arXiv:2601.06594v1 [math.MG] 10 Jan 2026

伪锥的径向测度

Rolf Schneider

摘要

我们研究 C-伪锥，即满足$o \notin K \subset C$的闭凸集 $K \subset \mathbb{R}^n$，其中 C 是其衰退锥。这里， C 是 $\mathbb{R}^n$中的一个给定闭凸锥，它是尖的且具有非空内部。我们为这类伪锥定义一类测度，并说明如何将其解释为导数测度。对于这类测度的一个子类，即具有负指标的对偶曲率测度，我们解决了一个闵可夫斯基型存在性问题。

关键词： 伪锥、径向测度、导数测度、对偶曲率测度、闵可夫斯基型定理

2020年数学主题分类：52A20

1 引言

近年来，关于凸体的闵可夫斯基问题一直是若干推广和类似问题的范本。我们先回顾这一经典问题。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体 K （具有内部点的紧凸集），表面积测度S_K定义为：将限制在 K 的边界 $\mathrm{bd}\, K$ 上的 $(n-1)$ 维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^{n-1}$，通过 K 的高斯映射（在 $\mathrm{bd}\ K$ 上 ($\mathcal{H}^{n-1}$-几乎处处定义））进行推前所得的测度。这可以写成

$$S_K = \nu_{K\sharp}(\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathrm{bd}\, K), \tag{1}$$

其中，高斯映射 ν_K of K 的定义是：若 K 在 $x \in \mathrm{bd}\, K$ 处的外单位法向量唯一确定，则令 $\nu_K(x)$ 为该外单位法向量。因此， S_K 是单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的有限博雷尔测度。等价地，它也可以定义为导数测度。若 V_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的体积，且 L 是支撑函数为 h_L 的任意凸体，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V_n(K + tL)\Big|_{t=0^+} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_L(u)\, S_K(\mathrm{d}u), \tag{2}$$

其中 $K + tL$ 表示 K 与 tL的明可夫斯基和。闵可夫斯基问题现在要问：测度 μ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上满足哪些必要且充分的条件，才能存在一个凸体 K 使得 $S_K = \mu$? 如果它存在，其唯一性如何？在这个经典情形下，答案众所周知（参见例如 [10,第 8]章）。

注意，在 (2) 中，导数是单侧的，因为闵可夫斯基加法的定义要求 $t \geq 0$。通过引入 Wulff

形 $[h]$ 、定义在单位球面上的正函数 h 及相应的亚历山德罗夫引理，可以解决这一问题；参见 $[10,$ 第 7 节$5]$。于是，若 $o \in \operatorname{int} K$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V_n([h_K + t h_L])\Big|_{t=0} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_L(u)\, S_K(\mathrm{d}u). \tag{3}$$

方程 (1) 属于以下类型:

$$\mu = \varphi_{K\sharp} m_K, \tag{4}$$

其中， m_k 是某种标准测度，可能带有密度，由 K定义； φ_K是某种几何可测映射，也由 K定义，它将 m_K 的定义域映射到单位球面。方程 (3) 可以写成以下形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(K_t)\Big|_{t=0} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(u)\, \mu(\mathrm{d}u), \tag{5}$$

其中， Φ 是定义在凸体上的泛函， K_t 是对 K 的扰动，涉及一个有界函数 g。在上述情形中， Φ 是体积， $g = h_L$，而 K_t 是 $h_K + t h_L$ 的 Wulff 形（当 $|t|$充分小时）。

文献中有若干由凸体定义、且具有形式 (4) 和/或 (5) 的测度 μ 实例。除了表面积测度之外，我们这里只提及锥体积测度、对偶曲率测度、L_p 中的表面积测度，或更一般地说，奥利奇–布伦–明可夫斯基理论中的表面积测度，以及弦测度。关于更多信息，尤其是相应的闵可夫斯基问题，请参阅 Huang、Yang 和 Zhang $[6]$近期发表的综述文章。

近几十年来，将凸体上的各种结果成功推广到凸函数或对数凹函数上，已成为一项卓有成效的工作。相关综述可参见 $[1,$ 第 $9]$章。函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是对数凹函数，当且仅当 $f = e^{-\varphi}$ 其中 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to$ 是凸函数（$-\infty$， $\infty]$。若 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸体，且

$$I_K^\infty(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \in K, \\ \infty & \text{if } x \in \mathbb{R}^n \setminus K, \end{cases} \qquad \mathbb{1}_K(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in K, \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R}^n \setminus K \end{cases}$$

定义其示性函数 I_K^∞和特征函数 $\mathbb{1}_K$，那么 I_K^∞是凸函数，且$\mathbb{1}_K$ 是对数凹函数。此外，$I_K^\infty = h_K^*$，其中 h_K 表示 K的支撑函数，而 f^*是 f的勒让德变换。由于

$$(I_K^\infty)^* + (I_L^\infty)^* = h_K^{**} + h_L^{**} = h_K + h_L = h_{K+L} = h_{K+L}^{**} = (I_{K+L}^\infty)^*$$

明可夫斯基和是凸体理论中的一个核心概念，这也表明了为何将凸体上的结果推广到凸函数时，勒让德变换会发挥至关重要的作用。

对于对数凹函数 $f = e^{-\varphi}$，自然会考虑定义在 $\mathbb{R}^n$ 上、密度为 $e^{-\varphi}$ 的测度 ν_f，其中密度是相对于勒贝格测度而言的，并将其总测度视为

$$J(f) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{d}x$$

f 的“总质量”，前提是该总质量有限。我们还考虑它的像测度

$$S_f := (\nabla\varphi)_\sharp \nu_f,$$

其中，$\nabla\varphi$ 是凸函数φ的梯度（在 $\operatorname{dom}\varphi$ 上几乎处处定义）。定义

$$f_t := e^{-(\varphi^* + tg)^*}$$

（从而 $f_0 = f$），对于函数 g，在适当假设下，类比凸体的相关结果，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J(f_t)\Big|_{t=0} = \int_{\mathbb{R}^n} g \,\mathrm{d}S_f. \tag{6}$$

参见 Rotem [8], 中的命题 5.4，其中的假设是 $0 < \int f < \infty$且 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 连续且有界。还有一些具有不同假设的变体；参见 Colesanti 和 Fragal`a [2], Cordero–Erausquin 和 Klartag [3], Ulivelli[19]。在 [3, 定义 1], 中，测度 S_f 被称为矩测度，这一术语只有结合 [3]中的参考文献才能理解。Rotem [8] 将该测度称为对数凹函数 f的表面积测度。

我们提到，Santambrogio [9]通过测度输运方法重新证明了 [3] 的结果。对于类似于（6）的结果，我们还请参见 [4]中引理 5.2的 $q = n$ 情形。

2 伪锥的一个类比

下面的目的是为伪锥寻找与 S_f 类似的测度，而不是针对凸函数。在表述问题之前，我们需要先作一些说明。我们在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 中研究，标量积为 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，原点为 o，单位球面为 $\mathbb{S}^{n-1}$。给定一个具有非空内部且不含直线的闭凸锥 $C \subset \mathbb{R}^n$。其对偶锥 $C^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,\ y\rangle \leq 0\ \forall y \in C\}$ 也具有相同的性质。记 $\Omega_C := \mathbb{S}^{n-1} \cap \operatorname{int} C$，$\Omega_{C^\circ} := \mathbb{S}^{n-1} \cap \operatorname{int} C^\circ$。我们用 int 表示内部，用 cl 表示闭包；这两个记号在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中均适用。

A C-伪锥是一个闭凸集 $K \subset C$，满足 $o \notin K$，其中 C 是其衰退锥（即 $C = \operatorname{rec} K := \{z \in \mathbb{R}^n : K + z \subseteq K\}$）。这意味着 $K + C = K$。所有 C-伪锥构成的集合记为 $ps(C)$。在若干方面，这个集合可视为内部包含 o 的凸体集合的对应物。例如，可以定义表面积测度及其类比和推广，并研究相应的闵可夫斯基型问题；伪锥的共极性具有许多与凸体极性相似的性质；高斯像问题也可以针对伪锥进行研究（例如参见 [11] –[18]）。下面的核心内容是，C-伪锥，或者更确切地说，它们的径向函数，也可以视为定义域有界的凸函数的对应物。

为了准确阐述这一点，我们还需要引入几个概念。令 $K \in ps(C)$。K 的支撑函数定义为

$$h_K(x) := \sup\{\langle x, y\rangle : y \in K\} \quad \text{for } x \in C^\circ.$$

若 $u \in \operatorname{int} C^\circ$，则上确界就是最大值。由于 $h_K \le 0$，我们记作 $h_K^- := -h_K$。

K 的径向函数 定义为

$$\rho_K(v) := \min\{r > 0 : rv \in K\} \quad \text{for } v \in \Omega_C.$$

注意，最小值存在，因为对于任意 $x \in K$， $C + x \subseteq K$，因此 $\{r > 0 : rv \in K\} \neq \emptyset$ 适用于 $v \in \Omega_C$，且 K 是闭集。

令 η_K 为所有满足以下条件的 $v \in \Omega_C$ 的集合： K 在边界点 $\rho_K(v)v$ 处的外单位法向量不唯一。众所周知， η_K 的球面勒贝格测度为零。径向高斯映射 $\alpha_K : \Omega_C \setminus \eta_K \to \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$ 定义如下：对于 $v \in \Omega_C \setminus \eta_K$，令 $\alpha_K(v)$为 K在 $\rho_K(v)v$处唯一的外单位法向量。

第1节所述的设定简述如下。我们选取函数$F(x) = e^{-x}$；于是，对定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的每个凸函数 φ， f 的总质量$= F \circ \varphi$定义为 $J(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$。令 ν_f为相对于勒贝格测度、密度为 $F \circ \varphi$的测度，令 $S_f := (\nabla\varphi)_\sharp \nu_f$ 为 ν_f 在 φ的梯度映射下的推前。若 f_t 表示 f的一个适当扰动，使得 $f_0 = f$涉及函数 g，那么在适当的假设下，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J(f_t)\big|_{t=0} = \int_{\mathbb{R}^n} g\,\mathrm{d}S_f$。

我们希望将这一方法模仿应用于伪锥：用伪锥的径向函数替换凸函数 φ，并用一个相当一般的函数替换函数 $x \mapsto e^{-x}$。为此，我们取一个连续可微的严格递减函数 $G : (0, \infty) \to (0, \infty)$，并定义 $F(x) := -xG'(x)$，其中 $x > 0$。我们假设对每个 $a > 0$，函数 $F|_{[a,\infty)}$有界。典型例子包括 $G(x) = e^{-x}$和 $F(x) = xe^{-x}$，或$G(x) = x^q$，其中 $q < 0$，以及 $F(x) = |q|x^q$。对于 $K \in ps(C)$，令 $\nu_{F,K}$ 为 Ω_C 上的测度，其相对于球面勒贝格测度的密度为 $F \circ \rho_K$。该测度是有限的，因为 ρ_K 有正的下界，因此函数 $F \circ \rho_K$ 有界。现在，我们不再使用凸函数的梯度映射，而是使用 K的径向高斯映射。因此，我们记

$$\mu_{F,K} := \alpha_{K\sharp}\nu_{F,K}$$

$\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$上的有限测度，它是$\nu_{F,K}$在 α_K下的推前。我们称此测度为 K的 F-径向测度 。

应注意以下几点。若 $z \in C \setminus \{o\}$，则 $K := C + z \in ps(C)$。此时， α_K 将 Ω_C 中的几乎所有点映射到 Ω_{C°的边界上，因此 $\mu_{F,K}(\Omega_{C^\circ}) = 0$。这表明，对于 C-伪锥的径向测度，自然定义域是 $\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$，而不是 Ω_{C°。

我们的首要目标是证明，测度 $\mu_{F,K}$ 也可以类比于 (5) 和 (6) 解释为导数测度。为此，我们定义泛函 J_G 如下：

$$J_G(K) := \int_{\Omega_C} (G \circ \rho_K)(v)\,\mathrm{d}v \quad \text{for } K \in ps(C),$$

其中 $\mathrm{d}v$ 表示相对于球面勒贝格测度进行积分。根据我们对 G的假设，泛函 J_G 是有限的。

下文中出现的 Wulff 形将在第 3 节中定义。

定理 1. 设 F 和 G 如上所定义。设 $K \in ps(C)$。设 $g : \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ} \to \mathbb{R}$连续。设 K_t 为与 $(C, h_K e^{tg})$ 对应的 ***Wulff*** 形，其中 $|t| \le 1$（例如）。那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J_G(K_t)\Big|_{t=0} = -\int_{\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}} g \,\mathrm{d}\mu_{F,K}.$$

我们将在第 3 节完成一些预备工作后证明这一点。

我们的第二个目标是解决关于测度 $\mu_{F,K}$ 的闵可夫斯基型存在性问题：对于定义在 $\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$ 上的博雷尔测度 μ，需要满足哪些充要条件，才能存在一个伪锥 $K \in ps(C)$，使得 $\mu = \mu_{F,K}$？我们仅对特殊函数 $G(x) = x^q$, $F(x) = |q|x^q$（其中 $q < 0$）给出答案。在这种情况下，我们有

$$\mu_{F,K} = |q| n \widetilde{C}_q(K, \cdot), \qquad J_G(K) = n\widetilde{V}_q(K). \tag{7}$$

这里，$\widetilde{V}_q(K)$ 是 K 的第 q 对偶体积，而 $\widetilde{C}_q(K, \cdot)$ 表示 K 的第 q 对偶曲率测度（例如，参见 [7]，公式 (4.9) 和定义 4.3）。这样，我们解决了 [7] 中遗留的一个问题，正如第 4 节所述。

3 定理1的证明

我们先介绍一些预备知识。设 $K \in ps(C)$。我们已经定义了它在 C° 上的支撑函数。作为一个凸函数，它在定义域的内部连续，因此在 $\operatorname{int} C^\circ$ 上连续。我们证明 h_K 在 C° 上连续。设 $x_j \in C^\circ$，其中 $j \in \mathbb{N}_0$，并假设当 $j \to \infty$ 时，$x_j \to x_0$。由于 h_K 是一次正齐次的，我们可以假设 $x_0 \neq o$。有界序列 $(h_K(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$ 存在一个收敛子序列。若存在极限不同的收敛子序列，则 K 将有两个不同的支撑超平面（按 [10, 第 45] 页的定义），其法向量均为 x_0，这与假设矛盾。因此，$h_K(x_j) \to h_K(x_0)$，这就得到了所需结论。下文中，我们只需要 h_K 在 $\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$ 上。

设 $K \in ps(C)$ 且 $v \in \Omega_C$。那么 $\rho_K(v)v$ 位于 K 的边界上。设 u_* 是 K 在该点的一个外单位法向量。那么

$$\overline{h}_K(u_*) = |\langle \rho_K(v)v, u_* \rangle| \tag{8}$$

and

$$\overline{h}_K(u) \le |\langle \rho_K(v)v, u \rangle| \quad \text{for all } u \in \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}. \tag{9}$$

首先，我们修改 Wulff 形的定义。设 $f : \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ} \to [0, \infty)$ 是一个不恒为零的连续函数。我们定义

$$[f] := C \cap \bigcap_{u \in \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}} \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle y, u \rangle| \ge f(u)\}$$

并将其称为与 $(C,\ f)$ 相关联的 ***Wulff*** 形。它非空，因为 f 有界；它不包含 o，因为 f 在 $\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$ 上某处为正。它是若干个 C-伪锥的交集，因此显然是一个 C-伪锥。根据定义可得

$$[\overline{h}_K] = K \quad \text{for } K \in ps(C) \tag{10}$$

and

$$f(u) \le \overline{h}_{[f]}(u) \quad \text{for } u \in \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}. \tag{11}$$

设 $v \in \Omega_{C^\circ}$。那么 $\rho_{[f]}(v)v$ 是 $[f]$ 的边界点。由 (9) 和 (11) 可得

$$f(u) \le |\langle \rho_{[f]}(v)v, u\rangle| \quad \text{for all } u \in \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}. \tag{12}$$

设 u_* 是 $\rho_{[f]}(v)v$ 处 $[f]$ 的外单位法向量。由 (8) 可得 $h_{[f]}(u_*) = |\langle \rho_{[f]}(v)v, \overline{u}_*\rangle|$。由 (11), $h_{[f]}(u_*) = f(u_*) + \varepsilon$，其中 $\varepsilon \ge 0$。这意味着

$$[f] \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle y, u_*\rangle| \ge f(u_*) + \varepsilon\},$$

因此由 $\varepsilon > 0$ 可推出 $\rho_K(v)v \notin [f]$，这就产生了矛盾。由 $\varepsilon = 0$ 可知

$$f(u_*) = |\langle \rho_{[f]}(v)v, u_*\rangle|. \tag{13}$$

我们也可以将 (12) 和 (13) 写成如下形式

$$\rho_{[f]}(v) \ge \frac{f(u)}{|\langle v, u\rangle|} \quad \text{for } u \in \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ} \tag{14}$$

and

$$\rho_{[f]}(v) = \frac{f(u_*)}{|\langle v, u_*\rangle|}. \tag{15}$$

（注意，对于 $v \in$， $\langle v,$ $u\rangle \ne 0$，其中 $_C\Omega$ $u \in$ 且 $_{C^\circ}$clΩ。）因此，Wulff 形的径向函数为

$$\rho_{[f]}(v) = \max_{u \in \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}} \frac{f(u)}{|\langle v, u\rangle|}$$

对于 $v \in \Omega_C$，最大值在 u_* 处取得，当且仅当 u_* 是 $\rho_{[f]}(v)v$ 处 $[f]$ 的外单位法向量。

我们需要采用 [14] 中引理 9 的另一种形式。更确切地说，在 [14] 中，该引理涉及 Ω_{C° 的一个紧子集 ω，因为当时需要采用这种形式。现在将此集合替换为 cl Ω_{C°（因此，不再需要 $K \in \mathcal{K}(C,$ $\omega)$ 这一假设）。此外还有其他变更，并且证明的部分内容将在后文用到，因此我们给出完整的证明。不过，正如在 [14], 中一样，我们强调，主要思想（尽管有所改变）取自 [5]。

引理 1。设 $K \in ps(C)$。设 $g : \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ} \to \mathbb{R}$ 连续。定义函数 h_t（例如，对 $|t| \le 1$ 而言）如下：

$$h_t(u) := \overline{h}_K(u)e^{tg(u)} \quad \textit{for } u \in \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ},$$

并令 $[h_t]$ 为与 (C, h_t) 相关联的 *Wulff* 形。于是，对于 $v \in \Omega_C \setminus \eta_K$，

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log \rho_{[h_t]}(v) - \log \rho_K(v)}{t} = g(\alpha_K(v)).$$

证明。令 $v \in \Omega_C \setminus \eta_K$。对于 $|t| \le 1$，令 u_t 为伪锥 $[h_t]$ 在其边界点 $\rho_{[h_t]}(v)v$ 处的外单位法向量，则由 (13) 和 (12) 可得

$$h_t(u_t) = |\langle \rho_{[h_t]}(v)v, u_t\rangle| \quad \text{and} \quad h_t(u) \le |\langle \rho_{[h_t]}(v)v, u\rangle| \quad \text{for all } u \in \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}. \tag{16}$$

我们首先证明

$$\lim_{t\to 0} u_t = u_0. \tag{17}$$

由于 $\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$ 是紧集，存在一个序列 $(u_{t_k})_{k\in\mathbb{N}}$，满足 $t_k \to 0$，且该序列收敛于某个 $u' \in \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$。利用 $h_t \to h_0 = h_K$ 在 $\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$ 上的一致收敛（因为 $|g|$ 有界）以及收敛性 $\rho_{[h_t]} \to \rho_{[h_0]} = \rho_K$（这由 [11],中的引理 5 得出，其中用 $\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$ 替换了 ω），由（16）可知，这意味着

$$h_{t_k}(u_{t_k}) = |\langle \rho_{[h_{t_k}]}(v)v, u_{t_k}\rangle| \quad \text{for } k \in \mathbb{N},$$

that

$$\overline{h}_K(u') = |\langle \rho_K(v)v, u'\rangle|.$$

由于

$$\overline{h}_K(u) \le |\langle \rho_K(v)v, u\rangle| \quad \text{for all } u \in \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$$

根据（9），这意味着 u' 是 K 在 $\rho_K(v)v$ 处的外单位法向量。因此（又由于 $v \notin \eta_K$），$u' = u_0$。于是，每个满足 $t_k \to 0$ 的收敛序列 $(u_{t_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 都以 u_0 为极限。这证明了（17）。

对 $f = h_t$、$u_* = u_t$ 使用（15），然后对 $u = u_t$ 使用（9），得到

$$\begin{aligned}\log \rho_{[h_t]}(v) - \log \rho_K(v) &= \log h_t(u_t) - \log|\langle v, u_t\rangle| - \log \rho_K(v)\\ &\le \log h_t(u_t) - \log \overline{h}_K(u_t) = t g(u_t).\end{aligned}$$

对 $f = h_t$、$t = 0$ 使用 (15)，再对 $f = h_t$、$u = u_0$ 使用 (14)，可得

$$\begin{aligned}\log \rho_{[h_t]}(v) - \log \rho_K(v) &= \log \rho_{[h_t]}(v) - \log \overline{h}_K(u_0) + \log|\langle v, u_0\rangle|\\ &\ge \log h_t(u_0) - \log \overline{h}_K(u_0) = t g(u_0).\end{aligned}$$

由此可知

$$\left|\frac{\log \rho_{[h_t]}(v) - \log \rho_K(v)}{t} - g(u_0)\right| \le |g(u_t) - g(u_0)|, \tag{18}$$

因此，由 (17) 以及 g 的连续性即可得到所述结论。 □

现在我们可以证明定理 1。

证明。对于正可微函数 ψ，我们有 $\psi' = \frac{\psi'}{\psi}\psi = (\log\psi)'\psi$。利用这一点，根据定理 1 的假设，对于 $v \in \Omega_C \setminus \eta_K$，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G\circ\rho_{K_t})(v)\Big|_{t=0} &= G'(\rho_K(v))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_{K_t}(v)\Big|_{t=0}\\ &= G'(\rho_K(v))\rho_K(v)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\rho_{K_t}(v)\Big|_{t=0}\\ &= -(F\circ\rho_K)(v)g(\alpha_K(v)),\end{aligned}$$

其中应用了 $G'(x)x = -F(x)$ 和引理 1。

由 (18) 以及 g 的有界性，存在常数 $\delta > 0$ 和 $b > 0$，使得

$$|\log \rho_{K_t}(v) - \log \rho_K(v)| \le b|t|$$

对于 $|t| < \delta$ 和几乎所有 $v \in \Omega_{C^\circ}$。由径向函数的连续性，这对所有 $v \in \Omega_C$ 都成立。我们可以假设 δ 和常数 $a > 0$ 的选取满足：对于 $|t| < \delta$，$\rho_{K_t} \ge a$。由 Ψ 定义的函数 Ψ，即 $x = G(e^x)$，对于 $x \ge \log a$ 为正且导数为负，因此它有一个利普希茨常数 L。因此，对于 $v \in \Omega_C$,

$$\begin{aligned} |(G \circ \rho_{K_t})(v) - (G \circ \rho_K)(v)| &= |\Psi(\log \rho_{K_t}(v)) - \Psi(\log \rho_K(v))| \\ &\le L|\log \rho_{K_t}(v) - \log \rho_K(v)| \le Lb|t|. \end{aligned}$$

现在我们可以应用控制收敛定理，得到

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J_G(K_t)\Big|_{t=0} &= \int_{\Omega_C} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G \circ \rho_{[K_t]})(v)\Big|_{t=0} \mathrm{d}v = -\int_{\Omega_C} g(\alpha_K(v))(F \circ \rho_K)(v)\,\mathrm{d}v \\ &= -\int_{\Omega_C} g(\alpha_K(v))\,\nu_{F,K}(\mathrm{d}v) = -\int_{\mathrm{cl}\,\Omega_{C^\circ}} g\,\mathrm{d}\mu_{F,K}, \end{aligned}$$

这里用到了积分一般变换定理（或变量替换公式）。定理 1 的证明至此完成。

□

4 负指数情形下的对偶 Minkowski 问题

现在我们取 $G(x) = x^q$ 和 $F(x) = |q|x^q$，其中 $q < 0$。根据 (7)，对于 $K \in ps(C)$，可得

$$\frac{1}{|q|n}\mu_{F,K}(\omega) = \frac{1}{n}\int_{\alpha_K^{-1}(\omega)} \rho_K(v)^q\,\mathrm{d}v = \widetilde{C}_q(K,\omega) \tag{19}$$

对于博雷尔集 $\omega \subset \mathrm{cl}\,\Omega_{C^\circ}$ 和

$$\frac{1}{n}J_G(K) = \frac{1}{n}\int_{\Omega_C} \rho_K(v)^q\,\mathrm{d}v = \widetilde{V}_q(K). \tag{20}$$

$\widetilde{\ }$测度 $C_q(K,\ \cdot)$ 称为 K 的 q 阶对偶曲率测度（注意，$\alpha_K^{-1}(\omega) = \boldsymbol{\alpha}_K^*(\omega) \setminus \eta_K$ 且 $\mathcal{H}^{n-1}(\eta_K) = 0$；$\boldsymbol{\alpha}_K^*$在 [7,(4.6)] 中定义）。最初，这些测度是针对凸体引入的，参见 [5]。只有当 $q \in \{0,\dots,n\}$ 为整数时，才能观察到它与经典曲率测度之间的“对偶”或类比关系，而$\widetilde{\ }$测度 $C_q(K,\ \cdot)$ 则对所有 $q \in \mathbb{R}$ 都有定义。对于伪锥，这些测度由 [7]引入。

~需要注意的是，对于 $K \in ps(C)$， $C_q(K, \cdot)$ 是定义在 $\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$ 上的测度，不一定是定义在 Ω_{C° 上的测度。例如，若 $K = C + z$ 且 $z \in \operatorname{int} C$，则 $K \in ps(C)$，并且~$C_q(K, \cdot)$ 集中在 $\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ} \setminus \Omega_{C^\circ}$ 上。因此，在公式中

$$\int_{\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}} g(u)\, \widetilde{C}_q(K, \mathrm{d}u) = \frac{1}{n} \int_{\Omega_C} g(\alpha_K(v)) \rho_K(v)^q \, \mathrm{d}v$$

对于有界可测函数 $g : \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ} \to \mathbb{R}$，由变量替换公式可知，左侧积分必须在 Ω_{C° 的闭包上进行，而不能仅在 Ω_{C° 上进行（否则，左侧积分可能为零，而右侧积分却不为零）。

Li、Ye 和 Zhu [7], 证明了以下结论。若 φ 是 Ω_{C° 上非零的有限博雷尔测度，且其支撑是 Ω_{C° 的一个紧子集，并且若 $q \neq 0$，则存在~$K \in ps(C)$，使得 $C_q(K, \cdot) = \varphi$ （定理 6.1 ）。若 φ 是~Ω_{C° 上非零的有限博雷尔测度，并且若 $q > 0$，则存在 $K \in ps(C)$，使得 $C_q(K, \cdot) = \varphi$ （定理 7.1）。因此，对于伪锥的 q 阶对偶曲率测度，作者解决了闵可夫斯基存在问题，条件是 $q \neq 0$ 且给定测度具有紧支撑，或者 $q > 0$；但该结果仅适用于有限测度（若 $q > 0$，这是一项严格限制）。他们（在第 2006 页）表示，对于 $q < 0$，当 φ 不集中于 Ω_{C° 的某个紧子集上时，其可解性“似乎难得多”。然而，我们证明如下结论。

定理 2. 设 $q < 0$。若 φ 是 $\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$ 上非零有限的博雷尔测度，则存在伪锥 $K \in ps(C)$，使得 $C_q(K, \cdot) = \varphi$。

下面的引理为证明作准备。对于 $K \in ps(C)$，我们用 $b(K)$ 表示 K 到原点的距离。

引理 2. 设 $q < 0$。存在正常数 c_1, c_2，它们仅依赖于 C, q, n，~
并具有如下性质：若 $K \in ps(C)$ 且 $V_q(K) = 1$，则 $c_1 \leq b(K) \leq c_2$。

证明。 我们选取一个数 a，使得

$$\frac{1}{n} a^q \sigma_{n-1}(\Omega_C) > 1, \tag{21}$$

其中 σ_{n-1} 表示 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的球面勒贝格测度。对于 $x \in C$ 和 $\varepsilon > 0$，le t

$$A(x) := \{v \in \Omega_C : \rho_{C+x}(v) \leq a\}$$

（如果 $|x|$ 太大，该集合可能为空）。如果 $K \in ps(C)$ 且 $x \in C \setminus \{o\}$，则有 $C + x \subseteq K$，因此

$$\rho_K(v) \leq \rho_{C+x}(v) \leq a \quad \text{for } v \in A(x)$$

因此（因为 $q < 0$）

$$\widetilde{V}_q(K) \geq \frac{1}{n} \int_{A(x)} \rho_K(v)^q \, \mathrm{d}v \geq \frac{1}{n} a^q \sigma_{n-1}(A(x)).$$

设 $K \in ps(C)$ 为一个伪锥，且 $b(K) = \varepsilon$。那么存在一点 $x_\varepsilon \in K$ with$|x_\varepsilon| = \varepsilon$。由于 $\sigma_{n-1}(A(x)) \to \sigma_{n-1}(\Omega_C)$，当 $x \to o$ 时，我们得到

$$\widetilde{V}_q(K) \geq \frac{1}{n} a^q \sigma_{n-1}(A(x_\varepsilon)) \to \frac{1}{n} a^q \sigma_{n-1}(\Omega_C) \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

~如果存在满足 $V_q(K) = 1$ 、且与原点的距离可以任意小的 C伪锥 K，这就与 (21) 矛盾。因此常数 c_1 存在。

~为证明 c_2 的存在性，令 $K \in ps(C)$ 和 $V_q(K) = 1$。定义

$$r_0 := \max\{r > 0 : rB^n \cap \operatorname{int} K = \emptyset\},$$

其中 B^n 表示以 o 为中心的 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球。于是，对所有 $v \in \Omega_C$，都有 $\rho_K(v) \geq r_0$，因此

$$1 = \widetilde{V}_q(K) \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega_C} r_0^q \, \mathrm{d}v = \frac{1}{n} r_0^q \sigma_{n-1}(\Omega_C),$$

因此 $r_0 \leq c_2$，其中常数 c_2 仅依赖于 C， q， n。根据 r_0 的定义，存在一个向量 $x \in K$，使得 $|x| = r_0 \leq c_2$。这意味着 $b(K) \leq c_2$。 □

现在我们可以证明定理 2。

用 $C^{\geq}$(cl Ω_{C°) 表示 cl Ω_{C° 上非负且不恒为零的连续函数空间。对于 $f \in C^{\geq}$(cl Ω_{C°)，Wulff 形 $[f]$ 是一个定义良好的 C 伪锥。

设 φ 是 cl Ω_{C° 上非零且有限的博雷尔测度。其总测度记为$|\varphi|$。令 $q < 0$。

对于 $f \in C^{\geq}$(cl Ω_{C°)，我们定义（如 [7], 中所述，但作了修正）

$$\Phi(f) := -\frac{1}{|\varphi|} \int_{\operatorname{cl} \Omega_{C^\circ}} \log f(u) \, \varphi(\mathrm{d}u) + \frac{1}{q} \log \widetilde{V}_q([f]).$$

现在可能有 $\Phi(f) = \infty$，因为允许 f为零；但对于某个f， $\Phi(f)$ 是有限的，特别是对于适当的 $L \in ps(C)$， h_L。容易验证，对于 $\lambda > 0$， $\Phi(\lambda f) = \Phi(f)$。

我们可以像在 [11, 第 9] 节中那样进行论证。首先说明， Φ 在集合上取得最小值

$$\mathcal{L}' := \{\overline{h}_L : L \in ps(C), \widetilde{V}_q(L) = 1\}.$$

~证明：取满足 $V_q(L) = 1$的 $L \in ps(C)$。由引理 2 的证明可知，存在一个与 L无关的常数 c，使得 $h_L \leq c$。因此， $\Phi(h_L) \geq -\log \overline{c}$，从而 $\inf\{\Phi(f) : f \in \mathcal{L}'\} > -\infty$。此外，存在满足 $\Phi(h_L) < \infty$的 $L \in \mathcal{L}'$。

设 $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个满足 $h_{K_i} \in \mathcal{L}'$ 的序列，使得

$$\lim_{i\to\infty} \Phi(\overline{h}_{K_i}) = \inf\{\Phi(f) : f \in \mathcal{L}'\}.$$

根据 [13]中的引理 1 和引理 2，序列 $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 有一个子序列收敛到伪锥 $K_0 \in ps(C)$。相应的支撑函数逐点收敛。

根据引理 2，它们一致有界。利用控制收敛定理可知， Φ 在 $\mathcal{L}'$ 上的最小值在 h_{K_0} 处取得。沿用第[7,节的记号，我们写作

$$\begin{aligned}\beta_{\mathrm{fct}} &:= \inf\{\Phi(f) : f \in C^{\geq}(\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ})\},\\ \beta_{\mathrm{pc}} &:= \inf\{\Phi(\overline{h}_K) : K \in ps(C)\}.\end{aligned}$$

由于 Φ 是零次齐次的，而 V_q 是 $q \neq 0$次齐次的，我们已证明 $\beta_{\mathrm{pc}} = \Phi(h_{K_0})$。显然， $\beta_{\mathrm{pc}} \geq \beta_{\mathrm{fct}}$。由 (11) 可得，对于 $u \in \operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$，有 $f(u) \leq h_{[f]}(u)$，因此（注意到由 (10) 可知 $[h_{[f]}] = [f]$） $\Phi(f) \geq \Phi(h_{[f]})$，从而 $\beta_{\mathrm{fct}} \geq \beta_{\mathrm{pc}}$。我们已得到 $\beta_{\mathrm{fct}} = \Phi(h_{K_0})$。

现在设 g 是 $\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$ 上的连续函数，并设 $K_t = [h_t]$ 是与 (C, h_t) 相关的 Wulff 形（当 $|t| > 0$充分小时），其中 $h_t = h_{K_0} e^{tg}$。那么

$$\Phi(h_t) = -\frac{1}{|\varphi|}\int_{\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}} \log h_t(u)\,\varphi(\mathrm{d}u) + \frac{1}{q}\log \widetilde{V}_q([h_t]).$$

由定理 1 以及 (19) 和 (20)，可得（由于 $q < 0$）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{V}_q([h_t])\Big|_{t=0} = q\int_{\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}} g(u)\,\widetilde{C}_q(K_0, \mathrm{d}u).$$

我们知道 $\beta_{\mathrm{fct}} = \Phi(h_{K_0})$，函数 $t \mapsto \Phi(h_t)$ 在 0 处有限且可微，因此 $\frac{\mathrm{d}\Phi(h_t)}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} = 0$，并且由 (10) 可知 $[h_0] = [h_{K_0}] = K_0$。因此，

$$0 = -\frac{1}{|\varphi|}\int_{\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}} g(u)\,\varphi(\mathrm{d}u) + \frac{1}{\widetilde{V}_q(K_0)}\int_{\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}} g(u)\,\widetilde{C}_q(K_0, \mathrm{d}u).$$

由于这对所有 g $\operatorname{cl}\Omega_{C^\circ}$上的连续函数都成立，我们推得

$$\varphi = \frac{|\varphi|}{\widetilde{V}_q(K_0)}\widetilde{C}_q(K_0, \cdot).$$

由于对于 $\lambda > 0$， $\widetilde{C}_q(\lambda K_0, \cdot) = \lambda^q \widetilde{C}_q(K_0, \cdot)$，因此对于适当的 $\lambda > 0$，有 $\varphi = \widetilde{C}_q(\lambda K_0, \cdot)$，这就完成了定理 2 的证明。

定理 2 所证明的存在性结果引出了唯一性问题，但该问题仍未解决。对于凸体，Zhao [20], 给出了一种唯一性证明，但目前尚不清楚如何将其推广到伪锥。

参考文献

[1]Artstein–Avidan, S., Giannopoulos, A., Milman, V.D., 渐近几何分析。 数学调查与专著丛书，第 261 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2021 年。

[2] Colesanti, A., Fragal`a, I.，对数凹函数总质量的一阶变分及相关不等式。Adv. Math. 244（2013），708–749。[3]Cordero–Erausquin, D., Klartag, B.，矩测度。J. Funct. Anal. 268（2015），3834–3866。[4] Huang, Y., Liu, J., Xi, D., Zhao, Y.，对数凹函数的对偶曲率测度。J. Differential Geom. 128（2024），815–860。[5] Huang, Y., Lutwak, E., Yang, D., Zhang, G.，对偶 Brunn–Minkowski 理论中的几何测度及其相关 Minkowski 问题。Acta Math. 216（2016），325–388。[6] Huang, Y., Yang, D., Zhang, G.，几何测度的 Minkowski 问题。Bull. Amer. Math. Soc. 62（2025），第 3 期，359–425。[7] Li, N., Ye, D., Zhu, B.，无界闭凸集的对偶 Minkowski 问题。Math. Ann. 388（2024），2001–2039。[8] Rotem, L.，对数凹函数的表面积测度。J. Anal. Math. 147（2022），373–400。[9] Santambrogio, F.，通过熵和最优传输处理矩测度。J. Funct. Anal. 271（2016），418–436。[10] Schneider, R.，《凸体：Brunn–Minkowski 理论》。第 2 版，《数学及其应用百科全书》第 151 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2014。[11] Schneider, R.，有限体积余凸集的 Brunn–Minkowski 理论。Adv. Math. 332（2018），199–234。[12] Schneider, R.，锥中凸集的闵可夫斯基型定理。Acta Math. Hungar. 164（2021），282–295。[13] Schneider, R.，伪锥。Adv. in Appl. Math. 155（2024），论文编号 102657，共 22 页。[14] Schneider, R.，伪锥的加权 Minkowski 定理。Adv. Math. 450（2024），论文编号 109760，共 26 页。[15] Schneider, R.，伪锥的共极性。J. Convex Anal. 32（2025），825–834。[16] Schneider, R.，伪锥的高斯像问题。Adv. Math. 480（2025），论文编号 110461，共 21 页。[17] Schneider, R.，伪锥与测度传输。代数与几何论文集。https://doi.org/10.1007/s13366-025-00792-z[18]Schneider, R.，通过伪锥进行测度传输。Acta Math. Hungar.（已接受），arXiv:2503.10449v2

[19] Ulivelli, J.，泛函 Wulff 形的一阶变分。*Adv. Math.* **480(2025)**，论文编号 110529，36 页。

[20] Zhao, Y.，负指标的对偶 Minkowski 问题。*Calc. Var.***56 (2017)**，第 2 期，论文编号 18，16 页。

作者地址：

Rolf Schneider，数学研究所，阿尔伯特-路德维希
弗赖堡大学，D-79104 弗赖堡，德国。电子邮箱：
rolf.schneider@math.uni-freiburg.de