arXiv:2601.06523v1 [math.DS] 10 Jan 2026

# 跟踪、具有非空内部的链传递集与吸引子边界

NORIAKI KAWAGUCHI

Abstract. 我们从跟踪的角度考察 $C^1$-动力系统中的某些现象，并改进一项关于双曲集的已知结果。我们还从同一角度回顾一项关于吸引子边界稳定性的结果，并推导出若干补充结果。

## 1. 引言

跟踪 是动力系统拓扑理论中的一个重要概念（背景介绍见[4, 13] ）。它最初是在双曲可微动力学的研究中引入的[3, 7] ，通常指粗略轨道（即伪轨道）能够被真实轨道紧密逼近的情形。影踪引理指出，闭可微流形上的 $C^1$-微分同胚在其双曲集附近具有跟踪性质，在可微动力学研究中发挥着关键作用。值得注意的是，跟踪是闭可微流形上同胚的一种泛性质 [14] ，因此在 $C^0$-泛动力学的研究中也具有重要作用。

设 $M$ 是一个闭可微流形。在 [1], 中有如下猜想：对于 $C^1$-泛型微分同胚 $f\colon\ M \to M$，如果非游荡集 $\Omega(f)$ 具有非空内部，那么 $f$ 是传递的（另见 [5, 8, 15]）。 [1] 中证明了

（1）对于 $C^1$-微分同胚 $f\colon\ M \to M$，如果 $f$ 的双曲集 $\Lambda$ 满足 $\Lambda \subset \Omega(f)$ 且具有非空内部，那么 $\Lambda = M$，从而 $f$ 是 Anosov 的；（2）对于泛型 $C^1$-微分同胚 $f\colon\ M \to M$，如果 $f$ 是驯服的，那么任何具有非空内部的同宿类 $H$ 都满足 $H = M$，因此在这种情况下， $f$ 是传递的。

[12, 第 3], 章中的一个结果看似与上述结果无关：对于 $C^0$-泛型同胚 $f\colon\ M \to M$， $f$ 的每个吸引子的边界都是李雅普诺夫稳定的（另见 [9]）。在本文中，我们将从跟踪的角度对这些现象给出一个统一的论述。

对于紧致度量空间上的一个同胚，我们证明，任何具有非空内部且在其邻域上具有跟踪性质的链传递集，都与一个初始链分支和一个终端链分支重合。若满足额外的跟踪条件（即所谓的 L-跟踪），则该链传递集在相空间中既开又闭。作为影踪引理的推论，我们改进了上述结果 (1)。我们还证明，对于任何在其邻域上具有跟踪性质的吸引子，其边界都是链稳定的，并由此得出若干推论。

在全文中， $X$ 表示赋予度量 $d$的紧致度量空间。我们首先定义子集上的跟踪和 L-跟踪。设 $f\colon X \to X$ 为连续映射。对于$\delta > 0$，若 $k \geq 1$，则$x_i$中的点的有限序列 $(x_i)_{i=0}^{k}$ 称为 $f$ 的 $\delta$-链，如果

$$\sup_{0 \leq i \leq k-1} d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \delta.$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 37B35, 37B65, 37C20, 37D05.

*Key words and phrases.* 跟踪，L-跟踪，链，吸引子，边界。

对于 $X$的子集 $S$，如果对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得满足 $\{x_i$的 $X$ 中的每个 $\delta$-链 $(x_i)_{i=0}^k$ 都满足以下条件，则称 $f$ 在 $S$ 上具有跟踪：$0 \leq i \leq k\} \subset S$

$$\sup_{0 \leq i \leq k} d(x_i, f^i(x)) \leq \epsilon$$

对某个 $x \in X$。在这种情况下，$(x_i)_{i=0}^k$ 称为被 $\epsilon$-跟踪于 $x$。L-跟踪的定义可见于 [6]。设 $f\colon X \to X$ 为一个同胚。对于 $\delta > 0$，$X$ 中的点的一个双无限序列 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 称为 $f$ 的 $\delta$-极限伪轨道，如果

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \delta$$

and

$$\lim_{i\to-\infty} d(f(x_i), x_{i+1}) = \lim_{i\to+\infty} d(f(x_i), x_{i+1}) = 0.$$

对于 $X$的一个子集 $S$，如果对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得每个满足 $\{x_i\colon i \in \mathbb{Z}\} \subset S$ 的 $f$ 的 $\delta$-极限伪轨道 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 都满足

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} d(x_i, f^i(x)) \leq \epsilon$$

and

$$\lim_{i\to-\infty} d(x_i, f^i(x)) = \lim_{i\to+\infty} d(x_i, f^i(x)) = 0$$

对某个 $x \in X$。在这种情况下，$(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 称为被 $\epsilon$-极限影踪于 $x$。

链回复集和链分支是全面理解动力系统的基本对象。定义如下。设 $f\colon X \to X$ 为一个连续映射。给定 $x,\ y \in X$，记号 $x \to y$ 表示：对于每个 $\delta > 0$，存在一个 $\delta$-链 $(x_i)_{i=0}^k$，其取自 $f$，并满足 $x_0 = x$ 和 $x_k = y$。如果对所有 $x,\ y \in X$都有 $x \to y$，则称 $f$ 是链传递的。对于 $f$，链回复集 $CR(f)$定义为

$$CR(f) = \{x \in X\colon x \to x\}.$$

我们定义关系 $\leftrightarrow$ in

$$CR(f)^2 = CR(f) \times CR(f)$$

如下：对所有 $x, y \in CR(f)$，$x \leftrightarrow y$当且仅当 $x \to y$且 $y \to x$。注意，$\leftrightarrow$是 $CR(f)^2$中的闭等价关系，并且对所有 $x \in CR(f)$，满足 $x \leftrightarrow f(x)$。$\leftrightarrow$ 的一个等价类$C$ 称为 $f$的链分支 。我们用 $\mathcal{C}(f)$ 表示 $f$的链分支集合。链分支的基本性质如下

- $CR(f) = \bigsqcup_{C\in\mathcal{C}(f)} C$，这是一个不交并，
- $C$ 在 $X$ 中是闭的，并且对所有 $C \in \mathcal{C}(f)$，满足 $f(C) = C$，
- $f|_C$：对所有 $C \in \mathcal{C}(f)$，$C \to C$都是链传递的。

给定连续映射 $f\colon X \to X$，若 $X$的子集 $S$满足 $f(S) \subset S$，则称其为 $f$-不变 的。若闭的 $f$-不变子集 $S$ 属于 $X$，且对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对于满足 $x_0 \in S$ 的 $f$ 中任意 $\delta$-链 $(x_i)_{i=0}^k$，均有 $d(x_k, S) \leq \epsilon$，则称该子集为链稳定 的。容易证明，对于 $X$的闭 $f$-不变子集 $S$，以下条件等价

- $S$ 是链稳定的，
- $x \to y$ 蕴含对所有 $x \in S$ 和 $y \in X$ 都有 $y \in S$。

按照 [2], ，如果链分支 $C \in \mathcal{C}(f)$ 是链稳定的，我们称其为终端链分支。我们用 $\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$ 表示 $f$ 的终端链分支集合。当 $f$ 是一个同胚时，如果 $C \in \mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f^{-1})$，则称链分支 $C \in \mathcal{C}(f)$ 为初始链分支。我们用 $\mathcal{C}_{\mathrm{int}}(f)$ 表示 $f$ 的初始链分支集合。

对于 $X$ 的子集 $S$ 和 $r>0$，我们用 $B_r(S)$ 表示 $S$ 的闭 $r$-邻域：

$$B_r(S)=\{x\in X:\, d(x,S)\le r\}$$

其中 $d(x,\ S)$ 表示 $x$ 到 $S$的距离：

$$d(x,S)=\inf_{y\in S} d(x,y).$$

对于 $X$的一个子集 $S$，我们分别用 $S$、$\mathrm{int}[S]$和 $\partial S$ 表示 $S$的闭包、内部和边界。注意，

$$\partial S=\overline{S}\setminus \mathrm{int}[S].$$

本文的第一个结果如下。

**定理 1.1**。设 $f:\ X\to X$ 是一个同胚，且 $\Lambda$ 是 $X$的一个闭 $f$-不变子集。若

- $\mathrm{int}[\Lambda]\neq\emptyset$,
- $f|_\Lambda:\ \Lambda\to\Lambda$ 是链传递的，
- $f$ 在 $B_b(\Lambda)$ 上具有跟踪性质和 $L$-跟踪性质，其中某个 $b>0$,

那么 $\Lambda$ 在 $X$ 中既开又闭；因此，若进一步 $X$ 连通，则 $X=\Lambda$ 和 $f$ 是混合同胚。

**注 1.1.** 称连续映射 $f\colon X\to X$ 为

- 混合，如果对于任意非空开子集 $U,V$，它们是 $X$ 的子集，则存在 $j\ge 0$，使得$f^i(U)\cap V\neq\emptyset$对所有 $i\ge j$均成立，
- 链混合，如果对于任意 $x,y\in X$ 和 $\delta>0$，存在 $j\ge 1$，使得对每个 $k\ge j$，都有一个 $\delta$-链 $(x_i)_{i=0}^k$，属于 $f$，且满足 $x_0=x$ 和 $x_k=y$。

如果 $f$ 是混合的，那么 $f$ 是链混合的；反之，若 $f$ 在 $X$上具有跟踪性质，则结论也成立。根据 [16, 推论 14], ，我们知道，只要 $X$ 是连通的， $f$ 满足 $X=CR(f)$ 当且仅当 $f$ 是链传递的，而这又当且仅当 $f$ 是链混合的。

我们陈述定理 1.1 的一个推论。若对于任意 $x\in X$以及 $X$ 中满足 $x\in U$的任意开子集 $U$，都存在 $X$ 的一个开连通子集 $V$使得$x\in V\subset U$，则称 $X$ 是局部连通的。

**推论 1.1**。设 $f\colon X\to X$ 是一个同胚，且 $\Lambda$ 是 $X$的一个闭 $f$-不变子集。如果

- $X$ 是连通且局部连通的，
- 内$[\Lambda]\cap$内$[CR(f)]\neq\emptyset$(特别是，$\Lambda\subset CR(f)$ 以及内$[\Lambda]\neq\emptyset$),
- $f$ 在 $B_b(\Lambda)$ 上具有跟踪和 $L$-跟踪性质，其中某个 $b>0$,

那么，$X=\Lambda$ 和 $f$ 是混合同胚。

由第 2 节中的推论 1.1 和引理 2.2，我们得到如下推论，它改进了 [1,定理 1]。

**推论 1.2.** 设 $M$ 是一个闭黎曼流形，且 $f\colon M\to M$ 是一个 $C^1$- 微分同胚。对于 $f$的一个双曲集 $\Lambda$，若 内$[\Lambda]\cap$内$[CR(f)]\neq\emptyset$（特别是，$\Lambda\subset CR(f)$ 且 内$[\Lambda]\neq\emptyset$），则 $M=\Lambda$ 和 $f$ 是一个混合的 *Anosov* 微分同胚。

给定一个同胚 $f\colon X\to X$，我们称 $X$中的闭子集 $\Lambda$，若满足 $f(\Lambda)=\Lambda$，则称其为 $f$的吸引子，如果存在 $X$中的开子集 $U$，使得 $f(U)\subset U$且

$$\Lambda=\bigcap_{i\ge 0} f^i(U).$$

设 $M$ 是一个闭可微流形。根据 [12, 定理 3.2.4], ，我们知道，对于一个$C^0$-泛型同胚 $f\colon M \to M$， $f$的每个吸引子的边界都是李雅普诺夫稳定的（另见 [9, 定理 2.1]）。注意，一个 $C^0$-泛型同胚 $f\colon M \to M$ 在 $M$ [14]上具有跟踪性质。

本文的第二个主要结果如下。

**定理 1.2.** 设 $f\colon X \to X$ 是一个同胚，且 $\Lambda$ 是 $f$ 的一个吸引子。若 $f$ 在某个 $b > 0$ 上对 $B_b(\Lambda)$ 具有跟踪性质，则 $\partial\Lambda$ 是链稳定的。

定理 1.1 和定理 1.2 的证明将基于同一个引理（第 3 节中的引理 3.1）。

本文由六节和一个附录组成。在第 2 节中，我们证明若干基本引理。在第 3 节中，我们给出一个简单引理，该引理将在定理 1.1 和定理 1.2 的证明中使用。在第 4 节中，我们证明定理 1.1 和推论 1.1，并给出另外两个推论。在第 5 节中，我们证明定理 1.2 并给出相关推论。在第 6 节中，我们作一些总结性评论。在附录 A 中，我们证明一个关于吸引子边界连通性的定理。

## 2. Preliminaries

本节旨在证明关于膨胀性、L-跟踪和链分支的若干基本引理。

给定同胚 $f\colon X \to X$ 和 $X$的子集 $S$，如果存在 $e > 0$ 使得，则称 $f$ 在 $S$上是胀性的，

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} d(f^i(x), f^i(y)) \le e$$

则对所有 $x, y \in \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(S)$都有 $x = y$。此时，称 $e > 0$ 为 $S$上 $f$ 的膨胀常数。

**引理 2.1**。设 $f\colon X \to X$ 是一个同胚，且 $S$ 是 $X$的子集。对于任意$0 < b < c$，如果 $f$ 在 $B_c(S)$上具有膨胀性和跟踪性质，那么 $f$ 在 $B_b(S)$上具有 $L$-跟踪性质。

证明。设 $e > 0$是 $B_c(S)$上 $f$的膨胀常数。令 $0 < \epsilon \le \min\{e, c-b\}$。由于 $f$在 $B_c(S)$上具有跟踪性质，存在 $\delta > 0$，使得 $B_c(S)$中的每个 $\delta$-链都由 $X$中的某个点进行 $\epsilon$-跟踪。对于 $B_b(S)$中的 $f$ 的任意 $\delta$-极限伪轨道 $\xi = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，我们有

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} d(x_i, f^i(x)) \le \epsilon$$

对于某个 $x \in X$。注意， $\{f^i(x)\colon i \in \mathbb{Z}\} \subset B_c(S)$。如果

$$\limsup_{i\to-\infty} d(x_i, f^i(x)) > a > 0,$$

那么存在一个序列 $0 \ge i_1 > i_2 > \cdots$和 $y$， $z \in X$使得

- 极限$_{j\to\infty} x_{i_j} = y$且极限$_{j\to\infty} f^{i_j}(x) = z$,
- $d(y, z) \ge a$；因此， $y \ne z$。

由于 $\xi$ 是 $f$ 的一个 $\delta$-极限伪轨道，我们有

$$\lim_{j\to\infty} d(f^i(x_{i_j}), x_{i+i_j}) = 0$$

对所有 $i \in \mathbb{Z}$。由于

$$f^i(y) = \lim_{j\to\infty} f^i(x_{i_j}) = \lim_{j\to\infty} x_{i+i_j},$$

$i \in \mathbb{Z}$，我们有 $\{f^i(y) : i \in \mathbb{Z}\} \subset B_b(S)$。由于

$$f^i(z) = \lim_{j\to\infty} f^i(f^{i_j}(x)) = \lim_{j\to\infty} f^{i+i_j}(x),$$

$i \in \mathbb{Z}$，我们有 $\{f^i(z) : i \in \mathbb{Z}\} \subset B_c(S)$。因为

$$d(f^i(x_{i_j}), f^i(f^{i_j}(x))) = d(f^i(x_{i_j}), x_{i+i_j}) + d(x_{i+i_j}, f^{i+i_j}(x)) \le d(f^i(x_{i_j}), x_{i+i_j}) + \epsilon,$$

$i \in \mathbb{Z}$，令 $j \to \infty$，我们得到 $d(f^i(y)\ f^i(z)) \le \epsilon \le e$对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 均成立。这意味着 $y = z$，矛盾。因此

$$\limsup_{i\to-\infty} d(x_i, f^i(x)) = 0.$$

If

$$\limsup_{i\to+\infty} d(x_i, f^i(x)) > a > 0,$$

那么存在一个序列 $0 \le i_1 < i_2 < \cdots$和 $y, z \in X$，使得

- 极限$_{j\to\infty} x_{i_j} = y$和极限$_{j\to\infty} f^{i_j}(x) = z$,
- $d(y, z) \ge a$；因此，$y \ne z$。

By 通过与上述相同的论证，我们得到 $y = z$，矛盾。因此

$$\limsup_{i\to+\infty} d(x_i, f^i(x)) = 0.$$

因此，$\xi$ 被 $x$以 $\epsilon$-极限跟踪。由于 $\xi$ 是任意的，我们得出结论：$f$ 在 $B_b(S)$上具有 L-跟踪，从而完成证明。□

根据引理 2.1以及双曲集的影踪引理（例如参见 [10, 定理 18.1.2]），我们得到以下引理。

**引理 2.2**。设 $M$ 是一个闭黎曼流形，并设

$$f\colon M \to M$$

是一个 $C^1$-微分同胚。对于 $f$的任意双曲集 $\Lambda$，$f$ 在 $B_c(\Lambda)$ 上具有胀性和跟踪性质，其中某个 $c > 0$满足该条件，因此 $f$ 在 $B_b(\Lambda)$ 上对所有$0 < b < c$都具有跟踪和 $L$-跟踪性质。

**引理 2.3**。设 $f\colon X \to X$ 是一个连续映射，并设 $C \in \mathcal{C}(f)$。对于任意 $b > 0$，存在$a > 0$，使得：若 $B_a(C) \cap D \ne \emptyset$，则对于所有 $D \in \mathcal{C}(f)$，都有 $D \subset B_b(C)$。

证明。反设，则存在一个序列 $0 < a_1 > a_2 > \cdots$使得 $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$，以及一个序列 $D_j \in \mathcal{C}(f)$、$j \ge 1$，使得对于所有 $j \ge 1$，$B_{a_j}(C) \cap D_j \ne \emptyset$且$D_j \setminus B_b(C) \ne \emptyset$。对于每个 $j \ge 1$，取 $x_j \in B_{a_j}(C) \cap D_j$和 $y_j \in D_j \setminus B_b(C)$。不妨设 $\lim_{j\to\infty} x_j = x$ 且 $\lim_{j\to\infty} y_j = y$，其中 $x$、$y \in X$。于是，我们有$x \in C$和 $d(y, C) \ge b$；因此，$y \notin C$。对于任意 $j \ge 1$，由于 $x_j$、$y_j \in D_j$，我们有 $x_j \leftrightarrow y_j$。由于 $\leftrightarrow$ 是 $CR(f)^2$，中的一个闭关系，因此 $x \leftrightarrow y$。由 $x \in C$ 和 $x \leftrightarrow y$，我们得到$y \in C$，矛盾，故引理得证。□

**引理 2.4.** 设 $f\colon X \to X$ 是一个同胚，且 $C \in \mathcal{C}(f)$。若对于某个 $b > 0$，$f$在 $B_b(C)$ 上具有 $L$-跟踪性质，则 $C$ 在 $CR(f)$中既开又闭。

证明。令 $\epsilon > 0$。由于 $f$ 在 $B_b(C)$ 上具有 L-跟踪性质，存在 $\delta > 0$，使得 $f$ 在 $B_b(C)$ 中的每个 $\delta$-极限伪轨道，都被 $X$ 中的某个点 $\epsilon$-极限影踪。由引理 2.3，存在 $a > 0$，使得对于所有 $D \in \mathcal{C}(f)$，$B_a(C)$ 蕴含 $D \subset B_b(C)$。假设 $C$ 在 $CR(f)$ 中不是既开又闭的，那么存在 $x \in C$ 和 $y \in CR(f) \setminus C$，使得

$$d(x, y) \le \min\{\delta, a\}.$$

取满足 $y \in D$ 的 $D \in \mathcal{C}(f)$，得到 $C \neq D$ 和 $y \in B_a(C) \cap D \neq \emptyset$；因此，$D \subset B_b(C)$。我们定义 $\xi = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，使得对所有 $i \geq 0$，$x_i = f^i(y)$ 成立；对所有 $i < 0$，$x_i = f^i(x)$ 成立。由于 $\xi$ 是 $f$ 在 $B_b(C)$ 中的一个 $\delta$-极限伪轨道，我们得到

$$\lim_{i\to-\infty} d(f^i(x), f^i(z)) = \lim_{i\to+\infty} d(f^i(y), f^i(z)) = 0$$

对于某个 $z \in X$。由此可得

$$\lim_{i\to-\infty} d(f^i(z), C) = \lim_{i\to+\infty} d(f^i(z), D) = 0;$$

因此，对于某个 $s \in C$，有 $s \to t$，且 $t \in D$。类似地，对所有 $i \geq 0$，我们定义 $\xi' = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 为 $y_i = f^i(x)$；对所有 $i < 0$，定义 $y_i = f^i(y)$。由于 $\xi'$ 是 $B_b(C)$ 中 $f$ 的一个 $\delta$-极限伪轨道，我们得到

$$\lim_{i\to-\infty} d(f^i(y), f^i(w)) = \lim_{i\to+\infty} d(f^i(x), f^i(w)) = 0$$

对于某个 $w \in X$。由此可得

$$\lim_{i\to-\infty} d(f^i(w), D) = \lim_{i\to+\infty} d(f^i(w), C) = 0;$$

因此，对于某个 $u \in D$，有 $u \to v$，且 $v \in C$。由 $s \to t$ 和 $u \to v$，我们得到 $C = D$，矛盾。引理得证。□

## 3. A lemma

本节中，我们证明一个引理。定理 1.1 和定理 1.2 的证明将基于以下简单观察。

**引理 3.1.** 设 $f\colon X \to X$ 是一个连续映射。对于 $x$、$y \in X$ 以及 $X$ 的闭子集 $S$，若

- $f(S) \subset S$（分别地，$f^{-1}(S) \subset S$），
- $x \in S$、$y \in X \setminus S$ 和 $x \to y$（分别地，$y \to x$），
- $f$ 在 $B_b(S)$ 上具有跟踪性质，其中某个 $b > 0$ 满足，

则 $x \in \partial S$。

证明. 我们先考虑 $f(S) \subset S$ 且 $x \to y$ 的情形。反设不然，即 $x \notin \partial S$，因此 $x \in \mathrm{int}[S]$，从而导出矛盾。我们取 $0 < a < \min\{b, d(y, S)\}$，使得

$$\max\{d(p, S), d(f(p), q)\} \leq a$$

这意味着，对于所有 $p, q \in X$，都有 $d(q, S) \leq b$。令 $a \geq \delta_1 > \delta_2 > \cdots$，且 $\lim_{j\to\infty} \delta_j = 0$。由于 $x \to y$，对于每个 $j \geq 1$，都存在一个 $\delta_j$-链 $(x_i^{(j)})_{i=0}^{k_j}$，其由 $f$ 构成，满足 $x_0^{(j)} = x$ 且 $x_{k_j}^{(j)} = y$。给定 $j \geq 1$，令

$$l_j = \min\{i \geq 1 \colon d(x_i^{(j)}, S) > a\}$$

并注意到 $d(x_{l_j}^{(j)}, S) > a$。由于 $d(x_{l_j-1}^{(j)}, S) \leq a$，且

$$d(f(x_{l_j-1}^{(j)}), x_{l_j}^{(j)}) \leq \delta_j \leq a,$$

我们有 $d(x_{l_j}^{(j)}, S) \leq b$ 因此 $\{x_i^{(j)} \colon 0 \leq i \leq l_j\} \subset B_b(S)$。如有必要，取一个子列后，我们可以假设 $\lim_{j\to\infty} x_{l_j}^{(j)} = z$，其中某个 $z \in X$。于是，$d(z, S) \geq a$ 并且对于每个 $\delta > 0$，都存在一个 $\delta$-链 $(y_i)_{i=0}^{l}$，其由 $f$ 组成，使得 $\{y_i \colon 0 \leq i \leq l\} \subset B_b(S)$，$y_0 = x$，且 $y_l = z$。固定 $0 < \epsilon < a$，使得 $B_\epsilon(x) \subset S$。由于 $f$ 在 $B_b(S)$ 上具有跟踪性质，存在 $\delta > 0$，使得每个

$\delta$-链，由 $f$ 组成，且位于 $B_b(S)$ 中，都被 $X$中的某个点 $\epsilon$-跟踪。我们取一个由 $f$ 组成的 $\delta$-链 $(y_i)_{i=0}^{l}$，使得 $\{y_i\colon\ 0\le i\le l\}\subset B_b(S)$，$y_0=x$，且 $y_l=z$。于是，

$$\max\{d(x,v),d(z,f^l(v))\}\le\epsilon$$

对某个 $v\in X$。由此可得 $v\in S$，因此 $f^l(v)\in S$；于是，我们得到 $d(z,\ S)\le\epsilon<a$，矛盾。

接下来考虑 $f^{-1}(S)\subset S$ 且 $y\to x$ 的情形。反设不然，即 $x\notin\partial S$，因此 $x\in\mathrm{int}[S]$，从而导出矛盾。取 $0<a<\min\{b,d(y,\ S)\}$，使得

$$\max\{d(p,S),d(f(q),p)\}\le a$$

这意味着对所有 $p,\ q\in X$，都有 $d(q,\ S)\le b$。令 $a\ge\delta_1>\delta_2>\cdots$，且 $\lim_{j\to\infty}\delta_j=0$。由于 $y\to x$，对每个 $j\ge1$，存在一个由 $f$ 构成的 $\delta_j$-链 $(x_i^{(j)})_{i=0}^{k_j}$，使得 $x_0^{(j)}=y$ 且 $x_{k_j}^{(j)}=x$。给定 $j\ge1$，令

$$l_j=\max\{i\le k_j-1\colon d(x_i^{(j)},S)>a\}$$

并注意到 $d(x_{l_j}^{(j)},\ S)>a$。由于 $d(x_{l_j+1}^{(j)},\ S)\le a$ 且

$$d(f(x_{l_j}^{(j)}),x_{l_j+1}^{(j)})\le\delta_j\le a,$$

我们有 $d(x_{l_j}^{(j)},S)\le b$，因此 $\{x_i^{(j)}\colon\ l_j\le i\le k_j\}\subset B_b(S)$。如有必要，取一个子列，我们可以假设 $\lim_{j\to\infty}x_{l_j}^{(j)}=z$，其中某个 $z\in X$。于是，$d(z,S)\ge a$，并且对于每个 $\delta>0$，存在一个 $\delta$-链 $(y_i)_{i=0}^{l}$，其 $f$ 满足 $\{y_i\colon\ 0\le i\le l\}\subset B_b(S)$、$y_0=z$ 和 $y_l=x$。固定$0<\epsilon<a$，使得 $B_\epsilon(x)\subset S$。由于 $f$ 在 $B_b(S)$ 上具有跟踪性质，存在 $\delta>0$，使得$\delta$中的每个 $f$-链在 $B_b(S)$中都被 $X$中的某个点 $\epsilon$-跟踪。我们取一个 $\delta$-链 $(y_i)_{i=0}^{l}$，其 $f$ 满足 $\{y_i\colon\ 0\le i\le l\}\subset B_b(S)$、$y_0=z$ 和 $y_l=x$。于是，

$$\max\{d(z,v),d(x,f^l(v))\}\le\epsilon$$

对于某个 $v\in X$。由此可得 $f^l(v)\in S$，因此 $v\in S$；于是，我们得到 $d(z,\ S)\le\epsilon<a$，这与假设矛盾。引理得证。□

## 4. Proof of Theorem 1.1 and corollaries

本节将证明定理 1.1 和推论 1.1，并给出两个推论。我们先通过引理 3.1 证明下面的引理。

**引理 4.1.** 设 $f\colon\ X\to X$ 是一个连续映射，且 $\Lambda$ 是 $X$ 的一个闭 $f$-不变子集。对于闭子集 $S\subset X$，如果

- $f|_\Lambda\colon\ \Lambda\to\Lambda$ 是链传递的，
- $\Lambda\subset S$且 $f(S)\subset S$（分别地，$f^{-1}(S)\subset S$），
- 存在 $x\in\Lambda$ 和 $y\in X\setminus S$，使得 $x\to y$（分别为 $y\to x$），
- $f$ 在 $B_b(S)$ 上具有跟踪性质，其中某个 $b>0$ 满足条件，

那么 $\Lambda\subset\partial S$。

证明。考虑 $f(S)\subset S$且 $x\to y$的情形。由于 $f|_\Lambda\colon\Lambda\to\Lambda$是链传递的，对于任意 $z\in\Lambda$，都有 $z\to x$。由 $z\to x$ 和 $x\to y$，可得 $z\to y$。根据引理 3.1，可知 $z\in\partial S$；因此，我们得到 $\Lambda\subset\partial S$。

考虑 $f^{-1}(S)\subset S$且 $y\to x$的情形。由于 $f|_\Lambda\colon\Lambda\to\Lambda$是链传递的，对于任意 $z\in\Lambda$，都有 $x\to z$。由 $y\to x$ 和 $x\to z$，可得 $y\to z$。根据引理 3.1，可知 $z\in\partial S$；因此，我们得到 $\Lambda\subset\partial S$，从而证明了该引理。□

由引理 4.1，我们得到以下引理。

**引理 4.2**。设 $f\colon\ X \to X$ 是一个连续映射，且 $\Lambda$ 是$X$的一个闭 $f$-不变子集。如果

- 内$[\Lambda] \neq \emptyset$,
- $f|_\Lambda\colon\ \Lambda \to \Lambda$ 是链传递的,
- $f$ 在 $B_b(\Lambda)$ 上具有跟踪性质，其中某个 $b > 0$,

那么 $\Lambda \in \mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$。

证明。由于 $f|_\Lambda$是链传递的，对于某个 $C \in \mathcal{C}(f)$，我们有 $\Lambda \subset C$。固定 $r \in \Lambda$，并注意到对于所有 $s \in C$，都有 $r \to s$。如果 $\Lambda$ 是链稳定的，那么可得 $C \subset \Lambda$，因此 $\Lambda = C \in \mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$。因此，只需证明 $\Lambda$ 是链稳定的。反设 $\Lambda$ 不是链稳定的。那么，存在 $x \in \Lambda$ 和 $y \in X \setminus \Lambda$ 使得 $x \to y$。令$S = \Lambda$，可知满足引理 4.1 的假设。由此可得 $\Lambda \subset \partial\Lambda$ （因此 $\Lambda = \partial\Lambda$），这与 $\mathrm{int}[\Lambda] \neq \emptyset$ 的假设矛盾；故引理得证。□

同样，由引理 4.1 可得以下引理。

**引理 4.3**。设 $f\colon\ X \to X$ 是一个同胚，且 $\Lambda$ 是 $X$的一个闭 $f$-不变子集。若

- 内$[\Lambda] \neq \emptyset$,
- $f|_\Lambda\colon\ \Lambda \to \Lambda$ 是链传递的,
- $f$ 在 $B_b(\Lambda)$ 上具有跟踪性质，其中 $b > 0$为某个值,

那么 $\Lambda \in \mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$。

证明。由引理 4.2，我们得到 $\Lambda \in \mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$。注意到 $f(\Lambda) = \Lambda$，因此 $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$。若 $\Lambda \notin \mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f)$，则存在 $x \in \Lambda$ 和 $y \in X \setminus \Lambda$ 使得 $y \to x$。令 $S = \Lambda$，可知引理 4.1 的假设成立。由此可得 $\Lambda \subset \partial\Lambda$ （从而 $\Lambda = \partial\Lambda$），这与 $\mathrm{int}[\Lambda] \neq \emptyset$ 的假设矛盾；因此，我们得到 $\Lambda \in \mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f)$，引理得证。□

**注 4.1**。设 $M$ 为一个闭可微流形。在 [1, 引理 3.3], 中证明了，对于一个 $C^1$-泛性微分同胚 $f\colon M \to M$，任何具有非空内部的同宿类 $H$ 对于 $f$ 和 $f^{-1}$都是李雅普诺夫稳定的。

给定连续映射 $f\colon X \to X$和 $x \in X$，令 $\omega(x,\ f)$ 表示 $\omega$ 对于 $x$ 的极限集，即由满足 $\lim_{j\to\infty} f^{i_j}(x) = y$（对某个 $0 \le i_1 < i_2 < \cdots$）的 $y \in X$ 组成的集合。注意，$\omega(x,\ f)$ 是 $X$ 的闭 $f$ 不变子集，并且满足

$$\lim_{i\to\infty} d(f^i(x), \omega(x, f)) = 0.$$

由于对于所有 $y,\ z \in \omega(x,\ f),\ y \to z$，因此存在唯一的 $C(x,\ f) \in \mathcal{C}(f)$，使得 $\omega(x,\ f) \subset C(x,\ f)$。

**引理 4.4**。设 $f\colon X \to X$ 是一个同胚，且令 $C \in \mathcal{C}(f)$。若 $C \in \mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$，并且 $C$ 在 $CR(f)$ 中既开又闭，则 $C$ 在 $X$ 中既开又闭。

证明。由于 $C$ 在 $CR(f)$ 中既开又闭，存在 $r > 0$，使得对于任意 $D \in \mathcal{C}(f),\ B_r(C) \cap D \neq \emptyset$ 蕴含 $C = D$。由于 $C \in \mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$（$C$ 是链稳定的），存在 $a > 0$，使得$\{f^i(x)\colon$ 对于所有 $x \in B_a(C),\ i \ge 0\} \subset B_r(C)$。给定 $x \in B_a(C)$，我们取 $C(x, f) \in \mathcal{C}(f)$，使得 $\omega(x, f) \subset C(x, f)$，因此

$$\lim_{i\to\infty} d(f^i(x), C(x, f)) = 0.$$

由于 $\omega(x,f) \subset B_r(C)$，我们有 $B_r(C) \cap C(x,f) \neq \emptyset$，因此 $C = C(x,f)$。由此可得

$$\lim_{i\to\infty} d(f^i(x), C) = 0;$$

因此， $x \to y$ 对某个 $y \in C$成立。由 $C \in \mathcal{C}_{\text{ini}}(f)$，可得 $x \in C$。由于 $x \in B_a(C)$是任意的，我们得出 $B_a(C) \subset C$，因此， $C$ 在 $X$中是开集（因而既开又闭），证明完毕。□

下面完成定理 1.1 的证明。

定理 *1.1* 的证明。由于 $\text{int}[\Lambda] \neq \emptyset$, $f|_\Lambda\colon \Lambda \to \Lambda$ 是链传递的，且 $f$在 $B_b(\Lambda)$上具有跟踪性质，由引理 4.3 可得 $\Lambda \in \mathcal{C}_{\text{ini}}(f) \cap \mathcal{C}_{\text{ter}}(f)$。由于 $f$在 $B_b(\Lambda)$上具有 L-跟踪性质，由引理 2.4， $\Lambda$ 在 $CR(f)$中既开又闭。利用引理 4.4，我们得出 $X = \Lambda$，定理得证。□

这里，我们给出推论 1.1 的证明。

推论 *1.1* 的证明。 我们固定 $x \in \text{int}[\Lambda] \cap \text{int}[CR(f)]$。由于 $x \in \text{int}[CR(f)]$ 且 $X$ 局部连通，存在 $X$ 的一个开连通子集 $V$，使得 $x \in V \subset CR(f)$。取$C \in \mathcal{C}(f)$，其中 $x \in C$，可得 $V \subset C$，从而 $\text{int}[C] \neq \emptyset$。由于 $f(\Lambda) \subset \Lambda$， $x \in \text{int}[\Lambda]$，并且$f$ 在 $B_b(\Lambda)$ 上具有跟踪性质，引理 3.1 推出，对所有满足 $x \to y$ 的 $y \in X$，都有 $y \in \Lambda$。对于任意$y \in C$，由 $x$，$y \in C$，可得 $x \to y$，从而 $y \in \Lambda$。因此 $C \subset \Lambda$。由于

- $X$ 是连通的，
- $\text{int}[C] \neq \emptyset$，
- $f|_C\colon C \to C$ 是链传递的，
- $f$ 在 $B_b(C)$ 上具有跟踪性质和 L-跟踪性质，

由定理 1.1 可得， $X = C$（因此 $X = \Lambda$）和 $f$ 是混合同胚，从而完成证明。□

我们将给出两个推论。

**推论 4.1.** 设 $f\colon X \to X$ 是一个同胚。如果

- $X$ 是连通的，
- 内$[CR(f)] \neq \emptyset$，
- $\mathcal{C}(f)$ 是有限集，
- $f$ 在 $X$上具有跟踪性质，

那么 $f$ 是混合同胚。

证明。 由于 $\text{int}[CR(f)] \neq \emptyset$且 $\mathcal{C}(f)$ 是有限集，因此对于某个 $C \in \mathcal{C}(f)$，有 $\text{int}[C] \neq \emptyset$。由于$f$在 $X$上具有跟踪性质，由引理 4.3 可得 $C \in \mathcal{C}_{\text{ini}}(f) \cap \mathcal{C}_{\text{ter}}(f)$。由于 $\mathcal{C}(f)$ 是有限集，因此 $C$ 在 $CR(f)$ 中既开又闭。由引理 4.4， $C$ 在 $X$中既开又闭。因为 $X$ 是连通的，我们得出 $X = C$，且 $f$ 是混合的，从而证明了该推论。□

给定一个同胚 $f\colon X \to X$，我们很容易看出，如果 $f$ 在 $X$ 上具有 L-跟踪性质，那么 $f$ 在 $X$ 上具有跟踪性质。如果 $f$ 在 $X$ 上具有 L-跟踪性质，那么根据引理 2.4，每个 $C \in \mathcal{C}(f)$ 都是 $CR(f)$ 中的既开又闭集；因此， $\mathcal{C}(f)$ 是有限集。由推论 4.1，我们得到以下推论。

**推论 4.2**。 令 $f\colon X \to X$ 是一个同胚。如果

- $X$ 是连通的，
- 内$[CR(f)] \neq \emptyset$，
- $f$ 在 $X$上具有 $L$-跟踪，

那么 $f$ 是一个混合同胚。

本节最后，我们将利用引理 4.3 直接证明定理 1.1。对于同胚 $f\colon X \to X$和 $x \in X$，我们定义 $X$的子集 $W^u(x)$ $W^s(x)$如下：

$$W^u(x) = \{y \in X\colon \lim_{i\to-\infty} d(f^i(x), f^i(y)) = 0\},$$

$$W^s(x) = \{y \in X\colon \lim_{i\to+\infty} d(f^i(x), f^i(y)) = 0\}.$$

定理 1.1 的直接证明。由引理 4.3，我们得到 $\Lambda \in \mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f) \cap \mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$。由此可知，对所有 $x \in \Lambda$，$W^u(x) \cup W^s(x)$。令 $\epsilon > 0$。由于 $f$在 $B_b(\Lambda)$ 上具有 L-跟踪性质，存在$\delta > 0$，使得 $f$ 在 $B_b(\Lambda)$ 中的每条 $\delta$-极限伪轨道都被$X$中的某个点 $\epsilon$-极限影踪。由于 $\Lambda \in \mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$（$\Lambda$是链稳定的），存在 $a > 0$，使得对所有 $y \in B_a(\Lambda)$，$\{f^i(y)\colon\ i \geq 0\} \subset B_b(\Lambda)$。任取满足 $d(x, y) \leq \min\{\delta, a\}$的 $x \in \Lambda$和 $y \in X$，我们定义 $\xi = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$如下：对所有 $i \geq 0$，$x_i = f^i(y)$；对所有 $i < 0$，$x_i = f^i(x)$。由于 $\xi$是$f$在 $B_b(\Lambda)$ 中的一条 $\delta$-极限伪轨道，$\xi$被某个 $z \in X$ $\epsilon$-极限影踪。于是，我们有 $z \in W^u(x) \cap W^s(y)$。由$x \in \Lambda$，因此 $W^u(x) \subset \Lambda$，我们得到 $z \in \Lambda$。由此可知，$y \in W^s(z) \subset \Lambda$。由于满足 $d(x, y) \leq \min\{\delta, a\}$ 的 $x \in \Lambda$和$y \in X$是任意的，我们得出结论：$\Lambda$在$X$中是开集（因而既开又闭），定理 1.1 得证。□

## 5. Proof of Theorem 1.2 and corollaries

本节将证明定理 1.2，并给出一些推论。为了证明定理 1.2，我们需要一个引理。

**引理 5.1.** 设 $f\colon X \to X$ 是一个同胚，且 $\Lambda$ 是 $f$的一个吸引子。对于任意$x \in \partial\Lambda$，存在 $z \in X \setminus \Lambda$ 使得 $z \to x$。

证明. 我们取 $a > 0$ 使得

$$\bigcap_{i\geq 0} f^i(B_a(\Lambda)) = \Lambda.$$

设 $0 < \delta_1 > \delta_2 > \cdots$且 $\lim_{j\to\infty} \delta_j = 0$。给定 $j \geq 1$，由 $x \in \partial\Lambda$可得 $d(x, z_j) \leq \min\{a, \delta_j\}$，其中某个 $z_j \in X \setminus \Lambda$。注意，$z_j \in B_a(x) \subset B_a(\Lambda)$。由于 $z_j \in X \setminus \Lambda$，存在$i_j \geq 1$使得 $f^{-i_j}(z) \notin B_a(\Lambda)$。如有必要，取一个子列后，我们可以假设 $\lim_{j\to\infty} f^{-i_j}(z_j) = z$，其中某个 $z \in X$。于是，$d(z, \Lambda) \geq a > 0$；因此，$z \in X \setminus \Lambda$。由于 $\lim_{j\to\infty} \delta_j = 0$，从而 $\lim_{j\to\infty} z_j = x$，我们得到 $z \to x$，引理得证。□

我们来证明定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。假设 $x \in \partial\Lambda$、$y \in X$ 和 $x \to y$。我们将证明 $y \in \partial\Lambda$。由于 $\Lambda$ 是 $f$ 的一个吸引子，$\Lambda$ 是链稳定的，这意味着 $y \in \Lambda$。由于 $x \in \partial\Lambda$，由引理 5.1 可知，对某个 $z \in X \setminus \Lambda$，有 $z \to x$。由 $z \to x$ 和 $x \to y$，我们得到 $z \to y$。由于

- $f(\Lambda) = \Lambda$，因此 $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$,
- $y \in \Lambda$、$z \in X \setminus \Lambda$ 和 $z \to y$,
- $f$ 在 $B_b(\Lambda)$ 上具有跟踪性质,

由引理 3.1 可知 $y \in \partial\Lambda$；因此，定理得证。□

我们有以下基本引理。

**引理 5.2**。设 $f\colon X \to X$ 为连续映射，且设 $S$ 为 $f$-不变的闭子集，属于$X$。如果

- $f(S) = S$,

- $S$ 是链稳定的，

那么，对于任意 $a>0$，存在一个吸引子 $\Lambda$，它对应于 $f$，使得 $S\subset\Lambda\subset B_a(S)$。

证明。对于 $\delta>0$，令 $A$ 为满足以下条件的 $y\in X$ 集合：存在 $x\in S$ 和一个 $\delta$-链 $(x_i)_{i=0}^{k}$，其中 $f$ 满足 $x_0=x$ 和 $x_k=y$。于是我们看到 $S\subset A$ 且 $f(A)\subset$ 内部 $[A]$。由于 $S$ 是链稳定的，对于某个 $\delta>0$，有 $A\subset B_a(S)$。令 $U=$ 为 $[A]$ 的内部，我们得到 $f(U)\subset U$，并且 $S\subset U\subset\overline{B}_a(S)$。令 $\Lambda=\bigcap_{i\geq 0}f^i(U)$，我们看到 $\Lambda$ 是 $f$ 的一个吸引子，并满足 $S\subset\Lambda\subset B_a(S)$，证明完毕。□

由定理 1.2 和引理 5.2，可得以下推论。

**推论 5.1**。设 $f:\ X\to X$ 是一个同胚，且 $C\in\mathcal{C}(f)$。若

- $X$ 是连通的，
- $C\in\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$ 和 $X\neq C$，
- $f$ 在某个 $B_b(C)$ 上具有跟踪性质，

那么，对每个 $a>0$，都存在 $D\in\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$ 使得 $\mathrm{int}[D]=\emptyset$ 且 $D\subset B_a(C)$ .

证明。由于 $X\neq C$，我们有 $X\neq B_c(C)$，其中某个 $c>0$。令 $0<a<\min\{b,c\}$。由于 $C\in\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$（$C$ 是稳定的），根据引理 5.2，存在 $f$ 的一个吸引子 $\Lambda$，使得 $C\subset\Lambda\subset B_a(C)$。若$\partial\Lambda=\emptyset$，则 $\Lambda$ 在 $X$中既开又闭。由于 $X$ 是连通的，这意味着 $X=\Lambda$，因此 $X=B_c(C)$，矛盾。由此可得 $\partial\Lambda\neq\emptyset$。由于 $\Lambda\subset B_a(C)$，且 $f$ 在 $B_b(C)$上具有跟踪性质，定理 1.2 推出 $\partial\Lambda$是链稳定的。取 $D\in\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f|_{\partial\Lambda})$，可得 $D\in\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$、$\mathrm{int}[D]=\emptyset$和 $D\subset B_a(C)$，从而证明了该推论。□

以下引理的证明见 [11]。

**引理 5.3** （[11, 引理 2。1]）。设 $f:\ X\to X$ 是一个连续映射。对于任意 $x\in X$，存在 $C\in\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$ 和 $y\in C$，使得 $x\to y$。

我们给出引理 5.2 和引理 5.3 的一个推论。

**推论 5.2**。设 $f:\ X\to X$ 是一个同胚，且设 $C\in\mathcal{C}(f)$。如果

- $C\in\mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f)\cap\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$，
- $C$ 在 $X$ 中不是既开又闭，

那么，对于每个 $a>0$，都存在 $D\in\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)\setminus\{C\}$ 和 $E\in\mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f)\setminus\{C\}$，使得 $D\cup E\subset B_a(C)$。

证明。由于 $C\in\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)$（$C$ 是链稳定的），由引理 5.2 可知，存在一个 $f$ 的吸引子 $\Lambda$，使得 $C\subset\Lambda\subset B_a(C)$。若 $C=\Lambda$，则存在 $c>0$，使得

$$\lim_{i\to\infty}d(f^i(z),C)=0$$

对所有 $z\in B_c(C)$ 均成立。由于 $C\in\mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f)$，这意味着 $B_c(C)\subset C$，因此 $C$ 在 $X$ 中既开又闭。由此可得 $C\neq\Lambda$。注意，$C\in\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f|_\Lambda)$。若 $\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f|_\Lambda)=\{C\}$，则由引理 5.3 可知，对任意 $x\in\Lambda\setminus C$，存在某个 $y\in C$，使得 $x\to y$，这与 $C\in\mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f)$ 矛盾。因此，$\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f|_\Lambda)\neq\{C\}$。取 $D\in\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f|_\Lambda)\setminus\{C\}$，可得 $D\in\mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)\setminus\{C\}$ 和$D\subset B_a(C)$。对 $f^{-1}$ 重复相同的论证，也可得到 $E\in\mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f)\setminus\{C\}$，使得 $E\subset B_a(C)$，证明完毕。□

**注 5.1.** 设 $M$ 是一个闭可微流形。在 [1, 定理 5], 中证明了，对于 $C^1$-泛性的微分同胚 $f:\ M\to M$，如果一个同宿类 $H$ 满足 $H\neq M$，且对于 $f$ 和 $f^{-1}$ 是李雅普诺夫稳定的，那么就存在无穷多个（两两不交的）同宿类，它们累积到 $H$。

由引理 4.1 和引理 5.2，我们将证明以下结论。

**引理 5.4.** 设 $f\colon X \to X$ 是一个同胚，且令 $C \in \mathcal{C}(f)$。如果

- $C \notin \mathcal{C}\mathrm{ini}(f)$,
- $f$ 在 $X$上具有跟踪性质，

那么存在一个吸引子 $\Lambda$，使得 $f$ 满足 $C \subset \partial\Lambda$。

证明。由于 $C \notin \mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f)$，存在 $x \in C$ 和 $y \in X \setminus C$，使得 $y \to x$。令 $S$ 为满足以下条件的 $w \in X$ 的集合：对某个 $z \in C$，有 $z \to w$。若 $y \in S$，则对某个 $z \in C$，有 $z \to y$。由于 $x, z \in C$，我们有 $x \to z$。根据 $y \to x$ 和 $x \to z$，可得 $y \to z$，从而 $y \in C$，矛盾。因此 $y \notin S$。由于 $f(C) = C$，对于任意 $v \in C$，存在某个 $u \in C$，使得 $v = f(u)$，这意味着 $u \to v$，从而 $v \in S$。因此 $C \subset S$。容易看出 $f(S) = S$。由于对所有满足 $p \to q$ 的 $p \in S$ 和 $q \in X$，都有 $q \in S$，因此 $S$ 是链稳定的。我们固定一个满足 $d(y, S) > a$ 的 $a > 0$。由于 $f(S) = S$，且 $S$ 是链稳定的，根据引理 5.2，存在一个吸引子 $\Lambda$，使得对于 $f$，有 $S \subset \Lambda \subset B_a(S)$。注意到 $C \subset \Lambda$, $x \in C$，且 $y \in X \setminus \Lambda$。由引理 4.1 可得 $C \subset \partial\Lambda$，引理得证。□

最后，我们得到以下推论。类似的结果可见于 [2, 定理 6.9]。

**推论 5.3.** 设 $f\colon X \to X$ 是一个同胚，且 $C \in \mathcal{C}(f)$。若 $f$ 在 $X$上具有跟踪性质，则以下条件等价

*(1)* $C \notin \mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f)$, *(2)* 存在一个 $f$ 的吸引子 $\Lambda$，使得 $C \subset \partial\Lambda$。

证明。由引理 5.4，(1) 推出 (2)。反过来，若存在一个 $f$ 的吸引子 $\Lambda$，且满足 $C \subset \partial\Lambda$，则由引理 5.1，存在 $x \in C$和 $z \in X \setminus \Lambda$，使得 $z \to x$。这意味着 $C \notin \mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f)$；因此，推论得证。□

## 6. Remarks

本节中，我们作一些总结性评论。

**注 6.1.** 给定一个连续映射 $f\colon X \to X$，$X$ 的闭 $f$-不变子集 $M$ 称为 $f$的极小集，如果对所有 $x \in M$，都有 $M = \omega(x, f)$。设 $f\colon X \to X$是一个同胚，且 $M$是 $f$的一个极小集。若 $\mathrm{int}[M] \neq \emptyset$，则令 $U = \mathrm{int}[M]$，可得$M = \bigcup_{i\geq 0} f^{-i}(U)$；因此，$M$是 $X$的既开又闭子集。若 $X$连通，则这意味着$X = M$，因此 $f$ 是一个极小同胚。

**注 6.2.** 设 $f\colon X \to X$ 是一个同胚，且设 $C \in \mathcal{C}(f)$。若

$$C \in \mathcal{C}_{\mathrm{ini}}(f)\ (\mathrm{resp.}\ C \in \mathcal{C}_{\mathrm{ter}}(f)),$$

那么，对所有 $x \in X \setminus C$，$\liminf_{i\to+\infty} d(f^i(x)\ C) > 0$（分别地，$\liminf_{i\to-\infty} d(f^i(x)\ C) > 0$）。

**注 6.3.** 给定一个连续映射 $f\colon X \to X$，以及 $X$ 的一个闭 $f$-不变子集 $S$，我们将 $X$ 的一个子集 $W^s(S)$ 定义为

$$W^s(S) = \{x \in X\colon \lim_{i\to\infty} d(f^i(x), S) = 0\}.$$

容易看出，对于任意 $x \in X$，$x \in W^s(S)$ 当且仅当 $\omega(x,\ f) \subset S$。

设 $f\colon X \to X$ 是一个同胚，并设 $S$ 是 $X$ 的一个闭子集，使得 $f(S) = S$(因此 $f(\partial S) = \partial S$)。对于任意 $x \in W^s(S)$，我们有 $\omega(x, f) \subset S$。如果

$$\omega(x, f) \cap \mathrm{int}[S] \neq \emptyset,$$

那么对于某个 $i \geq 0$，我们有 $f^i(x) \in S$，这意味着 $x \in S$。由此可知，若 $x \in W^s(S) \setminus S$，则

$$\omega(x, f) \subset S \setminus \operatorname{int}[S] = \partial S;$$

因此， $x \in W^s(\partial S)$。换言之，我们得到 $W^s(S) \setminus S \subset W^s(\partial S)$。

**注 6.4.** 设 $f\colon X \to X$ 是一个连续映射。若 $X$ 是局部连通的，且 $\operatorname{int}[CR(f)] \neq \emptyset$，则存在 $x \in CR(f)$以及 $X$的一个开连通子集 $V$，使得 $x \in V \subset CR(f)$。取满足 $x \in C$的 $C \in \mathcal{C}(f)$，便有 $V \subset C$，因此 $\operatorname{int}[C] \neq \emptyset$。

## Appendix 附录 A

本附 录的目的是证明以下对 [9, 定理 2.4]的推广 .

**定理 A.1.** 设 $f\colon X \to X$ 是一个同胚，且 $\Lambda$ 是 $f$的一个吸引子。若 $X$ 是局部连通的，则 $\partial\Lambda$ 只有有限多个连通分支。

以下引理的证明留作读者练习。

**引理 A.1.** 设 $A$ 是 $X$的一个连通子集。对于 $X$的子集 $S$，若 $A \cap S \neq \emptyset$ 且$A \setminus S \neq \emptyset$，则 $A \cap \partial S \neq \emptyset$。

对于 $x \in X$ 和 $r > 0$，我们用 $U_r(x)$ 表示以 $x$为中心的开 $r$-球:

$$U_r(x) = \{y \in X\colon d(x, y) < r\}.$$

Fo对于 $X$ 的子集 $S$ 和 $r > 0$，我们用 $U_r(S)$ 表示 $S$的开 $r$-邻域 :

$$U_r(S) = \{x \in X\colon d(x, S) < r\}.$$

根据 [4, 引理 6.4.2], ，我们知道，若 $X$ 是局部连通的，则存在 $X$ 上的一个相容度量 $d$ 以及 $\epsilon_0 > 0$，使得对于所有 $x \in X$ 和 $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$， $U_\epsilon(x)$ 都是连通的。

*定理 A.1* 的证明。 由于 $\Lambda$ 是 $f$的一个吸引子，存在 $X$ 的一个开子集 $U$，使得$f(U) \subset U$ 且 $\Lambda = \bigcap_{i\geq 0} f^i(U)$。注意

$$f(\partial U) = f(\overline{U} \setminus U) = f(\overline{U}) \setminus f(U) \subset U \setminus f^2(\overline{U}).$$

令 $\mathcal{C}$表示 $U \setminus f^2(U)$ 的连通分支集合。由于 $X$是局部连通的，且$U \setminus f^2(U)$是 $X$中的开集，因此每个 $C \in \mathcal{C}$都是 $X$中的开集。由于 $f(\partial U)$ 是 $X$的紧子集，集合

$$\mathcal{D} = \{C \in \mathcal{C}\colon f(\partial U) \cap C \neq \emptyset\}$$

是有限的。定义

$$B = \bigcup_{C\in\mathcal{D}} C$$

并注意到

- $f(\partial U) \subset B \subset U \setminus f^2(\overline{U})$,
- $\mathcal{D}$ 与 $B$的连通分支集合相同。

令 $\epsilon_0 > 0$ 为上述常数。为完成证明，只需证明对于任意$0 < \epsilon \leq \epsilon_0$，存在 $l \geq 0$ 使得

$$\partial\Lambda \subset U_{2\epsilon}(f^i(B)) \quad \text{and} \quad f^i(B) \subset U_{2\epsilon}(\partial\Lambda)$$

对所有 $i \geq l$。若此条件成立，则由于 $f^i(B)$ 与 $B$ 同胚，因此对每个 $i \geq 0$，其连通分支至多为 $|\mathcal{D}|$个， $\partial\Lambda$ 的连通分支也至多为 $|\mathcal{D}|$ 个。

给定任意 $x \in \partial\Lambda$，我们有 $U_\epsilon(x) \setminus \Lambda \neq \emptyset$。令 $y \in U_\epsilon(x) \setminus \Lambda$。由于 $U \supset f(U) \supset \cdots$且 $\Lambda = \bigcap_{i\geq 0} f^i(U)$，存在 $j_x \geq 0$，使得对所有 $i \geq j_x$， $y \in U_\epsilon(x) \setminus f^{i+1}(U)$。对于每个 $i \geq j_x$，由于

$$x \in U_\epsilon(x) \cap \Lambda \subset U_\epsilon(x) \cap f^{i+1}(U),$$

由引理 A.1，我们得到

$$U_\epsilon(x) \cap f^{i+1}(\partial U) = U_\epsilon(x) \cap \partial f^{i+1}(U) \neq \emptyset;$$

因此， $x \in U_\epsilon(f^{i+1}(\partial U))$。由于 $\partial\Lambda$ 是 $X$ 的紧子集，存在 $x_1$， $x_2$，……， $x_n \in \partial\Lambda$，使得 $\partial\Lambda \subset \bigcup_{m=1}^n U_\epsilon(x_m)$。令 $j = \max_{1\leq m\leq n} j_{x_m}$，我们得到

$$\partial\Lambda \subset U_{2\epsilon}(f^{i+1}(\partial U)) \subset U_{2\epsilon}(f^i(B))$$

对所有 $i \geq j$。

Let

$$\Lambda_\epsilon = \{y \in \Lambda : d(y, \partial\Lambda) \geq \epsilon\}.$$

对于 $y \in \Lambda_\epsilon$，若 $U_\epsilon(y) \setminus \Lambda \neq \emptyset$，则由于 $y \in U_\epsilon(y) \cap \Lambda$，利用引理 A.1，我们得到$U_\epsilon(y) \cap \partial\Lambda \neq \emptyset$；因此， $d(y, \partial\Lambda) < \epsilon$，矛盾。由此可知，对所有$y \in \Lambda_\epsilon$， $U_\epsilon(y) \subset \Lambda$。由于$U \supset f(U) \supset \cdots$且 $\Lambda = \bigcap_{i\geq 0} f^i(U)$，根据紧性，存在 $k \geq 0$，使得

$$f^i(\overline{U}) \subset U_\epsilon(\Lambda)$$

对所有 $i \geq k$。给定任意 $i \geq k$和 $x \in f^i(U) \setminus \overline{\Lambda}$，我们取 $y \in \Lambda$使得 $x \in U_\epsilon(y)$。若 $y \in \Lambda_\epsilon$，则得到 $x \in U_\epsilon(y) \subset \Lambda$，这与假设矛盾。因此 $y \notin \Lambda_\epsilon$，从而 $d(y, \partial\Lambda) < \epsilon$，这意味着 $x \in U_{2\epsilon}(\partial\Lambda)$。由于 $i \geq k$和 $x \in f^i(U) \setminus \Lambda$是任意的，我们得到

$$f^i(B) \subset f^i(\overline{U}) \setminus \Lambda \subset U_{2\epsilon}(\partial\Lambda)$$

对所有 $i \geq k$。以上论断得证，因此定理也得证。□

**注 A.1.** 设 $S$ 是 $X$的一个子集。上述证明表明，如果 $S$ 是$X$ 的一个闭子集，且

$$f(\partial U) \subset S \subset \overline{U} \setminus \Lambda,$$

那么相对于豪斯多夫距离，$\lim_{i\to\infty} f^i(S) = \partial\Lambda$。

**注 A.2.** 设 $S$ 是 $X$的一个闭子集。容易看出，如果 $X$ 和 $\partial S$ 各自只有有限多个链分支，那么 $S$ 也只有有限多个链分支。

## References

[1] F. Abdenur, C. Bonatti, L.J. D´ıaz，具有非空内部的非游荡集。Nonlinearity 17 (2004), 175–191。[2] E. Akin, M. Hurley, J.A. Kennedy，拓扑泛同胚的动力学。美国数学学会回忆录 783 (2003), 130 页。[3] D.V. Anosov，负曲率闭黎曼流形上的测地流。斯捷克洛夫数学研究所论文集 90 (1967), 235 页。[4] N. Aoki, K. Hiraide，动力系统的拓扑理论：近期进展。North–Holland 数学丛书，52。North–Holland，阿姆斯特丹，1994。[5] A. Arbieto, B. Carvalho, W. Cordeiro, D.J. Obata，关于双李雅普诺夫稳定同宿类。巴西数学会通报（新版）44 (2013), 105–127。[6] A. Artigue, B. Carvalho, W. Cordeiro, J. Vieitez，超越拓扑双曲性：L-跟踪性质。微分方程杂志 268 (2020), 3057–3080。[7] R. Bowen，阿诺索夫微分同胚的平衡态与遍历理论。数学讲义，470。施普林格柏林-海德堡，1975。[8] T. Fisher，具有非空内部的双曲集。离散与连续动力系统 15 (2006), 433–446。

[9] M. Hurley，一般同胚的吸引子的性质。遍历理论与动力系统 16 (1996), 1297–1310。[10] A. Katok, B. Hasselblatt，现代动力系统理论导论。数学及其应用百科全书，54。剑桥大学出版社，剑桥，1995。[11] N. Kawaguchi，具有跟踪性质的一般且稠密的分布混沌。差分方程应用杂志 27 (2021), 1456–1481。[12] S.Yu. Pilyugin，具有 $C^0$-拓扑的动力系统空间。数学讲义，1571。施普林格柏林-海德堡，1994。[13] S.Yu. Pilyugin，动力系统中的跟踪。数学讲义，1706。施普林格柏林-海德堡，1999。[14] S.Yu. Pilyugin, O.B. Plamenevskaya，跟踪性质是泛的。拓扑学应用 97 (1999), 253–266。[15] R. Potrie，一般的双李雅普诺夫稳定同宿类。Nonlinearity 23 (2010), 1631–1649。[16] D. Richeson, J. Wiseman，链回归率与拓扑熵。拓扑学应用 156 (2008), 251–261。

Department of Mathematical and Computing Science, School of Computing, Institute of Science Tokyo, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, Japan*Email address*: gknoriaki@gmail.com