arXiv:2601.06556v1 [math.DG] 10 Jan 2026

爱因斯坦流形上第二类曲率算子的锥条件

HAIQING CHENG 和 KUI WANG

摘要。本文研究曲率算子°第二类 R 满足锥条件的爱因斯坦流形

$$\alpha^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{[\alpha]}\lambda_i+(\alpha-[\alpha])\lambda_{[\alpha]+1}\Big)\geq-\theta\bar{\lambda}$$

对于某个实数 $\alpha\in[1,(n+2)(n-1)/2)$。这里 $[\alpha]:=\max\{m\in\mathbb{Z}:m\leq\alpha\}$, $\theta>-1$ 和 $\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_{(n+2)(n-1)/2}$ 是 $\mathring{R}$ 的特征值，而 $\bar{\lambda}$ 是它们的平均值。主要结果表明，任何维数为 $n\geq4$ 且满足 $\mathring{R}$ 锥条件的闭爱因斯坦流形都是平坦的或圆球面。这些结果推广了作者 $\alpha\in\mathbb{Z}_+$ 以及 Fu-Lu [8]近期的相关工作[5, 6] 。

1. 引言与主要结果

在黎曼几何中，关于曲率条件下球面定理的研究一直是一个核心主题。1986 年，Nishikawa [18] 猜想，具有正（分别为非负）第二类曲率算子°的闭黎曼流形，记作 R （见第 2.1 节），应当与球面空间形式（分别为黎曼局部对称空间）微分同胚。近年来，这一猜想已得到解决并获得了极大拓展，从而形成了一个系统框架°，用于根据 R 上的各种条件对流形进行分类。相关工作还可参见 [3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]。

对于黎曼流形，Nishikawa 的猜想中的正曲率情形由 Cao、Gursky 和 Tran [3], 解决，他们证明了具有二正第二类曲率算子的流形与球面空间形式微分同胚。随后不久，Li[13]将假设弱化为 3-正，并对具有 3-非负第二类曲率算子的闭流形进行了分类。之后，Nienhaus、Petersen 和 Wink [16] 推导出了第二类曲率算子的 Bochner 公式，并证明 $\frac{n+2}{2}$ -非负性意味着该流形要么是平坦的，要么是有理同调球面。

对于爱因斯坦流形，Kashiwada [9] 证明了，具有正第二类曲率算子的闭爱因斯坦流形必为球面。Cao-Gursky-Tran[3] 证明了，对于爱因斯坦流形，四正（分别为四非负）

2020 数学主题分类。53C20,53C24,53C25.关键词和短语。爱因斯坦流形、第二类曲率算子、球面定理。

第二类曲率算子蕴含常截面曲率（分别为局部对称性）。Li [10] 将此推广到了 $4\frac{1}{2}$-正（分别为 $4\frac{1}{2}$-非负）第二类曲率算子。通过建立关于第二类曲率的 Bochner 公式，Nienhaus-Petersen-Wink [16] 证明了，任何具有 ℓ-非负（$\ell < \frac{3n}{(n+2)(n+4)}$）第二类曲率算子的 n维紧致爱因斯坦流形，不是平坦的，就是一个有理同调球面。最近，Dai 和 Fu [7] 运用 Bochner 技巧证明，具有非负第二类曲率算子的 $n \geq 4$ 维闭爱因斯坦流形是常曲率空间；更确切地说，他们证明：当 $n = 4$ 或 $8 \leq n \leq 10$时，只需假设曲率算子是 2-非负的；当 $n = 5$时，只需假设其为 3-非负的；而当 $n \geq 11$时，只需假设其为 $[\frac{n+2}{4}]$-非负的。

近期，Li [15] 引入了第二类曲率算子的一个锥条件。设 (M^n, g) 为黎曼流形，并记 $\mathring{R}: S_0^2(TM) \to S_0^2(TM)$ 为其第二类曲率算子。设 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_N$为 $\mathring{R}$ 的特征值，$\bar{\lambda} = \frac{1}{N}\operatorname{tr}(\mathring{R})$ 为它们的平均值，其中 $N = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$。对于参数 $\alpha \in [1, N)$ 和 $\theta > -1$，若下列不等式成立，则称 R属于锥 $\mathcal{C}(\alpha, \theta)$:

$$\alpha^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{[\alpha]} \lambda_i + (\alpha - [\alpha])\lambda_{[\alpha]+1}\Big) \geq -\theta\bar{\lambda}, \tag{1.1}$$

其中，$[\alpha]$ 表示小于或等于 α的最大整数。

特别地，当 $\theta = 0$时，条件 $R \in \mathcal{C}(\alpha, 0)$ 就化为 α-非负第二类曲率算子。因此，族 $\mathcal{C}(\alpha, \theta)$ 构成了熟知的 α-非负性与更灵活的挤压型界之间的一种插值。

对于黎曼流形，在三维和四维情形下，Li [15] 证明，若 R 位于 $\mathcal{C}(\alpha, \Theta)$的内部，则该流形与某个球面空间形式微分同胚，其中 Θ 是一个依赖于 n 和 α的正数；在高维情形（$n \geq 5$）下，条件 $\mathring{R} \in \mathcal{C}\left(\frac{n+2}{2}, \bar{\theta}\right)$ 与 $-1 < \bar{\theta} < \frac{2}{n+2}$结合，可推出该流形要么平坦，要么是有理同调球面。

对于爱因斯坦流形，近期有多项研究考察了 $R \in \mathcal{C}(\alpha, \theta)$且 $\theta > 0$的情形。Li [15] 证明，条件 $\mathring{R} \in \mathcal{C}\left(\frac{n+2}{2}, \frac{2}{(n-1)(n+2)}\right)$ 意味着该流形要么平坦，要么是有理同调球面，并且常数 $\frac{2}{(n-1)(n+2)}$ 是最优的。在[5], , 本文作者研究了满足 $R \in \mathcal{C}(1, \theta)$的闭爱因斯坦流形，并证明在适当的参数约束下，这样的流形必为平坦或圆球面。随后，$\mathring{R} \in \mathcal{C}(2, \theta)$条件在 [6] 中得到推广，并得出了类似的刚性结论。之后，Dai 和 Lu [8] 将这些结果推广到整数值 $\alpha \geq 3$（直至 $\alpha \leq \left[\frac{n+2}{4}\right]$），建立了锥条件，使得相应流形必为平坦或球面空间形式。

本文研究满足锥条件 $R \in \mathcal{C}(\alpha, \theta)$且 α为实数的爱因斯坦流形的球面定理，并得出以下结果。

定理 1.1。设(M^n, g)是一个维数为 $n \geq 6$, 的闭爱因斯坦流形，且 R 是第二类曲率算子。若 $R \in \mathcal{C}(\alpha, \theta(n, \alpha))$ 对于

$1 \le \alpha \le$ 最小值 $\left\{ \begin{matrix} \frac{n^4-n^3+8n-8}{3n^3+5n^2-22n+8}, & \frac{n^2+n-8}{4n-8} \end{matrix} \right\}$，其中

$$\theta(n,\alpha) = \frac{3(N-n+1)(N-\alpha)}{3n\alpha(N-2)+(N-3)(N-\alpha)} - 1, \tag{1.2}$$

那么 M 是平坦的或圆球面。这里 $N = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$。

定理 1.2。设 (M^n, g) 是一个维数为 $n = 4$、5 的闭爱因斯坦流形，且令 R 为第二类曲率算子。若 R 满足

$$\mathring{R} \in \mathcal{C}\left(\alpha, \frac{(n-1)\big((n+2)(n+5)-(3n+8)\alpha\big)}{3\alpha(n+3)(n-2)}\right)$$

对于某个实数 $1 \le \alpha \le \frac{(n+2)(n+5)}{3n+8}$，则 M 是平坦的或圆球面。

下面的推论可直接由定理 1.1 和 1.2 得出。

推论 1.3。设 (M^n, g) 是维数为 $n \ge 4$ 的闭爱因斯坦流形。若满足以下任一条件，则 M 是平坦的或圆球面：

(1) 若 $n = 4$，且对某个 $\alpha \in$ 有 $\mathring{R} \in \mathcal{C}(\alpha, \frac{27-10\alpha}{7\alpha})$；*(2)* 若 $n = 5$，且对某个 $\alpha \in$ 有 $\mathring{R} \in \mathcal{C}(\alpha, \frac{70-23\alpha}{18\alpha})$；*(3)* 若 $n = 6$、*7*，且对某个 $\alpha \in$ 有 $\mathring{R} \in \mathcal{C}(\alpha, \theta(n, \alpha))$，其中 $(1, \frac{n^4-n^3+8n-8}{3n^3+5n^2-22n+8}]$；*(4)* 若 $n = 8$、*9*、*10*，且对某个 $\alpha \in$ 有 $\mathring{R} \in \mathcal{C}(\alpha, \theta(n, \alpha))$，其中 $(2, \frac{n^4-n^3+8n-8}{3n^3+5n^2-22n+8}]$；*(5)* 若 $11 \le n \le 16$，且对某个 $\alpha \in$ 有 $\mathring{R} \in \mathcal{C}(\alpha, \theta(n, \alpha))$，其中 $[\frac{n+2}{4}, \frac{n^4-n^3+8n-8}{3n^3+5n^2-22n+8}]$；*(6)* 若 $n \ge 17$，且对某个 $\alpha \in$ 有 $\mathring{R} \in \mathcal{C}(\alpha, \theta(n, \alpha))$，其中 $[\frac{n+2}{4}, \frac{n^2+n-8}{4n-8}]$。

此处 $\theta(n, \alpha)$ 表示式（*1.2*）中定义的显式常数。

注 1.1。(1) 定理 1.1 和 1.2 在 $\alpha = 1$,2 情形下的结果分别对应于 $[5, 6]$, 中的结果，而对于整数 $3 \le \alpha \le [\frac{n+2}{4}]$，它们对应于 [8]中的结果。定理 1.1–1.2 将这些结果从正整数情形推广到了实数情形。

(2) 锥 $\mathcal{C}(\alpha, \theta)$ 关于两个参数都是单调的：当 α 或 θ 增大时，它会扩张（见 [15, 命题 2.8]）。因此，推论 1.3 推广了 Dai-Fu[7]的结果。

本文的组织如下：在第 2 节中，我们给出第二类曲率算子的定义，并推导爱因斯坦流形上曲率的一些恒等式。第 3 节致力于证明定理 1.1–1.2。

2. 预备知识

本节回顾第二类曲率算子的一些基本性质，以及爱因斯坦流形上的一个韦尔张量公式。更多细节请参阅 [1, 2, 4, 5, 6, 9, 13, 18]。

2.1. 第二类曲率算子。

本小节将介绍第二类曲率算子。

考虑一个 n 维黎曼流形 (M^n, g)。在一点 $p \in M$，令 $V = T_pM$，并设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 V 的标准正交基。度量 g 使我们能够

将 V 与其对偶空间 V^* 等同。分别用 $S^2(V)$ 和 $\wedge^2(V)$ 表示 V 上对称二阶张量与二形式的空间。空间 $S^2(V)$ 可分解为以下 $O(V)$-不可约子空间:

$$S^2(V) = S_0^2(V) \oplus \mathbb{R}g,$$

其中， $S_0^2(V)$ 是无迹对称二阶张量空间，且 $g = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$。令 N 为 $S_0^2(V)$ 的维数，即 $N = (n+2)(n-1)/2$。$\wedge^2 V$ 上的对称二阶张量空间记为 $S^2(\wedge^2 V)$，它具有如下正交分解

$$S^2(\wedge^2 V) = S_B^2(\wedge^2 V) \oplus \wedge^4 V,$$

其中， $S_B^2(\wedge^2 V)$ 是 V 上的代数曲率算子空间，由所有满足第一 Bianchi 恒等式的张量 $R \in S^2(\wedge^2 V)$ 组成。

对于代数曲率算子 $R \in S_B^2(\wedge^2(T_pM))$，存在两个相关的自伴算子（见 [18]）。第一类曲率算子记为 $\hat{}R$: $\wedge^2(T_pM) \to \wedge^2(T_pM)$，定义为

$$\hat{R}(\omega)_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n R_{ijkl}\omega_{kl}.$$

第二个算子为 R: $S^2(\overline{T}_pM) \to S^2(T_pM)$，定义为

$$\overline{R}(\varphi)_{ij} = \sum_{k,l=1}^n R_{iklj}\varphi_{kl}.$$

根据 Nishikawa [18], ，第二类曲率算子是指对称双线性型

$$\mathring{R} : S_0^2(T_pM) \times S_0^2(T_pM) \to \mathbb{R}$$

将其限制到无迹对称二阶张量空间 $S_0^2(T_pM)R$ 上得到。等价地，正如 [16], 中所指出的，它可以视为自伴算子

$$\mathring{R} = \pi \circ \overline{R} : S_0^2(T_pM) \to S_0^2(T_pM),$$

其中 π: $S^2(T_pM) \to S_0^2(T_pM)$ 表示投影。

考虑 $\mathring{R}$ 的特征值 $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$，并将它们的平均值记为 $\bar{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \lambda_j$。对于维数为 n 的爱因斯坦流形，标量曲率 Scal 满足

$$\mathrm{Scal} = n(n-1)\bar{\lambda},$$

如 [5, 命题 2.1] 中所示。

定义 2.1 ([16])。令 $\mathcal{T}_{(0,k)}(V)$ 表示 V 上的 $(0,k)$-张量空间。对于 $S \in S^2(V)$ 和 $T \in \mathcal{T}_{(0,k)}(V)$，我们定义

$$S : \mathcal{T}^{(0,k)}(V) \to \mathcal{T}^{(0,k)}(V),$$

$$(ST)(X_1, \cdots, X_k) = \sum_{i=1}^k T(X_1, \cdots, SX_i, \cdots, X_k),$$

并定义 $T^{S^2} \in \mathcal{T}_{(0,k)}(V) \otimes S^2(V)$ 为

$$\left\langle T^{S^2}(X_1, \cdots, X_k), S \right\rangle = (ST)(X_1, \cdots, X_k).$$

根据上述定义，若 $\{\bar{S}^j\}_{j=1}^N$ 是 $S^2(V)$ 的标准正交基，则

$$T^{S^2} = \sum_{j=1}^{N} \bar{S}^j T \otimes \bar{S}^j.$$

类似地，我们定义 $T^{S_0^2} \in \mathcal{T}_{(0,k)}(V) \otimes S_0^2(V)$ 如下:

$$T^{S_0^2} = \sum_{j=1}^{N} S^j T \otimes S^j,$$

其中， $\{S^j\}_{j=1}^N$ 是 $S_0^2(V)$ 的一组标准正交基。

2.2. 爱因斯坦流形上韦尔张量的一个公式。对于任意对称二阶张量 $A, B \in S^2(V)$, Kulkarni–Nomizu 积 $A \owedge B$ 给出 $S_B^2(\wedge^2 V)$ 中的一个代数曲率算子，其定义如下:

$$(A \owedge B)_{ijkl} = A_{ik}B_{jl} + A_{jl}B_{ik} - A_{jk}B_{il} - A_{il}B_{jk}.$$

黎曼曲率张量 R 可分解为不可约分量之和（见 [4,(1.79)]）：

$$R = W + \frac{1}{n-2}\,\mathrm{Ric} \owedge g - \frac{\mathrm{Scal}}{2(n-1)(n-2)}\, g \owedge g, \tag{2.1}$$

其中 W 表示韦尔张量，Ric 表示里奇张量。在任意基下，这可以写成

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = W_{ijkl} &+ \frac{1}{n-2}\big(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}\big) \\ &- \frac{\mathrm{Scal}}{(n-1)(n-2)}\big(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\big). \end{aligned}$$

若 $(M^n,\ g)$ 是爱因斯坦流形，则 $\mathrm{Ric} = \frac{\mathrm{Scal}}{n}\ g$，且 (2.1) 化简为

$$R = W + \frac{\mathrm{Scal}}{2n(n-1)}\, g \owedge g. \tag{2.2}$$

3. 定理 1.1 和 1.2 的证明

本节将证明本文的主要定理。证明定理 1.1 和 1.2 的关键在于证明黎曼曲率张量满足不等式 $\langle \Delta R,\ R\rangle \geq 0$ 。按照 [5, 6], ，我们先在锥条件下，为爱因斯坦流形写出 $\langle \Delta R,\ R\rangle$

$$\alpha^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{[\alpha]} \lambda_i + (\alpha - [\alpha])\lambda_{\lfloor\alpha\rfloor+1}\Big) \geq -\theta\bar{\lambda},$$

$^{\circ}$关于第二类曲率算子 R 的表达式，其中 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$是 $\mathring{R}$ 的特征值，$\bar{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i$ 是它们的平均值。$^{-}$

引理 3.1. 设(M^n, g) 是一个维数为 $n \geq 6$ 的爱因斯坦流形。假设锥条件(1.1) 对 $\theta \geq 0$ 和 $1 \leq \alpha \leq {}^{n^2+n-8}_{4\ n-2}()$ 成立。那么

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j |S^j W|^2 \geq -\frac{16(N-3)}{3n}\theta\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2 + \frac{16N(N-3)}{3n}\theta\bar{\lambda}^3, \tag{3.1}$$

其中 S^jW 由定义 *2.1* 给出。

证明。 记

$$|S^\beta W| = \max_{1\le j\le N} |S^jW|.$$

利用 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_N$，我们估计

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \lambda_j |S^jW|^2 \ge& \sum_{j=1}^{[\alpha]} \lambda_j |S^jW|^2 + \lambda_{[\alpha]+1} \sum_{j=[\alpha]+1}^N |S^jW|^2 \\
=& \sum_{j=1}^{[\alpha]} (\lambda_j - \lambda_{[\alpha]+1}) |S^jW|^2 + \lambda_{[\alpha]+1} \sum_{j=1}^N |S^jW|^2 \\
\ge& |S^\beta W|^2 \sum_{j=1}^{[\alpha]} (\lambda_i - \lambda_{[\alpha]+1}) + \lambda_{[\alpha]+1} \sum_{j=1}^N |S^jW|^2 \\
=& |S^\beta W|^2 \left(\sum_{j=1}^{[\alpha]} \lambda_j + (\alpha - [\alpha]) \lambda_{[\alpha]+1} \right) \\
&+ \lambda_{[\alpha]+1} \left(\sum_{j=1}^N |S^jW|^2 - \alpha |S^\beta W|^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

回顾 [7] 中的 (4.1) 和 (4.5)，可知

$$\sum_{j=1}^N |S^jW|^2 = \frac{2(n^2+n-8)}{n} |W|^2 = \frac{4N-12}{n} |W|^2, \tag{3.3}$$

and

$$|S^jW|^2 \le \frac{8n-16}{n} |W|^2, \quad 1 \le j \le N. \tag{3.4}$$

(1.1) 和 (3.4) 表明

$$|S^\beta W|^2 \left(\sum_{j=1}^{[\alpha]} \lambda_j + (\alpha - [\alpha]) \lambda_{[\alpha]+1} \right) \ge -\alpha\theta\bar\lambda |S^\beta W|^2 \ge -\alpha\theta\bar\lambda \frac{8n-16}{n} |W|^2. \tag{3.5}$$

通过 (3.3)、(3.4) 和 $\alpha \le \frac{n^2+n-8}{4\ n-2}$ ()，我们得出

$$\sum_{j=1}^N |S^jW|^2 - \alpha |S^\beta W|^2 \ge \frac{4(N-3) - 8(n-2)\alpha}{n} |W|^2 \ge 0. \tag{3.6}$$

$\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ 和（1.1）的单调性给出 $\lambda_{[\alpha]+1} \ge -\theta\bar\lambda$。然后，将其与（3.6）结合，我们得到

$$\lambda_{[\alpha]+1} (\sum_{j=1}^N |S^jW|^2 - \alpha |S^\beta W|^2) \ge -\theta\bar\lambda \frac{4(N-3) - 8(n-2)\alpha}{n} |W|^2. \tag{3.7}$$

由 [6, 引理 3.1], 可得

$$|W|^2 = \frac{4}{3} \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 - \frac{4N}{3} \bar\lambda^2. \tag{3.8}$$

不等式 (3.1) 是 (3.5)、(3.7) 和 (3.8) 的推论。 □

回顾 [6, 引理 3.3] ，有

$$3\langle \Delta R, R\rangle = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \left|S^j W\right|^2 - \frac{16N(2N-9n+6)}{3n}\bar{\lambda}^3 + \frac{16(2N-12n+6)}{3n}\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2 + 16\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^3.$$

利用引理 3.1，当 $n \geq 6$时，我们得到如下估计

$$\begin{aligned} 3\langle \Delta R, R\rangle \geq & \frac{16}{3n}\Big[N(N-3)\theta - (2N-9n+6)N\Big]\bar{\lambda}^3 \\ & + \frac{16}{3n}\Big[(2N-12n+6) - (N-3)\theta\Big]\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^2 + 16\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^3. \end{aligned} \tag{3.9}$$

现在我们给出一个引理，在所考虑的条件下为 λ_1 提供一个下界估计。

引理 3.2。 设 $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ 满足 $\sum_{i=1}^N \lambda_i = N\bar{\lambda}$、 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ 以及锥条件 （1.1），其中 $\theta \geq 0$ 和 $1 \leq \alpha < N$。这里 $\bar{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \lambda_i$。则

$$\lambda_1 \geq -\frac{(\alpha-1)N + \alpha(N-1)\theta}{N-\alpha}\bar{\lambda}. \tag{3.10}$$

证明。 首先，当 α 是正整数时，我们用归纳法给出证明。若 $\alpha = 1$, (3.10) 化为 $\lambda_1 \geq -\theta\lambda$，这显然成立。设命题对 $\alpha = k-1$ 成立，其中 $k \leq N$ 是正整数。接下来只需证明当 $\alpha = k$ 时，(3.10) 也成立。由 λ_i 和 $\sum_{i=1}^N \lambda_i = N\bar{\lambda}$ 的单调不减性可得

$$N\bar{\lambda} \geq (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}) + (N-k+1)\lambda_k. \tag{3.11}$$

(1.1) 和 $k \leq N$ 直接推出

$$(N-k+1)(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}) + (N-k+1)\lambda_k \geq -k(N-k+1)\theta\bar{\lambda}. \tag{3.12}$$

将 (3.11)–(3.12) 相加，可得

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} \geq -\frac{N + k(N-k+1)\theta}{N-k}\bar{\lambda}. \tag{3.13}$$

由关于 $\alpha = k-1$ 的归纳假设和 (3.13) 可得

$$\lambda_1 \geq -\frac{N(k-1) + k(N-1)\theta}{N-k}\bar{\lambda}. \tag{3.14}$$

这证明该结论对所有 $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ 都成立。现在，我们考虑区间 $[1, N)$ 中的非整数 α。回顾基本不等式 $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha]+1$。类似地，由 $\sum_{i=1}^N \lambda_i = N\bar{\lambda}$、 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ 和 (1.1)，我们推得

$$(\alpha - [\alpha])N\bar{\lambda} \geq (\alpha-[\alpha])(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{[\alpha]}) + (\alpha-[\alpha])(N-[\alpha])\lambda_{[\alpha]+1}, \tag{3.15}$$

and

$$(N-[\alpha])(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{[\alpha]}) + (\alpha-[\alpha])(N-[\alpha])\lambda_{[\alpha]+1} \geq -(N-[\alpha])\alpha\theta\bar{\lambda}. \tag{3.16}$$

将 (3.15) 和 (3.16) 相加可得

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{[\alpha]}\geq-\frac{(\alpha-[\alpha])N+(N-[\alpha])\alpha\theta}{N-\alpha}\bar{\lambda}.$$

所需的不等式可由归纳法的结论推出。 □

主要定理证明中的一个关键步骤在于下面的命题，它证明了在给定的曲率约束下，$\langle\Delta R,\ R\rangle$ 具有非负性。

命题 3.3。 设(M^n,g)是一个维数为 $n\geq 6$ 或$n=4$的爱因斯坦流形，5。假设 R 满足锥条件(1.1) 并且

$$1\leq\alpha\leq\begin{cases}\min\left\{\frac{n^4-n^3+8n-8}{3n^3+5n^2-22n+8},\frac{n^2+n-8}{4n-8}\right\}, & n\geq 6,\\ \frac{(n+2)(n+5)}{3n+8} & n=4,5.\end{cases}$$

Then

$$\langle\Delta R,R\rangle\geq 0, \tag{3.17}$$

并且等号成立当且仅当

$$\lambda=(1,1,\cdots,1)\,\bar{\lambda}\quad or\quad \lambda=\left(-\frac{(\alpha-1)N+\alpha(N-1)\theta}{N-\alpha},\frac{N+\alpha\theta}{N-\alpha},\cdots,\frac{N+\alpha\theta}{N-\alpha}\right)\bar{\lambda}.$$

此处，$\bar{\lambda}=\sum_{j=1}^N\lambda_j/N$ 是 λ_j的平均值。

证明。 我们证明 $n\geq 6$ 的情形。令 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$，并将 (3.9) 的右端记为 $f(\lambda)$，即

$$\begin{aligned}f(\lambda):=&\frac{16N}{3n}\Big[(N-3)\theta-(2N-9n+6)\Big]\bar{\lambda}^3\\&+\frac{16}{3n}\Big[(2N-12n+6)-(N-3)\theta\Big]\bar{\lambda}\sum_{j=1}^N\lambda_j^2+16\sum_{j=1}^N\lambda_j^3,\end{aligned}$$

其中

$$\theta(n,\alpha)=\frac{3(N-n+1)(N-\alpha)}{3n\alpha(N-2)+(N-3)(N-\alpha)}-1.$$

利用

$$(N-3)\theta-(2N-9n+6)=-3n\left(\frac{N-2}{N-1}A-\frac{N}{N-1}\right)$$

and

$$(2N-12n+6)-(N-3)\theta=3n\left(\frac{N-2}{N-1}A-\frac{2N-1}{N-1}\right),$$

我们有

$$f(\lambda)=16\left[\sum_{j=1}^N\lambda_j^3+\left(\frac{N-2}{N-1}A-\frac{2N-1}{N-1}\right)\bar{\lambda}\sum_{j=1}^N\lambda_j^2-N\left(\frac{N-2}{N-1}A-\frac{N}{N-1}\right)\bar{\lambda}^3\right], \tag{3.18}$$

其中 $A = \frac{(\alpha-1)N+\alpha}{N-1}\theta$ 是由引理 3.2 得到的下界估计。曲率条件 (1.2) 和 $\theta > -1$ 表明 $\lambda \geq 0$。若 $\lambda = 0$，则 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$，并且由 (3.9) 可知 (3.17) 显然成立。对于 $\lambda > 0$ 的情形，令

$$x_j = \lambda_j/\bar{\lambda} + A, \quad x = (x_1, \cdots, x_N),$$

于是有 $\sum_{j=1}^{N} x_j = N(1+A)$ 和 $x_j \geq 0$。这使我们能够将 $f(\lambda)$ 表示为

$$f(\lambda) = 16\bar{\lambda}^3 F(x),$$

其中

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i^3 - (3 - \frac{N-2}{N-1})(1+A)\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \frac{(A+1)^3 N^2}{N-1}.$$

现在我们寻求满足以下约束的 $F(x)$ 的极小点

$$\sum_{j=1}^{N} x_j = N(1+A), \quad x_j \geq 0.$$

按照命题 3.4], 中的相同方法，我们得到 $F \geq 0$，且极小点为

$$x = (1, \cdots, 1) \quad \text{and} \quad x = (0, \frac{N(1+A)}{N-1}, \cdots, \frac{N(1+A)}{N-1}).$$

由于放宽后的约束位于原问题的可行域内，因此它确实是原问题的一个最优点。对于 $n = 4,5$ 的情形，根据 [7, 第 4 节.2], $\langle \Delta R, R\rangle$ 可以用第二类曲率算子显式表示为:

$$\langle \Delta R, R\rangle = 8\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^3 + \frac{8(n-4)}{3}\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^2 - \frac{4(n+2)(n-1)^2}{3}\bar{\lambda}^3.$$

通过与证明 $n \geq 6$ 类似的论证，可以证明命题 3.3 对 $n = 4,5$ 也成立。□

现在我们证明主要定理。

定理 *1.1* 的证明。由 (3.17)，我们有

$$\Delta|R|^2 = 2|\nabla R|^2 + 2\langle \Delta R, R\rangle \geq 2|\nabla R|^2.$$

对 M 上的不等式进行积分，得到

$$0 = \int_M \Delta|R|^2 \, d\mu_g \geq \int_M 2|\nabla R|^2 \, d\mu_g \geq 0,$$

这意味着 $|\nabla R| = 0$。因此， M 是一个对称空间。(1.2) 和 [15, 定理 1.8] 表明， M 要么是平坦的，要么是有理同调球面。Wolf [19, 定理 1] 完整分类了作为有理同调球面的紧致对称空间。除球面外，唯一的单连通例子是 $SU(3)/SO(3)$。命题 3.3 表明， R 的特征值要么是 $(1, 1, \cdots, 1)\,\bar{\lambda}$，要么是 $\left(-\frac{(\alpha-1)N+\alpha(N-1)\theta}{N-\alpha}, \frac{N+\alpha\theta}{N-\alpha}, \cdots, \frac{N+\alpha\theta}{N-\alpha}\right)\bar{\lambda}$。结合 [16, 例 4.5], ，我们知道，如果 $\lambda > 0$，那么 M 是一个圆球面。□

定理 *1.2* 的证明。 与定理 1.1 的证明类似，定理 1.2 直接由命题 3.3 和 [16, 定理 B(b)]推出。□

致谢

第一作者谨向她的导师 Ying Zhang 教授表达感谢，感谢她给予的大量鼓励和宝贵建议。本文的研究部分得到江苏省国家自然科学基金项目（编号：BK20231309）的资助。

参考文献

[1] Jean-Pierre Bourguignon 和 Hermann Karcher。曲率算子：挤压估计与几何实例。Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 11(1):71–92, 1978. [2] Eugenio Calabi 和 Edoardo Vesentini。关于紧致局部对称 Kähler 流形。Ann. of Math. (2), 71:472–507, 1960. [3] Xiaodong Cao、Matthew J. Gursky 和 Hung Tran。第二类曲率与 Nishikawa 猜想。Comment. Math. Helv., 98(1):195–216, 2023. [4] Giovanni Catino 和 Paolo Mastrolia。典范黎曼度量概论，数学进展第 336 卷。Birkhäuser/Springer，Cham， [2020] ©2020。[5] Haiqing Cheng 和 Kui Wang。第二类曲率算子具有负下界的爱因斯坦流形。Math. Z.（即将出版），arXiv:2411.13912, 2024. [6] Haiqing Cheng 和 Kui Wang。第二类曲率算子满足锥条件的爱因斯坦流形。J. Geom. Anal., 35(12):论文编号 389, 17, 2025. [7] Zhi-Lin Dai 和 Hai-Ping Fu。爱因斯坦流形与第二类曲率算子。Calc. Var. Partial Differential Equations, 63(2):论文编号 53, 22, 2024. [8] Haiping Fu 和 Yao Lu。爱因斯坦流形与第二类曲率算子的新刚性定理。arXiv:2512.21496, 2025.[9] Toyoko Kashiwada。关于第二类曲率算子。Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., 44(2):69–73, 1993. [10] Xiaolong Li。具有 4 1 2-正第二类曲率算子的流形。J. Geom. Anal., 32(11):论文编号 281, 14, 2022. [11] Xiaolong Li。Kähler 流形与第二类曲率算子。Math. Z., 303(4):论文编号 101, 26, 2023. [12] Xiaolong Li。具有六正第二类曲率算子的 Kähler 曲面。Proc. Amer. Math. Soc., 151(11):4909–4922, 2023. [13] Xiaolong Li。具有非负第二类曲率算子的流形。Commun. Contemp. Math., 26(3):论文编号 2350003, 26, 2024. [14] Xiaolong Li。乘积流形与第二类曲率算子。Pacific J. Math., 332(1):167–193, 2024. [15] Xiaolong Li。第二类曲率算子条件下的新球面定理。J. Lond. Math. Soc. (2), 112(5):论文编号 e70356, 2025. [16] Jan Nienhaus、Peter Petersen 和 Matthias Wink。Betti 数与第二类曲率算子。J. Lond. Math. Soc. (2), 108(4):1642–1668, 2023. [17] Jan Nienhaus、Peter Petersen、Matthias Wink 和 William Wylie。第二类曲率算子的整体性约束。Differential Geom. Appl., 88:论文编号 102010, 9, 2023. [18] Seiki Nishikawa。关于黎曼度量的变形及具有正曲率算子的流形。载于《黎曼流形的曲率与拓扑》（Katata, 1985），数学讲义第 1201 卷，第 202–211 页。Springer，Berlin，1986. [19] Joseph Wolf。作为实上同调球面的对称空间。J. Differential Geometry, 3:59–68, 1969.

苏州大学数学科学学院，苏州，215006，中国电子邮箱地址： chq4523@163.com

苏州大学数学科学学院，苏州，215006，中国电子邮箱地址： kuiwang@suda.edu.cn