
假设	$W_1 = W_2$	$W_1 \neq W_2$	$W_1 \neq W_2$	$W_1 \neq W_2$
$Difference$	0	0.1	0.2	0.3
$n = 250$	0.059	0.062	0.293	**0.830**
$n = 300$	0.055	0.077	0.379	**0.916**
$n = 350$	0.053	0.080	0.475	**0.964**
$n = 400$	0.055	0.085	0.563	**0.988**
$\boldsymbol{r = 2.5}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8)	(0.8, 0.7)	(0.8, 0.6)	(0.8, 0.5)
假设	$W_1 = W_2$	$W_1 \neq W_2$	$W_1 \neq W_2$	$W_1 \neq W_2$
$Difference$	0	0.1	0.2	0.3
$n = 250$	0.054	0.063	0.300	**0.827**
$n = 300$	0.057	0.074	0.375	**0.905**
$n = 350$	0.055	0.077	0.460	0.960
$n = 400$	0.049	0.084	0.550	0.985
$\boldsymbol{r = 3}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8)	(0.8, 0.7)	(0.8, 0.6)	(0.8, 0.5)
假设	$W_1 = W_2$	$W_1 \neq W_2$	$W_1 \neq W_2$	$W_1 \neq W_2$
$Difference$	0	0.1	0.2	0.3
$n = 250$	0.060	0.061	0.267	**0.836**
$n = 300$	0.050	0.076	0.351	0.910
$n = 350$	0.055	0.079	0.441	0.957
$n = 400$	0.049	0.078	0.543	0.987

TABLE 3两层多层网络的 *EL* 检验示例*3.1*：一个.....中的差异 H_1

EL 检验：三层网络 $L=3$				
$\boldsymbol{r=1.5}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.7)	(0.8, 0.6, 0.6)	(0.8, 0.5, 0.5)
假设	$W_1=W_2=W_3$	$W_1\neq W_2=W_3$	$W_1\neq W_2=W_3$	$W_1\neq W_2=W_3$
$Difference$	0	0.2	0.4	0.6
$n=250$	0.056	0.082	0.564	0.982
$n=300$	0.060	0.110	0.702	**0.998**
$n=350$	0.057	0.110	**0.824**	**1.000**
$n=400$	0.055	0.142	**0.890**	**1.000**
$\boldsymbol{r=2}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.7)	(0.8, 0.6, 0.6)	(0.8, 0.5, 0.5)
假设	$W_1=W_2=W_3$	$W_1\neq W_2=W_3$	$W_1\neq W_2=W_3$	$W_1\neq W_2=W_3$
$Difference$	0	0.2	0.4	0.6
$n=250$	0.056	0.082	**0.597**	**0.993**
$n=300$	0.044	0.093	0.715	**1.000**
$n=350$	0.051	0.114	**0.845**	**1.000**
$n=400$	0.060	0.141	0.900	**1.000**
$\boldsymbol{r=2.5}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.7)	(0.8, 0.6, 0.6)	(0.8, 0.5, 0.5)
假设	$W_1=W_2=W_3$	$W_1\neq W_2=W_3$	$W_1\neq W_2=W_3$	$W_1\neq W_2=W_3$
$Difference$	0	0.2	0.4	0.6
$n=250$	0.060	0.070	**0.589**	**0.998**
$n=300$	0.067	0.085	**0.727**	**1.000**
$n=350$	0.054	0.103	**0.830**	**1.000**
$n=400$	0.054	0.111	0.911	**1.000**
$\boldsymbol{r=3}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.7)	(0.8, 0.6, 0.6)	(0.8, 0.5, 0.5)
假设	$W_1=W_2=W_3$	$W_1\neq W_2=W_3$	$W_1\neq W_2=W_3$	$W_1\neq W_2=W_3$
$Difference$	0	0.2	0.4	0.6
$n=250$	0.065	0.071	0.571	**0.999**
$n=300$	0.062	0.078	**0.711**	**1.000**
$n=350$	0.057	0.100	0.823	**1.000**
$n=400$	0.068	0.123	0.901	**1.000**

TABLE 4三层多层网络的 *EL* 检验示例 *3.1*：一个层中的差异 H_1

EL 检验：三层网络 $L=3$				
$\boldsymbol{r=1.5}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.6)	(0.8, 0.7, 0.5)	(0.8, 0.6, 0.5)
假设	$W_1=W_2=W_3$	$W_1\neq W_2\neq W_3$	$W_1\neq W_2\neq W_3$	$W_1\neq W_2\neq W_3$
$Difference$	0	0.3	0.4	0.5
$n=250$	0.056	0.274	**0.650**	0.876
$n=300$	0.060	0.342	**0.807**	**0.957**
$n=350$	0.057	0.455	**0.897**	**0.989**
$n=400$	0.055	0.551	**0.951**	**1.000**
$\boldsymbol{r=2}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.6)	(0.8, 0.7, 0.5)	(0.8, 0.6, 0.5)
假设	$W_1=W_2=W_3$	$W_1\neq W_2\neq W_3$	$W_1\neq W_2\neq W_3$	$W_1\neq W_2\neq W_3$
$Difference$	0	0.3	0.4	0.5
$n=250$	0.056	0.259	**0.751**	**0.934**
$n=300$	0.044	0.347	**0.862**	0.970
$n=350$	0.051	0.459	0.943	0.993
$n=400$	0.060	0.572	**0.982**	**1.000**
$\boldsymbol{r=2.5}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.6)	(0.8, 0.7, 0.5)	(0.8, 0.6, 0.5)
假设	$W_1=W_2=W_3$	$W_1\neq W_2\neq W_3$	$W_1\neq W_2\neq W_3$	$W_1\neq W_2\neq W_3$
$Difference$	0	0.3	0.4	0.5
$n=250$	0.060	0.272	**0.782**	**0.930**
$n=300$	0.067	0.357	0.904	**0.984**
$n=350$	0.054	0.462	**0.958**	**0.997**
$n=400$	0.054	0.576	**0.988**	**1.000**
$\boldsymbol{r=3}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.6)	(0.8, 0.7, 0.5)	(0.8, 0.6, 0.5)
假设	$W_1=W_2=W_3$	$W_1\neq W_2\neq W_3$	$W_1\neq W_2\neq W_3$	$W_1\neq W_2\neq W_3$
$Difference$	0	0.3	0.4	0.5
$n=250$	0.065	0.257	**0.802**	**0.937**
$n=300$	0.062	0.348	**0.912**	**0.986**
$n=350$	0.057	0.466	**0.970**	**0.997**
$n=400$	0.068	0.561	**0.991**	**1.000**

TABLE 5基于实例的三层多层网络 *EL* 检验*3.1*：多个差异存在于 H_1

EL 检验：四层网络 $L = 4$				
$\boldsymbol{r = 1.5}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.7, 0.7)	(0.8, 0.6, 0.6, 0.6)	(0.8, 0.5, 0.5, 0.5)
假设	$W_1 = W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$
$Difference$	0	0.3	0.6	0.9
$n = 300$	0.058	0.089	0.609	**0.995**
$n = 350$	0.053	0.105	0.739	**1.000**
$n = 400$	0.056	0.117	0.814	**1.000**
$\boldsymbol{r = 2}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.7, 0.7)	(0.8, 0.6, 0.6, 0.6)	(0.8, 0.5, 0.5, 0.5)
假设	$W_1 = W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$
$Difference$	0	0.3	0.6	0.9
$n = 300$	0.056	0.103	**0.630**	**0.998**
$n = 350$	0.058	0.104	**0.750**	**1.000**
$n = 400$	0.054	0.119	0.835	**1.000**
$\boldsymbol{r = 2.5}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.7, 0.7)	(0.8, 0.6, 0.6, 0.6)	(0.8, 0.5, 0.5, 0.5)
假设	$W_1 = W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$
$Difference$	0	0.3	0.6	0.9
$n = 300$	0.065	0.079	0.638	**0.997**
$n = 350$	0.065	0.087	0.734	**1.000**
$n = 400$	0.057	0.097	0.817	**1.000**
$\boldsymbol{r = 3}$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.7, 0.7)	(0.8, 0.6, 0.6, 0.6)	(0.8, 0.5, 0.5, 0.5)
假设	$W_1 = W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$
$Difference$	0	0.3	0.6	0.9
$n = 300$	0.064	0.075	**0.618**	**0.998**
$n = 350$	0.061	0.088	**0.738**	**1.000**
$n = 400$	0.057	0.089	**0.813**	**1.000**

TABLE 6四层多层网络的 *EL* 检验示例*3.1*：一个方面的差异 H_1

EL 检验：四层网络 $L = 4$				
		$\boldsymbol{r = 1.5}$		
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.6, 0.6)	(0.8, 0.7, 0.6, 0.5)	(0.8, 0.7, 0.5, 0.5)
假设	$W_1 = W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 \neq W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 = W_4$
$Difference$	0	0.5	0.6	0.7
$n = 300$	0.058	0.411	0.696	0.880
$n = 350$	0.053	0.476	0.805	**0.950**
$n = 400$	0.056	0.587	0.869	0.981
		$\boldsymbol{r = 2}$		
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.6, 0.6)	(0.8, 0.7, 0.6, 0.5)	(0.8, 0.7, 0.5, 0.5)
假设	$W_1 = W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 \neq W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 = W_4$
$Difference$	0	0.5	0.6	0.7
$n = 300$	0.056	0.414	0.710	**0.929**
$n = 350$	0.058	0.522	0.820	**0.973**
$n = 400$	0.054	0.609	**0.899**	0.986
		$\boldsymbol{r = 2.5}$		
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.6, 0.6)	(0.8, 0.7, 0.6, 0.5)	(0.8, 0.7, 0.5, 0.5)
假设	$W_1 = W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 \neq W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 = W_4$
$Difference$	0	0.5	0.6	0.7
$n = 300$	0.065	0.398	**0.725**	**0.928**
$n = 350$	0.065	0.508	**0.857**	**0.978**
$n = 400$	0.057	0.586	0.902	0.988
		$\boldsymbol{r = 3}$		
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.7, 0.6, 0.6)	(0.8, 0.7, 0.6, 0.5)	(0.8, 0.7, 0.5, 0.5)
假设	$W_1 = W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 \neq W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 = W_4$
$Difference$	0	0.5	0.6	0.7
$n = 300$	0.064	0.396	**0.725**	**0.936**
$n = 350$	0.061	0.496	0.809	0.970
$n = 400$	0.057	0.569	**0.898**	0.993

TABLE 7四层多层网络的 *EL* 检验示例*3.1*：多个差异 H_1

EL 检验：双层网络 $L = 2$				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
假设	$W_1 = W_2$	$W_1 \neq W_2$	$W_1 \neq W_2$	$W_1 \neq W_2$
$Difference$	0	1	2	3
$n = 300$	0.059	0.173	**0.778**	**0.984**
$n = 350$	0.057	0.213	**0.855**	**0.996**
$n = 400$	0.058	0.258	**0.909**	**1.000**

TABLE 8通过示例对两层多层网络进行 *EL* 检验 *3.2*

EL 检验：三层网络 $L=3$				
一个差异在 H_1				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 1, 1)	(1, 2, 2)	(1, 3, 3)	(1, 4, 4)
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_1 \neq W_2 = W_3$
$Difference$	0	2	4	6
$n = 300$	0.063	0.347	**0.989**	**1.000**
$n = 350$	0.058	0.438	**1.000**	**1.000**
$n = 400$	0.059	0.528	**1.000**	**1.000**
H_1 中存在多个差异				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)	(0.3, 0.2, 0.4)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 1, 1)	(1, 2, 3)	(1, 2, 4)	(1, 3, 4)
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$
$Difference$	0	3	4	5
$n = 300$	0.063	0.856	**0.996**	**1.000**
$n = 350$	0.058	0.930	**1.000**	**1.000**
$n = 400$	0.059	0.982	**1.000**	**1.000**

TABLE 9三层多层网络的 *EL* 检验示例 *3.2*

EL 检验：四层网络 $L=4$				
H_1 中的一处差异				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 1, 1, 1)	(1, 2, 2, 2)	(1, 3, 3, 3)	(1, 4, 4, 4)
假设	$W_1 = W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 = W_3 = W_4$
$Difference$	0	3	6	9
$n = 300$	0.070	0.297	**0.954**	**1.000**
$n = 350$	0.065	0.370	**0.990**	**1.000**
$n = 400$	0.058	0.458	**0.998**	**1.000**
多个差异，位于 H_1中				
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)	(0.3, 0.2, 0.4, 0.1)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 1, 1, 1)	(1, 2, 3, 3)	(1, 2, 3, 4)	(1, 2, 4, 4)
假设	$W_1 = W_2 = W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 = W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 \neq W_4$	$W_1 \neq W_2 \neq W_3 = W_4$
$Difference$	0	5	6	7
$n = 300$	0.070	0.830	**0.949**	**0.988**
$n = 350$	0.065	0.912	0.982	**0.998**
$n = 400$	0.058	0.958	**0.997**	**1.000**

TABLE 10四层多层网络的 *EL* 检验示例*3.2*

多层网络共享相同的 $Difference$ 值时，第一层中较大的 τ_1 似乎比更大的 λ_1 对提高检验功效更为关键。此外，即使$Difference$ 值较小，第一层中出现最大的 τ_1 值仍会带来观测到的最高检验功效。这些发现表明，在决定检验功效时，第一层中的 τ_1 值比 $Difference$值和 λ_1值发挥着更大的影响。观察表 14 可知，在 $Difference$相同的情况下，配置（$\tau_1 = 0.4, \lambda_1 = 0.6$）的检验功效高于（$\tau_1 = 0.3, \lambda_1 = 0.8$）。在表 16 中，尽管（$\tau_1 = 0.4, \lambda_1 = 0.5$）对应的 $Difference$较小，（$\tau_1 = 0.4, \lambda_1 = 0.5$）的检验功效仍高于（$\tau_1 = 0.2, \lambda_1 = 0.8$）。由此可推断，第一层中较大的 τ_1 对确保多层网络具有较高检验功效有着显著影响。

因此，我们在表 τ 和 λ 参数所表征的六个网络，这些网络可作为多层网络的第一层，列于表11中。这些网络按照其潜在的模拟功效进行排列。第一层为（$\tau_1 = 0.4$，$\lambda_1 = 0.8$）的多层网络具有最高的检验功效，其次是（$\tau_1 = 0.4$，$\lambda_1 = 0.6$）和（$\tau_1 = 0.4$，$\lambda_1 = 0.5$）。由于观察到较大的 τ_1 比其他因素更为重要，因此（$\tau_1 = 0.4$，$\lambda_1 = 0.5$）次于（$\tau_1 = 0.3$，$\lambda_1 = 0.8$）和（$\tau_1 = 0.2$，$\lambda_1 = 0.8$）。第一层为（$\tau_1 = 0.1$，$\lambda_1 = 0.5$）的多层网络具有最低的检验功效。

通过考察这些网络的性质，我们可以识别出哪些类型的多层网络在 EL 检验下往往具有较高的模拟功效。此外，了解这些特征有助于预测 EL 检验应用于具有相似结构特征的真实数据时，是否会表现出较强的检验功效。为支持这一分析，我们首先对网络结构进行可视化，然后计算关键网络指标，包括密度、总度数、平均度数、度分布、聚类系数、连通分量数量和路径长度。示例 3.1中的网络结果见表 11。度分布的可视化结果见图 9。我们观察到，较大的 τ 和 λ 值会生成中等密度的网络，而第一层密度较高的多层网络往往具有较高的模拟功效。度分布大致呈钟形，随着网络稀疏性增加，右偏度也随之增大。

对于示例 3.2，对表 2中每种情景下各多层网络的排列进行检验。各情景对应的结果分别列于表 17–20 。每种排列中的最高功效值以**粗体**显示。我们观察到以下现象：在情景 1 中，所有排列里具有最高 $Difference$值的多层网络往往会得到最高的检验功效。在情景 2 中，当多层网络具有

六个网络 $r=2$ $,n=200$						
τ	0.4	0.4	0.4	0.3	0.2	0.1
λ	0.8	0.6	0.5	0.8	0.8	0.5
密度	0.0417	0.0416	0.0388	0.0244	0.0148	0.0075
总度数	1660	1654	1546	972	588	298
平均度数	8.30	8.27	7.73	4.86	2.94	1.49
平均聚类系数	0.0369	0.0464	0.0413	0.0275	0.0146	0.0000
连通分量	1	1	1	3	8	62
路径长度（直径）	4	5	5	7	11	18

TABLE 11模拟网络的示例特征*3.1*

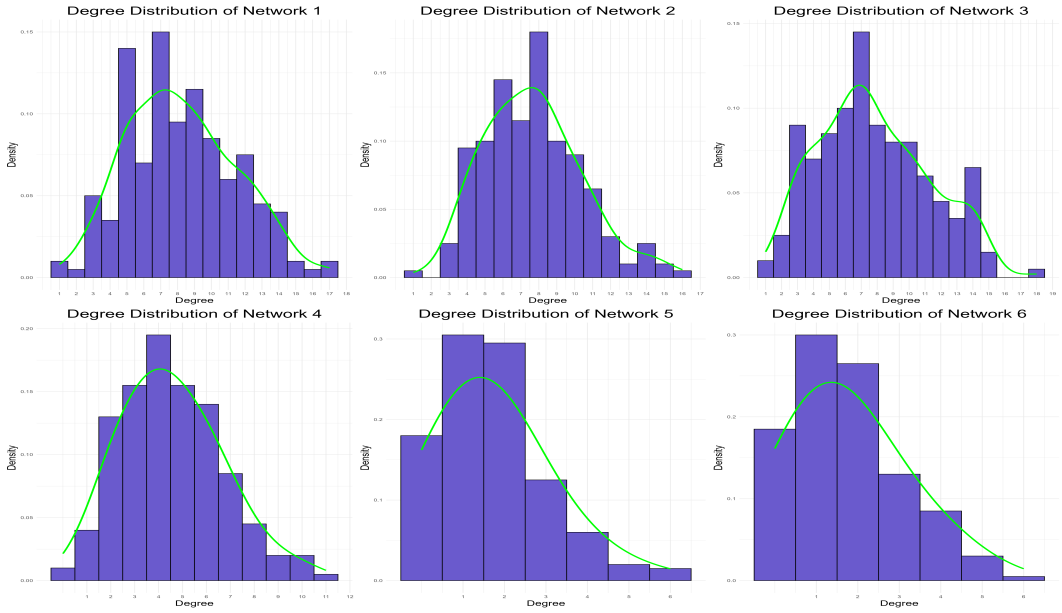


图 9：网络的度分布~ $\mathcal{G}_n(\boldsymbol{\tau}=(0.4,0.4,0.4,0.3,0.2,0.1)\ \boldsymbol{\lambda}=(0.8,0.6,0.5,0.8,0.8,0.5))$

在相同的 $Difference$值下，配置($\tau_1 = 0.3, \beta_1 = 1$)的检验功效高于配置($\tau_1 = 0.4$, $\beta_1 = 3$)。然而，例3.1中配置为($\tau_1 = 0.3, \beta_1 = 0.8$)的网络，其检验功效低于配置为($\tau_1 = 0.4, \beta_1 = 0.6$)的网络，这表明在例3.1中， τ值对检验功效的影响比在例3.2中更为关键。在情景3中，即使多层网络的 $Difference$ 值相对较小，配置为($\tau_1 = 0.4, \beta_1 = 1$)的多层网络仍取得最高检验功效。在情景 4中，当 $Difference$ 值相等时，配置($\tau_1 = 0.4$, $\beta_1 = 3$)的检验功效高于配置($\tau_1 = 0.2, \beta_1 = 1$)。与例3.1相比，配置($\tau_1 = 0.4, \lambda_1 = 0.5$)能够保持较高的检验功效，而例3.2中的配置($\tau_1 = 0.4, \beta_1 = 4$)则不能。这表明，在例3.1中，第一层中较大的 τ 值对于获得较高检验功效比在例3.2中更为重要。总而言之，我们发现，第一层中 τ 值较大、 β 值较小，并且 $Difference$较大的多层网络，往往能取得较高的模拟功效。在这些因素中，较大的 $Difference$ 似乎比第一层中较大的 τ 对于获得较高检验功效更为关键。我们观察到，在表18中，第一层参数为($\tau_1 = 0.4, \beta_1 = 3$)的多层网络，其检验功效低于配置($\tau_1 = 0.3, \beta_1 = 1$)，但高于表20中的配置($\tau_1 = 0.2, \beta_1 = 1$)。这一比较进一步凸显了 τ与 β参数之间交互作用的重要性。

因此，我们在表中列出了六个网络，它们基于其 τ 和 β 参数，可作为多层网络的第一层。12。第一层为（$\tau_1 = 0.4$， $\beta_1 = 1$）的多层网络检验功效最高，其次是（$\tau_1 = 0.3$, $\beta_1 = 1$）、（τ_1 =0。4， $\beta_1 = 3$）、（$\tau_1 = 0.2$， $\beta_1 = 1$）。第一层为（$\tau_1 = 0.1$, $\beta_1 = 4$）的多层网络检验功效最低。

示例3.2 中的关键网络指标结果，包括密度、总度数、平均度数、度分布、聚类系数、连通分量数量和路径长度，见表12。度分布见图10。以较大 τ 值生成的网络往往具有中等密度。模拟结果表明，第一层密度较高的多层网络始终具有更高的检验功效。度分布呈右偏态，左尾仅占很小一部分；随着网络变得更加稀疏，度分布的右偏程度也越来越明显。

5.3. 秩*-2* 多层网络下 *EL* 检验的稳健性

为了评估所提出的 WDDT 检验的稳健性，我们针对秩为 2 的多层网络进行了模拟。秩-2矩阵至多有两个线性无关的

六个网络 $n = 200$						
τ	0.4	0.3	0.4	0.2	0.1	0.1
β	1	1	3	1	1	4
密度	0.0311	0.0196	0.0170	0.0103	0.0058	0.0031
总度数	1236	780	678	408	232	122
平均度数	6.18	3.9	3.39	2.04	1.16	0.61
平均聚类系数	0.0501	0.0336	0.0816	0.0238	0.0324	0.0300
连通分量	18	23	73	45	92	143
路径长度（直径）	6	8	7	12	19	12

TABLE 12模拟网络的特征示例*3.2*

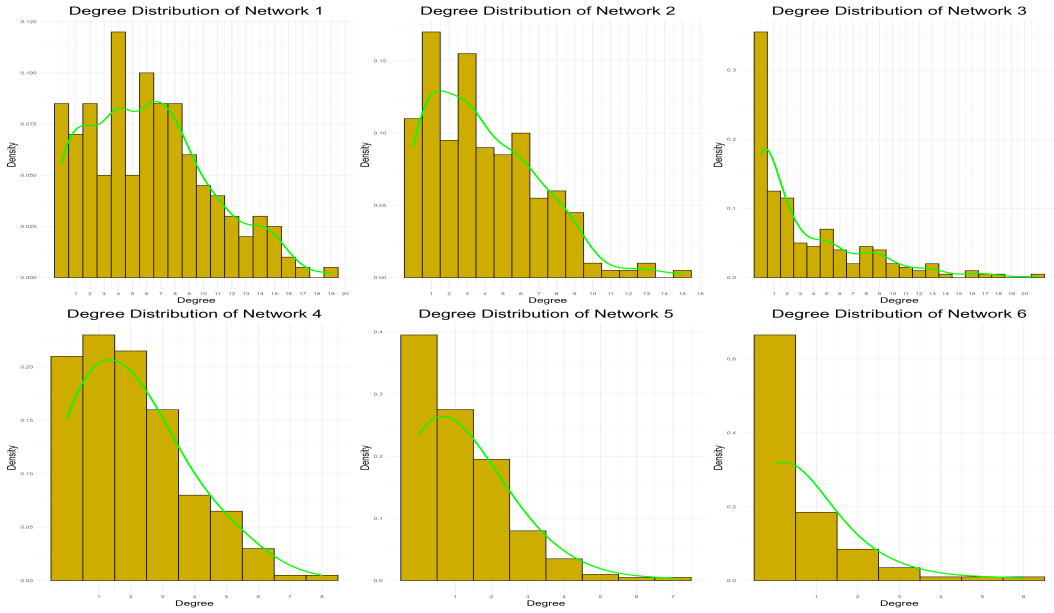


图10：网络的度分布$\sim \mathcal{G}_n(\tau = (0.4, 0.3, 0.4, 0.2, 0.1, 0.1)\ \beta = (1, 1, 3, 1, 1, 4))$

EL 检验：三层网络 $L=3, r=2$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8,0.8)	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.8, 0.8)
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 200$	0.060	0.055	0.065
$n = 250$	0.056	0.059	0.064
$n = 300$	0.044	0.058	0.057
$n = 350$	0.051	0.059	0.060
$n = 400$	0.060	0.057	0.054
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.7)	(0.7, 0.7,0.8)	(0.7, 0.8,0.7)
假设	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.2	0.1	0.1
$n = 200$	**0.077**	0.061	0.069
$n = 250$	**0.082**	0.070	0.062
$n = 300$	**0.093**	0.066	0.066
$n = 350$	**0.114**	0.060	0.062
$n = 400$	**0.141**	0.060	0.065
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.6,0.6)	(0.6, 0.6,0.8)	(0.6, 0.8,0.6)
假设	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.4	0.2	0.2
$n = 200$	**0.430**	0.094	0.155
$n = 250$	**0.597**	0.130	0.217
$n = 300$	**0.715**	0.161	0.306
$n = 350$	**0.845**	0.198	0.409
$n = 400$	**0.900**	0.248	0.492
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.5,0.5)	(0.5, 0.5,0.8)	(0.5, 0.8,0.5)
假设	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.6	0.3	0.3
$n = 200$	**0.956**	0.315	0.599
$n = 250$	**0.993**	0.461	0.762
$n = 300$	**1.000**	0.577	0.892
$n = 350$	**1.000**	0.697	0.963
$n = 400$	**1.000**	0.785	0.985

TABLE 13三层多层网络的 *EL* 检验示例*3.1*：情景 *1*

EL 检验：三层网络 $L=3,\ \ r=2$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.8, 0.8)
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 200$	0.060	0.055	0.065
$n = 250$	0.056	0.059	0.064
$n = 300$	0.044	0.058	0.066
$n = 350$	0.051	0.059	0.060
$n = 400$	0.060	0.057	0.061
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.6)	(0.7, 0.6,0.8)	(0.6, 0.8,0.7)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.3	0.2	0.3
$n = 200$	0.189	0.062	**0.211**
$n = 250$	0.259	0.076	**0.327**
$n = 300$	0.347	0.077	**0.440**
$n = 350$	0.459	0.079	**0.546**
$n = 400$	0.572	0.082	**0.665**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.5)	(0.7, 0.5,0.8)	(0.5, 0.8,0.7)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.4	0.3	0.5
$n = 200$	0.571	0.116	**0.854**
$n = 250$	0.751	0.160	**0.964**
$n = 300$	0.862	0.207	**0.991**
$n = 350$	0.943	0.250	**0.999**
$n = 400$	0.982	0.319	**1.000**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.6,0.5)	(0.6, 0.5,0.8)	(0.5, 0.8,0.6)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.5	0.3	0.4
$n = 200$	**0.790**	0.141	0.660
$n = 250$	**0.934**	0.176	0.836
$n = 300$	**0.970**	0.226	0.935
$n = 350$	**0.993**	0.306	0.975
$n = 400$	**1.000**	0.362	0.996

TABLE 14三层多层网络的 *EL* 检验示例*3.1*：情景 *2*

EL 检验：三层网络 $L=3,\ r=2$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.8, 0.8)
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 200$	0.065	0.060	0.055
$n = 250$	0.064	0.056	0.059
$n = 300$	0.057	0.044	0.058
$n = 350$	0.060	0.051	0.059
$n = 400$	0.054	0.060	0.057
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.6)	(0.7, 0.6,0.8)	(0。6, 0。8, 0。7)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.3	0.2	0.3
$n = 200$	**0.250**	0.062	0.139
$n = 250$	**0.346**	0.073	0.167
$n = 300$	**0.475**	0.080	0.232
$n = 350$	**0.587**	0.107	0.278
$n = 400$	**0.696**	0.112	0.364
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.5)	(0.7, 0.5,0.8)	(0.5, 0.8,0.7)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.4	0.3	0.5
$n = 200$	**0.666**	0.133	0.543
$n = 250$	**0.832**	0.209	0.711
$n = 300$	**0.936**	0.278	0.818
$n = 350$	**0.978**	0.357	0.899
$n = 400$	**0.993**	0.449	0.949
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.6,0.5)	(0.6, 0.5,0.8)	(0.5, 0.8,0.6)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.5	0.3	0.4
$n = 200$	**0.878**	0.165	0.362
$n = 250$	**0.977**	0.245	0.510
$n = 300$	**0.995**	0.354	0.655
$n = 350$	**1.000**	0.416	0.737
$n = 400$	**1.000**	0.547	0.841

TABLE 15三层多层网络的 *EL* 检验示例*3.1*：情景*3*

EL 检验：三层网络 $L=3,\ r=2$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0.4, 0.2,0.3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.8, 0.8)
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 200$	0.056	0.061	0.074
$n = 250$	0.051	0.056	0.066
$n = 300$	0.054	0.058	0.061
$n = 350$	0.058	0.046	0.065
$n = 400$	0.048	0.057	0.056
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0.4, 0.2,0.3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.6)	(0.7, 0.6,0.8)	(0。6, 0。8, 0。7)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.3	0.2	0.3
$n = 200$	0.138	0.058	**0.205**
$n = 250$	0.201	0.080	**0.311**
$n = 300$	0.257	0.098	**0.424**
$n = 350$	0.336	0.105	**0.544**
$n = 400$	0.387	0.112	**0.614**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0.4, 0.2,0.3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.5)	(0.7, 0.5,0.8)	(0.5, 0.8,0.7)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.4	0.3	0.5
$n = 200$	0.407	0.141	**0.837**
$n = 250$	0.559	0.208	**0.959**
$n = 300$	0.707	0.303	**0.991**
$n = 350$	0.791	0.369	**0.998**
$n = 400$	0.868	0.455	**1.000**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0.4, 0.2,0.3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.6,0.5)	(0.6, 0.5,0.8)	(0.5, 0.8,0.6)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.5	0.3	0.4
$n = 200$	0.617	0.161	**0.619**
$n = 250$	0.763	0.241	**0.805**
$n = 300$	0.863	0.317	**0.908**
$n = 350$	0.942	0.424	**0.960**
$n = 400$	0.975	0.511	**0.988**

TABLE 16三层多层网络的 *EL* 检验示例 *3.1*：情景 *4*

EL 检验：三层网络 $L=3$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	$(1, ^{1,\ 1)}$	$(1, ^{1,\ 1)}$	$(1, ^{1,\ 1)}$
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 300$	0.063	0.060	0.069
$n = 350$	0.058	0.059	0.068
$n = 400$	0.059	0.055	0.059
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 2, 2)	(2, 2,1)	(2, 1,2)
假设	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	2	1	1
$n = 300$	**0.347**	0.085	0.112
$n = 350$	**0.438**	0.091	0.144
$n = 400$	**0.528**	0.100	0.178
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 3,3)	(3, 3, 1)	(3, 1, 3)
假设	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	4	2	2
$n = 300$	**0.989**	0.316	0.620
$n = 350$	**1.000**	0.404	0.741
$n = 400$	**1.000**	0.500	0.838
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 4, 4)	(4, 4, 1)	(4, 1, 4)
假设	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	6	3	3
$n = 300$	**1.000**	0.658	0.940
$n = 350$	**1.000**	0.781	0.984
$n = 400$	**1.000**	0.858	0.998

TABLE 17三层多层网络的 *EL* 检验示例 *3.2*：情景 *1*

EL 检验：三层网络 $L=3, r=2$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	$(1, ^{1,\ 1)}$	$(1, ^{1,\ 1)}$	$(1, ^{1,\ 1)}$
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 300$	0.063	0.060	0.069
$n = 350$	0.058	0.059	0.068
$n = 400$	0.059	0.055	0.059
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 2, 3)	(2, 3,1)	(3, 1,2)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	3	2	3
$n = 300$	**0.856**	0.118	0.797
$n = 350$	**0.930**	0.148	0.905
$n = 400$	**0.982**	0.193	0.949
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 2, 4)	(2, 4, 1)	(4, 1, 2)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	4	3	5
$n = 300$	0.996	0.311	**1.000**
$n = 350$	1.000	0.397	**1.000**
$n = 400$	1.000	0.480	**1.000**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 3,4)	(3, 4, 1)	(4, 1, 3)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	5	3	4
$n = 300$	**1.000**	0.390	0.978
$n = 350$	**1.000**	0.503	0.994
$n = 400$	**1.000**	0.591	1.000

TABLE 18三层多层网络的 *EL* 检验示例*3.2*：情景 *2*

EL 检验：三层网络 $L=3,\ r=2$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\beta}$	$(1,^{1,\ 1)}$	$(1,^{1,\ 1)}$	$(1,^{1,\ 1)}$
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 300$	0.069	0.063	0.060
$n = 350$	0.068	0.058	0.059
$n = 400$	0.059	0.059	0.055
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 2, 3)	(2, 3, 1)	(3, 1, 2)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	3	2	3
$n = 300$	**0.916**	0.168	0.417
$n = 350$	**0.969**	0.194	0.529
$n = 400$	**0.992**	0.246	0.627
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\beta}$	(1、2、4)	(2, 4, 1)	(4, 1, 2)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	4	3	5
$n = 300$	**0.999**	0.382	0.878
$n = 350$	**1.000**	0.478	0.941
$n = 400$	**1.000**	0.580	0.972
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 3,4)	(3, 4, 1)	(4, 1, 3)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	5	3	4
$n = 300$	**1.000**	0.515	0.706
$n = 350$	**1.000**	0.633	0.805
$n = 400$	**1.000**	0.779	0.890

TABLE 19三层多层网络的 *EL* 检验示例 *3.2*：情景*3*

EL 检验：三层网络 $L=3$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0.4, 0.2,0.3)
$\boldsymbol{\beta}$	$(1,^{1,\ 1)}$	$(1,^{1,\ 1)}$	$(1,^{1,\ 1)}$
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 300$	0.061	0.069	0.070
$n = 350$	0.059	0.068	0.074
$n = 400$	0.055	0.063	0.060
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0.4, 0.2,0.3)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 2, 3)	(2, 3,1)	(3, 1,2)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	3	2	3
$n = 300$	0.682	0.174	**0.800**
$n = 350$	0.809	0.236	**0.903**
$n = 400$	0.895	0.297	**0.956**
$\boldsymbol{\tau}$	(0。2、0。3、0。4)	(0。3、0。4、0。2)	(0.4, 0.2,0.3)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 2, 4)	(2, 4, 1)	(4, 1, 2)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	4	3	5
$n = 300$	0.949	0.443	**1.000**
$n = 350$	0.984	0.582	**1.000**
$n = 400$	0.996	0.694	**1.000**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0.4, 0.2,0.3)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 3,4)	(3, 4, 1)	(4, 1, 3)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	5	3	4
$n = 300$	**0.997**	0.565	0.972
$n = 350$	**1.000**	0.711	0.997
$n = 400$	**1.000**	0.822	1.000

TABLE 20三层多层网络的 *EL* 检验示例 *3.2*：情景 ***4***

度列 [38, 4]。我们首先定义两个线性无关向量：度校正参数 W_l 在秩-*1*随机多层异质图模型中：

$$W_{l1} = [w_1, w_2, \ldots, w_{\frac{n}{2}}, 0, \ldots, 0]^\top,$$

and

$$W_{l2} = [0, 0, \ldots, 0, w_{\frac{n}{2}+1}, \ldots, w_n]^\top.$$

然后，使用以下线性代数方法生成秩-2 多层网络（见（9））

$$\mathbb{E}[A_l] = \begin{bmatrix} W_{l1}, W_{l2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\rho_l & b\rho_l \\ b\rho_l & a\rho_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{l1}^\top \\ W_{l2}^\top \end{bmatrix}. \tag{9}$$

展开后，得到

$$\mathbb{E}[A_l] = a\rho_l W_{l1} W_{l1}^\top + b\rho_l W_{l2} W_{l1}^\top + b\rho_l W_{l1} W_{l2}^\top + a\rho_l W_{l2} W_{l2}^\top,$$

由此可见，邻接矩阵 A 中的线性无关列数为2，分别为 W_{l1} 和 W_{l2}。因此，邻接矩阵 A 的秩为2。更具体地说，用于模拟的秩-*2*随机多层异质图可等价地写为

$$\mathbb{P}(A_{l;ij} = 1) = \begin{cases} 1.1\rho_l W_{l,i} W_{l,j}, & \text{if } 1 \le i, j \le \frac{n}{2}, \text{ or } \frac{n}{2} < i, j \le n, \\ 0.9\rho_l W_{l,i} W_{l,j}, & \text{if } 1 \le i \le \frac{n}{2} < j \le n, \end{cases} \tag{10}$$

其中 $a = 1.1$， $b = 0.9$， ρ_l 和$W_{l,\ i}$ 在例3.1 和例3.2中给出。

首先，我们考虑示例3.1。表 1 中的三层网络四种情景在秩-2 多层网络下进行了评估。对这四种情景中每个多层网络的排列进行了评估，结果列于表 21–24。每种排列中的最高功效值以**粗体**显示。大多数 I类错误接近 0.05。随着 n 增大，检验功效也随之提高并趋近于 1。所有结果均表明，EL 检验对秩-2 多层网络具有稳健性。与秩-1 多层网络相同，具有较大 τ_1 和 λ_1 值以及较大差异 值的秩-2 多层网络往往具有更高的统计功效。因此，表 11 中列出的六个网络在秩-2 设置下仍然有效。

其次，对表3.2中的示例2 的三层网络的四种情景进行了评估，针对的是秩-2 多层网络。对这四种情景下每个多层网络的排列进行了评估，结果列于表25–28中。每种排列中的最高功效值以**粗体**显示。第一类错误接近 0.05。随着 n的增加，检验功效变大并趋近于 1。所有结果均表明，EL 检验

EL 检验：三层网络 $L=3,\ r=2$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.8, 0.8)	(0.8, 0.8, 0.8)
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 250$	0.059	0.063	0.071
$n = 300$	0.061	0.060	0.066
$n = 350$	0.045	0.059	0.052
$n = 400$	0.047	0.059	0.059
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.7)	(0.7, 0.7,0.8)	(0.7, 0.8,0.7)
假设	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.2	0.1	0.1
$n = 250$	**0.062**	0.058	0.060
$n = 300$	**0.099**	0.057	0.055
$n = 350$	**0.105**	0.061	0.069
$n = 400$	**0.116**	0.066	0.067
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.6,0.6)	(0.6, 0.6,0.8)	(0.6, 0.8,0.6)
假设	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.4	0.2	0.2
$n = 250$	**0.500**	0.109	0.187
$n = 300$	**0.621**	0.143	0.267
$n = 350$	**0.742**	0.163	0.330
$n = 400$	**0.853**	0.210	0.430
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.5,0.5)	(0.5, 0.5,0.8)	(0.5, 0.8,0.5)
假设	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.6	0.3	0.3
$n = 250$	**0.977**	0.381	0.658
$n = 300$	**0.996**	0.486	0.813
$n = 350$	**0.999**	0.591	0.908
$n = 400$	**1.000**	0.686	0.958

TABLE 21三层多层网络秩-*2* 的 *EL* 检验示例 *3.1*：情景 *1*

对于秩-2 多层网络是稳健的。与在秩-1 多层网络中观察到的情况一样，具有较大 τ_1 和 β_1 值以及更大差异值的秩-2 多层网络往往具有更高的检验功效。因此，表12 中列出的六个网络在秩-2 情形下同样有效。

6. 真实数据应用

在本小节中，我们将所提出的 EL 检验应用于 [29] 中提供的多层社交网络 CS-Aarhus。CS-Aarhus 网络是无向、无权的，由奥胡斯大学计算机科学系 61 名员工之间的五种线上和线下关系构成。这五个网络层定义如下：

EL 检验：三层网络 $L=3,\ r=2$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8,0.8)	(0.8, 0.8,0.8)	(0.8, 0.8,0.8)
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 250$	0.059	0.063	0.071
$n = 300$	0.061	0.060	0.066
$n = 350$	0.045	0.059	0.052
$n = 400$	0.047	0.059	0.059
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0。4, 0。3, 0。2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.6)	(0.7, 0.6,0.8)	(0.6, 0.8,0.7)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.3	0.2	0.3
$n = 250$	0.236	0.065	**0.281**
$n = 300$	0.305	0.072	**0.391**
$n = 350$	0.409	0.069	**0.498**
$n = 400$	0.495	0.074	**0.569**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0。4, 0。3, 0。2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.5)	(0。7, 0。5, 0。8)	(0.5, 0.8,0.7)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.4	0.3	0.5
$n = 250$	0.644	0.142	**0.921**
$n = 300$	0.803	0.158	**0.969**
$n = 350$	0.889	0.213	**0.994**
$n = 400$	0.954	0.254	**0.998**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.6,0.5)	(0。6, 0。5, 0。8)	(0.5, 0.8,0.6)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.5	0.3	0.4
$n = 250$	**0.856**	0.148	0.752
$n = 300$	**0.937**	0.179	0.858
$n = 350$	**0.980**	0.239	0.932
$n = 400$	**0.996**	0.300	0.975

TABLE 22秩-2 三层多层网络的 *EL* 检验示例3.1：情景 2

EL 检验：三层网络 $L=3,\ r=2$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8,0.8)	(0.8, 0.8,0.8)	(0.8, 0.8,0.8)
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 250$	0.071	0.059	0.063
$n = 300$	0.066	0.061	0.060
$n = 350$	0.052	0.045	0.059
$n = 400$	0.059	0.047	0.059
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.6)	(0.7, 0.6,0.8)	(0.6, 0.8,0.7)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
差异	0.3	0.2	0.3
$n = 250$	**0.295**	0.066	0.141
$n = 300$	**0.380**	0.085	0.184
$n = 350$	**0.497**	0.082	0.243
$n = 400$	**0.601**	0.102	0.288
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.5)	(0.7, 0.5,0.8)	(0.5, 0.8,0.7)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.4	0.3	0.5
$n = 250$	**0.747**	0.175	0.621
$n = 300$	**0.868**	0.232	0.739
$n = 350$	**0.949**	0.278	0.829
$n = 400$	**0.982**	0.356	0.888
$\boldsymbol{\tau}$	(0。4, 0。3, 0。2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.6,0.5)	(0。6, 0。5, 0。8)	(0.5, 0.8,0.6)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.5	0.3	0.4
$n = 250$	**0.941**	0.202	0.434
$n = 300$	**0.983**	0.280	0.530
$n = 350$	**0.995**	0.338	0.643
$n = 400$	**1.000**	0.429	0.733

TABLE 23秩-*2* 三层多层网络的 *EL* 检验示例*3.1*：情景*3*

EL 检验：三层网络 $L=3,\ r=2$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0。4, 0。2, 0。3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.8,0.8)	(0.8, 0.8,0.8)	(0.8, 0.8,0.8)
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 250$	0.058	0.062	0.069
$n = 300$	0.056	0.061	0.062
$n = 350$	0.055	0.064	0.062
$n = 400$	0.056	0.055	0.055
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0。4, 0。2, 0。3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.6)	(0.7, 0.6,0.8)	(0.6, 0.8,0.7)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.3	0.2	0.3
$n = 250$	0.161	0.059	**0.259**
$n = 300$	0.206	0.078	**0.339**
$n = 350$	0.253	0.084	**0.447**
$n = 400$	0.339	0.099	**0.551**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0。4, 0。2, 0。3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.7,0.5)	(0.7, 0.5,0.8)	(0.5, 0.8,0.7)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.4	0.3	0.5
$n = 250$	0.465	0.181	**0.896**
$n = 300$	0.568	0.238	**0.966**
$n = 350$	0.695	0.316	**0.992**
$n = 400$	0.791	0.371	**0.997**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0。4, 0。2, 0。3)
$\boldsymbol{\lambda}$	(0.8, 0.6,0.5)	(0。6, 0。5, 0。8)	(0.5, 0.8,0.6)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	0.5	0.3	0.4
$n = 250$	0.684	0.177	**0.705**
$n = 300$	0.798	0.266	**0.853**
$n = 350$	0.895	0.344	**0.938**
$n = 400$	0.935	0.414	**0.968**

TABLE 24秩-*2* 三层多层网络的 *EL* 检验示例*3.1*：情景 *4*

EL 检验：三层网络 $L=3$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	$(1, ^{1,\ 1)}$	$(1, ^{1,\ 1)}$	$(1, ^{1,\ 1)}$
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 300$	0.063	0.061	0.075
$n = 350$	0.063	0.064	0.057
$n = 400$	0.059	0.058	0.069
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 2, 2)	(2, 2,1)	(2, 1,2)
假设	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	2	1	1
$n = 300$	**0.291**	0.068	0.105
$n = 350$	**0.399**	0.091	0.125
$n = 400$	**0.453**	0.094	0.145
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1、3、3)	(3, 3, 1)	(3, 1, 3)
假设	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	4	2	2
$n = 300$	**0.971**	0.254	0.517
$n = 350$	**0.994**	0.358	0.631
$n = 400$	**0.998**	0.422	0.753
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 4, 4)	(4, 4, 1)	(4, 1, 4)
假设	$W_1 \neq W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	6	3	3
$n = 300$	**1.000**	0.560	0.879
$n = 350$	**1.000**	0.680	0.956
$n = 400$	**1.000**	0.766	0.983

TABLE 25秩-*2* 三层多层网络的 *EL* 检验示例*3.2*：情景 *1*

EL 检验：三层网络 $L=3, r=2$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	$(1,^{1,\ 1)}$	$(1,^{1,\ 1)}$	$(1,^{1,\ 1)}$
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 300$	0.063	0.061	0.075
$n = 350$	0.063	0.064	0.057
$n = 400$	0.059	0.058	0.069
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 2, 3)	(2, 3,1)	(3, 1, 2)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	3	2	3
$n = 300$	**0.762**	0.103	0.699
$n = 350$	**0.881**	0.137	0.822
$n = 400$	**0.938**	0.145	0.903
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 2, 4)	(2, 4, 1)	(4, 1, 2)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	4	3	5
$n = 300$	0.976	0.253	**0.997**
$n = 350$	0.998	0.312	**1.000**
$n = 400$	1.000	0.409	**1.000**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)	(0.4, 0.3,0.2)
$\boldsymbol{\beta}$	(1、3、4)	(3, 4,1)	(4, 1, 3)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	5	3	4
$n = 300$	**1.000**	0.349	0.932
$n = 350$	**1.000**	0.415	0.978
$n = 400$	**1.000**	0.485	0.997

TABLE 26秩-*2* 三层多层网络的 *EL* 检验示例*3.2*：情景 *2*

EL 检验：三层网络 $L=3,\ r=2$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\beta}$	$(1,\ 1,\ 1)$	$(1,\ ^{1,\ 1)}$	$(1,\ ^{1,\ 1)}$
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 300$	0.075	0.063	0.064
$n = 350$	0.057	0.063	0.064
$n = 400$	0.069	0.059	0.058
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\beta}$	$(1,\ 2,\ 3)$	(2, 3,1)	(3, 1,2)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	3	2	3
$n = 300$	**0.835**	0.130	0.351
$n = 350$	**0.933**	0.172	0.438
$n = 400$	**0.970**	0.203	0.531
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\beta}$	$(1,\ 2,\ 4)$	$(2,\ 4,\ 1)$	$(4,\ 1,\ 2)$
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	4	3	5
$n = 300$	**0.987**	0.290	0.802
$n = 350$	**0.997**	0.386	0.874
$n = 400$	**1.000**	0.495	0.931
$\boldsymbol{\tau}$	(0.4, 0.3,0.2)	(0.3, 0.2,0.4)	(0.2, 0.4,0.3)
$\boldsymbol{\beta}$	$(1、\ 3、\ 4)$	(3, 4,1)	$(4,\ 1,\ 3)$
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	5	3	4
$n = 300$	**1.000**	0.450	0.619
$n = 350$	**1.000**	0.556	0.711
$n = 400$	**1.000**	0.660	0.809

TABLE 27秩-*2* 三层多层网络的 *EL* 检验示例*3.2*：情景*3*

EL 检验：三层网络 $L=3$			
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0。4, 0。2, 0。3)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)
假设	$W_1 = W_2 = W_3$	$W_2 = W_3 = W_1$	$W_3 = W_1 = W_2$
$Difference$	0	0	0
$n = 300$	0.061	0.069	0.084
$n = 350$	0.065	0.062	0.073
$n = 400$	0.060	0.047	0.066
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0。4, 0。2, 0。3)
$\boldsymbol{\beta}$	(1、2、3)	(2, 3,1)	(3, 1, 2)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	3	2	3
$n = 300$	0.602	0.137	**0.719**
$n = 350$	0.712	0.183	**0.831**
$n = 400$	0.802	0.243	**0.921**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0。4, 0。2, 0。3)
$\boldsymbol{\beta}$	(1, 2, 4)	(2, 4, 1)	(4, 1, 2)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	4	3	5
$n = 300$	0.901	0.380	**0.994**
$n = 350$	0.955	0.474	**1.000**
$n = 400$	0.984	0.616	**1.000**
$\boldsymbol{\tau}$	(0.2, 0.3,0.4)	(0.3, 0.4,0.2)	(0。4, 0。2, 0。3)
$\boldsymbol{\beta}$	(1、3、4)	(3, 4, 1)	(4, 1, 3)
假设	$W_1 \neq W_2 \neq W_3$	$W_2 \neq W_3 \neq W_1$	$W_3 \neq W_1 \neq W_2$
$Difference$	5	3	4
$n = 300$	**0.980**	0.484	0.944
$n = 350$	**0.997**	0.626	0.980
$n = 400$	**0.999**	0.730	0.997

TABLE 28秩-*2* 三层多层网络的 *EL* 检验示例 *3.2*：情景 *4*

5 层真实世界网络	
层	关联
A_1	两个人一起午餐的示例
A_2	两个人通过 Facebook 建立社交联系的示例
A_3	两位共同署名出版物的个人示例
A_4	两位共同休闲的个人示例
A_5	两位共同工作的个人示例

TABLE 29
5 层真实世界网络

- A_1：午餐——两位个人共进午餐。
- A_2：Facebook——两位个人在 Facebook 上建立了联系。
- A_3：共同署名——个人共同署名出版物。
- A_4：休闲——个人共同度过休闲时光。
- A_5：工作——个人共同工作。

五个层 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 列于表 29 中，并在图 2中可视化。

表 30 展示了五层真实世界网络的特征。这些特征包括网络密度、总度数、平均度、聚类系数、连通分量数量和平均路径长度。根据密度值，我们观察到网络 A_3 最为稀疏，而网络 A_1 和 A_5 相对更为稠密。图11展示了每个网络层的度分布。网络 A_1和 A_5 的分布呈现钟形曲线，曲线对称且为单峰，中心位于平均度附近。这种形状表明，网络中的大多数节点的度接近平均值，而度极低或极高的节点非常少。这种模式是节点间连通性较为均匀的网络的典型特征，与无标度网络相反；无标度网络呈现厚尾或幂律分布，其中包含许多低度节点和少数高度连接的枢纽节点。相比之下，网络 A_2、A_3和 A_4 的度分布类似于钟形曲线的右尾，仅有一小部分左尾存在。这种模式表明，大多数节点具有中等度数，而较小比例的节点具有更高的连通性，从而形成逐渐下降的右尾。左尾的截断可能表明极低度节点较为稀少，或者分析重点在于网络的核心结构。

所提出的 EL 检验应用于多层社交网络 CS-Aarhus，结果汇总于表 31 和表 32中。首先，我们检验这五个网络是否具有相同的度校正参数或一维公共子空间。我们计算 EL检验统计量 R_n，其中将每个网络依次视为第一个网络，以及相应的 p-值。结果如表31所示。EL 检验的 p-值均

5 层真实世界网络					
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
密度	0.1055	0.0678	0.0115	0.0481	0.1060
总度数	386	248	42	176	388
平均度数	6.328	4.066	0.689	2.885	6.361
聚类系数	0.5689	0.4806	0.4286	0.3431	0.3388
连通分量	2	30	44	16	2
路径长度（直径）	7	4	3	8	4

TABLE 3*0*5 层真实世界网络的特征

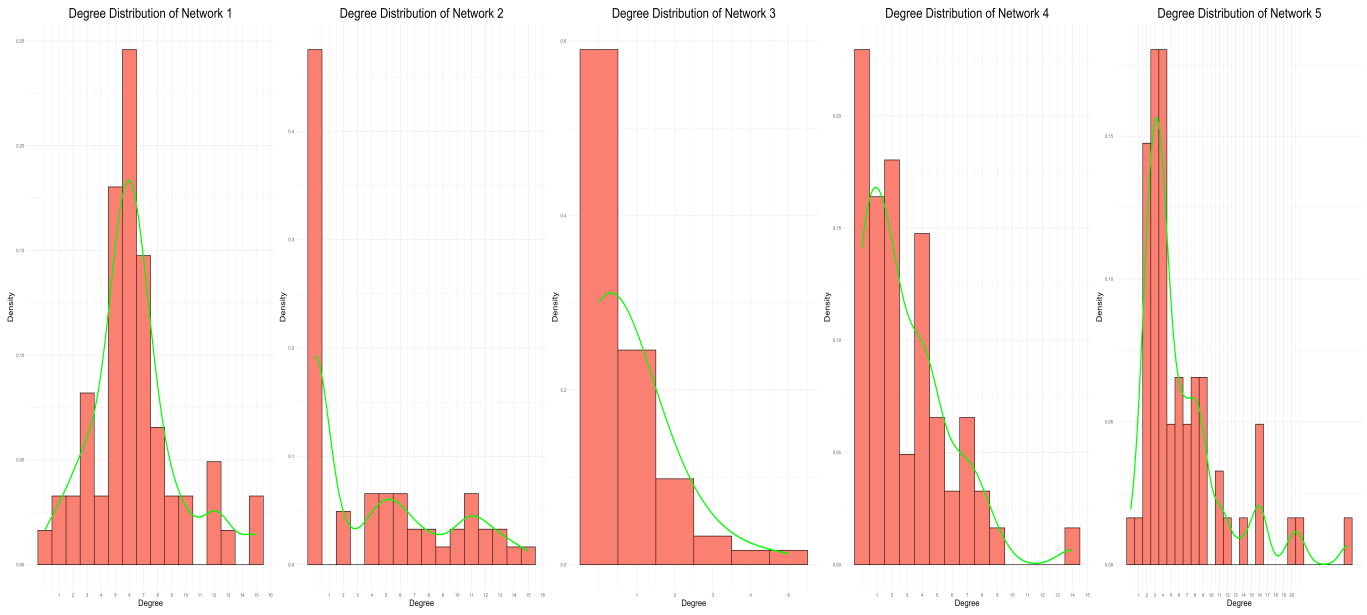


图 11：5 层真实世界网络的度分布

层	检验统计量	P 值	结论
A_1, A_2, A_3, A_4, A_5	27.329	0.0000	$RejectH_0$
A_2, A_3, A_4, A_5, A_1	41.937	0.0000	$RejectH_0$
A_3, A_4, A_5, A_1, A_2	10.981	0.0009	$RejectH_0$
A_4, A_5, A_1, A_2, A_3	28.041	0.0000	$RejectH_0$
A_5, A_1, A_2, A_3, A_4	40.808	0.0000	$RejectH_0$

TABLE 3*15* 层真实世界网络的 *EL* 检验

检验均小于 0.05，表明这五个网络既不共享相同的度校正参数，也不共享一维公共子空间。接下来，我们检验这些网络的每个四部子集是否共享相同的度校正参数。根据表32，两种 EL 检验的 p值也都小于 0.05，表明没有任何四部子集可以嵌入同一个一维公共子空间。此外，我们检验每三个网络是否共享相同的度校正参数。EL 检验的 p值再次均小于 0.05，表明这些三元组不能嵌入同一个一维公共子空间。最后，我们检验每一对网络是否共享相同的度校正参数。EL 检验的 p值均小于 0.05，表明没有任何一对网络可以嵌入同一个一维公共子空间。

7. 讨论

与传统的单层网络相比，多层网络能够更丰富、更真实地表示现实世界中的复杂系统。在许多现实场景中，实体之间的交互具有多面性，而多层网络为捕捉这种复杂性提供了强大的框架。因此，多层网络已得到广泛应用和积极研究。对于给定的多层网络，一个自然且重要的问题是：所有网络是否存在公共子空间？回答这个问题有助于理解从所有层中提取的信息，这些信息能够体现其齐次性或共享的共同结构，并具有诸多实际应用。

在这项工作中，我们提出经验似然比（EL）检验，以评估所有网络是否共享一个公共不变子空间。在原假设下，假设所有网络层共享同一个子空间；而在备择假设下，只有部分层共享一个公共子空间。我们开展了全面的模拟研究，以考察极限分布并评估 EL 检验的性能。蒙特卡洛近似验证了该检验的有效性，模拟结果表明

层	检验统计量	P 值	结论
A_1, A_2	27.330	0.0000	$RejectH_0$
A_1, A_3	6.924	0.0085	$RejectH_0$
A_1, A_4	5.560	0.0184	$RejectH_0$
A_1, A_5	12.806	0.0003	$RejectH_0$
A_2, A_3	7.332	0.0068	$RejectH_0$
A_2, A_4	23.665	0.0000	$RejectH_0$
A_2, A_5	32.119	0.0000	$RejectH_0$
A_3, A_4	4.629	0.0314	$RejectH_0$
A_3, A_5	10.189	0.0014	$RejectH_0$
A_4, A_5	29.849	0.0000	$RejectH_0$
A_3, A_4, A_5	10.164	0.0014	$RejectH_0$
A_2, A_4, A_5	46.302	0.0000	$RejectH_0$
A_2, A_3, A_5	24.577	0.0000	$RejectH_0$
A_2, A_3, A_4	17.833	0.0000	$RejectH_0$
A_1, A_4, A_5	17.864	0.0000	$RejectH_0$
A_1, A_3, A_5	12.199	0.0005	$RejectH_0$
A_1, A_3, A_4	10.335	0.0013	$RejectH_0$
A_1, A_2, A_5	30.686	0.0000	$RejectH_0$
A_1, A_2, A_4	25.320	0.0000	$RejectH_0$
A_1, A_2, A_3	19.538	0.0000	$RejectH_0$
A_1, A_2, A_3, A_4	21.088	0.0000	$RejectH_0$
A_1, A_2, A_3, A_5	26.534	0.0000	$RejectH_0$
A_1, A_2, A_4, A_5	36.097	0.0000	$RejectH_0$
A_1, A_3, A_4, A_5	15.607	0.0001	$RejectH_0$
A_2, A_3, A_4, A_5	36.181	0.0000	$RejectH_0$

TABLE 32真实世界网络的 *EL* 检验

其表现良好，且检验功效高于我们此前工作中提出的加权度差检验（WDDT） [48],。WDDT 是首个用于检测多层网络中公共不变子空间的检验。这些结果凸显了 EL 检验的优势。此外，我们将 EL 检验应用于真实世界多层网络数据，展示了其稳健性和实用价值。

作为未来研究多层网络公共子空间检验的一项设想，我们考虑更复杂的秩为q的随机多层异质图模型，其中 $q \geq 2$。定义 *2.4* 中的秩-*1*随机多层异质图模型考虑将 W_l 向量作为同质性向量，并将 ρ_l 作为异质性得分。同样，我们通过定义同质性矩阵和异质性矩阵 $U_{n\times q}$ $\Lambda_{q\times q}$来定义秩-q随机多层异质图模型。多层网络中的期望邻接矩阵可分解为

$$\mathbb{E}[A_l] = U_l \Lambda_l U_l^\top.$$

每个 U_l 都是多层网络的潜在不变子空间，其不变性意味着对 U_l 进行线性变换后仍位于该子空间内。因此，我们考虑在每一层中使用一个正交矩阵 Q_l ，以适应子空间 U_l的同构变异。给定多层网络 A_1， A_2、.....、 A_L，我们有兴趣检验以下假设

$$\begin{aligned} &H_0 : \forall\, l \in \{2, 3, \ldots, L\},\ \exists \text{ an orthogonal matrix } Q_l \text{ such that } U_1 = Q_l U_l, \\ &H_1 : \ \exists l_1 \neq l_2 \text{ 使得对所有正交矩阵 } Q., U_{l_1} \neq Q U_{l_2} \end{aligned} \tag{11}$$

在 H_0 下，图 A_1， A_2，.. . ， A_L 具有相同的公共不变子空间。在 H_1 下，至少存在两个图，它们的公共不变子空间不同。因此，应针对该模型构造检验统计量，并推导其渐近分布。

经验似然（EL）检验的模拟结果表明，该 EL 检验对于（3）中的假设表现良好。然而，这一结论仍需严谨的理论论证。因此，未来工作的另一个重要方向是推导 EL 检验的渐近分布。此外，将经验似然框架扩展到（11）中的假设，并通过模拟研究和渐近分析验证其性能，也很值得研究。

参考文献

[1] Donu Arapura 和 Chris Peterson。公共不变子空间问题：一种基于 Gröbner 基的方法。线性代数及其应用，384:1–7，2004年。[2] Ery Arias-Castro 和 Nicolas Verzelen。稠密随机网络中的社区检测。电子统计学期刊，2014年。[3]Jes´us Arroyo、Avanti Athreya、Joshua Cape、Guodong Chen、Carey E Priebe 和 Joshua T Vogelstein。具有公共不变子空间的多个异质网络的推断。机器学习研究杂志，22(142):1–49，2021年。[4] Sheldon Axler。《线性代数精要》。施普林格·自然，2024年。[5] Peter J Bickel 和 Purnamrita Sarkar。网络中自动化社区检测的假设检验。英国皇家统计学会杂志*B*辑：统计方法学，78(1):253–273，2016年。[6] B´ela Bollob´as、Svante Janson 和 Oliver Riordan。非齐次随机图中的相变。随机结构与算法，31(1):3–122，2007年。[7] K. Bringmann、T. Friedrich 和 A. Krohmer。准线性时间内对异质随机图进行去匿名化。算法学，80:3397–3427，2018年。[8] Shuxiao Chen、Sifan Liu 和 Zongming Ma。非齐次多层网络中的全局与个体化社区检测。统计学年鉴，50(5):2664–2693，2022年。[9] Yongqiang Chen、Yatao Bian、Kaiwen Zhou、Binghui Xie、Bo Han 和 James Cheng。通过环境增强进行不变图学习，是否学到了不变性？神经信息处理系统进展，36，2024年。[10] C. Chiasserini、M. Garetto 和 E. Leonardi。无标度用户关系下的社交网络去匿名化。*IEEE/ACM*网络汇刊，24:3756–3769，2016年。[11] F. Chung 和 L. Lu。具有给定期望度的随机图中的平均距离。美国国家科学院院刊，99(25):15879–15882，2002年。[12] Laurianne David、Amol Thakkar、Roc´ıo Mercado 和 Ola Engkvist。人工智能驱动的药物发现中的分子表示：综述与实践指南。化学信息学杂志，12(1):56，2020年。[13] Manlio De Domenico。人脑网络的多层建模与分析。*GigaScience*，6(5):gix004，2017年。[14] Manlio De Domenico、Mason A Porter 和 Alex Arenas。Muxviz：用于多层分析和网络可视化的工具。复杂网络杂志，3(2):159–176，2015年。

[15] Lizhong Ding、Zhi Liu、Yu Li、Shizhong Liao、Yong Liu、Peng Yang、Ge Yu、Ling Shao 和 Xin Gao。基于经验似然的高维数据线性核检验。载于人工智能促进协会人工智能会议论文集，第 33 卷，第 3454–3461 页，2019 年。[16] Paul Erdos、Alfr´ed R´enyi 等。随机图的演化。匈牙利科学院数学研究所出版物，5(1)：17–60，1960年。[17] Paul Erd˝os 和 Alfr´ed R´enyi。随机图 I。*Publicationes Mathematicae Debre-cen*，6：290–297，1959 年。[18] Kelly R Finn、Matthew J Silk、Mason A Porter 和 Noa Pinter-Wollman。多层网络分析在动物行为研究中的应用。动物行为，149：7–22，2019 年。[19] Justin Gilmer、Samuel S Schoenholz、Patrick F Riley、Oriol Vinyals 和 George E Dahl。用于量子化学的神经消息传递。载于国际机器学习会议，第 1263–1272 页。PMLR，2017 年。[20] Zaynab Hammoud 和 Frank Kramer。多层网络：方面、实现及其在生物医学中的应用。大数据分析，5(1)：2，2020 年。[21] Jiashun Jin、Zheng Tracy Ke 和 Shengming Luo。网络检验中带符号多边形统计量的最优自适应性。统计学年鉴，49(6)：3408–3433，2021年。[22] Amy C Kinsley、Gianluigi Rossi、Matthew J Silk 和 Kimberly VanderWaal。多层网络与多重网络：兽医流行病学中的应用简介。兽医学前沿，7：596，2020 年。[23] Mikko Kivel¨a、Alex Arenas、Marc Barthelemy、James P Gleeson、Yamir Moreno 和 Mason A Porter。多层网络。复杂网络杂志，2(3)：203–271，2014 年。[24] Nicole A Lazar。经验似然综述。统计学及其应用年度评论，8(1)：329–344，2021年。[25] Jing Lei 和 Kevin Z Lin。多层随机块模型中的偏差校正谱聚类。美国统计学会会刊，118(544)：2433–2445，2023 年。[26] Ning Li、Qian Huang、Xiaoyu Ge、Miao He、Shuqin Cui、Penglin Huang、Shuairan Li 和 Sai-Fu Fung。社交网络结构研究进展综述。复杂性，2021：1–14，2021 年。[27] Pangpang Liu 和 Yichuan Zhao。经验似然近期进展综述。*Wiley* 跨学科评论：计算统计学，15(3)：e1599，2023 年。[28] L´aszl´o Lov´asz。大型网络与图极限，第 60 卷。美国数学学会，2012 年。

[29] Matteo Magnani、Barbora Micenkova 和 Luca Rossi。多重网络的组合分析。*arXiv* 预印本 *arXiv:1303.4986*，2013 年。[30] Whitney K Newey 和 Richard J S mith。广义矩估计和广义经验似然估计量的高阶性质。*Econometrica*，72(1)：219–255，2004 年。[31] Brandon Oselio、Alex Kulesza 和 Alfred O Hero。动态社交网络的多层图分析。*IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*，8(4)：514–523，2014 年。[32] Art B Owen。单个泛函的经验似然比置信区间。*Biometrika*，75(2)：237–249，1988 年。[33] Art B Owen。经验似然。Chapman & Hall/CRC，2001 年。[34] Hanxiang Peng 和 Anton Schick。拟合优度检验的经验似然方法。*Bernoulli*，第 954–981 页，2013 年。[35] Marianna Pensky。带符号多样多重网络：聚类与推断。*arXiv* 预印本 *arXiv:2402.10242*，2024年。[36] Marianna Pensky 和 Yaxuan Wang。多样多重网络的聚类。*IEEETransactions on Network Science and Engineering*，2024 年。[37] Suman Ravuri、M´elanie Rey、Shakir Mohamed 和 Marc Peter Deisenroth。利用广义经验似然理解深度生成模型。载于*IEEE/CVF*计算机视觉与模式识别会议论文集，第 24395–24405 页，2023 年。[38] Alvin C Rencher 和 MG Schimek。多元分析方法。*ComputationalStatistics*，12(4)：422–422，1997 年。[39] Shikhar Sharma 和 Anurag Singh。加权多重网络链路预测的高效方法。*Computational social networks*，3：1–17，2016 年。[40] Sean L Simpson、F DuBois Bowman 和 Paul J Laurienti。复杂功能脑网络分析：融合统计学与网络科学以理解大脑。*Statistics surveys*，7：1，2013 年。[41] Sukriti Singh 和 Raghavan B Sunoj。用于化学催化的分子机器学习：前景与挑战。*Accounts of Chemical Research*，56(3)：402–412，2023 年。[42] Dan Wang、Feng Tian 和 Daijun Wei。基于熵的多重网络组合层相关性分析。*Plos one*，17(10)：e0276344，2022 年。[43] Lei Wang、Quanyi Liang、Zhikun She、Jinhu L¨u 和 Qing-Guo Wang。异质复杂网络同步的分解方法。*IEEE Transactionson Systems, Man, and Cybernetics: Systems*，51(2)：853–863，2018 年。

[44] Samuel S Wilks. 用于检验复合假设的似然比的大样本分布。《数学统计年鉴》，9(1):60–62，1938年。[45] Qianqian Yao、Simone Ludwig 和 Mingao Yuan。用于催化剂发现的非学习型与学习型分子表示比较。北达科他州立大学，2022年。[46] L. Yu、J. Xu 和 X. Lin。幂律图匹配中 d 跳的检验功效。*Proc.ACM Meas. Anal. Comput. Syst.*，5，2021年。[47] Mingao Yuan 和 Zuofeng Shang。检验稠密超图时的精确检测边界。*Bernoulli*，28(4):2459–2491，2022年。[48] Mingao Yuan 和 Qianqian Yao。多层网络公共度校正参数的检验。《统计与计算》，35(2):38，2025年。[49] Yichuan Zhao 和 Song Yang。生存率回归参数的经验似然置信区间。《非参数统计杂志》，24(1):59–70，2012年。[50] Runbing Zheng 和 Minh Tang。多重网络推断与主成分分析中不变子空间分布式估计的极限结果。*arXiv*预印本 *arXiv:2206.04306*，2022年。