arXiv:2601.06454v1 [math.AG] 10 Jan 2026

被实代数流形的柱面包围的区域与自然分解

北泽直树

Abstract. 作者一直对被实代数超曲面的柱体包围的区域及其形状，以及与之相关的多项式感兴趣。在此，我们对分解为这类实代数超曲面柱体的自然分解进行表述和研究。特别是，我们通过奇点理论研究这些实代数超曲面柱体的交集，因为它们能为了解区域提供重要信息。

这是实几何中的一类自然问题，也源于在实代数流形上构造映射，将其映至实仿射空间中的显式区域。这一问题更广泛地涉及显式构造实代数对象的难点。自20世纪下半叶Nash和Tognoli的开创性研究以来，这些对象的存在性与逼近性早已广为人知。此外，这也源于人们对可微、光滑或实代数函数与映射的奇点理论的兴趣，尤其是对其显式构造的关注。

1. 引言

k维欧几里得空间（实仿射空间） $\mathbb{R}^k$ ($\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$)中被超曲面包围的区域是基本的几何对象。我们重点研究被实代数超曲面柱体包围的这些区域，以及它们的形状和相关多项式。我们也主要关注这些实代数超曲面的交，因为它们提供了有关形状的重要信息。

与复代数几何一样，实代数几何也有着悠久而美好的历史。自 [29, 35] 的著名研究以来，关于存在性与逼近的研究不断发展。另请参见 [24, 25]。近期一项基础、自然且有趣的研究是 [3]。在这项研究中，Bodin、Popescu-Pampu 和 Sorea 考察了以一般方式嵌入的平面图，并通过保持导数的逼近，发现了自然地收缩到这些图上的区域。作者开始考虑，这可以看作某一类优美光滑映射的像，而单位球面的典范投影是其中最简单的例子。这些映射称为特殊广义映射，相关解释见 [31]。关于特殊广义映射的相关研究，另请参见 [20], ; 其中，流形（即余维 0 的光滑浸入流形）的上同调环完全由其像决定。我们首先在 [8], 中构造了实代数情形下的此类映射，作者随后又在 [13] 中对此作了补充说明。之后，我们考虑了自然扩展的情形，并成功地进行了相关构造，例如见 [9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23]。关于定义 1，主要参见 [21, 23] ，此外还可参见 [14, 15, 16] ，以了解

Key words and phrases. （非奇异）实代数流形与实代数映射。实代数区域。可微映射的奇点理论。
2020 *Mathematics Subject Classification*: 05C05，05C10，14P05，14P10，14P25，57R45，58C05。

相关例子。在本文中，我们还使用了 [4] 中介绍的一些可微映射奇点理论的工具和方法。

令 $\mathrm{id}_X : X \to X$ 表示 X上的恒等映射。对于拓扑空间 X中的子空间 $Y \subset X$，令 Y^X 表示其在 X中的闭包。对于微分流形X，令 T_pX 表示在 $p \in X$处的切向量空间。微分映射 $c : X \to Y$的奇异点 p是指这样一点：在该点处，微分 $dc_p : T_pX \to T_{c(p)}Y$这一线性映射的秩不是满秩。实代数流形是实多项式映射 $c : \mathbb{R}^{k_1} \to \mathbb{R}^{k_2}$的零点集 $c^{-1}(0)$中若干连通分支的并集 Z_c，且 $c|_{Z_c}$ 没有奇点。

定义 1。令 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$的一个非空、连通开集。令$\{S_j\}_{j=1}^l$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中维数为 $n-1$ 的实代数流形族，其中每个 S_j都是实多项式 f_j 的零点集的若干连通分支的并集，并且 $S_j \bigcap D^{\mathbb{R}^n} \neq \emptyset$ 对所有整数 $1 \le j \le l$均成立。我们还作如下假设。

(1) 存在一个包含$D^{\mathbb{R}^k}$ 的 U_D 小开邻域，使得$D = U_D \bigcap \bigcap_{j=1}^l \{x \in f_j(x) > 0\}$ 且 $U_D \bigcap S_j = U_D \bigcap \{f_j(x) = 0\}$。(2) 对于正整数序列 $\{j\}_{j=1}^l$ 的任意递增子序列 $\{i_j\}_{j=1}^{l'}$ 以及任意点 $p \in \bigcap_{j=1}^{l'} S_{i_j} \bigcap D^{\mathbb{R}^n}$，均有 $\dim \bigcap_{j=1}^{l'} T_p S_{i_j} = n - l'$ 成立。

我们称对 $(D, \{S_j\}_{j=1}^l)$ 为 $\mathbb{R}^n$的一个实代数区域或*RA*区域。

下文中，我们也将 $\mathbb{R}$ 视为有序集。令 $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ 表示全体正整数的集合。对于有序集 P 及其元素 p，令 P_p 表示所有小于或等于 p的元素组成的集合。我们也将 $\mathbb{R}^n$ 视为实向量空间，其中 e_i 表示一个向量，该向量的第 i个分量为 1，其余分量均为 0。令 $N_{n'} \subset \mathbb{N}_n$ 表示一个恰好由n' 个数构成且满足 $1 \le n' \le n$的子集。令 $\pi_{n,\ N_{n'}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n'}$ 表示由$\pi_{n,\ N_{n'}}(x) := x'$定义的投影，其中 $x = (x_1, \cdots x_n) = (x_j)_{j \in \mathbb{N}_n}$ 且 $x' = (x_{j'})_{j' \in N_{n'}}$。

定义 2. $\mathbb{R}^n$ 中具有 $n \ge 2$ 的实代数流形的圆柱体是实代数流形 C（维数至多为 $n-2$），它表示为实多项式函数 $f(x)$ 的连通分支之并；该函数在 C 中各点处的取值仅取决于 $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}_n}$ 在 $x = (x_1, \cdots x_n) = (x_j)_{j \in \mathbb{N}_n}$ 中至多 $n-1$ 个变量，并以真子集 $A_C \subset \mathbb{N}_n$ 标记为 $\{x_j\}_{j \in A_C}$。

定义3. 在定义 1 中，我们作如下定义。

(1) 我们定义集合 $S_{i_j, 1 \le j \le l'}$，它由 $D^{\mathbb{R}^n - D}$ 中包含于彼此不同的 $(n-1)$ 维流形 S_{i_j} 且不包含于任何其他此类流形 S_j 的所有点组成；该集合是一个无边界的 $(n-l')$ 维流形。点 $p \in S_{i_j, 1 \le j \le l'}$ 称为 $(D, \{S_j\}_{j=1}^l)$ 的一个 N_1-临界点，当且仅当 p 是限制函数 $\pi_{n, N_1}|_{S_{i_j}, 1 \le j \le l'}$ 的临界点。(2) 恰好属于一个 $(n-1)$ 维流形 S_{i_0} 的点 p 称为 $(D, \{S_j\}_{j=1}^l)$ 的正规点；若它不是某个单元素集 $N_1 \subset \mathbb{N}_n$ 对应的 $(D, \{S_j\}_{j=1}^l)$ 的 N_1-临界点，则称为 $(D, \{S_j\}_{j=1}^l)$ 的 N_1-正规点或 N_1-N点。

确定由实代数流形的柱体围成的区域是否为 RA区域，是一个基础、自然且重要的问题。以下给出我们的新答案，这也是我们的主要结果之一。

定理1。 设 $\{S_j\}_{j=1}^{l}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中由维数为 $n-1$的实代数流形组成的一个族，且 $\{A_i\}_{i=1}^{a}$ 是 $\mathbb{N}_n$ 的一个由 $a \in \mathbb{N}$ 个互不相同子集组成的族，使得对于任意一对不同整数 $1 \leq i_1$、$i_2 \leq n$，$A_{i_1} \subset A_{i_2}$均不成立，并且 $\mathbb{N}_n = \bigcup_{i=1}^{a} A_i$。

(1) 对于某些 A_i、$A_i = A_{S_j}$，为每个 S_j定义一个子集 $A_{S_j} \subset \mathbb{N}_n$，并且对于满足 $i \in \mathbb{N}_a$、$A_i = A_{S_{i_j}}$ 的每个 A_i，对某个 i_j如此定义。*(2)* 每个 S_j 都是实代数流形的柱体，并且是某个实多项式 f_j 的零点集的若干分支的并，其中 $f_j|_{S_j}$仅取决于 $\{x_{j_1}\}_{j_1 \in A_{S_j}}$中的变量。*(3)* 对于每个整数 $i \in \mathbb{N}_a$，存在一个满足 $A_i = A_{S_{j_0}}$ 的整数 j_0，使得 $f_{j_0}|_{S_{j_0}}$ 取决于 $\{x_{j_{0,1}}\}_{j_0、{}_1 \in A_{S_{j_0}}}$中的所有变量。*(4)* 我们有一个 *RA*区域（D_{A_i}、$\{\pi_{n,A_i}(S_{j_3})\}_{j_3 \in \{j_2 | A_i = A_{S_{j_2}}\}}$），其中 $D_{A_i} \subset \mathbb{R}^{n_{A_i}}$是非空开集，$n_{A_i}$ 是对于每个 $i \in \mathbb{N}_n$的 A_i 的大小，集合 A_i 通过保持顺序的唯一映射 $\pi_{A_i、\mathbb{N}}$ 自然地映射到 n_{A_i}，而对于“定义 *1* 中的实多项式 f_j ”，改用 $f_j|_{S_j}$。*(5)* 此处的不同集合 A_{i_1} 和 A_{i_2} 至多有一个公共元素。*(6)* 如果 $p_i \in D_{A_i}{}^{\mathbb{R}^{n_{A_i}}} - D_{A_i}$ 是（D_{A_i}、$\{\pi_{n,A_i}(S_{j_3})\}_{j_3 \in \{j_2 | A_i = A_{S_{j_2}}\}}$）的一个 $\pi_{A_i、\mathbb{N}}(N_{A_i}, 1)$ -临界点，且 $N_{A_i、1} \subset A_i$ 是一个单元素集合，那么对于任意满足 $i' \neq i$ 和 $N_{A_i、1} \subset A_{i'}$ 的 $i' \in \mathbb{N}_a$，集合 $(D_{A_{i'}}{}^{\mathbb{R}^{n_{A_{i'}}}} - D_{A_{i'}}) \bigcap \pi_{n、A_{i'}}(\pi_{n、A_i}{}^{-1}(p_i))$ 仅包含（$D_{A_{i'}}$、$\{\pi_{n,A_{i'}}(S_{j_3})\}_{j_3 \in \overline{\{j_2 | A_{i'} = A_{S_{j_2}}\}}}$）的 $\pi_{A_{i'}、\mathbb{N}}(N_{A_i}, 1)$ -*N*点；并且对于任意满足 $i' \neq i$ 的 $i' \in \mathbb{N}_a$，以及 N_{A_i}、*1* 且与 $A_{i'}$ 不相交，对于任意单元素集合 $N_{A_{i'}、1} \subset A_{i'}$，集合 $(D_{A_{i'}}{}^{\mathbb{R}^{n_{A_{i'}}}} - D_{A_{i'}}) \bigcap \pi_{n、A_{i'}}(\pi_{n、A_i}{}^{-1}(p_i))$ 仅包含（$D_{A_{i'}}$、$\{\pi_{n,A_{i'}}(S_{j_3})\}_{j_3 \in \{j_2 | A_{i'} = A_{S_{j_2}}\}}$）的 $\pi_{A_{i'}、\mathbb{N}}(N_{A_{i'}}, 1)$ -*N*点。*(7)* 如果 $p_i \in D_{A_i}{}^{\mathbb{R}^{n_{A_i}}} - D_{A_i}$ 不是（D_{A_i}、$\{\pi_{n,A_i}(S_{j_3})\}_{j_3 \in \{j_2 | A_i = A_{S_{j_2}}\}}$）的正规点，那么对于任意满足 $i' \neq i$ 的 $i' \in \mathbb{N}_a$ 以及任意单元素集合 $N_{A_{i'}、1} \subset A_{i'}$，集合 $(D_{A_{i'}}{}^{\mathbb{R}^{n_{A_{i'}}}} - D_{A_{i'}}) \bigcap \pi_{n、A_{i'}}(\overline{\pi_{n、A_i}{}^{-1}(p_i)})$ 仅包含（D_{A_i}、$\{\pi_{n,A_i}(S_{j_3})\}_{j_3 \in \{j_2 | A_i = A_{S_{j_2}}\}}$）的 $\pi_{A_{i'}、\mathbb{N}}(N_{A_{i'}}, 1)$ -*N*点。在此

——

p 当前情况 $\cdot \cap_{i=1}^{a} \pi_{n,A_i}{}^{-1}(D_{A_i}) \quad \{S_j\}_{j=1}^{l})$ 是一个 *RA- gion.*

我们将在下一节证明这一点、给出重要示例，并陈述我们的补充结果。第三节用于补充说明。

2. On our main result.

定义4。 在定理1中，假设(1)、(2)、(3)和(4)被称为一对($\{S_j\}_{j=1}^{l}$，$\{A_i\}_{i=1}^{a}$)的预实代数区域条件或*PRAR*条件，如定理1开头、假设(1)之前所述。此外，条件(5)被称为这样一对($\{S_j\}_{j=1}^{l}$，$\{A_i\}_{i=1}^{a}$)的 b-交条件，其中数 b 从 $b = 1$ 推广为 $\mathbb{N}_{n-1}$中的一般整数。

定理*1*的证明。根据 $(\{S_j\}_{j=1}^{l}, \{A_i\}_{i=1}^{a})$ 的 PRAR条件，通过定义 $U_D := \bigcap_{i=1}^{a} \pi_{n,A_i}{}^{-1}(U_{A_i})$，其中 U_{A_i} be- ing ”U_D in the situation of Definition 1”，我们得到定义 1 的条件 (1)。只需证明定义 1 的条件 (2) 得以满足。

设 $p \in \bigcap_{i=1}^{a} {\pi_{n,A_i}}^{-1}(D_{A_i})$。我们可以分为以下三种情况。

情形1-1. 对于任意 $i \in \mathbb{N}_a$, $\pi_{n,\ A_i}(p)$ 对任意单元素集合 $N_{A_{i,\ 1}} \subset A_i$ 都是一个 $\pi_{n,\ A_i}(N_1)$-N点。

在此情形下，对于每个 A_i，至多有一个带有 $A_{S_{i_j}} = A_i$ 的 $\{S_j\}_{j=1}^{l}$ 流形 S_{i_j} 包含 p，且 S_{i_j} 在该处的法向量具有 $\Sigma_{j' \in A_i} a_{j'} e_{j'}$ 的形式，其中所有系数均非零。条件 (2) 对这样的点 p 成立。

下文中，对于带有 $1 \leq k \leq n$的 k元素集合 $N_k \subset \mathbb{N}_n$ ，我们定义 $\mathbb{N}_{N_k \subset A} := \{i \in \mathbb{N} \mid N_k \subset A_i\}$。

情形1-2. 对于某个 $i_0 \in \mathbb{N}_a$, $\pi_{n,\ A_{i_0}}(p)$ 是集合 $N_{A_{i_0,\ 1}} \subset A_{i_0}$ 的一个 $\pi_{A_{i_0,\ \mathbb{N}}}(N_{A_{i_0,\ 1}})$-临界点，属于 $(D_{A_{i_0}}, \{\pi_{n,A_i}(S_{j_3})\}_{j_3 \in \{j_2 | A_{i_0} = A_{S_{j_2}}\}})$。

首先，有限多个流形 $S_{i_{0_j}}$ 属于 $\{S_j\}_{j=1}^{l}$，且其中包含 p 的流形 $A_{S_{i_{0_j}}} = A_{i_0}$ 的法向量具有 $\Sigma_{j' \in A_{i_0}} a_{j'} e_{j'}$ 的形式，并且某个系数非零。根据 RA区域 的定义，它们彼此独立。

对于任意元素$i_1 \in \mathbb{N}_{N_{A_{i_{0'\ 1}} \subset A}} = \{i \in \mathbb{N} \mid N_{A_{i_0},1} \subset A_i\}$，由条件 (6) 可知，至多有一个属于 $\{S_j\}_{j=1}^{l}$ 且包含 p 的流形 $S_{i_{1_j}}$ ，其法向量 $S_{i_{1_j}}$ 具有由 $\{e_j\}_{j \in N_{A_{i_{0'\ 1}}}}$ 生成的向量与另一个具有 $\Sigma_{j' \in A_{i_1} - N_{A_{i_{0'\ 1}}}} a_{j'} e_{j'}$ 形式的向量之和的形式，并且某个系数非零。回忆一下 $(\{S_j\}_{j=1}^{l},\ \{A_i\}_{i=1}^{a})$ 的 1-交条件。由此可知，对于不同的$i_1 \in \mathbb{N}_{N_{A_{i_{0'\ 1}} \subset A}}$，集合 $A_{i_1} - N_{A_{i_{0'\ 1}}}$ 两两不相交。

对于任意元素 $i' \in \mathbb{N}_a - \mathbb{N}_{N_{A_{i_{0'\ 1}} \subset A}}$，由条件 (6) 可知，至多有一个带有 $A_{S_{i'_j}} = A_{i'}$ 的 $\{S_j\}_{j=1}^{l}$ 流形 $S_{i'_j}$ 包含 p，且该流形在此处的法向量 $S_{i'_j}$ 具有如下形式：$\Sigma_{j' \in A_{i'}} a_{j'} e_{j'}$，其中所有系数均非零。

我们已经说明了族 $\{S_j\}$ 中所有流形在 p 处的所有法向量。根据这些向量的形式，这里的所有向量彼此线性无关。

情形 1-3. 对于某些 $i_0 \in \mathbb{N}_a$， $\pi_{n,\ A_{i_0}}(p)$ 不是 $(D_{A_{i_0}},\ \{\pi_{n,A_i}(S_{j_3})\}_{j_3 \in \{j_2 | A_{i_0} = A_{S_{j_2}}\}})$ 的正规点。

首先，有限多个带有 $A_{S_{i_{0_j}}} = A_{i_0}$ 的 $\{S_j\}_{j=1}^{l}$ 流形 $S_{i_{0_j}}$ 包含 p，且它们在此处的法向量 $S_{i_{0_j}}$ 具有如下形式： $\Sigma_{j' \in A_{i_0}} a_{j'} e_{j'}$，其中某个系数非零。根据 RA区域的定义，它们彼此线性无关。

对于任意元素 $i \in \mathbb{N}_a - \{i_0\}$，根据条件 (7)，至多有一个带有 $A_{S_{i_j}} = A_i$ 的 $\{S_j\}_{j=1}^{l}$ 流形 S_{i_j}包含 p，且该处 S_{i_j} 的法向量形式为 $\Sigma_{j' \in A_i} a_{j'} e_{j'}$，其中所有系数均非零。

我们已经说明了族 $\{S_j\}$ 在 p 处所有流形的全部法向量。根据这些向量的形式，这里的所有向量彼此线性无关。

由此完成了对定义 1 的条件 (2) 得以满足这一事实的证明。

证明至此完成。 □

下文中，对于 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 中的1维流形，我们也称之为"曲线"；对于 $\mathbb{R}^n$($n \geq 1$) 中的（$n-1$）维流形，我们也称之为"超曲面"。接下来给出定理1的推论。

定理2。对于一对（$\{S_j\}_{j=1}^{l}$、$\{A_i\}_{i=1}^{a}$），如上文定理*1*开头所述，在假设（*1*）下，令 A_i 的大小对于每个 i均为1 或2，并设其满足*PRAR*条件，且其1-交条件也得到满足。在这种情况下，以下两项等价。

- 定理*1*中的条件（6）和（7）得到满足。
- 设 N_1 为 $\mathbb{N}$ 的任意一个单元素集，且该集合至少包含于 $\{A_i\}_{i=1}^{a}$中的两个不同集合中。对于任意一对（$A_{N_{11}}$、$A_{N_{12}}$）这样的互异集合，不存在一对（p_1、p_2），其中$\pi_{A_{N_{11}}}$、$\mathbb{N}$（N_1）-临界点 p_1 或一个不是（$D_{A_{N_{11}}}$、$\{\pi_{n,A_{N_{11}}}(S_{j_3})\}_{j_3\in\{j_2|A_{N_{11}}=A_{S_{j_2}}\}}$）的正规点的点$p_1$，以及$\pi_{A_{N_{12}}}$、$\mathbb{N}$（$N_1$）-临界点 p_2 或一个不是（$D_{A_{N_{12}}}$、$\{\pi_{n,A_{N_{12}}}(S_{j_3})\}_{j_3\in\{j_2|A_{N_{12}}=A_{S_{j_2}}\}}$）的正规点的点 p_2，使得$\pi_{n,N_1}(\pi_{n,A_{N_{11}}}^{-1}(p_1)) = \pi_{n,N_1}(\pi_{n,A_{N_{12}}}^{-1}(p_2))$，其中后者为单点集。

我们仅给出定理2的相关论证。

对于 $D_{A_i}^{\mathbb{R}^n}$ 的每个点 $-D_{A_i}$ 中不是 $(D_{A_i},\{\pi_{n,A_i}(S_{j_3})\}_{j_3\in\{j_2|A_i=A_{S_{j_2}}\}})$ 的正规点的点，恰有两条曲线经过 $\{\pi_{n,A_i}(S_{j_3})\}_{j_3\in\{j_2|A_i=A_{S_{j_2}}\}}$ 中该点。这两条曲线在该处的法向量线性无关，并张成该处平面 $\mathbb{R}^2$ 的切向量。

根据我们的定义和表述，可以验证定理2。这是一项例行工作。

如果删去定理2中的后一个条件，那么根据定义以及对 $A_{N_{11}}$和 $A_{N_{12}}$的观察，再结合 $(\{S_j\}_{j=1}^{l},\{A_i\}_{i=1}^{a})$ 的 PRAR条件，可以看出定理1中的条件 (6) 或 (7) 被删去了。

反过来，如果删去定理1中的条件 (6) 和 (7) 中至少一个，那么对于来自 $\{A_i\}_{i=1}^{a}$ 的一对互不相同的集合 $(A_{N_{11}},A_{N_{12}})$，以及满足该条件的一对点 (p_1,p_2)，我们可以有 $\pi_{n,N_1}(\pi_{n,A_{N_{11}}}^{-1}(p_1)) = \pi_{n,N_1}(\pi_{n,A_{N_{12}}}^{-1}(p_2))$.

我们将例1和例2作为定理1（定理2）的几个示例进行说明。例1。设 $n=3$。设 $S_1=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid f_1(x_1,\ x_2,\ x_3)=1-(x_1-\frac{1}{2})^2-{x_2}^2=0\}$ 以及 $S_2=\{(x_1,-x_2,\ x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid f_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=1-(x_1+\frac{1}{2})^2-{x_3}^2=0\}$。设$A_{S_i}=A_i$。

例2。在以往研究中，例如 [11, 12, 21, 23], ，我们遇到过这样的情形：给定具有 $\{1\}$ 公共的 $a>1$ 2元集合，以及平面中二次曲线的 S_j 柱体 $\mathbb{R}^2$。另请参见第三节。

此后，令 $N_d\subset\mathbb{N}_n$ 表示一个如前所述的 d 元素集。

定义5中给出了定义3的高维版本。

定义5。在定义 1 中，我们作如下定义。

(1) 设 $1\leq k\leq n-1$ 为一个整数。我们考虑 $S_{i_j,\ 1\leq j\leq l'}$ 中所有属于这 $l'<n-k+1$ 个不同超曲面 S_{i_j} 且不属于任何其他超曲面 S_j 的点所组成的集合，如定义3所述。点$p\in S_{i_j,\ 1\leq j\leq l'}$ 若其法向量 $S_{i_j,\ 1\leq j\leq l'}$ 具有 $\Sigma_{j\in N_k}t_je_j$ 的形式，则它也是 $(D,\ \{S_j\}_{j=1}^{l})$ 的一个 N_k-奇异 点。

(2) 如果 $(D,\ \{S_j\}_{j=1}^l)$ 的正规点 p 不是 $(D,\ \{S_j\}_{j=1}^l)$ 的 N_k-临界点（其中 $N_k \subset \mathbb{N}_n$ 是一个含 k 个元素的集合），则称其为 $(D,\ \{S_j\}_{j=1}^l)$ 的一个 N_k-正规点或一个 N_k-***N*** 点。

根据我们的表述，立即可得以下结论。

命题1. 对于一个***RA***区域$(D,\{S_j\}_{j=1}^l)$ 及 $D^{\mathbb{R}^n}$中的一点，以下结论成立。

(1) 点 $p\in D^{\mathbb{R}^n}-D$ 是$(D,\{S_j\}_{j=1}^l)$ 的 N_1-奇点，当且仅当它是$(D,\{S_j\}_{j=1}^l)$的 N_1-临界点。(2) 我们考虑 k_1、$k_2\in\mathbb{N}$、N_{k_1} 和 N_{k_2}，使得关系 $N_{k_1}\subset N_{k_2}\subset\mathbb{N}_n$ 成立。若点 $p\in D^{\mathbb{R}^n}-\overline{D}$ 是$(D,\{S_j\}_{j=1}^l)$的 N_{k_2}-***N***点，则它是$(D,\{S_j\}_{j=1}^l)$的 N_{k_1}-***N***点。

定理3. 在定理*1*中，一对$(\{S_j\}_{j=1}^l,\{A_i\}_{i=1}^a)$满足***PRAR***条件、关于它的$b$-交条件以及条件(*7*)。此外，以下结论成立。

(8) *If* $p_i\in\overline{D_{A_i}}^{\mathbb{R}^{n_{A_i}}}-D_{A_i}$ *is a* $\pi_{A_i,\mathbb{N}}(N_{A_i,k})$*-singular point of* $(D_{A_i},\{\pi_{n,A_i}(S_{j_3})\}_{j_3\in\{j_2|A_i=A_{S_{j_2}}\}})$ *which is also a normal point of it for a* k*-element set* $N_{A_i,k}\subset A_i$ *with* $1\le k\le b$*, then for any* $i'\in\mathbb{N}_a$ *with* $i'\neq i$ *and* $N_{A_i,k}\subset A_{i'}$*, the set* $(\overline{D_{A_{i'}}}^{\mathbb{R}^{n_{A_{i'}}}}-D_{A_{i'}})\bigcap\pi_{n,A_{i'}}(\pi_{n,A_i}{}^{-1}(p_i))$ *contains only normal points of* $(D_{A_{i'}},\{\pi_{n,A_{i'}}(S_{j_3})\}_{j_3\in\{j_2|A_{i'}=A_{S_{j_2}}\}})$*, and for any* $i'\in\mathbb{N}_a$ *with* $i'\neq i$ *and* $N_{A_i,k}-(N_{A_i,k}\bigcap A_{i'})$ *being non-empty, for any one-element set* $N_{A_{i'},1}\subset A_{i'}$*, the set* $(\overline{D_{A_{i'}}}^{\mathbb{R}^{n_{A_{i'}}}}-D_{A_{i'}})\bigcap\pi_{n,A_{i'}}(\pi_{n,A_i}{}^{-1}(p_i))$ *contains only* $\pi_{A_{i'},\mathbb{N}}(N_{A_{i'},1})$*-N-points of* $(D_{A_{i'}},\{\pi_{n,A_{i'}}(S_{j_3})\}_{j_3\in\{j_2|A_{i'}=A_{S_{j_2}}\}})$.

(9) *In* (*8*)*, for any family* $\{p_{i''}\}$ *of finitely many normal points of* $(D_{A_{i''}},\{\pi_{n,A_{i''}}(S_{j_3})\}_{j_3\in\{j_2|A_{i''}=A_{S_{j_2}}\}})$ *chosen for mutually distinct* $i''\in\mathbb{N}_a$ *with* $N_{A_i,k}\subset A_{i''}$*, the normal vectors of the unique hypersurfaces in* $\{\pi_{n,A_{i''}}(S_{j_3})\}_{j_3\in\{j_2|A_{i''}=A_{S_{j_2}}\}}$ *at the points* $p_{i''}$ *are mapped to mutually independent vectors by the differentials of the projections* $\pi_{n_{A_{i''}},\pi_{A_{i''},\mathbb{N}}(N_{A_i,k})}$ *if the points are all mapped to a same point* $\pi_{n_{A_{i''}},\pi_{A_{i''},\mathbb{N}}(N_{A_i,k})}(p_{i''})$ *by* $\pi_{n_{A_{i''}},\pi_{A_{i''},\mathbb{N}}(N_{A_i,k})}$.

在当前情况下，$(\bigcap_{i=1}^a\pi_{n,\ A_i}{}^{-1}(D_{A_i})\ \{S_j\}_{j=1}^l)$ 是一个***RA***区域。

证明。这可以视为将定理1推广到带有 $1\le b\le n-1$的 b-交条件。

证明只需考虑情形1-2的一个推广，我们将讨论这个推广后的情形。

首先，我们在此回顾条件（8）。

只需考虑如下情形：对于某个整数 $i_0\in\mathbb{N}_a$，$\pi_{n,\ A_{i_0}}(p)$是$(D_{A_{i_0}},\ \{\pi_{n,A_i}(S_{j_3})\}_{j_3\in\{j_2|A_{i_0}=A_{S_{j_2}}\}})$的一个$\pi_{A_{i_0},\ \mathbb{N}}(N_{A_{i_0},\ k})$-奇点，同时也是它的正规点；这里的元素集$N_{A_{i_0},\ k}\subset A_{i_0}$ 的基数为 k，且 $1\le k\le b$。

仅有一个流形 $S_{i_{0_j}}$ 属于 $\{S_j\}_{j=1}^l$，且包含 p，其位于 $A_{S_{i_{0_j}}}=A_{i_0}$ 中。$S_{i_{0_j}}$ 在该处的法向量具有 $\Sigma_{j'\in A_{i_0}}a_{j'}e_{j'}$ 的形式，其中某个系数非零。对于 $i_1\in\mathbb{N}_{N_{A_{i_0},\ k}\subset A}=\{i\in\mathbb{N}\mid N_{A_{i_0},k}\subset A_i\}$，至多有一个流形 $S_{i_{1_j}}$ 属于$\{S_j\}_{j=1}^l$，且包含 p，而 $S_{i_{1_j}}$ 在该处的法向量具有以下形式：由 $\{e_j\}_{j\in N_{A_{i_0},\ k}}$ 生成的向量与另一个向量之和，后者的形式为

$\Sigma_{j'\in A_{i_1}-N_{A_{i_0},\ k}} a_{j'}e_{j'}$。请记住条件（9），其中 $\{p_{i''}\}$ 由 $\mathbb{N}_{N_{A_{i_0}}}$ 的任意有限子集. $_{k\subset A}$标记。所给出的各流形的法向量彼此独立。

对于任意元素 $i' \in \mathbb{N}_a - \mathbb{N}_{N_{A_{i_0},\ k\subset A}}$，根据条件（8），至多有一个流形 $S_{i'_j}$ 属于 $\{S_j\}_{j=1}^{l}$ 且满足 $A_{S_{i'_j}} = A_{i'}$，其中包含 p，并且 $S_{i'_j}$ 处的法向量具有 $\Sigma_{j'\in A_{i'}} a_{j'}e_{j'}$ 这种形式，所有系数均非零。

请再次记住，对于任意两个不同的整数 i_1 和 i_2，$A_{i_1} \subset A_{i_2}$ 都不成立。

我们已经说明了在 p处族 $\{S_j\}$ 中所有流形的全部法向量。根据这些向量的形式，此处所有向量彼此线性无关。

证明至此完成。 □

例3给出了定理3的一个具体情形。

例3. 设 $n = 4, a = 2, b = 2$ 和 $A_j = \{1, 2, j+2\}$。取充分小的正数 $r > 0$。令 $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 - (x_1 - \frac{1}{2})^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2 = 0\}$ 和 $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 + r - (x_1 + \frac{1}{2})^2 - {x_2}^2 - {x_4}^2 = 0\}$。

设 $N_{A_1,2} = \{1, 2\} \subset A_1, A_2$。集合 $S_{1,x_3=x_4=0} = \{(x_1, x_2, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 - (x_1 - \frac{1}{2})^2 - {x_2}^2 = 0\}$ 和 $S_{2,x_3=x_4=0} = \{(x_1, x_2, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 + r - (x_1 + \frac{1}{2})^2 - {x_2}^2 = 0\}$ 分别视为 $(D_{A_1}, \{\pi_{4,A_1}(S_{j_3})\}_{j_3\in\{j_2\mid A_1=A_{S_{j_2}}\}})$ 的所有 $\pi_{A_1,\mathbb{N}}(N_{A_1},2)$-奇点集合，以及 $(D_{A_2}, \{\pi_{4,A_2}(S_{j_3})\}_{j_3\in\{j_2\mid A_2=A_{S_{j_2}}\}})$ 的所有$\pi_{A_2,\mathbb{N}}(N_{A_1},2)$-奇点集合。

令 $A_{S_i} = A_i$。

3. Additional notes.

正如作者在 [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23] 中的预印本所述，例如，我们解释了一个实代数映射，它局部类似于映到闭包 $D^{\mathbb{R}^n}$ 的矩映射，见定义 1。该内容最初以 [9, 主定理 1] 的形式呈现。

定理 4（[9]）。在定义 1 中，设 $l_{\mathrm{S}}: \mathbb{N}_l \to \mathbb{N}_{l_a}$ 是一个满射，满足 $l_a \in \mathbb{N}$，使得对于满足 $S_{i_1} \bigcap S_{i_2} \bigcap D^{\mathbb{R}^n} \neq \emptyset$ 的两个不同元素 i_1、$i_2 \in \mathbb{N}_l$，有 $l_{\mathrm{S}}(i_1) \neq l_{\mathrm{S}}(i_2)$；并设 $l_{\mathrm{S}、\ \mathbb{N}}: \mathbb{N}_{l_a} \to \mathbb{N} \sqcup \{0\}$ 是函数。将 $l_{\mathrm{S}、\ \mathbb{N}}$ 在每个 $i \in \mathbb{N}_{l_a}$ 处的值分别记为 $d_{i、\ l_a}$。那么，我们有一个实代数流形 $M_{(D,\{S_j\}_{j=1}^{l},\{d_{i,l_a}\}_{i=1}^{l_a})} := \bigcap_{i=1}^{l_a} \{(x, y_1, \cdots, y_{l_a}) \mid y_i = (y_{i,j^i,l_q})_{j^i\ l_a=1}^{d_i\ l_a+1}, , , \prod_{j_i\in l_{\mathrm{S}}{}^{-1}(i)}(f_{j_i}(x)) - \Sigma^{d_i}_{j^i,\ l_a+1,l_a=1} y_{i,j^i,l_a}{}^2 = 0\}$，以及一个定义为限制 $\pi_{n+\Sigma_{i=1}^{l_a}(d_{i,l_a}+1)}$ $_n|_{M_{(D,\{S_j\}_{j=1}^{l},\{d_{i,l_a}\}_{i=1}^{l_a})}}$ 的实代数映射。

我们关注函数$\pi_{n+\Sigma_{i=1}^{l_a}(d_{i,l_a}+1)\ 1}|_{M_{(D,\{S_j\}_{j=1}^{l},\{d_{i,l_a}\}_{i=1}^{l_a})}}$的拓扑性质和组合性质。函数的这些性质可通过其$Reeb(di)$图来理解。

对于流形 X with no boundary $c : X \to \mathbb{R}$上的光滑函数，我们可以定义商空间 R_c 和商映射 $q_c : X \to R_c$，并且可以得到唯一的连续函数 $\bar{c} \to \mathbb{R}$，满足 $c = \bar{c} \circ q_c$。在 X 是闭流形，且 c 的所有奇点集合的像有限，并包含诸如 [7], 中所示的显式非真情形的情况下，例如，这个商空间 R_c具有如下图结构。根据 [32, 定理3。1] 和 [33,

定理 1], R_c 是一个图，其中包含 c 的一些奇点的点 v，满足 $q_c{}^{-1}(v)$，在前一种情况下被定义为其顶点。后一种情况可以通过观察函数的局部行为来理解。这个图 R_c 是 c 的 ***Reeb*** 图 。这也是一个有向图，其中每条边 e 都从一个顶点 $v_{e,1}$ 指向另一个顶点 $v_{e,2}$，其中关系 $\bar{c}(v_{e,1}) < \bar{c}(v_{e,2})$，并由此得到 c 的***Reeb*** 有向图 $\overrightarrow{R_c}$。

我们回到定理 4。这一研究受到实代数版本的启发：Sharko 在 [34], 开启了对具有指定 Reeb（有向）图的优良光滑函数重构问题的研究，随后出现了诸如 [27, 28] 这样的研究；作者也在 [6, 7]沿着这一方向开展研究，不仅关注 Reeb 图，也关注水平集的形状。论文 [8] 是关于实代数构造的一篇相关开创性论文，之后首先有 [9, 10, 11, 12] ，作者本人又在 [13], 对此作了评述。在我们当前的研究及其密切相关的研究中，我们致力于推动对实代数流形的形状以及其上的函数和映射的系统研究。

4. Conflict of interest and data availability.

利益冲突。
作者还是大阪中央先进数学研究所（OCAMI 研究员）的研究人员，其研究由文部科学省特色联合研究中心推进计划 JPMXP0723833165 资助。他并非该所的雇员。本研究为我们的研究工作而开展，我们也对此表示感谢。

数据可用性。
本文未涉及其他数据。

References

[1] A. Banyaga 和 D. Hurtubise, *Lectures on Morse Homology*, 《Kluwer 数学科学丛书》, 第 29 卷。Kluwer 学术出版社集团，多德雷赫特（2004）。[2] V. M. Buchstaber 和 T. E. Panov, *Toric topology*, 《数学调查与专著》, 第 204 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。[3] A. Bodin、P. Popescu-Pampu 和 M. S. Sorea, *Poincaré-Reeb graphs of real algebraic domains* 10 1007 13163 , 《康普顿斯数学杂志》, https://link.springer.com/article/ . /s - 023-00469-y，2023，arXiv:2207.06871v2。[4] M. Golubitsky 和 V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*, 《数学研究生教材》（14）, 施普林格出版社（1974）。[5] Helmut A. Hamm, *On stratified Morse theory: from topology to constructible sheaves*, 《奇异空间的几何与拓扑会议论文集》, CIRM，2012, 《奇点杂志》第 13 卷，(2015)，141–158。[6] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on 3-dimensional closed orientable manifolds with finitely many singular values* , 《非线性分析中的拓扑方法》第 59 卷第 2B 期，897–912，arXiv:1902.08841。[7] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on closed or open surfaces* 28 2 2022 127 143, , 《泛函分析与拓扑方法》第 卷第 期（），– arXiv:1908.04340。[8] N. Kitazawa, *Real algebraic functions on closed manifolds whose Reeb graphs are given graphs* 28 4 2022 302 308, , 《泛函分析与拓扑方法》第 卷第 期（），– arXiv:2302.02339，2023。[9] N. Kitazawa, *Reconstructing real algebraic maps locally like moment maps with prescribed images and compositions with the canonical projections to the 1-dimensional real affine space*, arXiv:2303.10723。[10] N. Kitazawa, *Explicit smooth real algebraic functions which may have both compact and non-compact preimages on smooth real algebraic manifolds* 2304 02372 , arXiv: . .

[11] N. Kitazawa, *On real algebraic maps whose images are domains surrounded by the products of hyperbolas and real affine spaces* 2304 07540 , arXiv: . .[12] N. Kitazawa, *Notes on Reeb graphs of real algebraic functions which may not be planar*, arXiv:2307.07122.[13] N. Kitazawa, *Some remark on real algebraic maps which are topologically special generic maps and generalize the canonical projections of the unit spheres* 2312 10646 , arXiv: . .[14] N. Kitazawa, *Arrangements of small circles for Morse-Bott functions and regions surrounded by them* 2412 20626 3 , arXiv: . v .[15] N. Kitazawa, *Arrangements of circles supported by small chords and compatible with natural real algebraic functions* 2501 11819 , arXiv: . .[16] N. Kitazawa, *Realizations of planar graphs as Poincaré-Reeb graphs of refined algebraic domains* 2501 17425, 2025 , arXiv: . .[17] N. Kitazawa, *Moment-like maps and real algebraic functions with prescribed preimages*, arXiv:2506.17791, 2025.[18] N. Kitazawa, *Graphs with their decompositions of small graphs and realizing them as the Reeb graphs of real algebraic functions* 2508 00729 , arXiv: . .[19] N. Kitazawa, *Planar graphs embedded in generic ways and realizing them as Reeb graphs of real algebraic functions* 2508 09498, 2025 , arXiv: . .[20] N. Kitazawa, *Regions surrounded by circles whose Poincaré-Reeb graphs are trees*, arXiv:2511.06342, 2025.[21] N. Kitazawa, *Regions surrounded by cylinders of circles of fixed radii and exposition of their shapes by natural graphs* 2512 15438, 2025 , arXiv: . .[22] N. Kitazawa, *A note on cohomological structures of special generic maps*, 在第三次投稿至同行评议期刊后，根据审稿人和编辑的积极意见，已提交修订版。[23] N. Kitazawa, *Reeb graphs of compositions of a real algebraic map locally moment maps with projections* 2025 ，已提交至预印本服务器 https://jxiv.jst.go.jp/index.php/jxiv/index，。[24] J. Koll´ar, *Nash's work in algebraic geometry*, 《美国数学会通报》（新系列）（2）54，2017，307–324。[25] Camillo De Lellis, *The Masterpieces of John Forbes Nash Jr.*, 《阿贝尔奖 2013–2017》（Helge Holden 和 Ragni Piene 编），施普林格国际出版公司，施普林格，2019，391–499，https://www.math.ias.edu/delellis/sites/math.ias.edu.delellis/files/Nash Abel 75.pdf，arXiv:1606.02551。[26] D B. Massey, *Stratified Morse theory past and present* 2 4, 2, : , Pure Appl. Math. Q. . 第 –[27] Y. Masumoto 和 O. Saeki, *A smooth function on a manifold with given Reeb graph*, 《九州数学杂志》65（2011），75–84。[28] L. P. Michalak, *Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold*。《非线性分析中的拓扑方法》52（2）（2018），749–762，arXiv:1805.06727。[29] J. Nash, *Real algebraic manifolds*, 《数学年刊》（2）56（1952），405–421。[30] G. Reeb, *Sur les points singuliers d´une forme de Pfaff complétement intègrable ou d´unefonction numérique*, 《法国科学院周报》´eances de l´Acad´emie des Sciences 222（1946），847–849。[31] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, 《拓扑学及其应用》49（1993），265–293。[32] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*, 《国际数学研究通报》，maa301，第 2022 卷第 11 期，2022 年 6 月，3740–3768，https://doi.org/10.1093/imrn/maa301，arXiv:2006.01689。[33] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds II*, 《数学研究科学》11，文章编号 24（2024），11–24。[34] V. Sharko, *About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold*, 《泛函分析与拓扑方法》12（2006），389–396。[35] A. Tognoli, *Su una congettura di Nash*, 《比萨高等师范学校学报》（3）27（1973），167–185。

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University, 744 Motooka, Nishi-ku Fukuoka 819-0395, Japan, TEL (Office): +81-92-802-4402, FAX (Office): +81-92-802-4405,

Email address: naokikitazawa.formath@gmail.com
Webpage: https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html