HOMO退化实射影二次曲面的同调 S

MOHAMAD MAASSARANI

摘要。Steenrod 和 Tucker 研究了非退化实射影二次曲面的同调。我们计算了退化实射影二次曲面的有理同调和 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同调。这使我们能够确定这些二次曲面的整数同调。

arXiv:2601.06548v1 [math.AT] 10 Jan 2026

引言与主要结果

在 $\mathbb{R}^n$ 上的二次型在 $\mathbb{RP}^{n-1}$ 中定义了一个实射影二次曲面。Steenrod 和 Tucker 在 [ST41] 中研究了非退化二次曲面的同调群。他们证明，非退化二次曲面是以射影空间为底空间的球面丛，并且二次曲面的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上同调是底空间与纤维的同调的张量积。本文中，我们研究退化二次曲面的同调。我们计算了这些二次曲面的有理同调和 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-同调。这使我们能够确定退化二次曲面的整数同调。

实射影二次曲面经射影变换同胚于 $Q^n_{p,q}$ 中二次型 $\mathbf{q}(x_1, \dots, x_n)$ $= x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$ 的实点集，其中某个 p, q $(p + q \leq n)$ 满足条件。因此，本文只考虑 $Q^n_{p,q}$，并且由于 $Q^n_{p,q}$ 同胚于 $Q^n_{q,p}$，有时也会对 $q \geq p$ 进行计算。我们还注意到，$Q^n_{0,q}$ 要么为空，要么同胚于一个射影空间。

本文分为 4 个部分：

第一部分中，在假设 $Tor(H_i(X, \mathbb{Z})\ H_j(Y, \mathbb{Z})) = 0$对所有 i, j成立的条件下，我们根据 X和 Y的同调计算两个空间 X 和Y的连接 $X \star Y$的整数同调。我们还考察由两个连续映射 $f\colon X \to X$和 $g\colon Y \to Y$构造的$f \star g$ 所诱导的同调映射 $H_*(X \star Y, \mathbb{Z}) \to H_*($ $X \star Y, \mathbb{Z})$。第 1 部分的结果将在第 2 部分中使用。

在第二节中，我们证明，对于 p，q，$n-p-q \geq 1$，将 $X^n_{p,\ q}$与 $\mathbb{R}^n$ 中$\mathbf{q}$的轨迹和 $n-1$ 维单位球面 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 相交所得的空间，是 $Q^n_{p,\ q}$的二重覆盖。我们证明，$X^n_{p,\ q}$与连接 $(S^{p-1} \times S^{q-1}) \star S^{n-p-q-1}$ 同胚，并计算其整数同调和有理同调。随后，我们将 $Q^n_{p,\ q}$ 的有理同调视为 $X^n_{p,\ q}$的有理同调中的一个不变向量子空间，并计算 $Q^n_{p,\ q}$的有理同调。

第3节专门讨论 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-同调群$Q^n_{p,\ q}$。$\mathbf{q}$ 的核的射影化 D 与 $\mathbb{RP}^{n-p-q-1}$同胚；$Q^n_{p,\ q} \setminus D$ 是秩为 $n-p-q$、底空间为$Q^{p+q}_{p\,q}$的实向量丛；商空间$Q^n_{p,\ q}/D$ 与Q^n_p的托姆空间同胚，$_q \setminus D$。

关键词和短语。 实射影二次曲面、同调。1

我们主要根据对$(Q^n_{p,\ q},\ D)$的正合序列以及托姆同构，推出对于 $k>0$，$H_{n-p-q+k}(Q^n_{p,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$与 $H_k(Q^{p+q}_{p\ q},\ ,\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$同胚。这给出了“高”度的同调群，因为$Q^{p+q}_{p\ q}$的同调群已由*ST*得知。“低”度的-同调群则利用覆盖，$_q \to Q^n_{p,\ q}$的正合序列计算得出。

在上一节中，我们证明了 $H_k(Q^n_{p,q},\mathbb{Z})$ 的整数同调群 $Q^n_{p,q}$ 具有如下形式：$\mathbb{Z}^{m_k}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{l_k}$，其中 m_l 和 l_k 由 $Q^n_{p,q}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上和在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的贝蒂数决定。对于 $q>p>1$、$n>p+q+1$ 且 p,q 和 n 为偶数的情形，我们计算了 $Q^n_{p,q}$ 的整数同调。其他情形同样可以计算；为避免进行更多计算，本文不予讨论。

1. 关于联结

在第一小节中，在假设对于所有 i,j，$Tor(H_i(X,\mathbb{Z})\ H_j(Y,\mathbb{Z}))$ =0 的条件下，我们根据 X 和 Y 的同调，计算两个空间 X 和 Y 的联结 $X\star Y$ 的整数同调。在第二小节中，在相同假设下，我们考察由两个连续映射 $f\colon\ X\to X$ 和 $g\colon\ Y\to Y$ 构造的 $f\star g$ 在同调中诱导的映射 $H_*(X\star Y,\mathbb{Z})\ \to H_*(X\star Y,\mathbb{Z})$。

本节讨论整数同调，并用 $H_*(-)$ 表示 $H_*(-,\mathbb{Z})$。设 X和 Y是两个拓扑空间，X 和 Y 的联结 $X\star Y$是如下定义的商空间：

$$X\star Y=X\times Y\times[0,1]/(x,y,0)\sim(x',y,0),(x,y,1)\sim(x,y',1)$$

1.1. 联结的同调。在本小节中，我们假设对于所有 i,j，$Tor(H_i(X)\ H_j(Y))\ =0$。

联结是道路连通的。因此，$H_0(X\star Y)\ =\ \mathbb{Z}$。我们将使用 Mayer–Vietoris 序列计算高阶同调群。取：

$$A=X\times Y\times[0,\frac{3}{4}]/(x,y,0)\sim(x',y,0)\quad\text{and}\quad B=X\times Y\times[\frac{1}{4},1]/(x,y,1)\sim(x,y',1).$$

A和 B的内部覆盖了 $X\star Y$和 $A\cap B=X\times Y\times[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$。由 Mayer–Vietoris 序列可得一个正合列：

$$\cdots\to H_{n+1}(X\star Y)\xrightarrow{\partial}H_n(A\cap B)\xrightarrow{i^A\oplus i^B}H_n(A)\oplus H_n(B)\xrightarrow{i_A-i_B}H_n(X\star Y)\xrightarrow{\partial}H_{n-1}(A\cap B)\to\cdots,$$

其中，i^A 和 i^B 分别是由包含映射 $A\cap B\to A$和 $A\cap B\to B$诱导的映射，而 i_A 和 i_B 分别由包含映射 $A\to X\star Y$、$B\to X\star Y$诱导。空间 $A\cap B$与 $X\times Y$同伦等价，A 和 B 分别与$C_X\times Y$ 和 $X\times C_Y$ 同胚（C_Z 是 Z 的锥）。我们假设，对于所有$i,\ j,\ Tor(H_i(X)\ H_j(Y))\ =0$。此外，$C_Z$ 是一个可缩空间，因此根据 Künneth 同构的自然性，我们得到一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} H_*(A\cap B) & \xrightarrow{\quad i^A\oplus i^B \quad} & H_*(A)\oplus H_*(B) \\ \uparrow\simeq & & \simeq\uparrow \\ H_*(X)\otimes H_*(Y) & \xrightarrow{\ l\ } & H_*(C_X)\otimes H_*(Y)\oplus H_*(X)\otimes H_*(C_Y) \end{array} \tag{D1}$$

其中，$l = i_X \otimes \mathrm{id}_{H_*(Y)} \oplus \mathrm{id}_{H_*(X)} \otimes i_Y$，其中 i_Z表示由包含映射$Z \to C_Z$诱导的态射。这将用于描述连接 $X \star Y$的同调。

命题 1.1. 用 l_k 表示 l的 k 次齐次部分。态射 l_k 在$k \geq 1$时是满射。

证明。 如前所述，由于 C_Z是可缩的， $H_*(C_Z) = H_0(C_Z) \simeq \mathbb{Z}$， i_Z: $H_*(Z) \to H_*(C_Z)$是满射，并且 i_Z 的核包含群 $H_k(Z)$，其中 $k \geq 1$ 。用 1_{C_Z} 表示 $H_*(C_Z)$作为 $\mathbb{Z}$-模的一个生成元，并用 1_z 表示 $H_0(Z)$中的一个元素，使得$i_Z(1_z) = 1_{C_Z}$。现在令 a_X和 a_Y分别为 $H_*(X)$和 $H_*(Y)$中度为 $k \geq 1$的两个元素。我们有:

$$l(1_x \otimes a_Y + a_X \otimes 1_y) = 1_{C_X} \otimes a_y + a_X \otimes 1_{C_Y}.$$

这证明了 l 在度 $k \geq 1$上是满射。 □

定理 1.2. 若 $Tor(H_i(X)\ H_j(Y)) = 0$ 对所有 i, j均成立，则对于 $n \geq 1$，群 $H_n(X \star Y)$同构于 $Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y)$的度为 $n-1$ 的部分。

1) 对于 $n > 1$， $Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y)$ 的度为 $n-1$ 的部分是:

$$\bigoplus_{\substack{k+m=n-1 \\ k,m>0}} H_k(X) \otimes H_m(Y) \oplus Ker((i_X)_0) \otimes H_{n-1}(Y) \oplus H_{n-1}(X) \otimes Ker((i_Y)_0),$$

其中，$(i_Z)_0$ 是由包含映射 $Z \to C_Z$ 诱导的态射 i_Z 的零度部分。

2) 对于 $n = 1$， $Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y)$ 的度为 $n-1$ 的部分是:

$$Ker((i_X)_0) \otimes Ker((i_Y)_0),$$

其中，$(i_Z)_0$ 是由包含映射 $Z \to C_Z$ 诱导的态射 i_Z 的零度部分。

证明。 根据前一个命题和图表（$D1$），态射 $i^A \oplus i^B$ 在度为 $n \geq 1$时是满射。因此，对于 $n \geq 1$，Mayer–Vietoris 序列中的 ∂: $H_n(X \star Y) \to H_{n-1}(A \cap B)$ 是单射的，而 $H_n(X \star Y)$ 同构于其在 ∂ 下的像。但 ∂: $H_n(X \star Y) \to H_{n-1}(A \cap B)$ 的像恰好是 $i^A \oplus i^B$ 的度为 $n-1$ 的部分的核。因此，由图表（$D1$）， $H_n(X \star Y)$ 与 l_{n-1} （ l 的度为 $n-1$ 的部分）的核同构。 l_{n-1} 的核是 $Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y)$ 的度为 $n-1$ 的部分。由 $Ker(i_Z) = Ker((i_Z)_0) \oplus \bigoplus_{k>0} H_k(Z)$ 可知，定理得证。□

注 1.3. C_Z 是道路连通的，因此可以由 $H_0(Z)$确定 $Ker((i_Z)_0)$ 。3

1.2. 映射的连接。 设 $f: X \to X$ 和 $g: Y \to Y$ 是连续映射。映射 $f \times g \times \mathrm{id}_{[0,1]}$ 诱导出唯一映射 $f \star g: X \star Y \to X \star Y$。设 A 和 B 如上一节所述。我们有 $f \star g(A) \subset A$, $f \star g(B) \subset B$，因此 $f \star g(A \cap B) \subset A \cap B$。因此，由于 Mayer–Vietoris 序列具有自然性（[M91]），我们有一个交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X \star Y) & \xrightarrow{\partial} & H_n(A \cap B) & \xrightarrow{i^A \oplus i^B} & H_n(A) \oplus H_n(B) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle (f\star g)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f\star g)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f\star g)_*} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X \star Y) & \xrightarrow{\partial} & H_n(A \cap B) & \xrightarrow{i^A \oplus i^B} & H_n(A) \oplus H_n(B) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

命题 1.4。 假设对所有 i, j 都有 $Tor(H_i(X)\ H_j(Y)) = 0$，并将 $(Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y))_n$ 的 n 次部分记为 $Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y)$。对于 $n \geq 0$，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
H_{n+1}(X \star Y) & \xrightarrow{\simeq} & (Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y))_n \\
\downarrow{\scriptstyle (f\star g)_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_* \otimes g_*} \\
H_{n+1}(X \star Y) & \xrightarrow{\simeq} & (Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y))_n
\end{array}$$

证明。 </style}空间 C_X 和 C_Y 都是可缩的。因此， $f_*(Ker(i_X)) \subset Ker(i_X)$，并且 $g_*(Ker(i_Y)) \subset Ker(i_Y)$，于是我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
H_*(X) \otimes H_*(Y) & \longleftarrow & Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y) \\
\downarrow{\scriptstyle f_* \otimes g_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_* \otimes g_*} \\
H_*(X) \otimes H_*(Y) & \longleftarrow & Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y)
\end{array}$$

By th在命题之前的图中，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
H_{*+1}(X \star Y) & \xrightarrow{\partial} & H_*(A \cap B) \\
\downarrow{\scriptstyle (f\star g)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f\star g)_*} \\
H_{*+1}(X \star Y) & \xrightarrow{\partial} & H_*(A \cap B)
\end{array}$$

现在， $f \star g$上的映射 $A \cap B$不过就是 $f \times g \times \mathrm{id}_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}$，而包含映射 $_\ _$
$X \times Y \to X \times Y \times \{\frac{1}{2}\} \subset A \cap B$是一个同伦等价。因此，我们可以将最后两个图连接起来，得到：

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{*+1}(X \star Y) & \xrightarrow{\partial} & H_*(A \cap B) & \xleftarrow[\simeq]{} & H_*(X) \otimes H_*(Y) & \longleftarrow & Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y) \\
\downarrow{\scriptstyle (f\star g)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (f\star g)_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_* \otimes g_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_* \otimes g_*} \\
H_{*+1}(X \star Y) & \xrightarrow{\partial} & H_*(A \cap B) & \xleftarrow[\simeq]{} & H_*(X) \otimes H_*(Y) & \longleftarrow & Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y)
\end{array}$$

根据前一个定理， ∂ 是单射的，而 $H_{*+1}(X \star Y)$在∂ 下的像对应于 $Ker(i_X) \otimes Ker(i_Y)$在左侧两个箭头下的（单射）像。这证明了该命题。□

2. 退化二次曲面的双重覆盖与有理同调

对于 p、 $q \geq 1$ 和 $n \geq p+q$，我们将$Q^n_{p、q}$记作 $\mathbb{RP}^{n-1}$ 中的二次型$\mathbf{q}$： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$\mathbf{q}(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$的实点集。 $\mathbb{RP}^{n-1}$中任意一个惯性指数为(p, q)的二次型的实点集，通过一个射影变换与$Q^n_{p、q}$同胚。如果 p 或 q 为零，则$Q^n_{p、q}$ 与一个射影空间同胚（最终为 $\emptyset$）。以下我们假设 p、 q、 $n-p-q \geq 1$。

在本节中，我们首先在第一小节考虑 $Q^n_{p,q}$ 的一个二重覆盖，并证明它与一个连接同胚。我们描述该覆盖的甲板变换群。在第二小节中，我们利用第 1 节的结果计算该二重覆盖的整数同调和有理同调。随后，我们将 $Q^n_{p,q}$ 的有理同调计算为该覆盖的有理同调中的一个不变向量子空间。

2.1. **双重覆盖与对径映射**。 记 $X^n_{p,q}$ 为交集 :

$$X^n_{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathbf{q}(x) = 0\} \cap S^{n-1},$$

其中， S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$的单位球面。令 $||\cdot||$ 表示 $\mathbb{R}^k$的欧几里得范数。通过将 $\mathbb{R}^n$ 对应到 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-p-q}$, $X^n_{p,q}$ 被对应为:

$$X^n_{p,q} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-p-q} | \ \ ||x|| = ||y||, ||x||^2 + ||y||^2 + ||z||^2 = 1\}.$$

定义 t 连续映射 f: $S^{p-1} \times S^{q-1} \times S^{n-p-q-1} \times [0,1] \to X^n_{p,q}$ 定义为:

$$f(x,y,z,t) = (\frac{t}{\sqrt{2}}x, \frac{t}{\sqrt{2}}y, (1-t)z),$$

对于 (x,y,z,t)， $\in S^{p-1} \times S^{q-1} \times S^{n-p-q-1} \times [0,1]$。

命题 2.1. 1) 上文定义的映射 f 是满射。

2) $f(x,y,z,t) = f(x',y',z',t')$ 当且仅当 $t = 0$ 且 $(x,y) = (x',y')$， 或者 $t = 1$ 且 $z = z'$。

证明。 利用如下识别即可验证

$$X^n_{p,q} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-p-q} | \ \ ||x|| = ||y||, ||x||^2 + ||y||^2 + ||z||^2 = 1\},$$

以及 f 的定义。 □

¯**命题 2.2.** 前一个命题中的映射 f 诱导出一个同胚 $\bar{f}$:$(S^{p-1} \times S^{q-1})$ $\star$ $S^{n-p-q-1} \to X^n_{p,q}$。

证明。命题的第 2) 点表明， f 诱导出一个连续单射$\bar{f}$： $(S^{p-1} \times S^{q-1})\star$ $S^{n-p-q-1}$ $\to$ $X^n_{p,\ q}$。结合同一命题的第 1) 点，我们得到¯ ¯，
f 是一个连续双射。由于两个空间都是紧致的，我们推得 f 是一个同胚。□

由于空间的连接是道路连通的，我们有:

推论 2.3。 $X^n_{p,\ q}$ 是道路连通的。

令 a_{n-1}： $S^{n-1} \to S^{n-1}$ 为对径映射（将 x 映至 $-x$的对合）， π 为从 $S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$出发的投影。 π 是一个非平凡的二重覆盖映射，其甲板变换群为 $\{1, a_{n-1}\}$。由于$\mathbf{q}(x) = \mathbf{q}(-x)$, $X^n_{p,\ q}$ 在对径映射下保持不变，并且:

命题 2.4。 映射 $X^n_{p,\ q} \xrightarrow{\pi} Q^n_{p,\ q}$ 是一个非平凡的2重覆盖映射，其甲板变换群为 $\{1, a_{n-1}\}$ ，其中 a_{n-1} 为对径映射。

证明。 映射 $X^n_{p,\ q} \xrightarrow{\pi} Q^n_{p,\ q}$ 在 $X^n_{p,\ q}/\{1, a_{n-1}\}$ 与$Q_{n,\ p}$之间诱导出一个连续双射。由于这两个空间都是紧致的，所诱导的映射是一个同胚。这证明了 $X^n_{p,\ q} \xrightarrow{\pi} Q^n_{p,\ q}$ 是一个二重覆盖，因为 $X^n_{p,\ q} \to X^n_{p,\ q}/\{1, a_{n-1}\}$ 是一个覆盖映射。最后，该覆盖不是平凡的，因为 $X^n_{p,\ q}$ 是道路连通的。□

命题 2.5 $\bar{}$。 设 f 为命题 *2.2* 中的同胚。对于 $w \in X^n_{p,\ q}$，我们有

$$\bar{f}((a_{p-1} \times a_{q-1}) \star a_{n-p-q-1})\bar{f}^{-1}(w) = a_{n-1}(w),$$

其中 a_k 表示 S^k的对跖映射。

证明。 我们将证明

$$((a_{p-1} \times a_{q-1}) \star a_{n-p-q-1})(v) = \bar{f}^{-1} a_{n-1} \bar{f}(v),$$

对于 $v \in (S^{p-1} \times S^{q-1}) \star S^{n-p-q-1}$。我们只需证明 $v \in (S^{p-1} \times S^{q-1}) \times S^{n-p-q-1} \times]0,\ 1[$, 上的等式，因为它是连接的稠密子集。取 $v = (x,\ y,\ z,\ t) \in S^{p-1} \times S^{q-1} \times S^{n-p-q-1} \times]0,\ 1[$。根据定义，我们有:

$$((a_{p-1} \times a_{q-1}) \star a_{n-p-q-1})(x, y, z, t) = (-x, -y, -z, t).$$

事实上，$((a_{p-1} \times a_{q-1}) \star a_{n-p-q-1})$ 是由 $((a_{p-1} \times a_{q-1}) \times a_{n-p-q-1}) \times \mathrm{id}_{[0,1]}$ 导出的。另一方面:

$$\begin{aligned}
\bar{f}^{-1} a_{n-1} \bar{f}(x, y, z, t) &= \bar{f}^{-1} a_{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}x, \frac{t}{\sqrt{2}}y, (1-t)z\right) \\
&= \bar{f}^{-1}\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}x, -\frac{t}{\sqrt{2}}y, -(1-t)z\right) \\
&= (-x, -y, -z, t).
\end{aligned}$$

我们已经证明了该命题。 □

2.2. **双重覆盖的同调与退化二次曲面的有理同调**。我们将计算同调群。这些计算分为六种情形。

2.2.1. 情形 $p, q, n-p-q > 1$. 我们假设 $p, q, n-p-q > 1$。根据上一节的结果，$X^n_{p,q}$ 与连接 $(S^{p-1} \times S^{q-1}) \star S^{n-p-q-1}$ 同胚。特别地，$H_0(X^n_{p,q}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$。我们有 $Tor(H_i(S^{p-1} \times S^{q-1}, \mathbb{Z}),\ H_j(S^{n-p-q-1}, \mathbb{Z})) = 0$ 对所有 i, j 均成立。因此，根据定理 1.2:

$$H_{*+1}(X^n_{p,q}, \mathbb{Z}) \simeq Ker(i_{S^{p-1} \times S^{q-1}}) \otimes Ker(i_{S^{n-p-q-1}}), \tag{1}$$

其中，i_Z 是由空间 Z 到锥C_Z 的包含映射所诱导的同调映射，而锥C_Z 是一个可缩空间。对于 $i > 0$ ，记 **1** 为 $H_0(S^i,\ \mathbb{Z})$的一个生成元，记 b_i 为 $H_i(S^i,\ \mathbb{Z})$的一个生成元。空间 $S^{p-1} \times S^{q-1}$ 和 $S^{n-p-q-1}$ 是道路连通的（$p,\ q,\ n-p-q > 1$），因此利用 Künneth 同构 $H_*(S^{p-1} \times S^{q-1},\ \mathbb{Z}) \simeq H_*(S^{p-1},\ \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^{q-1},\ \mathbb{Z})$，我们有:

1) $Ker(i_{S^{p-1} \times S^{q-1}})$ 由 $b_{p-1} \otimes 1$、$1 \otimes b_{q-1}$ 和 $b_{p-1} \otimes b_{q-1}$ 生成，构成一个 $\mathbb{Z}$-模。2) $Ker(i_{S^{n-p-q-1}})$ 由 $b_{n-p-q-1}$生成，构成一个 $\mathbb{Z}$-模。

特别地，将 $H_{*+1}(X^n_{p、q}、\mathbb{Z})$ 视为.....的子空间

$$H_*(S^{p-1},\mathbb{Z})\otimes H_*(S^{q-1},\mathbb{Z})\otimes H_*(S^{n-p-q-1},\mathbb{Z})$$

由以下元素生成一个 $\mathbb{Z}$-模:

$$b_{p-1}\otimes 1\otimes b_{n-p-q-1}, 1\otimes b_{q-1}\otimes b_{n-p-q-1} \text{ and } b_{p-1}\otimes b_{q-1}\otimes b_{n-p-q-1}.$$

由此可得:

命题 2.6。若 $p\neq q$ 则:

1）$X^n_{p,\ q}$ 的整数同调为:

$$H_i(X^n_{p,q},\mathbb{Z})\simeq\begin{cases}\mathbb{Z} & if\ i=0,n-p-1,n-q-1,n-2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

2）$X^n_{p,\ q}$ 的有理同调为:

$$H_i(X^n_{p,q},\mathbb{Q})\simeq\begin{cases}\mathbb{Q} & if\ i=0,n-p-1,n-q-1,n-2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

命题 2.7。若 $p=q$ 则:

1) $X^n_{p,\ q}$ 的整数同调为:

$$H_i(X^n_{p,q},\mathbb{Z})\simeq\begin{cases}\mathbb{Z} & if\ i=0,n-2\\ \mathbb{Z}^2 & if\ i=n-p-1=n-q-1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

2) $X^n_{p,\ q}$ 的有理同调为:

$$H_i(X^n_{p,q},\mathbb{Q})\simeq\begin{cases}\mathbb{Q} & if\ i=0,n-2\\ \mathbb{Q}^2 & if\ i=n-p-1=n-q-1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

我们将 S^i 的对径映射记为 a_i。

引理 2.8。 1)

$$(a_{p-1})_*\otimes(a_{q-1})_*\otimes(a_{n-p-q-1})_*(b_{p-1}\otimes 1\otimes b_{n-p-q-1})=(-1)^{n-q}b_{p-1}\otimes 1\otimes b_{n-p-q-1}.$$

2)

$$(a_{p-1})_*\otimes(a_{q-1})_*\otimes(a_{n-p-q-1})_*(1\otimes b_{q-1}\otimes b_{n-p-q-1})=(-1)^{n-p}1\otimes b_{q-1}\otimes b_{n-p-q-1}.$$

3)

$$(a_{p-1})_*\otimes(a_{q-1})_*\otimes(a_{n-p-q-1})_*(b_{p-1}\otimes b_{q-1}\otimes b_{n-p-q-1})=(-1)^n b_{p-1}\otimes b_{q-1}\otimes b_{n-p-q-1}.$$

证明。 我们利用 a_k 的度为 $(-1)^{k+1}$，且 $a_k(1)=1$。 □

定理 *2.9*。对于 $p\neq q$, $H_0(Q^n_{p,q},\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$, $H_{n-q-1}(Q^n_{p,q},\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$，若 $n-q$ 为偶数，则 $H_{n-p-1}(Q^n_{p,q},\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$；若 $n-p$ 为偶数，则 $H_{n-2}(Q^n_{p,q},\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$；若 n 为偶数，则 $H_i(Q^n_{p,q},\mathbb{Q})=0$；否则亦然。

证明。由于 $X^n_{p,q}$ 是 $Q^n_{p,q}$ 的非平凡二重覆盖，且其甲板变换群为 $\{1, a_{n-1}\}$, $H_*(Q^n_{p,q}, \mathbb{Q})$, 根据 a_{n-1}，它同构于 $H_*(X^n_{p,q}, \mathbb{Q})$ 的不变量。现在将 $H_*(X^n_{p,q}, \mathbb{Q})$ 识别为连接 $(S^{p-1} \times S^{q-1})$ 的同调，则根据命题 2.5，$\star S^{n-p-q-1}$ 将 a_{n-1} 识别为 $(a_{p-1} \times a_{q-1}) \star a_{n-p-q-1}$。利用方程 (2) 中的同构，将连接 $(S^{p-1} \times S^{q-1})$ 的同调识别为 $\star S^{n-p-q-1}$，则根据命题 1.4，$(a_{p-1} \times a_{q-1}) \star a_{n-p-q-1}$ 将 $(a_{p-1} \times a_{q-1})_* \otimes (a_{n-p-q-1})_*$ 识别为。应用 Künneth 同构，转到 $H_*(S^{p-1}) \otimes H_*(S^{q-1}) \otimes H_*(S^{n-p-q-1})$ 中的元素，可将 $H_{*+1}(X^n_{p,q})$ 识别为三个生成元 $b_{p-1} \otimes 1 \otimes b_{n-p-q-1}, 1 \otimes b_{q-1} \otimes b_{n-p-q-1}$ 和 $b_{p-1} \otimes b_{q-1} \otimes b_{n-p-q-1}$，并将 $(a_{p-1} \times a_{q-1})_* \otimes (a_{n-p-q-1})_*$ 识别为 $(a_{p-1})_* \otimes (a_{q-1})_* \otimes (a_{n-p-q-1})_*$。因此，定理由前一个引理得证。□

定理 2.10. $H_0(Q^n_{p,p}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $H_{n-p-1}(Q^n_{p,p}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^2$ 若 $n-p$ 为偶数，$H_{n-2}(Q^n_{p,p}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ 若 n 为偶数，且 $H_i(Q^n_{p,p}, \mathbb{Q}) = 0$ 否则。

证明. 证明与前一个定理的证明完全相同。 □

2.2.2. 情形 $p, q > 1$, $n - p - q = 1$. 我们考虑情形 $p, q > 1$ 和 $n = p + q + 1$。根据上一节的结果，$X^{p+q+1}_{p\,q}$,与连接 $(S^{p-1} \times S^{q-1}) \star S^0$ 同胚。特别地，$H_0(X^{p+q+1}_{p\,q}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$。我们有，对所有 i, j，$Tor(H_i(S^{p-1} \times S^{q-1}, \mathbb{Z}) H_j(S^0, \mathbb{Z})) = 0$。因此，根据定理 1.2：

$$H_{*+1}(X^n_{p,q}, \mathbb{Z}) \simeq Ker(i_{S^{p-1} \times S^{q-1}}) \otimes Ker(i_{S^0}),$$

其中，i_Z 是由空间 Z 到锥 C_Z 的包含映射诱导的映射；锥是一个可缩空间。对于 $i > 0$，用 1 表示 $H_0(S^i, \mathbb{Z})$的一个生成元，用 b_i 表示$H_i(S^i, \mathbb{Z})$的一个生成元，并用 b_0 和 b'_0 表示 $H_*(S^0, \mathbb{Z}) = H_0(S^0, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$ 的两个生成元，使得b_0 和 b'_0 分别对应两个单形。利用 Künneth 同构 $H_*(S^{p-1} \times S^{q-1}, \mathbb{Z}) \simeq H_*(S^{p-1}, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^{q-1}, \mathbb{Z})$，可得：

1) $Ker(i_{S^{p-1} \times S^{q-1}})$作为一个 $\mathbb{Z}$-模由 $b_{p-1} \otimes 1$，$1 \otimes b_{q-1}$ 和 $b_{p-1} \otimes b_{q-1}$生成。2) $Ker(i_{S^0})$ 作为一个 $\mathbb{Z}$-模由 $b_0 - b'_0$生成。

特别地，将 $H_{*+1}(X^{p+q+1}_{p\,q}, \mathbb{Z})$ 视为

$$H_*(S^{p-1}, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^{q-1}, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^{n-p-q-1}, \mathbb{Z})$$

由以下元素生成的 $\mathbb{Z}$-模：

$$b_{p-1} \otimes 1 \otimes (b_0 - b'_0), 1 \otimes b_{q-1} \otimes (b_0 - b'_0) \text{ and } b_{p-1} \otimes b_{q-1} \otimes (b_0 - b'_0).$$

由此可得：

命题 2.11。若 $p \neq q$ 则：

1）$X^{p+q+1}_{p\,q}$ 的整数同调，为：

$$H_i(X^{p+q+1}_{p,q}, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & if\ i = 0, p, q, p+q-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2）$X^{p+q+1}_{p\,q}$ 的有理同调，为：

$$H_i(X^{p+q+1}_{p,q}, \mathbb{Q}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q} & if\ i = 0, p, q, p+q-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

命题 2.12。对于 $p = q$，我们有：

1) $X_{p\,p}^{2p+1}$的整数同调为：

$$H_i(X_{p,p}^{2p+1},\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & if\ i=0,2p-1 \\ \mathbb{Z}^2 & if\ i=p \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2) $X_{p\,p}^{2p+1}$的有理同调，由下式给出：

$$H_i(X_{p,p}^{2p+1},\mathbb{Q}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q} & if\ i=0,2p-1 \\ \mathbb{Q}^2 & if\ i=p \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

我们将 S^i 的对径映射记为 a_i。

引理 2.13。 1)

$$(a_{p-1})_* \otimes (a_{q-1})_* \otimes (a_0)_*(b_{p-1}\otimes 1 \otimes (b_0 - b_0')) = (-1)^{p+1} b_{p-1}\otimes 1 \otimes (b_0 - b_0').$$

2)

$$(a_{p-1})_* \otimes (a_{q-1})_* \otimes (a_0)_*(1\otimes b_{q-1} \otimes (b_0 - b_0')) = (-1)^{q+1} 1 \otimes b_{q-1} \otimes (b_0 - b_0').$$

3)

$$(a_{p-1})_* \otimes (a_{q-1})_* \otimes (a_0)_*(b_{p-1}\otimes b_{q-1} \otimes (b_0 - b_0')) = (-1)^{p+q} b_{p-1}\otimes b_{q-1} \otimes (b_0 - b_0').$$

证明。我们利用以下事实：对于 $k>1$，a_k 的度为 $(-1)^{k+1}$，$a_k(1)=1$，$a_0(b_0)=b_0'$ 以及$a_0(b_0')=b_0$。□

定理 *2.14*。对于 $p\neq q$，如果 p 为奇数，则为 $H_0(Q_{p\,q}^{p+q+1},,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$，$H_p(Q_{p\,q}^{p+q+1},,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$；如果 q 为奇数，则为 $H_q(Q_{p\,q}^{p+q+1},,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$；如果 $p+q=n-1$ 为偶数，则为 $H_{p+q-1}(Q_{p\,q}^{p+q+1},,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$；否则为 $H_i(Q_{p,q}^n,\mathbb{Q})=0$。

证明。我们采用与定理 2.9 的证明相同的推理，并利用前一个引理来求出不变量。□

对于 $p=q$：

定理 2.15。 $H_0(Q_{p\,p}^{2p+1},,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$, $H_p(Q_{p\,p}^{2p+1},,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}^2$ 当 p 为奇数时；否则，$H_{2p-1}(Q_{p\,p}^{2p-1},,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ 和 $H_i(Q_{p,p}^n,\mathbb{Q})=0$。

证明。证明与前一个定理的证明完全相同。 □

2.2.3. p 或 q *(*但并非二者同时*)* 等于 1 且 $n-p-q>1$。根据上一节的结果 $X_{p,q}^n$ 与连接 $(S^{p-1}\times S^{q-1})\star S^{n-p-q-1}$ 同胚。因此，$X_{p,q}^n$ 和 $X_{q,p}^n$ 同胚。所以我们只考虑 $p=1$ 的情况。

由于 $X_{1,q}^n$ 与连接 $(S^0\times S^{q-1})\star S^{n-q-2}$，$H_0(X_{1,q}^n,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ 同胚。对于所有 i,j，我们有 $Tor(H_i(S^0\times S^{q-1},\mathbb{Z}),H_j(S^{n-q-2},\mathbb{Z}))=0$。因此，根据定理 1.2：

$$H_{*+1}(X_{1,q}^n,\mathbb{Z}) \simeq Ker(i_{S^0\times S^{q-1}})\otimes Ker(i_{S^{n-q-2}}), \tag{2}$$

其中，i_Z 是由空间 Z 包含到锥 C_Z 中的包含映射所诱导的映射，而该锥是一个可缩空间。对于 $i>0$，用 1 表示 $H_0(S^i,\ \mathbb{Z})$的一个生成元，用 b_i 表示$H_i(S^i,\ \mathbb{Z})$的一个生成元，并用 b_0和 b_0'表示 $H_*(S^0,\ \mathbb{Z})=H_0(S^0,\ \mathbb{Z})$中的两个生成元，使得$b_0$ 和 b_0' 分别对应两个单形。利用 Künneth 同构 $H_*(S^0\times S^{q-1},\ \mathbb{Z})\simeq H_*(S^0,\ \mathbb{Z})\otimes H_*(S^{q-1},\ \mathbb{Z})$，我们得到：

1) $Ker(i_{S^0\times S^{q-1}})$ 作为 $\mathbb{Z}$-模由 $(b_0-b_0')\otimes 1, b_0\otimes b_{q-1}$ 和 $b_0'\otimes b_{q-1}$生成。

2) $Ker(i_{S^{n-q-2}})$ 作为 $\mathbb{Z}$-模由 b_{n-q-2}生成。特别地，
将 $H_{*+1}(X^n_{1,q},\mathbb{Z})$ 视为.....的子空间

$$H_*(S^0,\mathbb{Z})\otimes H_*(S^{q-1},\mathbb{Z})\otimes H_*(S^{n-q-2},\mathbb{Z})$$

由以下元素生成作为一个 $\mathbb{Z}$-模:

$$(b_0-b_0')\otimes 1\otimes b_{n-q-2}, b_0\otimes b_{q-1}\otimes b_{n-q-2} \text{ and } b_0'\otimes b_{q-1}\otimes b_{n-q-2}.$$

由此可得:

命题 2.16。 1）X^n_1的整数同调，q 为:

$$H_i(X^n_{1,q},\mathbb{Z})\simeq\begin{cases}\mathbb{Z}^2 & if\ i=n-2\\ \mathbb{Z} & if\ i=0,n-q-1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

2）X^n_1的有理同调，q 为:

$$H_i(X^n_{1,q},\mathbb{Q})\simeq\begin{cases}\mathbb{Q}^2 & if\ i=n-2\\ \mathbb{Q} & if\ i=0,n-q-1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

我们将 S^i的对径映射记为 a_i 。

引理 2.17。 1)

$$(a_0)_*\otimes(a_{q-1})_*\otimes(a_{n-q-2})_*((b_0-b_0')\otimes 1\otimes b_{n-q-2})=(-1)^{n-q}(b_0-b_0')\otimes 1\otimes b_{n-q-2}.$$

2)

$$(a_0)_*\otimes(a_{q-1})_*\otimes(a_{n-q-2})_*(b_0\otimes b_{q-1}\otimes b_{n-q-2})=(-1)^{n-1}b_0'\otimes b_{q-1}\otimes b_{n-q-2}.$$

3)

$$(a_0)_*\otimes(a_{q-1})_*\otimes(a_{n-q-2})_*(b_0'\otimes b_{q-1}\otimes b_{n-q-2})=(-1)^{n-1}b_0\otimes b_{q-1}\otimes b_{n-q-2}.$$

证明。 我们利用以下事实：对于 $k>1$， a_k 的度为 $(-1)^{k+1}$, $a_k(1)=1$, $a_0(b_0)=b_0'$ 和$a_0(b_0')=b_0$. □

定理 2.18。 $H_0(Q^n_{1,q},\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$, $H_{n-q-1}(Q^n_{1,q},\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ 如果 $n-q$ 是偶数，则，$H_{n-2}(Q^n_{1,q},\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$和 $H_i(Q^n_{1,q},\mathbb{Q})=0$ 则在其他情况下成立。

证明。 我们采用与定理 2.9 的证明相同的推理，并利用前一个引理求出不变量。 □

2.2.4. 当 p 或 q （不同时）等于 1 且 $n-p-q=1$时。 根据前一节的结果，$X^n_{p,q}$与连接 $(S^{p-1}\times S^{q-1})\star S^{n-p-q-1}$同胚。因此，$X^n_{p,q}$和 $X^n_{q,p}$同胚。因此我们只考虑 $p=1$ （非 $q=1$）的情形。

由于 $X^{q+2}_{1,q}$ 同胚于连接 $(S^0\times S^{q-1})\star S^0$，$H_0(X^{q+2}_{1,q},\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$。我们有$Tor(H_i(S^0\times S^{q-1},\mathbb{Z}),H_j(S^0,\mathbb{Z}))=0$对所有 i,j均成立。因此，根据定理 1.2:

$$H_{*+1}(X^{q+2}_{1,q},\mathbb{Z})\simeq Ker(i_{S^0\times S^{q-1}})\otimes Ker(i_{S^0}),$$

其中 i_Z 是由空间 Z 到锥 C_Z 的包含映射诱导的映射，而锥是一个可缩空间。对于 $i>0$，记 1 为 $H_0(S^i,\mathbb{Z})$ 的一个生成元，记 b_i 为 $H_i(S^i,\mathbb{Z})$ 的一个生成元，并记 b_0 和 b_0' 为 $H_*(S^0,\mathbb{Z})=H_0(S^0,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}^2$ 的两个生成元，使得

b_0 和 b'_0 对应于两个单形。利用 Künneth 同构 $H_*(S^0 \times S^{q-1}, \mathbb{Z}) \simeq H_*(S^0, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^{q-1}, \mathbb{Z}),$ 我们得到:

1) $Ker(i_{S^0 \times S^{q-1}})$ 作为 $\mathbb{Z}$-模由 $(b_0 - b'_0) \otimes 1$, $b_0 \otimes b_{q-1}$ 和 $b'_0 \otimes b_{q-1}$ 生成。2) $Ker(i_{S^0})$ 作为 $\mathbb{Z}$-模由 $b_0 - b'_0$ 生成。

特别地, 将 $H_{*+1}(X_1^{q+2}{}_{,q}, \mathbb{Z})$ 视为

$$H_*(S^0, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^{q-1}, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^0, \mathbb{Z})$$

作为 a $\mathbb{Z}$-模由以下元素生成:

$$(b_0 - b'_0) \otimes 1 \otimes (b_0 - b'_0), b_0 \otimes b_{q-1} \otimes (b_0 - b'_0) \text{ and } b'_0 \otimes b_{q-1} \otimes (b_0 - b'_0).$$

由此可得:

命题 2.19。 1) $X_1^{q+2}{}_{,q}$ 的整数同调为:

$$H_i(X_{1,q}^{q+2}, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & if\ i = q \\ \mathbb{Z} & if\ i = 0, 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2) $X_1^{q+2}{}_{,q}$ 的有理同调为:

$$H_i(X_{1,q}^{q+2}, \mathbb{Q}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}^2 & if\ i = q \\ \mathbb{Q} & if\ i = 0, 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

我们将 a_i 称为 S^i的对径映射。

引理 2.20。 1)

$$(a_0)_* \otimes (a_{q-1})_* \otimes (a_0)_*((b_0 - b'_0) \otimes 1 \otimes (b_0 - b'_0)) = (b_0 - b'_0) \otimes 1 \otimes (b_0 - b'_0).$$

2)

$$(a_0)_* \otimes (a_{q-1})_* \otimes (a_0)_*(b_0 \otimes b_{q-1} \otimes (b_0 - b'_0)) = (-1)^{q+1} b'_0 \otimes b_{q-1} \otimes (b_0 - b'_0).$$

3)

$$(a_0)_* \otimes (a_{q-1})_* \otimes (a_0)_*(b'_0 \otimes b_{q-1} \otimes (b_0 - b'_0)) = (-1)^{q+1} b_0 \otimes b_{q-1} \otimes (b_0 - b'_0).$$

证明。 我们利用以下事实: 对于 $k > 1$, a_k 的度为 $(-1)^{k+1}$, $a_k(1) = 1$, $a_0(b_0) = b'_0$ 和$a_0(b'_0) = b_0$。 □

定理2.21。 $H_0(Q_1^{q+2}{}_{,q}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $H_1(Q_1^{q+2}{}_{,q}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $H_q(Q_1^{q+2}{}_{,q}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ 和 $H_i(Q_1^{q+2}{}_{,q}, \mathbb{Q}) = 0$ 否则。

证明。 我们采用与定理 2.9 的证明相同的推理, 并使用前一个引理求出这些不变量。□

2.2.5. 情形 $p = q = 1$ 和 $n - p - q > 1$。由于 $X^n_{1,1}$ 同胚于连接 $(S^0 \times S^0) \star S^{n-3}$, $H_0(X^n_{1,1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$。对于所有 i, j，我们有 $Tor(H_i(S^0 \times S^0, \mathbb{Z}) \ H_j(S^{n-3}, \mathbb{Z})) = 0$。因此，根据定理 1.2：

$$H_{*+1}(X^n_{1,1}, \mathbb{Z}) \simeq Ker(i_{S^0 \times S^0}) \otimes Ker(i_{S^{n-3}}),$$

其中， i_Z 是由空间 Z 到锥 C_Z 的包含映射所诱导的映射，而该锥是一个可缩空间。对于 $i > 0$，记 1 为 $H_0(S^i, \mathbb{Z})$的一个生成元，记 b_i 为$H_i(S^i, \mathbb{Z})$的一个生成元，并记 b_0 和 b'_0 为 $H_*(S^0, \mathbb{Z}) = H_0(S^0, \mathbb{Z})$的两个生成元，使得$b_0$ 和 b'_0 分别对应两个单形。利用 Künneth 同构 $H_*(S^0 \times S^0, \mathbb{Z}) \simeq H_*(S^0, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^0, \mathbb{Z})$，可得：

1) $H_*(S^0 \times S^0, \mathbb{Z})$由 $c_1 = b_0 \otimes b_0, c_2 = b_0 \otimes b'_0, c_3 = b'_0 \otimes b_0$ 和 $c_4 = b'_0 \otimes b'_0$生成。1) $Ker(i_{S^0 \times S^0})$作为一个 $\mathbb{Z}$-模由 $c_1 - c_2, c_2 - c_3$ 和 $c_3 - c_4$生成。2) $Ker(i_{S^{n-3}})$作为一个 $\mathbb{Z}$-模由 b_{n-3}生成。

特别地，将 $H_{*+1}(X^n_{1,1}, \mathbb{Z})$ 视为

$$H_*(S^0, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^0, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^{n-3}, \mathbb{Z})$$

由下列元素生成的 $\mathbb{Z}$-模：

$$(c_1 - c_2) \otimes b_{n-3}, (c_2 - c_3) \otimes b_{n-3} \text{ and } (c_3 - c_4) \otimes b_{n-3}.$$

由此可得：

命题 2.22. 1) $X^n_{1,1}$ 的整数同调如下：

$$H_i(X^n_{1,1}, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^3 & if\ i = n-2 \\ \mathbb{Z} & if\ i = 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2) $X^n_{1,1}$ 的有理同调如下：

$$H_i(X^n_{1,1}, \mathbb{Q}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}^3 & if\ i = n-2 \\ \mathbb{Q} & if\ i = 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

我们将 S^i 的对径映射记为 a_i。

引理 2.23。 1)

$$(a_0)_* \otimes (a_0)_* \otimes (a_{n-3})_*((c_1 - c_2) \otimes b_{n-3}) = (-1)^{n-1}(c_3 - c_4) \otimes b_{n-3}.$$

2)

$$(a_0)_* \otimes (a_0)_* \otimes (a_{n-3})_*((c_2 - c_3) \otimes b_{n-3}) = (-1)^{n-1}(c_2 - c_3) \otimes b_{n-3}.$$

3)

$$(a_0)_* \otimes (a_0)_* \otimes (a_{n-3})_*((c_3 - c_4) \otimes b_{n-3}) = (-1)^{n-1}(c_1 - c_2) \otimes b_{n-3}.$$

证明。我们利用以下事实：对于 $k > 1$， a_k 的度为 $(-1)^{k+1}$, $a_k(1) = 1$, $a_0(b_0) = b'_0$ 以及$a_0(b'_0) = b_0$。□

定理 2.24。 $H_0(Q^n_{1,\ 1}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $H_{n-2}(Q^n_{1,\ 1}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^2$ 若 $n-1$ 为偶数， $H_{n-2}(Q^n_{1,\ 1}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$若 $n-1$ 为奇数，且 $H_i(Q^n_{1,\ 1}, \mathbb{Q}) = 0$ 否则。

证明。我们采用与定理 2.9 的证明相同的推理，并使用前一个引理求出不变量。□

2.2.6. 情形 $p = q = 1$ 和 $n - p - q = 1$。由于 $X^3_{1,1}$ 与连接 $(S^0 \times S^0) \star S^0$，$H_0(X^3_{1,1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$同胚。我们有 $Tor(H_i(S^0 \times S^0, \mathbb{Z}), H_j(S^0, \mathbb{Z})) = 0$ 对所有i, j都成立。因此，根据定理 1.2：

$$H_{*+1}(X^3_{1,1}, \mathbb{Z}) \simeq Ker(i_{S^0 \times S^0}) \otimes Ker(i_{S^0}),$$

其中，i_Z 是由空间 Z 包含映射到锥 C_Z 所诱导的映射，而 C_Z 是一个可缩空间。记 b_0 和 b'_0 为 $H_*(S^0, \mathbb{Z}) = H_0(S^0, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$ 的两个生成元，使得 b_0和 b'_0对应于两个单形。利用 Künneth 同构 $H_*(S^0 \times S^0, \mathbb{Z}) \simeq H_*(S^0, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^0, \mathbb{Z})$, 我们有：

1) $H_*(S^0 \times S^0, \mathbb{Z})$ 由 $c_1 = b_0 \otimes b_0, c_2 = b_0 \otimes b'_0, c_3 = b'_0 \otimes b_0$和 $c_4 = b'_0 \otimes b'_0$生成。1) $Ker(i_{S^0 \times S^0})$ 作为一个 $\mathbb{Z}$-模由 $c_1 - c_2, c_2 - c_3$ 和 $c_3 - c_4$生成。2) $Ker(i_{S^0})$ 作为一个 $\mathbb{Z}$-模由 $b_0 - b'_0$生成。

特别地，$H_{*+1}(X^n_{1,\ 1},\ \mathbb{Z})$ 视为

$$H_*(S^0, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^0, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^{n-3}, \mathbb{Z})$$

由以下元素生成的 $\mathbb{Z}$-模：

$$(c_1 - c_2) \otimes (b_0 - b'_0), (c_2 - c_3) \otimes (b_0 - b'_0) \text{ and } (c_3 - c_4) \otimes (b_0 - b'_0).$$

由此可得：

命题 2.25。 1）$X^3_{1,\ 1}$ 的整数同调如下：

$$H_i(X^3_{1,1}, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^3 & if\ i = 1 \\ \mathbb{Z} & if\ i = 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2）$X^3_{1,\ 1}$ 的有理同调如下：

$$H_i(X^3_{1,1}, \mathbb{Q}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}^3 & if\ i = 1 \\ \mathbb{Q} & if\ i = 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

我们将 S^i 的对径映射记作 a_i。

引理 2.26。 1)

$$(a_0)_* \otimes (a_0)_* \otimes (a_0)_*((c_1 - c_2) \otimes (b_0 - b'_0)) = (c_3 - c_4) \otimes (b_0 - b'_0).$$

2)

$$(a_0)_* \otimes (a_0)_* \otimes (a_0)_*((c_2 - c_3) \otimes (b_0 - b'_0)) = (c_2 - c_3) \otimes (b_0 - b'_0).$$

3)

$$(a_0)_* \otimes (a_0)_* \otimes (a_0)_*((c_3 - c_4) \otimes (b_0 - b'_0)) = (c_1 - c_2) \otimes (b_0 - b'_0).$$

证明。我们利用 $a_0(b_0) = b'_0$ 和 $a_0(b'_0) = b_0$。 □

定理 2.27. $H_0(Q^3_{1,1}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $H_1(Q^3_{1,1}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^2$ 以及 $H_i(Q^3_{1,1}, \mathbb{Q}) = 0$，否则 .

证明。我们采用与定理 2.9 的证明中相同的推理，并使用前一个引理来求出不变量。□

3. 关于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上退化二次曲面的同调

与上一节一样，对于 p，$q \geq 1$ 和 $n \geq p+q$，$Q^n_{p,\,q}$ 是二次型 $\mathbf{q}$：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$(x_1, \ldots\ldots, x_n) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$ 在 $\mathbb{RP}^{n-1}$ 中的实点集。

本节中，我们计算 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-同调群$Q^n_{p,\,q}$。

二次曲面 $Q^n_{p,\,q}$ 和 $Q^n_{q,\,p}$ 同胚。因此，我们将假设 $q \geq p$。注意，如果 p 或 q 为零，则 $Q^{p+q}_{p\,q,}$ 为空。

定理 3.1. [ST41] 对于 $q \geq p > 0$，$Q^{p+q}_{p\,q,}$ 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$系数同调同构于 $H_*(S^{q-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes H_*(\mathbb{RP}^{p-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

证明. 正如 Steenrod 和 Tucker 所证明的，通过投影前 p 个坐标得到的从 $Q^{p+q}_{p\,q}$ 到 $\mathbb{RP}^{p-1}$ 的投影是一个纤维为 S^{q-1}的球面丛。因此，我们有纤维化 $S^{q-1} \to Q^{p+q}_{p}$, $_{q} \to \mathbb{RP}^{p-1}$。如果 $p = q = 1$，则定理结论成立，因为 $Q_{p,q}$可缩减为两点。对于 $q \neq 1$, 分次空间$H_*(S^{q-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$的唯一分次自同构是恒等映射，因此 $\pi_1(\mathbb{RP}^{p-1})$ 在纤维的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-同调上平凡作用，并且我们得到该纤维化的一个系数取自 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的谱序列，其第二页为 $H_*(\mathbb{RP}^{p-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes H_*(S^{q-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。现在，由于 $q-1 \geq p-1$，该谱序列在第二页退化，因此我们得到 $H_*(Q^{p+q}_{p\,q}, , \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq H_*(S^{q-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes H_*(\mathbb{RP}^{p-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。□

目前我们假设 $n > p+q$。对于 $k \leq m$，令 U^m_k表示开图

$$\{[x_1 : \cdots : x_{k-1} : 1 : x_{k+1} : \cdots x_m] \in \mathbb{RP}^{m-1}\}$$

$\mathbb{RP}^{m-1}$，并令 D 表示 $\mathbb{RP}^{n-1}$ 的闭子集:

$$D = \{[0 : \cdots : 0 : x_{p+q+1} : \cdots : x_n] \in \mathbb{RP}^{n-1}\}.$$

D 与 $\mathbb{RP}^{n-p-q-1}$ 同胚，并且包含于 $Q^n_{p,\,q}$中。注意，如果 p 或 q 为零，则$Q^n_{p,\,q}$ 与 D同胚。因此，在下文中我们假设 p，$q \geq 1$。我们有定义良好的映射 π：$\mathbb{RP}^{n-1} \setminus D \to \mathbb{RP}^{p+q-1}$，其定义为:

$$\pi([x_1 : \cdots x_n]) = [x_1 : \cdots : x_{p+q}]$$

命题 3.2。设 f：$X \to Y$ 是拓扑空间之间的映射，且 $(U_i)_{i\in I}$ 是 X的开覆盖。如果 f 到开集 U_i 的限制 $f_{|U_i}$ 对所有 $i \in I$都是连续的，那么 f 是连续的。

证明。设 V是 Y的一个开集，$f^{-1}(V) = \cup_{i\in I} f^{-1}_{|U_i}(V)$。如果 $f_{|U_i}$是连续的，那么 $f^{-1}_{|U_i}(V)$ 在 U_i 中是开集，因而在 X 中也是开集，因为 U_i 是开集。这证明了，在命题的假设下，开集的原像是开集的并集，因此 f 是连续的。□

推论 3.3. 映射 $\pi : \mathbb{RP}^{n-1} \setminus D \to \mathbb{RP}^{p+q-1}$ 是连续的。

证明。族 $(U^n_k)_{k\leq p+q}$是 $\mathbb{RP}^{n-1} \setminus D$ 的一个开覆盖。映射 $f_{|U^n_k}$将 U^n_k映到U^{p+q}_k，且是两个坐标图之间的“多项式”映射。因此，$f_{|U^n_k}$ 是连续的，推论由命题得出。□

命题 3.4. 映射 $\pi : \mathbb{RP}^{n-1} \setminus D \to \mathbb{RP}^{p+q-1}$ 定义了一个秩为$n-p-q$的实向量丛。

证明。 π是一个连续满射。现在取坐标为 $[x_1 : \cdots : x_{p+q}]$的 $x \in \mathbb{RP}^{p+q-1}$。对于 π， x 上的纤维是集合:

$$F_x = \{[x_1 : \cdots : x_{p+q} : \lambda_1 : \cdots : \lambda_{n-p-q}] \in \mathbb{RP}^n | (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-p-q}) \in \mathbb{R}^{n-p-q}\}.$$

由 $F_x \to \mathbb{R}^{n-p-q}$ 给出的映射:

$$[x_1 : \cdots : x_{p+q} : \lambda_1 : \cdots : \lambda_{n-p-q}] \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-p-q})$$

是良定义的双射，因此我们可以将 $\mathbb{R}^{n-p-q}$ 的向量空间结构传递到 F_x 上。所得结构不依赖于 x 的坐标。我们已经证明，映射 π 的纤维具有实 $n-p-q$ 维向量空间的结构。点 $x \in \mathbb{RP}^{p+q-1}$ 属于某个 U_k^{p+q}，且 $\pi^{-1}(U_k^{p+q}) = U_k^n$。我们有一个自然的同构$\phi_k$: $U_k^{p+q} \times R^{n-p+q} \to U_k^n$（观察坐标）。对于所有$x \in U_k^{p+q}$和所有 $v \in \mathbb{R}^{n-p-q}$，有 $(\pi \circ \phi_k)(x, v) = x$。另一方面，对于 $x \in U_k^{p+q}$，映射 $v \mapsto \phi_k(x, v)$ 是 $\mathbb{R}^{n-p-q}$ 与 F_x 之间的向量空间同构。这就证明了该引理。□

我们已经注意到 $D \subset Q^n_{p,\,q}$。可以直接验证，$Q^n_{p,\,q} \setminus D$ 在 π下的像为 $Q^{p+q}_{p\,q,}$。因此得到以下推论:

推论 3.5。 映射 $Q^n_{p,\,q} \setminus D \xrightarrow{\pi} Q^{p+q}_{p\,q,}$ 定义了一个秩为 $n-p-q$ 的实向量丛。

命题 3.6。 与 $Q^n_{p,\,q} \setminus D \xrightarrow{\pi} Q^{p+q}_{p\,q,}$ 相关联的托姆空间 $T(Q^n_{p,\,q} \setminus D)$ 与商空间$Q^n_{p,\,q}/D$同胚。

证明。 两个空间 $T(Q^n_{p,\,q} \setminus D)$ 和 $Q^n_{p,\,q}/D$ 都是 $Q^n_{p,\,q} \setminus D$ 的单点紧化。因此它们同胚。□

命题 3.7。 对于 $k > n-p-q$, $\tilde{H}_k(Q^n_{p,\,q}/D, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, 其中 H 表示约化同调，与 $H_{k-n+p+q}(Q^{p+q}_{p\,q,}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$同构

证明。 根据托姆同构定理，我们有一个同构

$$H^{k-n+p+q}(Q^{p+q}_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \tilde{H}^k(T(Q^n_{p,q} \setminus D), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

对于 $k \geq n-p-q$。由于我们是在一个域上进行讨论，因此同调群之间也有一个同构

$$H_{k-n+p+q}(Q^{p+q}_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \tilde{H}_k(T(Q^n_{p,q} \setminus D), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

对于 $k \geq n-p-q$。最后，空间 $T(Q^n_{p,\,q} \setminus D)$ 和 $Q^n_{p,\,q}/D$ 同胚，故命题得证。□

命题 3.8。 D 是其在 $Q^n_{p,\,q}$ 中某个邻域的变形收缩。

证明。 我们定义 $\mathbb{RP}^{n-1}$ 的闭子集 D'：

$$D' = \{[x_1 : \cdots : x_{p+q} : 0 : \cdots : 0] \in \mathbb{RP}^{n-1}\}.$$

记 U 为 $\mathbb{RP}^{n-1}$中 D' 的补集。U 是开集，并由坐标图 $(U_k^n)_{k>p+q}$ 覆盖。现在定义映射 f: $U \times [0,1] \to U$，如下:

$$f([x_1 : \cdots : x_n], t) = [(1-t)x_1 : \cdots : (1-t)x_{p+q} : x_{p+q+1} : \cdots : x_n].$$

映射 f 定义良好且连续，因为可以验证限制 $f_{|U_k^n}$ f到U_k^n是连续的（ $k > p+q$（我们应用命题 3.2）。映射 f是从 U到 D的变形收缩。此外， f $(U \cap Q^n_{p,\,q} \times [0,1])$ 包含于 $U \cap Q^n_{p,\,q}$。因此，

f 限制为从 $U \cap Q^n_{p,\ q}$ 到 $D \subset U \cap Q^n_{p,\ q}$的变形收缩。这证明了该命题，因为 $U \cap Q^n_{p,\ q}$ 是 $Q^n_{p,\ q}$ 中 D 的一个开邻域。□

推论 3.9. 对于 $k \geq 0$, $H_k(Q_{p,q}, D, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 同构于 $H_k(Q^n_{p,q}/D, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，其中 H表示约化同调。

定理 3.10. 对于 $l > 0$, $H_{n-p-q+l}(Q^n_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 同构于 $H_l(Q^{p+q}_{p\ q},; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

证明。由于 D 与 $\mathbb{RP}^{n-p-q-1}$, $H_k(D, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ 对于 $k \geq n-p-q$同胚。因此，对 $(Q^n_{p,q}, D)$ 的正合序列表明，对于 $k > n-p-q$, $H_k(Q^n_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 同构于 $H_k(Q^n_{p,q}, D, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。根据前一个推论， $H_k(Q^n_{p,q}, D, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq H_k(Q^n_{p,q}/D, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。因此对于 $k > n-p-q$，我们有 $H_k(Q^n_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq H_k(Q^n_{p,q}/D, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。应用命题 3.7，可得对于 $k > n-p-q$, $H_k(Q^n_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq H_{k-n+p+q}(Q^{p+q}_{p\ q}, , \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。令 $k = n-p-q+l$ 即得命题。□

结合上一个定理与 Steenrod 和 Tucker 的结果（定理 3.1），我们得到

推论 3.11. 对于 $q > p > 0$、 $n > p+q$ 和 $k > n-p-q$，我们有：

$$H_k(Q^n_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & if\ n-p-q+1 \leq k \leq n-q-1\ and\ n-p-1 \leq k \leq n-2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

对于 $q = p > 2$ 的情形：

推论 3.12. 对于 $p > 2$、 $n > 2p$ 和 $k > n-2p$，我们有：

$$H_k(Q^n_{p,p}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & if\ n-2p+1 \leq k \leq n-p-2\ and\ n-p \leq k \leq n-2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2 & if\ k = n-p-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

对于 $q = p = 2$ 的情形：

推论 3.13. 对于 $p = 2$、 $n > 2p$ 和 $k > n-4$，我们有：

$$H_k(Q^n_{2,2}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & if\ k = n-2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2 & if\ k = n-3 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

对于情形 $p = q = 1$：

推论 3.14。 对于 $k > n-2$, $H_k(Q^n_{1,\ 1},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$

我们已得到 $Q^n_{p,\ q}(n > p+q)$ 在度 $k \geq n-p-q+1$ 下的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-同调群。现在我们将使用覆盖正合序列计算其余的同调群：

$$\cdots \to H_k(Q^n_{p,\ q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_k(X^n_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_k(Q^n_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_{k-1}(Q^n_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \cdots$$

其中， $H_k(X^n_{p,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_k(Q^n_{p,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是由覆盖映射诱导的态射，而$H_k(Q^n_{p,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_k(X^n_{p,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是转移态射。态射 $H_0(X^n_{p,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_0(Q^n_{p,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ 是一个同构（$X^n_{p,\ q}$ 是道路连通的，且覆盖映射是满射），因此上述序列可以缩短为

$$\cdots \to H_1(X^n_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_1(Q^n_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_0(Q^n_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0.$$

在上一节中，我们计算了$X^{n}_{p,\ q}$ 的整数同调，它是一个自由$\mathbb{Z}$-模，因此群 $H_k(X^{n}_{p,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 同构于 $H_k(X^{n}_{p,\ q},\ \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。因此，我们可以利用上一节的结果补全覆盖正合序列。有人可能会想，仅凭该序列是否足以计算$Q^{n}_{p,\ q}$的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$同调群。遗憾的是，对于 $q \neq p$ ，仅凭该序列进行代数计算会导致其 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$同调存在两种可能。计算 $k > n-p-q-1$的群 $H_k(Q^{n}_{p,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 有助于解决这个问题。

3.0.1. 情形 $p,\ q > 1$。我们假设 $p,\ q > 1$。

引理 3.15. 对于 $p, q > 1\ (n > p+q)$ 以及 $i \leq n-p-q$ ，群 $H_i(Q^{n}_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

证明。由第 2.2.1 和 2.2.2 小节中针对 $p, q > 1$ 计算 $X^{n}_{p,\ q}$ 的整数同调可知，$H_i(X^{n}_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ 对于 $0 < i < n-q-1$ 成立。因此，（缩短后的）覆盖正合序列给出如下正合列:

$$0 \to H_i(Q^{n}_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_{i-1}(Q^{n}_{p,q}) \to 0,$$

对于 $p > q$ 和 $1 \leq i \leq n-q-2$。由于我们假设 $p > 1, n-p-q \leq n-q-2$ ，并且对于 $i \leq n-p-q$, $H_i(Q^{n}_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq H_0(Q^{n}_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。我们已经证明了该引理。□

我们可以 现在给出所有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同调群：$Q^{n}_{p,\ q}$，对于 $q \geq p > 1\ (n > p+q$).

定理 3.16。对于 $q > p > 1$ 和 $n > p+q$，我们有:

$$H_k(Q^{n}_{p,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & if\ 0 \leq k \leq n-q-1\ and\ n-p-1 \leq k \leq n-2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

证明。这是结合推论 3.11 和前一个引理得到的。 □

对于 $q = p$ 的情形:

定理 3.17。对于 $p > 1$ 和 $n > 2p$ ，我们有:

$$H_k(Q^{n}_{p,p}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & if\ 0 \leq k \leq n-p-2\ and\ n-p \leq k \leq n-2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2 & if\ k = n-p-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

证明。我们将推论 3.12 和 3.13 与前一个引理结合起来。 □

3.0.2. 情形 $q > p = 1$。我们假设 $q > p$ 和 $p = 1$。根据第 2.2.3 小节和 2.2.4 中的计算，可得:

$$H_i(X^{n}_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2 & \text{if } i = n-2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{if } i = 0, n-q-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

引理 3.18。群 $H_k(Q^{n}_{1,\ q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同构，其中 $0 \leq k \leq n-q-2$。

证明。这是真的 $n = q+2$。对于 $n > q+2$，我们有 $H_i(X^{n}_{1,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$，对于 $0 < i < n-q-1$, 因此根据覆盖 $H_k(Q^{n}_{1,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的缩短正合列，$\simeq H_{k-1}(Q^{n}_{1,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 对于$1 \leq k \leq n-q-2$成立。由于 $H_0(Q^{n}_{1,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，引理得证。□

引理 3.19. $H_{n-q-1}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

证明。 我们先考虑 $q \neq 2$ 的情形。在这种情况下，根据推论 3.11 $H_{n-q}(Q^n_{1,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2) = 0$, 通过使用前一个引理和 $X^n_{1,\ q}$ 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同调填充覆盖正合序列，我们得到以下正合列:

$$0 \to H_{n-q-1}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to H_{n-q-1}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$

左边的前两个态射表明 $dim(H_{n-q-1}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \leq 1$。右边的后两个态射证明 $dim(H_{n-q-1}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \geq 1$。因此， $H_{n-q-1}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

现在考虑情形 $q = 2$ $(n - q - 1 = n - 3)$。利用 $X^n_{1,q}$ 的同调和前一个引理，我们得到以下正合列（由覆盖正合序列得到）：

$$\begin{aligned} H_{n-1}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_{n-2}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2 \to H_{n-2}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ \to H_{n-3}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to H_{n-3}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0. \end{aligned}$$

由推论 3.11 可知， $H_{n-1}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ 且 $H_{n-2}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。因此我们有一个正合列:

$$\begin{aligned} 0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to & H_{n-3}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \\ & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to H_{n-3}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0. \end{aligned}$$

考察左侧的前 3 个态射，我们注意到有如下正合列:

$$0 \to H_{n-3}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to H_{n-3}(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$

由该正合列，并如 $q \neq 2$ 的情形一样，我们推得 $H_{n-3}(Q^n_{1,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H_{n-q-1}(Q^n_{1,\ q},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。引理得证。□

定理 3.20。对于 $q > 1$ 和 $n > 1 + q$ $(p = 1)$,

$$H_k(Q^n_{1,q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & if\ 0 \leq k \leq n - q - 1\ and\ k = n - 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

证明。定理的结论可由最后两个引理与推论 3.1 结合得到 1. □

3.0.3. 情形 $p = q = 1$。 我们假设 $p = q = 1$。由小节 2.2.5 和 2.2.6 中的计算可得:

$$H_i(X^n_{1,1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^3 & \text{if } i = n - 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{if } i = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

引理 3.21. 对于 $n \geq 3$ 和 $k \leq n - 3$, $H_k(Q^n_{1,1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

证明。 对于 $n = 3$, 此结论成立。对于 $n > 3$, 利用（缩短的）覆盖正合序列以及如下事实：正如我们上文所见， $H_k(X^n_{1,1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ 对于 $0 < k < n - 2$ 成立。□

引理 3.22. 对于 $n \geq 3$, 群 $H_{n-2}(Q^n_{1,\ 1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2$

证明. 利用（缩短后的）覆盖正合序列，以及在情形 $n>3$ 下 $H_{n-3}(X^n_{1,\ 1},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=0$，根据前一个引理，$H_{n-2}(X^n_{1,\ 1},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^3$，且 $H_{n-3}(Q^n_{1,\ 1},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，我们得到正合列：

$$H_{n-1}(Q^n_{1,1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to H_{n-2}(Q^n_{1,1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^3\to H_{n-2}(Q^n_{1,1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to 0.$$

根据推论 3.14 $H_{n-1}(Q^n_{1,\ 1},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=0$，因此我们有：

$$0\to H_{n-2}(Q^n_{1,1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^3\to H_{n-2}(Q^n_{1,1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to 0.$$

这意味着：

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^3&\simeq H_{n-2}(Q^n_{1,1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus Im(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^3\to H_{n-2}(Q^n_{1,1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))\\&\simeq H_{n-2}(Q^n_{1,1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\oplus Ker(H_{n-2}(Q^n_{1,1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

因此：

$$3=2dim(H_{n-2}(Q^n_{1,1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))-1$$

其中，维数是作为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 向量空间的维数。因此

$$dim(H_{n-2}(Q^n_{1,1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))=2.$$

□

定理 3.23. 对于 $n>3$：

$$H_k(Q^n_{1,1},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=\begin{cases}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2 & if\ k=n-2\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & if\ 0\le k\le n-3\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

证明。 该定理由推论 3.14 和最后两个引理得出。 □

4. Integer homology of degenerate quadrics

在本节中，我们证明，$Q^n_{p,q}$ 的整数同调由 $Q^n_{p,q}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上以及在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的贝蒂数决定，这些贝蒂数已在前两节中求得。我们计算了在 $q>p>1, n>p+q+1$ 且 p,q和 n 均为偶数的情形下，$Q^n_{p,q}$ 的整数同调。其他情形也可以计算；为避免更多计算，我们不予考虑。

~ ~**命题 4.1**。设 X 是 X的一个非平凡二重覆盖。若 $H_*(X,\mathbb{Z})$ 是有限秩自由$\mathbb{Z}$-模，且 $H_*(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 维数有限，则：

1） $H_k(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^{m_k}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{l_k}$，其中 l_k和 m_k是正整数。2）对于 $k\ge 0$：

$$m_k=b_k(X,\mathbb{Q}),\quad l_0=0,\quad l_{k+1}=b_{k+1}(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})-b_{k+1}(X,\mathbb{Q})-l_k,$$

其中，$b_k(X,\mathbb{Q})$是 X在有理数域上的第 k个贝蒂数，而 $b_k(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$是 X 在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$上的第 k个贝蒂数

3) X 的整数同调由其有理同调和 X的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同调决定。

˜证明。令 T_* 为转移态射 $H_k(X,\mathbb{Z}) \to H_n(X,\mathbb{Z})$，并用 π 表示覆盖映射˜ $X \to X$。态射 $\pi_* T_*$ 对应于乘以 2。因此， $Ker(T_*)$˜是 $H_k(X,\mathbb{Z})$的 2-挠子群 G_2 的子群。由于 $H_*(X,\mathbb{Z})$是有限秩自由群， $Im(T_*) \simeq H_*(X,\mathbb{Z})/Ker(T_*)$是有限秩自由群，且 $Ker(T_*) = G_2$。此外， $H_*(X,\mathbb{Z}) \simeq Im(T_*) \oplus G_2 \simeq \mathbb{Z}^{m_k} \oplus G_2$，其中 m_k为某个正整数。由泛系数定理可知， $H_*(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$给出 $H_*(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{m_k} \oplus G_2$维数的上界。由于我们假设 $H_*(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$是有限维的，因此有$G_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{l_k}$ ，其中 l_k为某个正整数。我们已证明 1)。2)是泛系数定理的应用。3)由 2) 和 1) 得出。□

该命题适用于覆盖 $X^n_{p,\,q} \to Q^n_{p,\,q}$。这表明，前几节中对 $Q^n_{p,\,q}$ 的有理同调和 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同调所作的计算，决定了 X的整数同调。对于$Q^n_{p,\,q}$的情形，我们可以根据有理数域上的贝蒂数和 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，轻易地计算出 $Q^n_{p,\,q}$ 的整数同调。我们将计算一般情形下的整数同调。

我们假设 $q > p > 1$, $n > p+q+1$，并且 $p,\ q,\ n$ 为偶数。根据定理 2.9：

$$b_k(X,\mathbb{Q}) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0, n-q-1, n-p-1, n-2 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

根据定理 3.16

$$b_k(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le k \le n-q-1 \text{ and } n-p-1 \le k \le n-2 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

定理 4.2。对于 $q > p > 1$, $n > p+q+1$ 以及 p, q, n 为偶数：

1） H_k（$X,\mathbb{Z}$） $= \mathbb{Z}$ 对于 $k = 0, n-q-1, n-p-1,$ $n-2$2） 对于 $0 < k < n-q-1$,

$$H_k(X,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & if\ k\ is\ odd \\ 0 & if\ k\ is\ even \end{cases}.$$

3）对于 $n-q-1 < k < n-p-1$、 H_k（X、$\mathbb{Z}$） $= 0$。

4) 对于 $n-p-1 < k < n-2$,

$$H_k(X,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & if\ k\ is\ even \\ 0 & if\ k\ is\ odd \end{cases}.$$

5）对于 $k > n-2$、 H_k（X、$\mathbb{Z}$） $= 0$。

证明。我们将使用前一个命题。我们证明 1)。对于 $k = 0, n-q-1, n-p-1, n-2, b_k(X,\mathbb{Q}) = b_k(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 1$。因此， $m_k = 1$ 且 $l_k = -l_{k-1}$，对于 $k > 0$ 和 $l_0 = 0$。由于$l_k \ge 0$，我们有 $l_k = 0$。这证明了，对于 $k = 0, n-q-1, n-p-1, n-2,$ $H_k(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$。我们证明 2)。对于前面提到的 k， $b_k(X,\mathbb{Q}) = 0$ 且 $b_k(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 1$。因此， $m_k = 0$ 且$l_k = 1 - l_{k-1}$，其中 $l_0 = 0$。第 2) 点得证。

我们证明 3）。对于前述 b_k（X， $\mathbb{Q}$） $= b_k$（X， $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$） $= 0$，因此 $m_k = 0$ 且 $l_k =$–l_{k-1}。由于 $l_k \ge 0$， $l_k = 0$ 且 H_k（X， $\mathbb{Z}$） $= 0$。
我们按照证明 2) 的方法证明 4)，但使用 $l_{n-p-1} = 0$ （由 1) 得出）。证明 5) 的方法与证明 3) 的方法相同。 □

在其他情况下，$Q^n_{p,\ q}$ 整数同调可以使用相同的方法轻松确定。

参考文献

[ST41] N. E. Steenrod 和 A. W. Tucker，作为球面丛的实 n-二次曲面。《美国数学会通报》，第 47 卷，(1941) 第 5 期，第 397-402 页（论文摘要：拓扑学，见第 399 页）。[M91] W. S. Massey，《代数拓扑基础教程》。《数学研究生教材》，施普林格，纽约，1991 年。[S94] E. H. Spanier，《代数拓扑》。施普林格出版社，纽约，1994 年。（1966 年原版的修订重印本）。[H93] D. Husemoller，《纤维丛》。《数学研究生教材》，施普林格，纽约，1993 年（第三版）。