arXiv:2601.06534v1 [math.CA] 10 Jan 2026

指数二分性与（L^p, L^q）-容许性

TRINH VIET DUOC 和 NGUYEN VAN TRONG

Abstract. 我们考虑 Banach空间中演化族关于范数族的指数二分性概念，并通过(L^p, L^q)对 p, $q \in [1,\infty]$ 且 $p \geq q$的容许性对其进行刻画。随后，我们利用这一刻画，建立关于范数族指数二分的演化族的鲁棒性。

1. Introduction

众所周知，自 Perron 于1930年发表论文 [10] 以来，通过容许性刻画一致指数二分性的研究迅速发展。关于微分方程情形的诸多结果，可见 Massera 和 Sch¨affer [9], 、Dalecskii 和 Krein [7], 、Levitan 和 Zhikov [8], 、Chicone 和 Latushkin [6]的专著。关于非一致指数二分性，请参阅 [2, 3] 及其中的参考文献。

关于范数族的指数二分性这一概念由 Barreira 等人提出；在 [5, 4] 中，他们分别通过对 (L^p, L^q) 关于 $p, q \in [1,\infty)$ 以及 (L^∞, L^∞) 的容许性，刻画了关于范数族的指数二分性。在一致指数二分性的情形下，请读者参阅 [11, 12, 13, 14]。请注意，本文中的一对 (A, B) 对应于输出-输入。

对于半直线上的演化族，Preda 等人 [11] 通过一对 (L^p, L^q) 关于 $p, q \in [1,\infty]$ with $p \geq q$ and $(p,q) \neq (\infty,$1) 的容许性，刻画了一致指数二分性。受这一结果启发，我们的主要目标是通过一对 (L^p, L^q) 关于 $p, q \in [1,\infty]$ with $p \geq q$ and $(p,q) \neq (\infty,$1) 的容许性，刻画定义在整条实线上的一般演化族关于范数族的指数二分性。我们的结果主要贡献及创新之处如下:

(1) (p, q) 的取值范围更大，因此我们的结果涵盖了 [4, 5] 中的一些结果。(2) 输出空间更好（包含更多信息，见 Y_1 和定理 3.1）。(3) 直线上的二分投影族是唯一的（见注释 3.1）。

2. Preliminaries

设 $X = (X, \|\cdot\|)$ 是一个实或复Banach空间， $B(X)$ 是 X 上所有有界线性算子构成的空间。此外，对于 $t \in \mathbb{R}$，我们考虑 X 上的范数族 $\|\cdot\|_t$，满足

(i) 存在常数 $C > 0$ 和 $\epsilon \geq 0$，使得

$$\|x\| \leq \|x\|_t \leq Ce^{\epsilon|t|}\|x\|; \tag{2.1}$$

(ii) 对每个 $x \in X$，映射 $t \mapsto \|x\|_t$ 都是可测的。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 37D20, 37D25.*Key words and phrases.* 容许性，关于范数族的指数二分性， L^p 空间。本研究是在越南国家大学河内分校的研究项目 QG.23.02 资助下完成的。

在 X 中，我们始终考虑由原范数 $\|\cdot\|$ 生成的拓扑。通过扩展演化族的概念，我们得到关于 X 上的范数族 $\|\cdot\|_t$ 、适用于 $t\in\mathbb{R}$ 的演化族概念，定义如下。

定义 2.1. 若一族$(T(t,\tau))^{t\geq\tau}$满足 $t,\tau\in\mathbb{R}$属于 $B(X)$，则称其为关于范数族 $\|\cdot\|_t$ 的演化族，其中 $t\in\mathbb{R}$ 在线上，若满足:

i. $T(t,t)=Id$且 $T(t,s)T(s,\tau)=T(t,\tau)$，对 $t\geq s\geq\tau$以及 $t,\tau,s\in\mathbb{R}$成立。*ii.* 对每个 $x\in X$和 $\tau\in\mathbb{R}$，映射 $t\mapsto T(t,\tau)x$在 $[\tau,\infty)$上连续，映射$s\mapsto T(\tau,s)x$在 $(-\infty,\tau]$上连续。*iii.* 存在 $K,a>0$，使得对所有 $x\in X$， $\|T(t,\tau)x\|_t\leq Ke^{a(t-\tau)}\|x\|_\tau$。

类似地，我们有如下定义。

定义 2.2。 关于直线上的范数族 $\|\cdot\|_t$，若演化族 $(T(t,\tau))^{t\geq\tau}$满足以下条件，则称其关于范数族 $\|\cdot\|_t$具有指数二分性:

i. 存在二分投影 $P(t)$，属于 $B(X)$ $t\in\mathbb{R}$，使得

$$P(t)T(t,\tau)=T(t,\tau)P(\tau)\quad for\ t\geq\tau.$$

ii. 限制映射 $T(t,\tau)\colon KerP(\tau)\to KerP(t)$是一个同构，其中 $t\geq\tau$。我们将其逆映射 $(T(t,\tau)|_{\mathrm{Ker}P(\tau)})^{-1}$记为 $T(\tau,t)$|。

iii. 存在常数 $a<0<b$和 $D>0$，使得

$$\begin{aligned}\|T(t,\tau)P(\tau)x\|_\tau&\leq De^{a(t-\tau)}\|x\|_\tau,\\ \|T(\tau,t)_|Q(t)x\|_t&\leq De^{-b(t-\tau)}\|x\|_t,\end{aligned}\tag{2.2}$$

对 $t\geq\tau$、 $x\in X$和 $Q(t)=I-P(t)$。

注 2.1。 对于每个关于直线上的范数族 $\|\cdot\|_t$ 指数二分的演化族 $(T(t,\tau))^{t\geq\tau}$，对每个 $t\in\mathbb{R}$，都有 $X=X^s(t)\oplus X^u(t)$，其中 $X^s(t)=P(t)X$，且 $X^u(t)=Q(t)X$。

我们记

$$L^p(\mathbb{R},X)=\{f:\mathbb{R}\to X\mid f\text{ is measurable and }\int_{-\infty}^{+\infty}\|f(t)\|_t^p\,dt<\infty\}$$

对于 $p\in[1,\infty)$，并记为

$$L^\infty(\mathbb{R},X)=\{f:\mathbb{R}\to X\mid f\text{ is measurable and }\operatorname{ess\,sup}\|f(t)\|_t<\infty\}.$$

T于是， $L^p(\mathbb{R},X)$ 和 $L^\infty(\mathbb{R},X)$ 是分别赋予相应范数的 Banach空间

$$\|f\|_p=\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\|f(t)\|_t^p\,dt\Big)^{1/p}\quad\text{and}\quad\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_t.$$

为简化记号，我们将用记号 L^p 表示 $L^p(\mathbb{R},X)$，其中 $p\in[1,\infty]$。此外，我们定义 Banach空间

$$C_b=\{f:\mathbb{R}\to X\mid f\text{ is continuous and }\sup\|f(t)\|_t<\infty\}\text{ with the norm }\|f\|_\infty=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_t.$$

最后，我们注意到，集合 L^p 是一个Banach空间，其范数为 $\|\cdot\|_p$， $p\in[1,\infty]$ 这一点可通过与 [5, 定理 1]类似的方法证明。

3. Exponential dichotomy and (L^p, L^q)-admissibility

设 $p,\ q \in [1,\infty]$ 且 $p \geq q$。我们通过Banach空间对 $(Y_1,\ Y_2)$ 的容许性来刻画相对于范数族 $\|\cdot\|_t$ 的演化族的指数二分性概念，其中 $Y_1 = L^p \cap C_b$ 且 $Y_2 = L^q$。

给定 Banach空间 X 上关于范数族 $\|\cdot\|_t$ 的演化族 $(T(t,\tau))_{t\geq\tau}$ 以及函数 $y\colon \mathbb{R} \to X$，我们考虑积分方程

$$x(t) = T(t,\tau)x(\tau) + \int_\tau^t T(t,s)y(s)ds \quad \text{for} \quad t \geq \tau. \tag{3.3}$$

以下引理给出了函数 x 连续的一个充分条件。

引理 3.1. 给定 $y \in Y_2$。若函数 $x\colon \mathbb{R} \to X$ 满足 (3.3)，则 x 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

证明。 由于映射 $T(\cdot,\tau)x(\tau)$ 在 $[\tau,\infty)$ 上连续，只需证明函数

$$z(t) := \int_\tau^t T(t,s)y(s)ds$$

对每个固定的 $\tau \in \mathbb{R}$，在 $[\tau,\infty)$ 上连续。事实上，对于 $t_0 \geq \tau$和 $t \in [t_0, t_0+1]$，有

$$\begin{aligned}
\|z(t) - z(t_0)\| &\leq \int_\tau^{t_0} \|T(t,s)y(s) - T(t_0,s)y(s)\|ds + \int_{t_0}^t \|T(t,s)y(s)\|ds \\
&\leq \int_\tau^{t_0} \|T(t,s)y(s) - T(t_0,s)y(s)\|ds + M\int_{t_0}^t \|y(s)\|ds, \\
\|T(t,s)y(s) - T(t_0,s)y(s)\| &\leq 2M\|y(s)\| \leq 2M\|y(s)\|_s,
\end{aligned}$$

其中 $M = \sup\{\|T(t,s)\|\colon s \in [\tau, t_0+1]\} < \infty$ （由巴拿赫–施泰因豪斯定理）。由控制收敛定理和勒贝格微分定理（参见 [1, 第 1] 章定理 1.1.8 和命题 1.2.2），可得

$$\lim_{t\to t_0^+} \Big(\int_\tau^{t_0} \|T(t,s)y(s) - T(t_0,s)y(s)\|ds + M\int_{t_0}^t \|y(s)\|ds \Big) = 0.$$

因此， z 在 $[\tau,\infty)$ 上右连续。对于 $t_0 > \tau$和 $t \in (\tau, t_0]$，有

$$\begin{aligned}
\|z(t) - z(t_0)\| &\leq \int_\tau^{t} \|T(t,s)y(s) - T(t_0,s)y(s)\|ds + \int_{t}^{t_0} \|T(t_0,s)y(s)\|ds \\
&\leq \int_\tau^{t} \|T(t,s)y(s) - T(t_0,s)y(s)\|ds + M\int_{t}^{t_0} \|y(s)\|ds \\
&\leq \int_\tau^{t_0} \|T(t,s)y(s) - T(t_0,s)y(s)\|ds + M\int_{t}^{t_0} \|y(s)\|ds.
\end{aligned}$$

类似地， z 在 (τ,∞) 上左连续。因此， z 在 $[\tau,\infty)$ 上连续。由于 τ 任意，x 在 $\mathbb{R}$ 上连续。□

接下来，我们定义一个与积分方程 (3.3) 相关的算子，如下所示。

定义 3.1. 算子 $H\colon \mathcal{D}(H) \to Y_2$ 定义为

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(H) &:= \{x \in Y_1\colon \textit{ there is } y \in Y_2 \textit{ such that } x \textit{ and } y \textit{ satisfying } (3.3)\}, \\
Hx &:= y.
\end{aligned}$$

现在，我们通过以下引理说明 H 的定义，并给出其性质。

引理 3.2。 H 是一个良定义的闭线性算子。

证明。令 $y_1,\ y_2 \in Y_2$ 使得

$$x(t) = T(t,\tau)x(\tau) + \int_\tau^t T(t,s)y_1(s)ds,$$

and

$$x(t) = T(t,\tau)x(\tau) + \int_\tau^t T(t,s)y_2(s)ds,$$

对于 $t > \tau$。于是,

$$\frac{t}{t-\tau}\int_\tau^t T(t,s)y_1(s)ds = \frac{t}{t-\tau}\int_\tau^t T(t,s)y_2(s)ds.$$

由于映射 $s \mapsto T(t,\ s)y_i(s)$ 局部可积，对于 $i = 1,\ 2$，令 $\tau \to t$。由勒贝格微分定理可知，对于几乎所有 $t \in \mathbb{R},\ y_1(t) = y_2(t)$。因此，$H$ 有定义。此外，H 显然是一个线性算子。

设 $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(H)$ 满足：x_n 在 Y_1 中收敛于 x，且 $y_n := Hx_n$ 在 Y_2 中收敛于 y。对于每个固定的 $\tau \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned} x(t) - T(t,\tau)x(\tau) &= \lim_{n\to+\infty}(x_n(t) - T(t,\tau)x_n(\tau)) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_\tau^t T(t,s)y_n(s)ds \end{aligned}$$

对于 $t \geq \tau$。此外,

$$\begin{aligned} \Big\|\int_\tau^t T(t,s)y_n(s)ds - \int_\tau^t T(t,s)y(s)ds\Big\| &\leq M\int_\tau^t \|y_n(s) - y(s)\|ds \\ &\leq M\left(\int_\tau^t \|y_n(s) - y(s)\|^q ds\right)^{\frac{1}{q}}(t-\tau)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\leq M\|y_n - y\|_q (t-\tau)^{1-\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

其中 $M = \sup\{\|T(t,\ s)\| :\ s \in [\tau,t]\} < \infty$。由于 y_n 在 Y_2 中收敛于 y，我们得到

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\tau^t T(t,s)y_n(s)ds = \int_\tau^t T(t,s)y(s)ds.$$

因此,

$$x(t) - T(t,\tau)x(\tau) = \int_\tau^t T(t,s)y(s)ds$$

对于 $t \geq \tau$。因此，$x \in \mathcal{D}(H)$，并且 $Hx = y$。所以，H 是一个闭算子。 □

首先，我们证明，相对于演化族的范数族的指数二分性可推出 $(L^p,\ L^q)$-容许性（更准确地说，$(L^p \cap C_b,\ L^q)$-容许性），即 $H :\ \mathcal{D}(H) \to Y_2$ 是双射。

定理 3.1。如果演化族$(T(t,\tau))^{t\geq\tau}$相对于范数族 $\|\cdot\|_t$是指数二分的，那么对于每个 $y \in Y_2$，存在唯一的 $x \in Y_1$ 满足(3.3)。

证明。 对于 $t \in \mathbb{R}$，我们定义

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t,\tau)P(\tau)y(\tau)d\tau \quad \text{and} \quad x_2(t) = \int_{t}^{\infty} T(t,\tau)_{|}Q(\tau)y(\tau)d\tau.$$

利用Holder不等式和 (2.2)，我们有

$$\begin{aligned}
\|x_1(t)\| \le \|x_1(t)\|_t &\le \int_{-\infty}^{t} \|T(t,\tau)P(\tau)y(\tau)\|_t d\tau \le \int_{-\infty}^{t} De^{a(t-\tau)}\|y(\tau)\|_\tau d\tau \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{t-m-1}^{t-m} De^{a(t-\tau)}\|y(\tau)\|_\tau d\tau \le \sum_{m=0}^{\infty} De^{am} \int_{t-m-1}^{t-m} \|y(\tau)\|_\tau d\tau \\
&\le \sum_{m=0}^{\infty} De^{am} \left(\int_{t-m-1}^{t-m} \|y(\tau)\|_\tau^q d\tau \right)^{1/q} \le \sum_{m=0}^{\infty} De^{am}\|y\|_q = \frac{D}{1-e^a}\|y\|_q, \\
\|x_2(t)\| \le \|x_2(t)\|_t &\le \int_{t}^{+\infty} \|T(t,\tau)_{|}Q(\tau)y(\tau)\|_t d\tau \le \int_{t}^{+\infty} De^{-b(\tau-t)}\|y(\tau)\|_\tau d\tau \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{t+m}^{t+m+1} De^{-b(\tau-t)}\|y(\tau)\|_\tau d\tau \le \sum_{m=0}^{\infty} De^{-bm} \int_{t+m}^{t+m+1} \|y(\tau)\|_\tau d\tau \\
&\le \sum_{m=0}^{\infty} De^{-bm} \left(\int_{t+m}^{t+m+1} \|y(\tau)\|_\tau^q d\tau \right)^{1/q} \le \sum_{m=0}^{\infty} De^{-bm}\|y\|_q = \frac{D}{1-e^{-b}}\|y\|_q.
\end{aligned}$$

因此， x_1 和 x_2 是良定义的。此外，

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|_t \le \Big(\frac{D}{1-e^a} + \frac{D}{1-e^{-b}} \Big)\|y\|_q \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

在等式 (3.3) 两边作用 $P(t)$，我们有

$$P(t)x(t) = T(t,\tau)P(\tau)x(\tau) + \int_{\tau}^{t} T(t,s)y(s)ds \quad \text{for} \quad t \ge \tau.$$

对于 $\tau \to -\infty$，我们得到

$$\lim_{\tau \to -\infty} T(t,\tau)P(\tau)x(\tau) = P(t)x(t) - x_1(t).$$

我们有

$$\|T(t,\tau)P(\tau)x(\tau)\| \le \|T(t,\tau)P(\tau)x(\tau)\|_t \le De^{a(t-\tau)}\|x(\tau)\|_\tau \le De^{a(t-\tau)}\|x\|_\infty.$$

这就得到对于每个 $t \in \mathbb{R}$， $P(t)x(t) = x_1(t)$。

固定 $\tau \in \mathbb{R}$，将 $Q(t)$ 应用于 (3.3) 的两边，得到

$$Q(t)x(t) = T(t,\tau)Q(\tau)x(\tau) + \int_{\tau}^{t} T(t,s)Q(s)y(s)ds \quad \text{for} \quad t \ge \tau.$$

由 $T(t, \tau)$: $Q(\tau)X \to Q(t)X$ 是一个同构，

$$T(\tau,t)_{|}Q(t)x(t) = Q(\tau)x(\tau) + \int_{\tau}^{t} T(\tau,s)_{|}Q(s)y(s)ds \quad \text{for} \quad t \ge \tau.$$

对于 $t \to +\infty$，我们得到

$$\lim_{t \to +\infty} T(\tau,t)_{|}Q(t)x(t) = Q(\tau)x(\tau) + x_2(\tau).$$

与上文相同，对于每个 $\tau \in \mathbb{R}$，我们得到 $Q(\tau)x(\tau) = -x_2(\tau)$。

因此，对于所有 $t \in \mathbb{R}$，我们有 $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$。所以，满足 (3.3) 的 $x \in Y_1$ 是唯一的。接下来，我们证明函数 x_1 和 x_2 属于 L^p。我们只考虑 x_2，因为关于 x_1 的论证类似。由于 $p \geq q$，存在 $r \in [1, \infty]$ 使得

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{p}.$$

Let

$$\omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t \geq 0, \\ e^{bt} & \text{if} \quad t < 0 \end{cases}$$

以及 $z(t) = \|y(t)\|_t$。我们有 $\omega \in L^r(\mathbb{R})$ 和 $z \in L^q(\mathbb{R})$。由卷积的杨不等式，$w * z \in L^p(\mathbb{R})$。此外，

$$(\omega * z)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t-\tau) z(\tau) d\tau = \int_t^{+\infty} e^{-b(\tau - t)} \|y(\tau)\|_\tau d\tau.$$

我们还对所有 t 有 $\|x_2(t)\|_t \leq D(\omega * z)(t)$。因此，$x_2 \in L^p$ 并且

$$\|x_2\|_p \leq D\|\omega * z\|_p \leq \frac{D}{(br)^{\frac{1}{r}}} \|y\|_q.$$

类似地，$x_1 \in L^p$。因此，$x_1 - x_2 \in L^p$ 并且

$$\|x_1 - x_2\|_p \leq \Big(\frac{D}{(-ar)^{\frac{1}{r}}} + \frac{D}{(br)^{\frac{1}{r}}} \Big) \|y\|_q.$$

令 $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ 对于 $t \in \mathbb{R}$，并取 $t_0 \in \mathbb{R}$。现在我们证明 x 对 $t \geq t_0$ 满足 (3.3)。

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^{t} T(t,\tau) y(\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t} T(t,\tau) P(\tau) y(\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t} T(t,\tau) Q(\tau) y(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^{t} T(t,\tau) P(\tau) y(\tau) d\tau - \int_{t}^{+\infty} T(t,\tau)_{|} Q(\tau) y(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} T(t,\tau) y(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{t_0} T(t,t_0) T(t_0,\tau) P(\tau) y(\tau) d\tau - \int_{t_0}^{+\infty} T(t,t_0) T(t_0,\tau)_{|} Q(\tau) y(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} T(t,\tau) y(\tau) d\tau + T(t,t_0) x(t_0). \end{aligned}$$

根据引理 3.1 和 (3.4)，$x \in C_b$。因此，存在唯一的 $x \in Y_1$ 满足 (3.3)。 □

现在我们建立定理 3.1 的逆命题。

定理 3.2。 设 $p, q \in [1, \infty]$ 满足 $p \geq q$ 且 $(p, q) \neq (\infty, 1)$。假设对于每个 $y \in Y_2$，存在唯一的 $x \in Y_1$ 满足 (3.3)。那么，演化族 $(T(t,\tau))_{t \geq \tau}$ 关于范数族 $\|\cdot\|_t$ 是指数二分的。

证明。 根据定理的假设和引理 3.2，$H, G : Y_2 \to \mathcal{D}(H) \subset Y_1$ 的逆映射是闭线性算子。由闭图定理，G 是有界的。

对于 $\tau \in \mathbb{R}$，我们定义以下集合

$$F_\tau^s = \{x \in X : \sup_{t \geq \tau} \|T(t,\tau)x\|_t < \infty \ \text{ and } \ z \in L^p\}, \text{ where } z(t) = \begin{cases} T(t,\tau)x, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_\tau = \{\varphi : (-\infty, \tau] \to X \ \text{ such that } \ \varphi(t) = T(t,s)\varphi(s) \ \text{ for all } \ s \leq \tau \ \text{ and } \ s \leq t \leq \tau\}.$$

$$F_\tau^u = \{x \in X\colon \text{满足 } \varphi_x(\tau) = x, \text{ 上确界 } \|\varphi_x(t)\|_t < \infty \text{ 以及 } w \in L^p\}, \ {}^{t\le\tau}\text{的 } \exists\, \varphi_x \in \mathcal{F}_\tau$$

$$\text{where } w(t) = \begin{cases} \varphi_x(t), & t \le \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

显然， F_τ^s和 F_τ^u是 X的子空间。为便于跟踪，我们将证明步骤分成以下引理。

引理 3.3. 对于每个 $\tau \in \mathbb{R}$,

$$X = F_\tau^s \oplus F_\tau^u. \tag{3.5}$$

证明。 对于 $x \in X$，取

$$g(t) = \begin{cases} T(t,\tau)x & \text{if} \quad t \in [\tau, \tau+1], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这是 容易看出 $g \in Y_2$。因此，存在 $v \in \mathcal{D}(H)$使得 $Hv = g$。此外 e,

$$\begin{aligned} v(t) &= T(t,\tau)v(\tau) + \int_\tau^t T(t,s)g(s)ds \\ &= T(t,\tau)v(\tau) + \int_\tau^t T(t,s)T(s,\tau)\chi_{[\tau,\tau+1]}x ds \\ &= T(t,\tau)v(\tau) + \int_\tau^t T(t,\tau)\chi_{[\tau,\tau+1]}x ds \\ &= \begin{cases} T(t,\tau)(v(\tau) + (t-\tau)x) & \text{for } t \in [\tau, \tau+1), \\ T(t,\tau)(v(\tau) + x) & \text{for } t \ge \tau+1. \end{cases} \end{aligned}$$

由于 $v \in Y_1$，可得 $v(\tau) + x \in F_\tau^s$。对于 $s \le \tau$ 和 $t \in [s,\tau]$，我们有

$$v(t) = T(t,s)v(s) + \int_s^t T(t,\xi)g(\xi)d\xi = T(t,s)v(s).$$

因此， $v_{|(-\infty,\tau]} \in \mathcal{F}_\tau$。由 $v \in Y_1$ 可得 $v(\tau) \in F_\tau^u$。因此，对于所有 $x \in X$，都有 $x \in F_\tau^s + F_\tau^u$。所以， $X = F_\tau^s + F_\tau^u$。现在我们证明，若 $x \in F_\tau^s \bigcap F_\tau^u$，则 $x = 0$。事实上，我们定义 $u\colon \mathbb{R} \to X$ 如下

$$u(t) = \begin{cases} T(t,\tau)x & \text{if} \quad t \ge \tau, \\ \varphi_x(t) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由 F_τ^s 和 F_τ^u 的定义可得 $u \in Y_1$。此外，我们有 $Hu = 0$。因此，$u \in \mathcal{D}(H)$。由于 H 可逆，我们得出 $u = 0$，进而得到 $x = 0$。□

根据 (3.5) 中的分解，我们定义投影算子

$$P(\tau) : X \to F_\tau^s \quad \text{and} \quad Q(\tau) : X \to F_\tau^u$$

对每个 $\tau \in \mathbb{R}$，则 $P(\tau) + Q(\tau) = Id$。

引理 3.4. 存在 $M > 0$，使得

$$\|P(\tau)x\|_\tau \le M\|x\|_\tau \tag{3.6}$$

对于 $x \in X$和 $\tau \in \mathbb{R}$。因此， $P(\tau)$ 对每个 $\tau \in \mathbb{R}$都有界。

证明。 由 $P(\tau)x = v(\tau) + x$（使用引理 3.3 中的记号），可得

$$\|P(\tau)x\|_\tau = \|v(\tau) + x\|_\tau \le \|v(\tau)\|_\tau + \|x\|_\tau.$$

此外， $v(\tau) = T(\tau, s)v(s)$ 对于 $s \in [\tau - 1, \tau]$成立。因此，

$$\|v(\tau)\|_\tau = \|T(\tau, s)v(s)\|_\tau \le Ke^{c(\tau-s)}\|v(s)\|_s$$

对于 $s \in [\tau - 1, \tau]$。对 s 积分，我们得到

$$\begin{aligned}\|v(\tau)\|_\tau &\le Ke^c \int_{\tau-1}^{\tau} \|v(s)\|_s ds \le Ke^c \left(\int_{\tau-1}^{\tau} \|v(s)\|_s^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le Ke^c\|v\|_p = Ke^c\|Gg\|_p \le Ke^c\|G\|\|g\|_q \\ &= Ke^c\|G\| \left(\int_{\tau}^{\tau+1} \|T(t, \tau)x\|_t^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le K^2e^{2c}\|G\|\|x\|_\tau.\end{aligned}$$

这表明（3.6）在 $M = K^2e^{2c}\|G\| + 1$ 下成立。 □

空间 F_τ^s 和 F_τ^u 关于演化族是不变的。

引理 3.5。 $T(t, \tau)F_\tau^s \subset F_t^s$以及 $T(t, \tau)F_\tau^u = F_t^u$对所有 $t \ge \tau$成立。

证明。 取 $x \in F_\tau^s$并且对于 $\xi \ge t$，我们有 $T(\xi, t)T(t, \tau)x = T(\xi, \tau)x$。因此，

$$\sup_{\xi\ge t} \|T(\xi, t)T(t, \tau)x\|_\xi = \sup_{\xi\ge t} \|T(\xi, \tau)x\|_\xi \le \sup_{\xi\ge\tau} \|T(\xi, \tau)x\|_\xi < \infty,$$

and

$$z_1(\xi) = \begin{cases} T(\xi, \tau)x, & \xi \ge t, \\ 0, & \xi < t \end{cases}$$

属于 L^p。因此， $T(t, \tau)x \in F_t^s$。所以，对于所有 $t \ge \tau$， $T(t, \tau)F_\tau^s \subset F_t^s$。

取 $x \in F_\tau^u$，令 $y = T(t, \tau)x$。我们定义函数 φ_y如下

$$\varphi_y(\xi) = \begin{cases} \varphi_x(\xi), & \xi \le \tau, \\ T(\xi, \tau)x, & \tau \le \xi \le t. \end{cases}$$

于是， $\varphi_y \in \mathcal{F}_t$。事实上，我们很容易看到，对于 $s \ge \tau$ 和 $\xi \in [s, t]$、 $s < \tau$ 以及 $\xi \in [s, \tau]$， $\varphi_y(\xi) = T(\xi, s)\varphi_y(s)$。对于 $s < \tau$ 和 $\xi \in [\tau, t]$，我们有

$$\varphi_y(\xi) = T(\xi, \tau)x = T(\xi, \tau)T(\tau, s)\varphi_x(s) = T(\xi, s)\varphi_x(s) = T(\xi, s)\varphi_y(s).$$

对于 $\xi \in [\tau, t]$，我们有

$$\|T(\xi, \tau)x\|_\xi \le Ke^{c(t-\tau)}\|x\|_\tau.$$

因此， $\sup_{\xi\le t} \|\varphi_y(\xi)\|_\xi < \infty$；并且，当 $\xi \le t$ 时， $w_1 \in L^p$ 与 $w_1(\xi) = \varphi_y(\xi)$，而当 $\xi > t$ 时， $w_1(\xi) = 0$。所以， $T(t, \tau)x \in F_t^u$。因此， $T(t, \tau)F_\tau^u \subset F_t^u$。

对于 $y \in F_t^u$，我们很容易验证 $x = \varphi_y(\tau) \in F_\tau^u$满足 $\varphi_x := \varphi_y|_{(-\infty,\tau]}$。由于 $\varphi_y \in \mathcal{F}_t$， $T(t, \tau)x = y$。因此， $T(t, \tau)F_\tau^u = F_t^u$。 □

通过与引理 8], 类似的证明，我们可得演化族在空间 F_τ^s上的指数衰减。

引理3.6。 存在 λ、 $D > 0$ 使得

$$\|T(t, \tau)P(\tau)x\|_t \le De^{-\lambda(t-\tau)}\|x\|_\tau$$

对于 $x \in X$ 和 $t \ge \tau$。

现在我们证明，演化族在空间 F_τ^u 上呈指数增长。

引理 3.7。 存在 $\lambda, D>0$ 使得

$$\|T(t,\tau)Q(\tau)x\|_t \geq \frac{1}{D}e^{\lambda(t-\tau)}\|Q(\tau)x\|_\tau \tag{3.7}$$

对于 $x\in X$ 和 $t\geq\tau$。

证明。 首先，我们证明存在 $C>0$ 使得

$$C\|T(t,\tau)x\|_t \geq \|x\|_\tau \tag{3.8}$$

对于 $t\geq\tau$, $x\in F_\tau^u$。由引理 3.5，得 $y=T(t+1,\tau)x\in F_{t+1}^u$, $\varphi_y\in\mathcal{F}_{t+1}$，以及 $w\in L^p$，其中

$$w(\xi)=\begin{cases}\varphi_y(\xi), & \xi\leq t+1,\\ 0, & \xi>t+1,\end{cases}\quad\text{and}\quad \varphi_y(\xi)=\begin{cases}\varphi_x(\xi), & \xi\leq\tau,\\ T(\xi,\tau)x, & \tau\leq\xi\leq t+1.\end{cases}$$

设 $\psi:\ \mathbb{R}\to[0,1]$ 是一个连续可微函数，使得

$$\operatorname{supp}\psi\subset(-\infty,t+1],\quad \psi(\xi)=1\quad\text{for}\quad \xi\leq t,\quad \sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\psi'(\xi)|\leq 2.$$

容易验证，$\psi w\in Y_1$、$\psi' w\in Y_2$和 $H(\psi w)=\psi' w$。我们有

$$\begin{aligned}\|\psi w\|_\infty=\|G(\psi' w)\|_\infty &\leq \|G\|\|\psi' w\|_q=\|G\|\left(\int_t^{t+1}\|\psi'(\xi)w(\xi)\|_\xi^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq 2\|G\|\left(\int_t^{t+1}\|T(\xi,t)T(t,\tau)x\|_\xi^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\leq 2Ke^c\|G\|\|T(t,\tau)x\|_t.\end{aligned}$$

因此，$\|x\|_\tau=\|(\psi w)(\tau)\|_\tau\leq\|\psi w\|_\infty\leq 2Ke^c\|G\|\|T(t,\tau)x\|_t$。现在我们证明存在$T>0$ 使得

$$\|T(t,\tau)x\|_t\geq 2\|x\|_\tau\quad\text{for}\quad t-\tau\geq T. \tag{3.9}$$

事实上，我们考虑以下函数

$$y_2(\xi)=-\chi_{[\tau,t]}(\xi)w(\xi)\quad\text{and}\quad v_2(\xi)=\int_\xi^{+\infty}\chi_{[\tau,t]}(s)ds\,w(\xi).$$

于是，$v_2\in Y_1, y_2\in Y_2$，且 $Hv_2=y_2$。因此，

$$\begin{aligned}\|v_2\|_\infty=\|Gy_2\|_\infty &\leq \|G\|\|y_2\|_q=\|G\|\left(\int_\tau^t\|w(\xi)\|_\xi^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq\|G\|\left[\left(\int_\tau^t\|w(\xi)\|_\xi^p d\xi\right)^{\frac{q}{p}}(t-\tau)^{1-\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}\\ &=\|G\|(t-\tau)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_\tau^t\|w(\xi)\|_\xi^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=\|G\|(t-\tau)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_\tau^t\|\psi(\xi)w(\xi)\|_\xi^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq\|G\|(t-\tau)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|\psi w\|_p\\ &\leq 2Ke^c\|G\|^2(t-\tau)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|T(t,\tau)x\|_t.\end{aligned}$$

因此，$(t-\tau)\|x\|_\tau=(t-\tau)\|w(\tau)\|_\tau=(t-\tau)\|v_2(\tau)\|\leq 2Ke^c\|G\|^2(t-\tau)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|T(t,\tau)x\|_t$。因此

$$\|x\|_\tau\leq\frac{2Ke^c\|G\|^2}{(t-\tau)^{1-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}}\|T(t,\tau)x\|_t.$$

由于 $(p,q) \neq (\infty,1)$，$1-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}>0$。因此，存在 $T>0$，使得 (3.9) 成立。

对于 $t \geq \tau$和 $x \in X$，记 $t-\tau = kT+s$，其中 $0 \leq s < T$和 $k \in \mathbb{N}$。于是，

$$T(t,\tau)Q(\tau)x = \prod_{i=0}^{k-1} T(t-iT, t-(i+1)T)T(\tau+s,\tau)Q(\tau)x.$$

由 (3.8) 和 (3.9)，

$$\begin{aligned}\|T(t,\tau)Q(\tau)x\|_t &\geq 2^k \|T(\tau+s,\tau)Q(\tau)x\|_{\tau+s} \\ &\geq \frac{2^k}{C}\|Q(\tau)x\|_\tau \geq \frac{1}{2C} e^{\frac{(t-\tau)\ln 2}{T}} \|Q(\tau)x\|_\tau.\end{aligned}$$

因此，当 $\lambda = \ln_T{}^2$ 和 $D = 2C$时，不等式 (3.7) 成立。 □

为完成证明，我们需要验证指数二分性的余项条件。由引理 3.5 和引理 3.7，$T(t,\tau)$：$Q(\tau)X \to Q(t)X$是双射，且

$$\|T(\tau,t)_|Q(t)x\|_\tau \leq De^{-\lambda(t-\tau)}\|Q(t)x\|_t \leq D(1+M)e^{-\lambda(t-\tau)}\|x\|_t$$

对所有 $t \geq \tau$均成立。由引理 3.5，我们有 $T(t,\tau)Q(\tau)x \in F_t^u$和 $T(t,\tau)P(\tau)x \in F_t^s$。因此，对于每个 $x \in X$，$P(t)T(t,\tau)x = T(t,\tau)P(\tau)x$，这意味着对于 $t \geq \tau$，$P(t)T(t,\tau) = T(t,\tau)P(\tau)$。所以，演化族 $(T(t,\tau))_{t\geq\tau}$相对于范数族 $\|\cdot\|_t$是指数二分的。□

注释 3.1。根据注 *2.1* 以及子空间 F_τ^s、F_τ^u 的定义，我们得到 $X^s(\tau) \subset F_\tau^s$和 $X^u(\tau) \subset F_\tau^u$对每个 $\tau \in \mathbb{R}$ 均成立。因此，根据引理 *3.3* 和注 *2.1*，我们有 $X^s(\tau) = F_\tau^s$ 以及 $X^u(\tau) = F_\tau^u$ 对每个 $\tau \in \mathbb{R}$均成立。因此，二分投影族是唯一的。

作为应用，我们现在给出一个关于扰动的结果。

定理 3.3。设演化族 $(T(t,\tau))_{t\geq\tau}$关于范数族 $\|\cdot\|_t$ 是指数二分的，并且 B： $\mathbb{R} \to B(X)$ 是一个满足以下条件的强连续函数

$$\|B(t)\| \leq Me^{-\epsilon|t|}\varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

那么，对于 $\varphi \in L^q(\mathbb{R})$ 以及充分小的 $M>0$，演化族 $U(t,\tau)$ 满足 g

$$U(t,\tau) = T(t,\tau) + \int_\tau^t T(t,s)B(s)U(s,\tau)ds, \quad t \geq \tau \text{ and } t,\tau \in \mathbb{R}$$

相对于同一范数族具有指数二分性。

证明。令 L 为与演化族 $(U(t,\tau))_{t\geq\tau}$ 相关联的线性算子，其定义方式与线性算子 H 与演化族 $(T(t,\tau))_{t\geq\tau}$ 相关联的方式相同，参见定义 3.1。更确切地说，L 在定义域 $\mathcal{D}(L)$ 上定义为 $Lx = y$，即

$$x(t) = U(t,\tau)x(\tau) + \int_\tau^t U(t,s)y(s)ds, \quad t \geq \tau.$$

通过直接变换并利用富比尼定理，我们得到如下关系 n

$$x(t) = T(t,\tau)x(\tau) + \int_\tau^t T(t,w)\left(y(w) + B(w)x(w)\right)dw \quad t \geq \tau. \tag{3.11}$$

现在定义算子 P： $Y_1 \to Y_2$ 通过 $(Px)(t) = B(t)x(t)$，其中 $t \in \mathbb{R}$。由 (2.1) 和 (3.10)，可得

$$\|B(t)x(t)\|_t \leq Ce^{\epsilon|t|}\|B(t)x(t)\| \leq MC\varphi(t)\|x(t)\| \leq MC\varphi(t)\|x(t)\|_t \leq MC\varphi(t)\|x\|_{Y_1}$$

对于 $t \in \mathbb{R}$。因此，我们有

$$\|Px\|_q = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \|B(t)x(t)\|_t^q dt \Big)^{\frac{1}{q}} \leq MC\|x\|_{Y_1} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(t))^q dt \Big)^{\frac{1}{q}} = MC\|\varphi\|_q \|x\|_{Y_1}.$$

因此， P 是一个有界线性算子，并且

$$\|P\| \leq MC\|\varphi\|_q. \tag{3.12}$$

根据假设，我们有 $H: \mathcal{D}(H) \to Y_2$ 具有一个有界可逆算子。由（3.12），当$M > 0$ 足够小时，我们得到

$$\|PH^{-1}\| \leq \|P\|\|H^{-1}\| \leq MC\|\varphi\|_q \|H^{-1}\| < 1.$$

因此， $I - PH^{-1}: Y_2 \to Y_2$是可逆的。此外，由（3.11）可知， $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(L)$且 $H = L + P$。因此，

$$L = H - P = (I - PH^{-1})H : \mathcal{D}(H) \to Y_2$$

当 $M > 0$充分小时，它也是可逆的。

尚需证明存在 K_1， $c_1 > 0$ 使得

$$\|U(t,\tau)x\|_t \leq K_1 e^{c_1(t-\tau)} \|x\|_\tau \quad \text{for} \quad t \geq \tau.$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned} \|U(t,\tau)x\|_t &= \Big\| T(t,\tau)x + \int_\tau^t T(t,s)B(s)U(s,\tau)x ds \Big\|_t \\ &\leq Ke^{c(t-\tau)}\|x\|_\tau + K\int_\tau^t e^{c(t-s)}\|B(s)U(s,\tau)x\|_s ds \\ &\leq Ke^{c(t-\tau)}\|x\|_\tau + MCK\int_\tau^t e^{c(t-s)}\varphi(s)\|U(s,\tau)x\|_s ds \end{aligned}$$

对于 $t \geq \tau$。令 $\phi(t) = e^{-ct}\|U(t,\tau)x\|_t$，我们得到

$$\phi(t) \leq K\phi(\tau) + MCK\int_\tau^t \varphi(s)\phi(s)ds.$$

利用格朗沃尔引理，我们有

$$\phi(t) \leq K\phi(\tau)e^{MCK\int_\tau^t \varphi(s)ds}.$$

另一方面，

$$\int_\tau^t \varphi(s)ds \leq \sum_{k=0}^{[t-\tau]} \int_{\tau+k}^{\tau+k+1} \varphi(s)ds \leq \|\varphi\|_q(t-\tau+1).$$

因此，

$$\phi(t) \leq K\phi(\tau)e^{MCK\|\varphi\|_q(t-\tau+1)}.$$

这意味着

$$\|U(t,\tau)x\|_t \leq Ke^{MCK\|\varphi\|_q}e^{(c+MCK\|\varphi\|_q)(t-\tau)}\|x\|_\tau \quad \text{for} \quad t \geq \tau.$$

应用定理 3.2，演化族 $(U(t,\ \tau))_{t\geq\tau}$相对于范数族 $\|\cdot\|_t$是指数二分的。

□

References

[1] W. Arendt、C.J.K. Batty、M. Hieber、F. Neubrander，《向量值拉普拉斯变换与柯西问题》，施普林格，2011年。[2] L. Barreira、Y. Pesin，《非一致双曲性》，《数学及其应用百科全书》第115卷，剑桥大学出版社，2007年。[3] L. Barreira、C. Valls，《非自治微分方程的稳定性》，《数学讲义》第1926卷，施普林格，2008年。[4] L. Barreira、C. Valls，L^∞ 空间的强可容许性与弱可容许性，《电子定性微分方程理论期刊》2017年，第78号论文，22页。[5] L. Barreira、D. Dragicevic、C. Valls，强与弱 $(L^p,\ L^q)$-容许性，《数学科学通报》138 (2014)，721-741。[6] C. Chicone、Y. Latushkin，《动力系统与微分方程中的演化半群》，《数学调查专著》第70卷，美国数学会，1999年。[7] J. Dalecskii、M. Krein，《Banach空间中微分方程解的稳定性》，《数学译丛专著》第43卷，美国数学会，1974年。[8] B. Levitan、V. Zhikov，《几乎周期函数与微分方程》，剑桥大学出版社，1982年。[9] J. Massera、J. Sch¨affer，《线性微分方程与函数空间》，《纯粹与应用数学》第21卷，学术出版社，1966年。[10] O. Perron，《微分方程的稳定性问题》，《数学杂志》32 (1930)，703-728。[11] P. Preda、A. Pogan、C. Preda，《半直线上演化过程的 $(L^p,\ L^q)$-容许性与指数二分性》，《积分方程与算子理论》49 (2004)，405-418。[12] A. Sasu，实直线上演化族的指数二分性，《抽象与应用分析》(2006)，第31641号文章，16页。[13] B. Sasu、A. Sasu，半直线上的指数二分性与 $(L^p,\ L^q)$-容许性，《数学分析与应用杂志》316 (2006)，397-408。[14] A. Sasu，线性斜积流的 $(L^p,\ L^q)$-完全可容许性与指数扩张性，《Mathematica》第48卷，第1期 (2006)，69-76。

Trinh Viet Duoc, Faculty of Mathematics, Mechanics, and Informatics, University of Science, Vietnam National University, 334 Nguyen Trai, Hanoi, Vietnam; and Thang Long Institute of Mathematics and Applied Sciences, Thang Long University, Nghiem Xuan Yem, Hanoi, Vietnam*Email address*: tvduoc@gmail.com, duoctv@vnu.edu.vn

Nguyen Van Trong, Faculty of Mathematics, Mechanics, and Informatics, University of Science, Vietnam National University, 334 Nguyen Trai, Hanoi, Vietnam*Email address*: mathchessguitar@gmail.com