arXiv:2601.06526v1 [math.DG] 10 Jan 2026

由海森堡型群的变形产生的几何结构

Claudio Afeltra

摘要

为了给海森堡型群上的亚马贝方程寻找几何解释，受此愿望驱动，我们在局部以这些群为模型的流形上定义了一种几何结构，称为海森堡型接触结构。在海森堡群的情形下，它等价于接触黎曼流形。我们在这些结构上定义了一个自然联络，计算了标量曲率在共形变换下的公式，并为这些流形引入了亚马贝问题。

1 引言

李群上的分析在现代分析中发挥着重要作用，有助于更好地理解其中哪些性质 $\mathbf{R}^n$ 是特定结果所必需的，并且在微分几何、偏微分方程、物理学以及数学和自然科学的其他领域中有着广泛应用。

关于李群的大多数研究成果都适用于李群的某些特定子类。卡诺群是研究得非常充分的一族李群，即其李代数 $\mathfrak{g}$ 具有分层$\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{k} V_k$ 并满足 $[V_1, V_i] = V_{i+1}$ 对所有 i 成立的单连通群 G （其中k 称为 G的步）。卡诺群中最重要且研究最为深入的例子是海森堡群 $\mathbf{H}^n$，它是一个二阶卡诺群（最小的非平凡步数），其第二层的维数为一。这些性质使得对它的研究尤其便利，并且在许多情况下能够进行一般情形下无法实现的显式计算。

在 [K] Kaplan 引入了一类称为海森堡型群的二阶卡诺群，它们与$\mathbf{H}^n$具有许多共同性质，并且关于$\mathbf{H}^n$ 的许多计算都可以在这些群上重复或加以调整（参见 [CDKR] 中的第18章，见 [BLU]）。

其中一项性质涉及方程

$$-\Delta u = u^{\frac{Q+2}{Q-2}}, \quad u > 0 \tag{1}$$

其中， Δ 是次拉普拉斯算子， Q是齐性维数（此类概念的定义见第2节）。在 $\mathbf{H}^n$ 的情形下，方程（1）在微分几何中非常重要，因为它等价于寻找接触

形式，使其在$\mathbf{H}^n$ 上解CR Yamabe问题，即在一个CR流形上寻找Webster曲率为常数的接触形式（见 [JL1]或 [DT]）。在$\mathbf{H}^n$ 上，该方程已知存在解

$$U(x,t) = C_n \left(\frac{1}{(1+|x|^2)^2 + 16|t|^2} \right)^{\frac{Q-2}{4}}$$

其中（x， t） $\in \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R} = \mathbf{H}^n$。从几何上看，该解对应于将 $S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$ 上的标准接触形式通过 Cayley变换（类似于立体投影的变换）拉回到$\mathbf{H}^n$ 上。 U 及其平移和膨胀是 $L^{\frac{2Q}{Q-2}}$中方程（1）的唯一解（见 [JL2]）。一个重要的未解决问题是：在没有可积性假设的情况下，是否仍然成立。

关于海森堡型群，Garofalo 和 Vassilev 发现，方程（1）存在一个解，其形式与$\mathbf{H}^n$上的解相同，

$$U(x,t) = C_G \left(\frac{1}{(1+|x|^2)^2 + 16|t|^2} \right)^{\frac{Q-2}{4}}$$

其中（x， t） $\in \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^k \simeq G$ （见 [GV]）。后来 Yang（见 [Y]）证明，Folland 和 Stein 关于$\mathbf{H}^n$ 的分类结果可以推广到海森堡型群；也就是说， U 及其平移和膨胀是 $L^{\frac{2Q}{Q-2}}$中方程（1）的唯一解。

尽管在$\mathbf{H}^n$ 上和海森堡型群上研究方程（1）有诸多相似之处，但迄今为止，在更一般的情形下，还没有与$\mathbf{H}^n$上的几何解释类似的、针对该方程的几何解释；也就是说，还没有一种几何结构能够定义标量曲率和共形变换的概念，使得 G 上的标量曲率共形变换公式等价于方程（1）。

本文旨在寻找这样一种几何解释。为此，我们引入一种几何结构，称为海森堡型接触结构，它局部以海森堡型群为模型。该结构由 TM 上的子丛 $\mathfrak{H}$ 及其上的次黎曼度量 g ，以及一个由微分形式 $\mathscr{V}$构成的向量空间组成；对于每个 $\theta \in \mathscr{V}$，与之对应的张量 J_θ 定义为$g(X, J_\theta Y) = d\theta(X, Y)$，且这种对应关系 $\theta \mapsto J_\theta$构成一个克利福德代数。此外，该结构还满足一个条件，使得能够定义类似于接触几何中的Reeb向量场（完整定义见第3节）。当 $G = \mathbf{H}^n$时，我们的概念等价于接触黎曼流形。这种结构具有自然的共形变换概念，如第3节所示。

在第4节中，我们定义了海森堡型接触流形上的一个联络。对于接触黎曼流形，我们的联络不同于Tanno联络，而是Nagase在 [N]中引入的Hermitian Tanno联络。对于CR流形，这两种联络都与Tanaka-Webster联络一致。

最后，在第5节中，我们仿照黎曼几何，通过对曲率张量作两次缩并来定义标量曲率，并计算标量曲率在共形变换下的公式，证明它与方程（1）仅相差一个无关紧要的常数。我们还在此背景下引入亚马贝问题，并指出，与黎曼情形和CR情形一样，我们可以定义亚马贝常数 $\mathscr{Y}(M)$，使得 $\mathscr{Y}(M) \leq Y(G)$；若紧致流形 G上严格不等式成立，则亚马贝问题有解。与黎曼情形和CR情形不同，我们通常无法找到一个紧致流形 M ，使其满足与黎曼几何中的S^n 及CR几何中的 $S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$ 类似的条件，即 $\mathscr{Y}(M) = Y(G)$（我们也不知道这样的流形是否存在）；不过，对于一个称为岩泽型群的子类，我们可以找到这样的流形。这些群具有球面反演的概念，借此我们可以将两个 G 的副本粘合起来，构造出一个与 S^{2n+k} 微分同胚的海森堡型接触流形（见第3.2节）。

我们指出，在局部以海森堡型群为模型的流形上定义一种结构，这一想法并不新颖；但在 [BGRV] 中，作者定义了一种称为 H型叶状结构的结构。尽管目标相似，他们的结构与我们的结构并不相同；特别是，它不具备共形变换的概念，而这正是我们的主要动机。那里的作者则是受到将海森堡型群的其他性质推广到非平坦情形这一目标的启发。

我们的工作也与 Biquard 在 [B], 中的工作有关，他在那里定义了一种称为四元数接触流形的几何结构。

2 海森堡型群

本节将回顾海森堡型群的定义及其一些已知性质。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个带有标量积的实李代数， $\mathfrak{z}$ 是其中心， $\mathfrak{v} = \mathfrak{z}^{\perp}$ 是中心的正交补。假设 $[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{z}$。我们定义 $J: \mathfrak{z} \to \mathrm{End}(\mathfrak{v})$ 如下：

$$\langle J_T X, Y \rangle = \langle T, [X, Y] \rangle$$

对于 $T \in \mathfrak{z}$, $X, Y \in \mathfrak{v}$。如果对于每个满足 $|T| = 1$ 的 $T \in \mathfrak{z}$ ， J_T 都是一个等距变换，则称 $\mathfrak{g}$ 为海森堡型李代数。等价地，如果对于每个 $T \in \mathfrak{z}$

$$J_T^* = -J_T \tag{2}$$

and

$$J_T^2 = -|T|^2 I. \tag{3}$$

条件 (3) 根据极化并应用 (2) 后，等价于

$$J_{T_1} J_{T_2} + J_{T_2} J_{T_1} = -2 \langle T_1, T_2 \rangle I$$

对于 T_1， $T_2 \in \mathfrak{z}$。

若李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上具有标量积，且该李群是单连通的，并且 $\mathfrak{g}$ 属于海森堡型，则称其为海森堡型群。

因此，海森堡型群是二阶卡诺群的一个子类。

我们回顾一下：给定两个配备标量积的实向量空间 V 和 W，同态 $J: V \to \mathrm{End}(W)$ 若对每个 v， J_v 都是反对称的，且满足 Clifford关系

$$J_v J_u + J_u J_v = -2\langle v, u\rangle I$$

对每个 v，$u \in V$ 都成立。

因此，在海森堡型李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ 中， $\mathfrak{v}$ 是 $\mathfrak{z}$ 上的克利福德模。这使我们能够应用克利福德模理论。反过来，给定一个 V 上的克利福德模 W，空间 $W \times V$ 配备由 $g([(X_1, T_1), (X_2, T_2)], S) = g(J_S X_1, X_2)$ 对 $X_1, X_2 \in W, T_1, T_2, S \in V$ 定义的括号运算后，构成一个海森堡型李代数。

记 $\dim(\mathfrak{v})$ 为 $= 2n$，$\dim(\mathfrak{z})$ 为 $= k$ （由 (3) 显然可知 $\dim(\mathfrak{v})$ 为偶数）。那么，作为分层李代数的 $\mathfrak{g}$，具有如下自同构族:

$$\delta_\lambda(X, T) = (\lambda X, \lambda^2 T)$$

对于 $\lambda \in (0, \infty)$，并且有

$$(\delta_\lambda \mu) = \lambda^Q \mu$$

其中 μ 是哈尔测度， $Q = 2n+2k$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的齐性维数。

我们将 G 的次拉普拉斯算子定义为微分算子

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{2n} X_\alpha^2$$

其中 X_1、.....、 X_{2n} 是 $\mathfrak{g}$ 的标准正交基（容易验证，该定义与所选基无关）。

方程

$$-\Delta u = u^{\frac{Q+2}{Q-2}}, \quad u > 0$$

有解

$$U(x,t) = C_G \left(\frac{1}{(1+|x|^2)^2 + 16|t|^2} \right)^{\frac{Q-2}{4}} \tag{4}$$

由 Garofalo 和 Vassilev 在 [GV], 中发现，并且根据 Yang 在 [Y], 中的结果，除左平移和膨胀外，是 $L^{\frac{2Q}{Q-2}}$ 中的唯一解。

在海森堡型群上，CDKR 引入了一种球面反演，其类似于$\mathbf{R}^n$ 上的反演以及海森堡群上的反演:

$$\sigma(X,T) = \left(\left(-|X|^2 I + 4J_T\right)^{-1} X, -\frac{T}{|X|^4 + 16|T|^2} \right) \tag{5}$$

对于（X，T）$\in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$，并通过指数映射将其推广到 G。 σ 仅在海森堡型群的一个子类上具有有意义的性质，以下结果说明了这一点（参见 [CDKR]中的定理 4.2 和 5.1）。

定理 2.1。 以下命题等价。

- G 是秩一单群的岩泽分解中的幂零部分。
- 对于每个 $X \in \mathfrak{v}$ 和 T_1，$T_2 \in \mathfrak{z}$ 都存在 $T \in \mathfrak{z}$，使得 $J_T X = J_{T_1} J_{T_2} X$。
- σ 保持水平分布。

满足定理 2.1 中任一等价命题的群称为 Iwasawa 型群。

3 Heisenberg 型的接触结构

设 M 为流形， $\mathfrak{H}$ 为 TM 的一个 $2n$ 维子丛，且其上带有度量 g； $\mathscr{V}$ 为一个 k 维微分形式向量空间，其在 $\mathfrak{H}$ 上的限制为零，并且在 $TM/\mathfrak{H}$ 上诱导的微分形式构成其整个对偶空间（这意味着 $\dim(M) = 2n + k$），且赋有标量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。

如果满足以下条件，我们称 $(M, \mathfrak{H}, g, \mathscr{V})$ 为海森堡型接触流形：

- 对每个 $\theta \in \mathscr{V}$，由 $g(X, J_\theta Y) = d\theta(X, Y)$ 定义的 $\mathfrak{H}$ 上的算子，使得映射 $\mathscr{V} \to \mathscr{L}(\mathfrak{H}_x)$ 由 $\theta \mapsto J_\theta$ 给出，并且对每个 $x \in M$ 都构成克利福德代数结构；
- 将由 $i_{T_\theta} d\theta = 0$ 和 $\psi(T_\theta) = \langle \psi, \theta \rangle$ 定义的向量场称为 T_θ。对每个 $\psi \in \mathscr{V}$，映射 $\theta \mapsto T_\theta$ 都是线性的（其像称为 $\mathfrak{T}$，即黎布子空间）。

我们将 g 扩展到整个 TM，并要求 $\mathfrak{H}$ 与 $\mathfrak{Z}$ 正交，且该扩展在 $\mathfrak{T}$ 上的限制与对偶于 $\langle \cdot$的乘积$\cdot \rangle$一致。

注 3.1。 一种等价的定义是：定义一个取值于带有标量积的向量空间 V 的微分形式 $\boldsymbol{\theta}$，使得 $\ker \boldsymbol{\theta} = \mathfrak{H}$ 以及微分形式族 $\{\psi \circ \boldsymbol{\theta} \mid \psi \in V^*\}$ 满足原定义中的性质。

注 3.2。 若 $\dim \mathscr{V} = 1$，则海森堡型接触结构等价于黎曼接触结构。

注 3.3。 若 G 是一个海森堡型李群，则借助标量积，我们可以为每个 $T \in \mathfrak{z}$ 关联一个在 $\mathfrak{v}$上为零的微分形式，并且

$$d\theta_T(X, Y) = -\theta_T([X, Y]) = -\langle T, [X, Y] \rangle = -g(J_T X, Y) = g(X, J_T Y)$$

因此，按照定义，它赋予 G 海森堡型接触流形的结构。

给定一个海森堡型接触流形 M，我们称 $G(M)$ 为海森堡型群，其李代数对应于定义中克利福德代数 $\mathscr{V} \to \mathscr{L}(\mathfrak{H}_x)$ 所对应的李代数（其同构类型不依赖于 x），并称 M 局部建模于 $G(M)$。

3.1 共形变换

~给定光滑且处处非零的 f，令 $\mathscr{V} = \{f\theta | \theta \in \mathscr{V}\}$ 和 $\widetilde{g} = fg$。那么

$$\widetilde{g}(X, J_\theta Y) = fg(X, J_\theta Y) = fd\theta(X, Y) = d(f\theta)(X, Y) = d\widetilde{\theta}(X, Y)$$

因此 $J_{f\theta} = J_\theta$。所以它们在每一点都构成一个克利福德代数结构。

此外 $T_{f\theta} = \frac{1}{f}T_\theta + X_{\theta,\ f}$，其中

$$0 = i_{\frac{1}{f}T_\theta + X_{\theta,f}}(fd\theta + df \wedge \theta)|_{\mathfrak{H}} = fi_{X_{\theta,f}}d\theta|_{\mathfrak{H}} - \frac{|\theta|^2}{f}df|_{\mathfrak{H}}$$

因此 $X_{\theta,\ f}$ 由 $i_{X_{\theta,\ f}}d\theta|_{\mathfrak{H}} = \frac{|\theta|^2}{f^2}df|_{\mathfrak{H}}$ 唯一确定。 —

由于

$$\theta_\psi(T_{\theta_1} + T_{\theta_2}) = \langle \psi, \theta_1 \rangle + \langle \psi, \theta_2 \rangle = \langle \psi, \theta_1 + \theta_2 \rangle$$

且显然 $T_{c\theta} = cT_\theta$，$\theta \mapsto T_\theta$ 的线性性等价于

$$0 = i_{T_{\theta_1}+T_{\theta_2}}d(\theta_1 + \theta_2)|_{\mathfrak{H}} = \left(i_{T_{\theta_1}}d\theta_2 + i_{T_{\theta_2}}d\theta_1\right)\Big|_{\mathfrak{H}}$$

因此，经过共形变换后，令 $X = X_{\theta_1,\ f}$ 和 $Y = X_{\theta_2,\ f}$，

$$\left(i_{\widetilde{T}_{\theta_1}}d\widetilde{\theta}_2 + i_{\widetilde{T}_{\theta_2}}d\widetilde{\theta}_1\right)\Big|_{\mathfrak{H}} =$$

$$= \left(i_{\frac{1}{f}T_{\theta_1}+X}(fd\theta_2 + df \wedge \theta_2) + i_{\frac{1}{f}T_{\theta_2}+Y}(fd\theta_1 + df \wedge \theta_1)\right)\Big|_{\mathfrak{H}} =$$

$$= \left(i_{T_{\theta_1}}d\theta_2 + fi_X d\theta_2 + \frac{1}{f}T_{\theta_1}(f)\theta_2 - \frac{1}{f}\langle \theta_1, \theta_2 \rangle df + X(f)\theta_2\right)\Big|_{\mathfrak{H}} +$$

$$+ \left(i_{T_{\theta_2}}d\theta_1 + fi_Y d\theta_1 + \frac{1}{f}T_{\theta_2}(f)\theta_1 - \frac{1}{f}\langle \theta_1, \theta_2 \rangle df + Y(f)\theta_1\right)\Big|_{\mathfrak{H}} =$$

$$= \left(i_{T_{\theta_1}}d\theta_2 + i_{T_{\theta_2}}d\theta_1 + fi_X d\theta_2 + fi_Y d\theta_1 - \frac{2}{f}\langle \theta_1, \theta_2 \rangle df\right)|_{\mathfrak{H}}.$$

对于每个 $Z \in \mathfrak{H}$，都有

$$fi_X d\theta_2(Z) = fd\theta_2(X, Z) = fg(X, J_{\theta_2}Z) = -\frac{1}{|\theta_1|^2}fg(X, J_{\theta_1}^2 J_{\theta_2}Z) =$$

$$= -\frac{1}{|\theta_1|^2}fd\theta_1(X, J_{\theta_1}J_{\theta_2}Z) = -\frac{1}{|\theta_1|^2}fi_X d\theta_1(J_{\theta_1}J_{\theta_2}Z) = -\frac{1}{f}df(J_{\theta_1}J_{\theta_2}Z)$$

类似地， $fi_Y d\theta_1(Z) = -\frac{1}{f} df(J_{\theta_2} J_{\theta_1} Z)$，因此

$$fi_X d\theta_2(Z) + fi_Y d\theta_1(Z) = -\frac{1}{f} df(J_{\theta_1} J_{\theta_2} Z) - \frac{1}{f} df(J_{\theta_2} J_{\theta_1} Z) =$$

$$= -\frac{1}{f} df((J_{\theta_1} J_{\theta_2} + J_{\theta_2} J_{\theta_1}) Z) = 2 \langle \theta_1, \theta_2 \rangle \frac{1}{f} df(Z)$$

因此，我们证明了这种新结构满足海森堡型接触流形的定义。

3.2 岩泽球

借助公式 (4) 中定义的 Garofalo-Lanconelli 解 U，我们可以定义一种流形，它类似于黎曼几何中带有标准度量的球面 S^n，也类似于 CR 几何中带有标准接触形式的球面 $S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$。

事实上，借助 [CDKR]，中的计算，给定一个海森堡型群 G 及其在注 3.3 中定义的标准海森堡型接触结构 $\mathscr{V}$，若通过定义 $\widetilde{\mathscr{V}} = \{U^{\frac{4}{Q-2}} \theta \mid \theta \in \mathscr{V}\}$ 进行共形变换，则 $\mathscr{V}$ 在公式 5 中定义的球面反演 σ 下保持不变。因此，我们可以通过沿着 $G \setminus \{0\}$ 将两份 G 经由 σ 粘合，在 S^{2n+2k} 上定义一个海森堡型接触结构。我们将带有此结构的 S^{2n+2k} 称为岩泽球 $\boldsymbol{S}_G$。例如， $\boldsymbol{S}_{H^n}$ 是带有标准 CR 结构和接触形式的球面 $S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$。

借助定理 5.3，我们将证明岩泽球具有常标量曲率。

4 一个自然联络

我们回顾一下，给定流形 M 上的向量丛 E 以及 TM的子丛 V，沿 V的 E上的部分联络是一个线性映射 $\nabla\colon\ \Gamma(E) \to \Gamma(V * \times E)$，满足 $\nabla s = df \oplus s + f \nabla s$。仿射联络在 V上的限制是一个部分联络；反之，如果 $TM = V \oplus W$和 ∇^V以及 ∇^W分别是沿 V和 W的部分联络，则存在唯一的仿射联络，其沿 V和 W的限制分别与 ∇^V和 ∇^W重合。如果 $E = V$，则挠率张量 $T \in \Gamma(V^* \times V^* \times TM)$，

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

定义为。

本节旨在定义 $\mathfrak{H}$上的仿射联络。根据上述讨论，我们可以分别研究沿 $\mathfrak{H}$ 的部分联络和沿 $\mathfrak{T}$ 的部分联络问题。

沿 $\mathfrak{H}$的部分联络

引理 4.1. 存在 $\mathfrak{H}$ 上的一个联络，使得空间 $\{J_\theta|\theta \in \mathscr{V}\}$和 g 是平行的。

证明。 由于 $\mathscr{V} \to \mathscr{L}(\mathfrak{H})$ 具有克利福德代数结构，它是 Cliff($\mathscr{V}$) 上的一个模，因此通过限制，诱导出表示 ρ： Pin($\mathscr{V}$) $\to GL(\mathfrak{H})$。

设 $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$ 是 $GL(\mathbf{R}^{2n})$ 上由 $\mathfrak{H}$的标架构成的主丛。设 $\tilde{\rho}$: Pin($\mathbf{R}^k$) $\mapsto$ End($\mathbf{R}^{2n}$) 是一个与 ρ 同构的模型表示。对于 $\varphi \in$Pin($\mathbf{R}^k$)，令 $a_{ij}(g)$ 为 $\rho(g)$ 的系数。令 $(X_1, \ldots, X_{2n})$ 为 $\mathfrak{H}$ 的一个光滑局部标架，使得 $\rho(\varphi(g))X_i = a_{ij}(g)$。于是

$$P = \{(\sum_i a_{i1}(g)(X_1), \ldots, \sum_i a_{i,2n}(g)(X_{2n}))|g \in \mathrm{Pin}(\mathscr{V}_x)\}$$

带有自然主 Pin($\mathbf{R}^k$)-丛结构的丛，是将 $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$ 的结构群从 $GL(\mathbf{R}^{2n})$ 约化为 ρ(Pin($\mathbf{R}^k$)) 的结果。

根据联络的一般理论，在 P 上存在一个主联络。令 ∇ 为通过 ρ 在 $\mathfrak{H}$ 上诱导的伴随联络。由于 ρ(Pin($\mathscr{V}$)) 是平行的， $\nabla_X J_\theta$ 必须属于 J_θ 中 ρ (Pin($\mathscr{V}$)) 的切空间，即 $d\rho(T_\theta \mathrm{Pin}(\mathscr{V})) = J_\theta(\mathrm{span}(J_i J_j))$（其中 $J_i = J_{\theta^i}$ 对于 $\mathscr{V}$ 的某个标准正交基 $\theta^1, \ldots, \theta^k$ ）。

因此

$$\nabla_X J_i = J_i \sum_{j<k} a_{jk} J_j J_k = \sum_{j \neq i} a_j J_j + J_i \sum_{j<k, j,k \neq i} a_{jk} J_j J_k$$

有

$$0 = -\nabla_X(I) = J_i \nabla_X J_i + (\nabla_X J_i) J_i =$$

$$= J_i \sum_{j \neq i} a_j J_j + J_i J_i \sum_{j<k,j,k \neq i} a_{jk} J_j J_k + \sum_{j \neq i} a_j J_j J_i + J_i \sum_{j<k,j,k \neq i} a_{jk} J_j J_k J_i =$$

$$= -2 \sum_{j<k,j,k \neq i} a_{jk} J_j J_k$$

因此 $\sum_{j<k,\ j,\ k \neq i} a_{jk} J_j J_k = 0$ 从而 $\nabla_X J_i = \sum_{j \neq i} a_j J_j$。 □

引理 4.2。 给定一个沿 $\mathfrak{H}$ 的部分联络，满足引理 ~*4.1* 的结论，另一个联络 $\nabla_X = \nabla_X + a_X$ 满足该条件，当且仅当

$$a_X = \sum_{i<j} \alpha_{ij}(X) J_{\theta^i} J_{\theta^j} + b_X$$

（其中 $\theta^1, \ldots, \theta^k$ 是 $\mathscr{V}$的一组标准正交基），对于某些微分形式 α_{ij}，且 b_X 反对称并满足：对于每个 X 和 θ，都有 $b_X J_\theta = J_\theta b_X$ 。

~证明。 </style} $\nabla g = 0$ 当且仅当 a_X 反对称，这是一个标准事实。为了使 $\{J_\theta | \theta \in \mathscr{V}\}$ 保持平行，

$$((\widetilde{\nabla}_X - \nabla_X) J_\theta)(Y) =$$

$$= (\widetilde{\nabla}_X - \nabla_X)(J_\theta Y) - J_\theta((\widetilde{\nabla}_X - \nabla_X)Y) = a_X(J_\theta Y) - J_\theta(a_X(Y))$$

必须等于 $J_\psi Y$，其中某个 $\psi \in \mathscr{V}$。对 $J_\theta^2 = 1$ 求导，得到~ ~ $(\nabla_X J_\theta) J_\theta + J_\theta \nabla_X J_\theta = 0$ 以及 $(\nabla_X J_\theta) J_\theta + J_\theta \nabla_X J_\theta = 0$，因此 J_ψ 必须与 J_θ 反对易，这意味着 $\langle \psi, \theta \rangle = 0$。记 $\psi = A(X)\psi$，在基 $A(X)\theta^i = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}(X)\theta^j$ 中。像之前那样对 Clifford关系求导，我们得到

$$(\nabla_X J_{\theta^i}) J_{\theta^j} + J_{\theta^i}(\nabla_X J_{\theta^j}) + (\nabla_X J_{\theta^j}) J_{\theta^i} + J_{\theta^j}(\nabla_X J_{\theta^i}) = 0$$

and

$$(\widetilde{\nabla}_X J_{\theta^i}) J_{\theta^j} + J_{\theta^i}(\widetilde{\nabla}_X J_{\theta^j}) + (\widetilde{\nabla}_X J_{\theta^j}) J_{\theta^i} + J_{\theta^j}(\widetilde{\nabla}_X J_{\theta^i}) = 0,$$

相减后得到

$$J_{A(X)\theta^i} J_{\theta^j} + J_{\theta^i} J_{A(X)\theta^j} + J_{A(X)\theta^j} J_{\theta^i} + J_{\theta^j} J_{A(X)\theta^i} = 0,$$

因此

$$0 = \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}(X) J_{\theta^k} J_{\theta^j} + \sum_{k \neq j} \alpha_{jk} J_{\theta^i} J_{\theta^k} + \sum_{k \neq j} \alpha_{jk} J_{\theta^k} J_{\theta^i} + \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}(X) J_{\theta^j} J_{\theta^k} =$$

$$\sum_{k \neq i} \alpha_{ik}(X) \left(J_{\theta^k} J_{\theta^j} + J_{\theta^j} J_{\theta^k} \right) + \sum_{k \neq j} \alpha_{jk}(X) \left(J_{\theta^i} J_{\theta^k} + J_{\theta^k} J_{\theta^i} \right) =$$

$$= -2\alpha_{ij}(X) - 2\alpha_{ji}(X)$$

这意味着 $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$。

张量 $\sum_{i<j} \alpha_{ij}(X) J_{\theta^i} J_{\theta^j}$ 满足

$$\left(\sum_{i<j} \alpha_{ij}(X) J_{\theta^i} J_{\theta^j} \right) \circ J_{\theta^i} - J_{\theta^i} \circ \left(\sum_{i<j} \alpha_{ij}(X) J_{\theta^i} J_{\theta^j} \right) =$$

$$= \sum_{j<k} \alpha_{jk}(X) \left(J_{\theta^j} J_{\theta^k} J_{\theta^i} - J_{\theta^i} J_{\theta^j} J_{\theta^k} \right) =$$

$$= -2 \sum_{j<i} \alpha_{ji}(X) J_{\theta^j} + 2 \sum_{j>i} \alpha_{ij}(X) J_{\theta^j} = 2 \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}(X) J_{\theta^j}$$

并且是反对称的，因此 $b_X := a_X - \frac{1}{2} \sum_{i<j} \alpha_{ij}(X) J_{\theta^i} J_{\theta^j}$ 是反对称的，并且对每个 θ 都满足 $b_X J_\theta = J_\theta b_X$。 □

我们定义

$$Q_\theta(X, Y) = J_\theta(\nabla_X J_\theta)Y - J_\theta(\nabla_Y J_\theta)X + (\nabla_{J_\theta Y} J_\theta)X - (\nabla_{J_\theta X} J_\theta)Y \qquad (6)$$

很容易验证这是一个张量。

引理 4.3。 按照引理 *4.2* 的记号，存在唯一一组微分形式 $\sim\alpha_{ij}$ ，使得 $Q_\theta = 0$; 而加上一个张量 b 后，张量 Q 保持不变。

证明。由于

$$(\nabla_X J_\theta)(Y) = \nabla_X(J_\theta Y) - J_\theta(\nabla_X Y)$$

~对于 ∇，同理可得

$$(\nabla_X - \widetilde{\nabla}_X)J_\theta = a_X J_\theta - J_\theta a_X, \tag{7}$$

因此

$$\widetilde{Q}_{\theta^k}(X,Y) - Q_{\theta^k}(X,Y) =$$

$$= J_{\theta^k} a_X J_{\theta^k} Y + a_X Y - J_{\theta^k} a_Y J_{\theta^k} X - a_Y X +$$

$$+ a_{J_{\theta^k} Y} J_{\theta^k} X - J_{\theta^k} a_{J_{\theta^k} Y} X - a_{J_{\theta^k} X} J_{\theta^k} Y + a_{J_{\theta^k} X} J_{\theta^k} Y =$$

$$= \sum_{i<j} \alpha_{ij}(X)\left(J_{\theta^k} J_{\theta^i} J_{\theta^j} J_{\theta^k} Y + J_{\theta^i} J_{\theta^j} Y\right) +$$

$$- \sum_{i<j} \alpha_{ij}(Y)\left(J_{\theta^k} J_{\theta^i} J_{\theta^j} J_{\theta^k} X + J_{\theta^i} J_{\theta^j} X\right) +$$

$$+ \sum_{i<j} \alpha_{ij}(J_{\theta^k} Y)\left(J_{\theta^i} J_{\theta^j} J_{\theta^k} X - J_{\theta^k} J_{\theta^i} J_{\theta^j} X\right) +$$

$$- \sum_{i<j} \alpha_{ij}(J_{\theta^k} X)\left(J_{\theta^i} J_{\theta^j} J_{\theta^k} Y - J_{\theta^k} J_{\theta^i} J_{\theta^j} Y\right) =$$

$$= 2\sum_{i\neq k} \left(\alpha_{ik}(X) J_{\theta^i} J_{\theta^k} Y - \alpha_{ik}(Y) J_{\theta^i} J_{\theta^k} X - \alpha_{ik}(J_{\theta^k} Y) J_{\theta^i} X + \alpha_{ik}(J_{\theta^k} X) J_{\theta^i} Y\right).$$

令 $\nabla_X J_{\theta^k} = \sum_{i\neq k} \beta_{ki}(X) J_{\theta^i}$ ，则有 (8)

$$Q_{\theta^k}(X,Y) =$$

$$= \sum_{i\neq k} \left(J_{\theta^k}\beta_{ki}(X) J_{\theta^i} Y - J_{\theta^k}\beta_{ki}(Y) J_{\theta^i} X + \beta_{ki}(J_{\theta^k} Y) J_{\theta^i} X - \beta_{ki}(J_{\theta^k} X) J_{\theta^i} Y\right).$$

因此，取 $\alpha_{ki} = \frac{1}{2}\beta_{ki}$ ，可得 $\widetilde{Q}_{\theta^k} = 0$。

~现在假设，对于每个 θ，都有 $Q_\theta = Q = 0$ 。给定 $\ell \neq k$，利用公式（8）容易证明

$$J_{\theta_\ell} \circ \left(Q_{\theta^k} - \widetilde{Q}_k\right) - \left(Q_{\theta^k} - \widetilde{Q}_k\right) \circ J_{\theta_\ell} =$$

$$= 2\left(-\alpha_{\ell k}(X) J_{\theta^k} Y - \alpha_{\ell k}(Y) J_{\theta^k} X - \alpha_{\ell k}(J_{\theta^k} Y) X + \alpha_{\ell k}(J_{\theta^k} X) Y\right),$$

因此

$$\alpha_{ik}(X) J_{\theta^i} J_{\theta^k} Y - \alpha_{ik}(Y) J_{\theta^i} J_{\theta^k} X - \alpha_{ik}(J_{\theta^k} Y) J_{\theta^i} X + \alpha_{ik}(J_{\theta^k} X) J_{\theta^i} Y = 0$$

对于每个 i, k。如果 $Y = J_{\theta^i}X$ 那么

$$\alpha_{ik}(X)J_{\theta^k}X - \alpha_{ik}(J_{\theta^i}X)J_{\theta^i}J_{\theta^k}X - \alpha_{ik}(J_{\theta^k}J_{\theta^i}X)J_{\theta^i}X - \alpha_{ik}(J_{\theta^k}X)X = 0. \quad (9)$$

由于 J_{θ^i} 和 J_{θ^k} 是反对称的 $g(X, J_{\theta^i}X) = g(X, J_{\theta^k}X) = 0$ 和

$$g(X, J_{\theta^i}J_{\theta^k}X) = -g(J_{\theta^i}X, J_{\theta^k}X) = g(J_{\theta^k}J_{\theta^i}X, X) = -g(J_{\theta^i}J_{\theta^k}X, X)$$

因此 $g(X, J_{\theta^i}J_{\theta^k}X) = g(J_{\theta^i}X, J_{\theta^k}X) = 0$。因此，公式（9）是四个线性无关向量之和，由此我们推得，对于每个 i, k，都有 $\alpha_{ik} = 0$，从而对于每个 θ，都有 $Q_\theta = Q_\theta$。 □

现在，采用引理 4.2 中的记号，并假设根据引理 4.3，$\alpha_{ij} = 0$，则 ∇ 的挠率为

$$\widetilde{T}(X,Y) = T(X,Y) + (\widetilde{\nabla}_X - \nabla_X)Y - (\widetilde{\nabla}_Y - \nabla_Y)X = T(X,Y) + b_X Y - b_Y X. \quad (10)$$

我们称 $\pi_{\mathfrak{H}}T$ 为关于与 $\mathfrak{T}$的直和，挠率在 $\mathfrak{H}$ 上的投影。现在，给定 $\mathfrak{H}$上型为 $(0,3)$ 的张量空间 $T^{(0,3)}(\mathfrak{H})$，考虑关于前两个位置的反对称化算子。根据以下引理，该算子在关于第二和第三个位置反对称的张量子空间上的限制是单射

引理 4.4. 若 T 是一个张量，使得 $T(X,Y,Z)$ 和 $= -T(X,Z,Y)$ 以及 $T(X,Y,Z)$ 和 $= T(Y,X,Z)$，则 $T = 0$。

引理 4.5. 考虑置换群 $\mathfrak{S}_3$ 在 $\{T, -T\}$ 上的作用，由 $\sigma T(X_1, X_2, X_3) = T(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)})$ 给出。由于 $\mathfrak{S}_3$ 的对换彼此共轭，且根据假设(12) 属于核，因此 (23) 也属于核，但此时 $T = 0$。或者

$$T(X,Y,Z) = T(Y,X,Z) = -T(Y,Z,X) = -T(Z,Y,X) = T(Z,X,Y) =$$
$$= T(X,Z,Y) = -T(X,Y,Z).$$

现在考虑 $T^{(0,3)}(\mathfrak{H})$ 的子空间，其中的元素相对于第二个和第三个变量，对每个 θ 都与 J_θ 对易。设 $\Sigma(\mathfrak{H})$ 为关于前两个项的反对称化算子的像。于是，根据公式（10）和上述推理，存在唯一的 b，使得 $\widetilde{}$ 挠率 $\pi_{\mathfrak{H}}T$ 与 $\Sigma(\mathfrak{H})$ 正交。因此我们得到如下结果。

命题 4.6。存在唯一的部分联络，在 $\mathfrak{H}$上沿 $\mathfrak{H}$定义，使得 $\{J_\theta|\theta \in \mathscr{V}\}$ 和 g 平行，$Q_\theta = 0$ 对每个 θ 都成立（其中 Q_θ 由公式 (6)定义），并且 $\pi_{\mathfrak{H}}T$ 与 $\Sigma(\mathfrak{H})$正交。

4.2 沿 $\mathfrak{T}$的部分联络

引理 4.7。存在一个沿 $\mathfrak{T}$、作用于 $\mathfrak{H}$ 的部分联络，使得 $\{J_\theta|\theta \in \mathscr{V}\}$ 和 g 均为平行，且任何其他此类联络都具有如下形式

$$\widetilde{\nabla}_T = \nabla_T + \sum_{i<j} \beta_{ij}(T)J_{\theta^i}J_{\theta^j} + \gamma_T$$

其中 γ_T 是反对称的，并且对每个 T 和 θ， $\gamma_T J_\theta = J_\theta \gamma_T$ 。

证明。 证明与引理 4.2 相同。 □

引理 4.8。 沿用引理 *4.7* 的记号，存在唯一的选择 β_{ij}，使得对于每个 T 和 θ，都有 $\nabla_T J_\theta = 0$ ，并且加上张量 γ 后，$\nabla_T J_\theta$ 保持不变。

证明。 证明与引理 4.3 相同。 □

现在定义部分挠率

$$T^{\nabla}(T,X) = \nabla_T X - \pi_{\mathfrak{H}}[T,X].$$

于是，沿用引理 4.7 的记号，并假设 $\beta_{ij} = 0$，根据引理 4.8，根据引理 4.8，

$$T^{\widetilde{\nabla}}(T,X) = \nabla_T X + \gamma_T(X) - \pi_{\mathfrak{H}}[T,X] = T^{\nabla}(T,X) + \gamma_T(X). \tag{11}$$

我们称 $\Xi(\mathfrak{H})$ 为与 J_θ 对易的反对称张量空间，其中对每个 θ 都成立。于是，根据公式（11），存在唯一的 γ，使得算子 $T^{\nabla}(T,\cdot)$ 对每个 T 都与 $\Xi(\mathfrak{H})$ 正交。因此得到如下结论。

命题 4.9. 存在唯一的部分联络，使得 $\mathfrak{H}$ 沿 $\mathfrak{T}$ 平行， g 对每个 T 和 θ 都平行，并且对每个 T， $T^{\nabla}(T,\cdot)$ 与 $\Xi(\mathfrak{H})$ 正交。

因此，现在我们可以在 M 上定义一个联络。

定义 4.10. 给定一个海森堡型接触流形，我们将 ∇ 定义为满足以下条件的联络：$\mathfrak{H}$ 平行；其在 $\mathfrak{H}$ 上的约化在 $\mathfrak{H}$ 上限制为命题 4.6 中定义的部分联络，在 $\mathfrak{T}$ 上限制为命题 4.9 中定义的部分联络；并且 Reeb 向量场平行。

注 4.11. 对于带有注 3.3 中定义的海森堡型接触结构的 G ，我们的联络与使左不变向量场平行的联络一致。

注 4.12. 对于情形 $G = \mathbf{H}^n$，如注 3.2 所述，它对应于接触黎曼流形；此时，我们的联络与 Nagase 在 [N], 中定义的 Hermitian Tanno联络一致，而该联络在 CR流形的情形下与 Tanaka-Webster联络一致。

5 标量曲率

由于我们在 $\mathfrak{H}$ 上定义了一个联络，因此得到曲率张量

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

适用于 X，$Y \in TM$和 $Z \in \mathfrak{H}$。将 X和 Y限制到 $\mathfrak{H}$，并用 g对该张量进行两次缩并，可得到一个标量曲率不变量 R。具体而言，若X_1，$\ldots, X_{2n}$是 $\mathfrak{H}$的标准正交标架，

$$R = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2n} g(R(X_\alpha, X_\beta)X_\alpha, X_\beta).$$

给定第 3.1 小节中定义的共形变换，我们要计算新联络的标量曲率。

首先，我们将计算联络的变化。

考虑一个反对称化算子，它相对于前两个变量进行反对称化，定义在由关于第二和第三个变量反对称、且对所有 θ 到 Σ与 J_θ 对易的算子构成的空间上，并将其逆记作 Θ。

下文中需要注意的是，对称性和反对称性不依赖于共形度量，同样， $\Sigma(\mathfrak{H})$、$\Xi(\mathfrak{H})$及其对应的投影也是如此。

命题5.1。

$$\widetilde{\nabla}_X = \nabla_X + \frac{Xf}{2f}Y + \frac{1}{f}c_X(Y, df)$$

其中

$$c_X(Y, df) = \Theta\left(\pi_\Sigma\left((X, Y) \mapsto \frac{Yf}{2f}X - \frac{Xf}{2f}Y + \alpha(X, Y, df)\right)\right)$$

and

$$g(\alpha(X, Y, df), Z) = \sum_{j=1}^{k} g(X, J_{\theta^j}Y)df(J_{\theta^j}Z).$$

$\widetilde{\nabla\widetilde{g} = 0}$ $\widetilde{\text{证明。定义 } a_X = \nabla_X - \nabla_{X^\circ} \text{ 由于 } \widetilde{g} = fg, \text{ 为了使得}}$

$$0 = (\widetilde{\nabla}_X(fg))(Y, Z) = X(fg(Y, Z)) - fg(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) - fg(Y, \widetilde{\nabla}_X Z) =$$

$$= (Xf)g(Y, Z) + fX(g(Y, Z)) - fg(\nabla_X Y, Z) +$$

$$-fg(a_X Y, Z) - fg(Y, \nabla_X Z) - fg(Y, a_X Z) =$$

$$= (Xf)g(Y, Z) + f(\nabla_X g)(Y, Z) - fg(a_X Y, Z) - fg(Y, a_X Z) =$$

$$= (Xf)g(Y, Z) - fg(a_X Y, Z) - fg(Y, a_X Z)$$

因此 $a_X Y = \frac{Xf}{2f}Y + b_X Y$满足 b_X 反对称。通过与引理 4.2 中类似的计算

$$b_X = \sum_{i<j} \alpha_{ij}(X)J_{\theta^i}J_{\theta^j} + c_X$$

满足 c_X 反对称，且与每个 θ都交换。由公式 (7) 很容易推出 $\alpha_{ij}=0$，因此

$$\widetilde{\pi_{\mathfrak{H}}}\widetilde{T}(X,Y)=$$

$$\widetilde{\pi_{\mathfrak{H}}}T(X,Y)+a_X(Y)-a_Y(X)=\widetilde{\pi_{\mathfrak{H}}}T(X,Y)+\frac{Xf}{2f}Y+c_XY-\frac{Yf}{2f}X-c_YX. \quad (12)$$

但是，由于 $\mathfrak{T}$ 不会在共形变换下保持不变， $\pi_{\mathfrak{H}}$ 也不会。由于

$$\theta^j(T(X,Y))=-\theta^j([X,Y])=d\theta^j(X,Y)=g(X,J_\theta Y)$$

我们有

$$T(X,Y)=\sum_{j=1}^{k}g(X,J_{\theta^j}Y)T_j+(\pi_{\mathfrak{H}}T)(X,Y).$$

我们在第 3.1 小节中看到

$$\widetilde{T}^j=\frac{1}{f}T^j+X^j$$

与 $i_{X^j}d\theta^j|_{\mathfrak{H}}=\frac{1}{f^2}df|_{\mathfrak{H}}$一起，因此

$$T(X,Y)=(\pi_{\mathfrak{H}}T)(X,Y)+\sum_{j=1}^{k}g(X,J_{\theta^j}Y)(f\widetilde{T}_j-fX_j)$$

并与 $Z\in\mathfrak{H}$ 取标量积，得到

$$g(\widetilde{\pi}_{\mathfrak{H}}T(X,Y),Z)=-f\sum_{j=1}^{k}g(X,J_{\theta^j}Y)g(X_j,Z)=$$

$$=f\sum_{j=1}^{k}g(X,J_{\theta^j}Y)d\theta^j(X_j,J_{\theta^j}Z)=\frac{1}{f}\sum_{j=1}^{k}g(X,J_{\theta^j}Y)df(J_{\theta^j}Z)=$$

$$=\frac{1}{f}\left(\sum_{j=1}^{k}g(X,J_{\theta^j}Y)J_{\theta^j}Z\right)\cdot\nabla^{\mathfrak{H}}f=g(\alpha(X,Y),Z)$$

结合公式（12），即可得出结论。 □

命题 5.2。

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}_\theta}=\frac{1}{f}\nabla_{T_\theta}+\nabla_X+\frac{Xf}{2f}Y+\frac{T_\theta f}{2f^2}Y+\frac{1}{2f}\sum_{i=1}^{k}(\nabla_XJ_{\theta^i})J_{\theta^i}Y+\frac{1}{f}\gamma_{T_\theta}Y$$

其中

$$\gamma_{T_\theta}Y=\pi_\Xi\left(Y\mapsto-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\nabla_XJ_{\theta^i})J_{\theta^i}Y+\right.$$

$$\left.-\nabla_YX-\pi_{\mathfrak{H}}T(X,Y))+\frac{1}{f^2}\beta(Y,df)+\frac{1}{f^3}\sigma(Y,|df|^2)\right).$$

证明。我们有

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}_\theta} = \frac{1}{f}\widetilde{\nabla}_{T_\theta} + \widetilde{\nabla}_X = \frac{1}{f}\nabla_{T_\theta} + \frac{1}{f}\eta_T + \nabla_X + \frac{Xf}{2f}Y + \frac{1}{f}c_X(Y, df) \qquad (13)$$

~ ~由于 $\nabla_X \widetilde{g} = 0$, $\nabla_{\widetilde{T}_\theta}\widetilde{g} = 0$这一事实等价于

$$0 = (\widetilde{\nabla}_{T_\theta}\widetilde{g})(X, Y) =$$

$$= (\widetilde{\nabla}_{T_\theta}(fg))(X, Y) = T_\theta(fg(X, Y)) - fg(\widetilde{\nabla}_{T_\theta}X, Y) - fg(X, \widetilde{\nabla}_{T_\theta}Y) =$$
$$= (T_\theta f)g(X, Y) + f(\nabla_{T_\theta}g)(X, Y) - fg(\eta_{T_\theta}X, Y) - fg(X, \gamma_{T_\theta}Y) =$$
$$= (T_\theta f)g(X, Y) - fg(\eta_{T_\theta}X, Y) - fg(X, \eta_{T_\theta}Y)$$

因此 $\eta_{T_\theta} = \frac{T_\theta f}{2f} I + E_{T_\theta}$，其中 E_{T_θ} 反对称。利用公式 (13),

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}_\theta} J = \nabla_X J + E_{T_\theta} J - J E_{T_\theta}$$

这意味着

$$E_{T_\theta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\nabla_X J_{\theta^i})J_{\theta^i} + \gamma_{T_\theta}$$

其中 γ_{T_θ} 反对称，且对每个 θ都与 J_θ 可交换。

现在，共形变换后的部分挠率为

$$T^{\widetilde{\nabla}}(\widetilde{T}_\theta, Y) = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{T}_\theta}Y - \widetilde{\pi}_{\mathfrak{H}}[\widetilde{T}_\theta, Y] =$$

$$= \frac{1}{f}\nabla_{T_\theta}Y + \frac{T_\theta f}{2f^2}Y + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\nabla_X J_{\theta^i})J_{\theta^i} +$$

$$+\gamma_{T_\theta}Y + \nabla_X Y + \frac{Xf}{2f}Y + \frac{1}{f}c_X(Y, df) - \widetilde{\pi}_{\mathfrak{H}}[\widetilde{T}_\theta, Y]$$

有

$$\widetilde{\pi}_{\mathfrak{H}}[\widetilde{T}_\theta, Y] = [\widetilde{T}_\theta, Y] - \sum_{i=1}^{k}\widetilde{\theta}^i([\widetilde{T}_\theta, Y])\widetilde{T}_{\theta^i} =$$

$$= [\widetilde{T}_\theta, Y] + f\sum_{i=1}^{k} d\theta^i(\widetilde{T}_\theta, Y)\widetilde{T}_{\theta^i} =$$

$$= [\frac{1}{f}T_\theta + X, Y] + f\sum_{i=1}^{k} d\theta^i(\frac{1}{f}T_\theta + X, Y)\left(\frac{1}{f}T_{\theta^i} + X_i\right) =$$

$$= \frac{1}{f}[T_\theta, Y] - Y\left(\frac{1}{f}\right)T_\theta + [X, Y] + \sum_{i=1}^{k} d\theta^i(T_\theta, Y)\left(\frac{1}{f}T_{\theta^i} + X_i\right) +$$

$$+f\sum_{i=1}^{k}d\theta^i(X,Y)\left(\frac{1}{f}T_{\theta^i}+X_i\right)=$$

$$=\frac{1}{f}[T_\theta,Y]-Y\left(\frac{1}{f}\right)T_\theta+[X,Y]+\frac{1}{f}\sum_{i=1}^{k}d\theta^i(T_\theta,Y)T_{\theta^i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}d\theta^i(T_\theta,Y)X_i+\sum_{i=1}^{k}d\theta^i(X,Y)T_{\theta^i}+f\sum_{i=1}^{k}d\theta^i(X,Y)X_i=$$

$$=\frac{1}{f}\pi_{\mathfrak{H}}[T_\theta,Y]-Y\left(\frac{1}{f}\right)T_\theta+\pi_{\mathfrak{H}}[X,Y]+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}d\theta^i(T_\theta,Y)X_i+f\sum_{i=1}^{k}d\theta^i(X,Y)X_i=$$

$$=\frac{1}{f}\pi_{\mathfrak{H}}[T_\theta,Y]+\pi_{\mathfrak{H}}[X,Y]+\frac{1}{f^2}\beta(Y,df)+\frac{1}{f^3}\sigma(Y,|df|^2).$$

So

$$T^{\widetilde{\nabla}}(\widetilde{T}_\theta,Y)=$$

$$=\frac{1}{f}\nabla_{T_\theta}Y+\frac{T_\theta f}{2f^2}Y+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\nabla_X J_{\theta^i})J_{\theta^i}+\gamma_{T_\theta}Y+\nabla_X Y+\frac{Xf}{2f}Y+\frac{1}{f}c_X(Y,df)+$$

$$-\frac{1}{f}\pi_{\mathfrak{H}}[T_\theta,Y]-\pi_{\mathfrak{H}}[X,Y]-\frac{1}{f^2}\beta(Y,df)-\frac{1}{f^3}\sigma(Y,|df|^2)=$$

$$=\frac{1}{f}T^{\nabla}(T_\theta,Y)+\frac{T_\theta f}{2f^2}Y+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\nabla_X J_{\theta^i})J_{\theta^i}+\gamma_{T_\theta}Y+\nabla_Y X+\pi_{\mathfrak{H}}T(X,Y)+$$

$$+\frac{Xf}{2f}Y+\frac{1}{f}c_X(Y,df)-\frac{1}{f^2}\beta(Y,df)-\frac{1}{f^3}\sigma(Y,|df|^2)$$

因此

$$\gamma_{T_\theta}Y=\pi_\Xi\left(Y\mapsto-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\nabla_X J_{\theta^i})J_{\theta^i}Y-\nabla_Y X-\pi_{\mathfrak{H}}T(X,Y))+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{f^2}\beta(Y,df)+\frac{1}{f^3}\sigma(Y,|df|^2)\right)-\frac{1}{f}c_X(Y,df).$$

□

为了陈述我们的公式，我们将 M 上函数 u 的次拉普拉斯算子 Δu定义为 $\mathfrak{H}$ 上 $\nabla^2 f$ 的限制的迹，也就是说，给定 $\mathfrak{H}$ 的标准正交标架 $X_1,\dots,X_{2n}$，

$$\Delta u=\sum_{\alpha=1}^{2n}\nabla^2_{X_\alpha,X_\alpha}u.$$

定理 5.3. 存在一个常数 C_G，使得对于任意以 G 为模型的海森堡型接触流形，记共形因子为 $f = u^{\frac{4}{Q-2}}$，则有

$$\widetilde{K} = u^{-\frac{Q+2}{Q-2}} \left(-C\Delta u + Ku\right).$$

证明。设 $\overline{x} \in M$，并设 $X_1, \ldots, X_{2n}$ 是 g 的一个标准正交标架，使得 $\nabla_{X_\alpha} X_\beta = 0$ 在 $\overline{x}$ 处成立。则

$$[X_\alpha, X_\beta](\overline{x}) = -T(X_\alpha, X_\beta)(\overline{x})$$

因此

$$\widetilde{K} = \widetilde{g}(\widetilde{R}(X_\alpha, X_\beta)X_\alpha, X_\beta) = g(\widetilde{\nabla}_{X_\alpha}\widetilde{\nabla}_{X_\beta}X_\alpha - \widetilde{\nabla}_{X_\beta}\widetilde{\nabla}_{X_\alpha}X_\alpha - \widetilde{\nabla}_{[X_\alpha,X_\beta]}X_\alpha, X_\beta) =$$

$$= fg\Bigg(\nabla_{X_\alpha}\nabla_{X_\beta}X_\alpha + \frac{X_\alpha X_\beta f}{2f}X_\alpha - \frac{X_\alpha f X_\beta f}{4f^2}X_\alpha + \frac{X_\beta f}{2f}\nabla_{X_\alpha}X_\alpha + \frac{X_\alpha f}{2f}\nabla_{X_\beta}X_\alpha +$$

$$+ c_{\nabla_{X_\alpha}X_\beta}X_\alpha + 2c_{X_\alpha}(\nabla_{X_\beta}X_\alpha) + \frac{X_\alpha f}{2f}c_{X_\beta}X_\alpha + \frac{X_\beta f}{2f}c_{X_\alpha}X_\alpha + c_{X_\alpha}(c_{X_\beta}X_\alpha) +$$

$$- \Bigg(\nabla_{X_\beta}\nabla_{X_\alpha}X_\alpha + \frac{X_\beta X_\alpha f}{2f}X_\alpha - \frac{X_\beta f X_\alpha f}{4f^2}X_\alpha + \frac{X_\alpha f}{2f}\nabla_{X_\beta}X_\alpha + \frac{X_\beta f}{2f}\nabla_{X_\alpha}X_\alpha +$$

$$+ c_{\nabla_{X_\beta}X_\alpha}X_\alpha + 2c_{X_\beta}(\nabla_{X_\alpha}X_\alpha) + \frac{X_\beta f}{2f}c_{X_\alpha}X_\alpha + \frac{X_\alpha f}{2f}c_{X_\beta}X_\alpha + c_{X_\beta}(c_{X_\alpha}X_\alpha)\Bigg) +$$

$$+ \nabla_{(\pi_{\mathfrak{H}}T)(X_\alpha,X_\beta)}X_\alpha + \frac{(\pi_{\mathfrak{H}}T)(X_\alpha,X_\beta)f}{2f}X_\alpha + c_{(\pi_{\mathfrak{H}}T)(X_\alpha,X_\beta)}X_\alpha +$$

$$+ \nabla_{(\pi_{\mathfrak{T}}T)(X_\alpha,X_\beta)}X_\alpha + \frac{(\pi_{\mathfrak{T}}T)(X_\alpha,X_\beta)f}{2f}X_\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2f}\sum_{i=1}^{k}(\nabla_{(\pi_{\mathfrak{T}}T)(X_\alpha,X_\beta)}J_{\theta^i})J_{\theta^i}X_\alpha + \frac{1}{f}\gamma_{(\pi_{\mathfrak{T}}T)(X_\alpha,X_\beta)}X_\alpha, X_\beta\Bigg) =$$

$$= fg\Bigg(R(X_\alpha, X_\beta)X_\alpha + \frac{X_\alpha X_\beta f}{2f}X_\alpha +$$

$$+ \frac{X_\alpha f}{2f}c_{X_\beta}X_\alpha + \frac{X_\beta f}{2f}c_{X_\alpha}X_\alpha + c_{X_\alpha}(c_{X_\beta}X_\alpha) +$$

$$- \Bigg(\frac{X_\beta X_\alpha f}{2f}X_\alpha + \frac{X_\beta f}{2f}c_{X_\alpha}X_\alpha + \frac{X_\alpha f}{2f}c_{X_\beta}X_\alpha + c_{X_\beta}(c_{X_\alpha}X_\alpha)\Bigg) +$$

$$+ \frac{(\pi_{\mathfrak{T}}T)(X_\alpha,X_\beta)f}{2f}X_\alpha + \frac{1}{2f}\sum_{i=1}^{k}(\nabla_{(\pi_{\mathfrak{T}}T)(X_\alpha,X_\beta)}J_{\theta^i})J_{\theta^i}X_\alpha + \frac{1}{f}\gamma_{(\pi_{\mathfrak{T}}T)(X_\alpha,X_\beta)}X_\alpha, X_\beta\Bigg) =$$

$$= fK + fg\left(c_{X_\alpha}(c_{X_\beta}X_\alpha) - c_{X_\beta}(c_{X_\alpha}X_\alpha) + c_{(\pi_{\mathfrak{H}}T)(X_\alpha,X_\beta)}X_\alpha, X_\beta\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2f}\sum_{i=1}^{k}(\nabla_{(\pi_{\mathfrak{T}}T)(X_\alpha,X_\beta)}J_{\theta^i})J_{\theta^i}X_\alpha + \frac{1}{f}\gamma_{(\pi_{\mathfrak{T}}T)(X_\alpha,X_\beta)}X_\alpha, X_\beta\right) =$$

$$= fK + \frac{C}{f}|\nabla^H f|^2 + \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta}\nabla^2_{X_\alpha, X_\beta} f$$

对于某些纯代数常数和 $C_{\alpha\beta}$ ，因此可以在 G上计算。

首先，必然有 $\sum_{\alpha,\ \beta} C_{\alpha\beta}\nabla^2_{X_\alpha,\ X_\beta} f \ = \ A\Delta$ 其中某个常数为 A。记 $u = f^{C/A+1}$ ，容易验证，由于在 G $K = 0$ 上，

$$C_1 \Delta u = \widetilde{K} u^{C/A+1}.$$

由于该方程必须在膨胀下保持协变性，与黎曼情形和 CR 情形类似，指数必须取临界值，即 $\frac{Q+2}{Q-2}$ 。 —— □

与黎曼几何和 CR 几何类似，考虑施加常曲率条件的问题很有意义。定义

$$Q(u) = \frac{\int_M C|\nabla^{\mathfrak{H}} u|^2 + Ku^2}{\left(\int_M u^{\frac{2Q}{Q-2}}\right)^{\frac{Q-2}{Q}}}$$

and

$$\mathscr{Y}(M) = \inf_{u>0} Q(u).$$

然后，按照黎曼几何或 CR 几何中的相同证明方法（见 [LP]和 [JL1]），可以证明以下定理。

定理 5.4。 每个在 G 上建模的海森堡型 M 紧致接触流形都满足 $\mathscr{Y}$（M）$\leq \mathscr{Y}$（G）；如果不等式是严格的，则存在一个具有常标量曲率的共形荷。

我们注意到， $\mathscr{Y}(\boldsymbol{S}_G) = \mathscr{Y}(G)$，但我们目前不知道，对于 G 非 Iwasawa 型的情形，是否存在一个紧致流形，使得 $\mathscr{Y}(M) = \mathscr{Y}(G)$。

参考文献

[BGRV] Baudoin, F.; Grong, E.; Rizzi, L.; Vega-Molino, S.; *H* 型叶状结构, Differ.Geom. Appl.85,101952 (2022)

[B]Biquard O., M ´渐近对称的爱因斯坦度量 ´渐近对称, Ast´erisque, 第 265 卷, 法国数学学会，2000年。

[BLU] Bonfiglioli, A.; Lanconelli, E.; Uguzzoni, F.; 分层李群及其次拉普拉斯算子的势理论, Springer Monographs in Mathe- matics.Springer, Berlin, 2007. xxvi+800 pp.

[CDKR] Cowling, Michael；Dooley, Anthony H.；Kor´anyi, Adam；Ricci, Fulvio；*H*型群与 *Iwasawa* 分解，《Adv. Math.》87 (1991)，第 1 期，1–41。

[DT] Dragomir, Sorin；Tomassini, Giuseppe；*CR*流形上的微分几何与分析，《数学进展》246。Birkh¨auser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，2006年。xvi+487 页。[GV]N. Garofalo, D. Vassilev；卡诺群上非线性狄利克雷问题中特征集附近的正则性与次拉普拉斯算子的共形几何，《数学年刊》318 (3) (2000年) 453–516。[JL1] Jerison, David；Lee, John M.；*CR*流形上的亚马贝问题，《微分几何杂志》25 (1987年)，第 2 期，167–197。[JL2] Jerison, David；Lee, John M.；海森堡群上的索伯列夫不等式的极值函数与 *CR Yamabe*问题，《美国数学会杂志》1 (1988年)，第 1 期，1–13。[K] Kaplan, A；由二次型复合生成的一类亚椭圆偏微分方程的基本解，《Trans. Amer. Math. Sot.》258 (1980年)，147-153。[LP] Lee, John M.；Parker, Thomas H.；亚马贝问题，《美国数学会通报》(N.S.) 17 (1987年)，第 1 期，37–91。[N] Nagase, M.；接触黎曼流形上 *Kohn-Rossi*拉普拉斯算子的热方程，预印本。[Y] Yang, Qiaohua；*H*型群上 L^2 *Folland-Stein*不等式的最佳常数，《泛函分析杂志》286 (2024年)，第 2 期，论文编号 110209，共 22 页。
Claudio Afeltra, University of Montpellier, Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck. Place Eugène Bataillon, 34090Montpellier, France电子邮箱：claudio.afeltra@umontpellier.it