arXiv:2601.06623v1 [math.AP] 10 Jan 2026

二重重数特征值处共振时解存在的充要条件

Philip Korman 辛辛那提大学
数学科学系，俄亥俄州辛辛那提
45221-0025

摘要

本文为一类共振处的线性部分对应于二重重数特征值的半线性狄利克雷问题，建立了解存在的充要条件。并将该结果用于给出相应半线性热方程所有解无界的条件。

关键词：解的存在性，兰德斯曼–拉泽条件，共振。

美国数学学会主题分类：35J25。

1 引言

共振椭圆问题的研究始于 E.M. Landesman 和 A.C. Lazer 的经典论文 [8]。在一个有界光滑区域$D \subset R^n$ 上，考虑狄利克雷问题

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda_k u + g(u) = f(x) \ \text{ for } x \in D\,, \\ u = 0 \ \text{ on } \partial D\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

这里， λ_k 是拉普拉斯算子 Δ 在 D 上、满足零边界条件时的一个特征值，因此该问题处于共振状态。函数 $f(x) \in L^2(D)$是给定的。对于非线性项 $g(u)$，假设极限 $g(\infty)$和$g(-\infty)$存在，并且

$$g(-\infty) < g(u) < g(\infty), \ \text{ for all } u \in (-\infty, \infty)\,. \tag{1.2}$$

我们来回顾 E.M. Landesman 和 A.C. Lazer 的经典定理 [8]，采用 S.A. Williams 的表述 [14]。

定理 1.1（*[8],[14]*）假设 $g(u)$ 满足 (1.2)， $f(x) \in L^2(D)$，而对于属于 λ_k 的特征空间的任意 $w(x)$

$$\int_D f(x)w(x)\,dx < g(\infty)\int_{w>0} w\,dx + g(-\infty)\int_{w<0} w\,dx\,. \tag{1.3}$$

那么，问题 (1.1) 有一个解 $u(x) \in W^{2,\,2}(D)\cap W^{1,\,2}{}_0(D)$。条件 (1.3) 也是解存在的必要条件。

最初，E.M. Landesman 和 A.C. Lazer [8] 还额外假设特征值 λ_k 是单重的。不久后，S.A. Williams [14] 给出了上述更一般的论述。然而，有一段时间，人们并不知道重特征值的例子，直到我们在 [5] 中注意到，A.C. Lazer 和 D.E. Leach [9] 关于半线性谐振子周期解的另一项经典结果，为定理 1.1 在二重特征值情形下提供了一个例子（顺带给出了 Lazer-Leach 定理的另一种证明；此外还有许多已知证明，参见例如 [3] 和 [5]）。我们在 [5] 中证明，虽然 Lazer-Leach 结果的必要条件很容易证明，但其充分性部分可通过验证条件 (1.3) 并应用定理 1.1 得出。

本文证明了 R^2 中圆盘的一个类似结果，从而为定理 1.1 在特征空间维数大于一的情形提供了首个偏微分方程例子。即使对于简单区域，多重特征值对应的特征空间也可能非常复杂，而且特征值的重数可能以难以预料的方式变化。因此，对于其他区域，要验证特征空间中任意元素 $w(x)$ 都满足不等式 (1.3)，似乎极具挑战性（积分 $\int_{w>0} w(x)\,dx$ 和 $\int_{w<0} w(x)\,dx$ 不太可能在整个特征空间上保持不变）。

例子 令 $D = (0,\pi) \times (0,\pi)$ 属于 R^2。特征值

$$\Delta u + \lambda u = 0\,,\ \text{in } D \quad u = 0 \ \text{ on } \partial D$$

为 $\lambda_{nm} = n^2 + m^2$，其中 n 和 m 是正整数，对应的特征函数为 $\sin nx \sin my$，例如参见 [11]。这些特征函数由变量分离法得到，并且不存在其他特征函数，因为这些特征函数在 $L^2(D)$ 中构成一个完备集。主特征值 $\lambda_1 = 2$ 是单重的，对应的特征函数为 $\sin x \sin y > 0$。特征值 $\lambda_2 = 5 = 1^2+2^2$ 具有二重重数，其特征空间由 $\sin x \sin 2y$、$\sin 2x \sin y$ 张成。特征值 $\lambda_3 = 8 = 2^2 + 2^2$ 是单重的，其特征空间由 $\sin 2x \sin 2y$ 张成。特征值 $50 = 1^2+7^2 = 5^2+5^2$

是三重的，其特征空间由 $\sin\ x \sin 7y$、$\sin\ 7x \sin\ y$、$\sin\ 5x \sin\ 5y$ 张成。特征值 $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ 是四重的，特征值 $325 = 1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2 = 10^2 + 15^2$ 具有六重重数，依此类推。自然会想知道是否存在具有任意重数的特征值。用数论术语来说，可能的猜想是：对于任意偶整数 $2m$，都能找到一个整数N，使其可表示为 $N = p^2 + q^2$，其中 $p \neq q$ 为整数，且恰有m 种不同的表示方式；而对于任意奇整数 $2m+1$，都能找到一个整数M，使其可表示为 $M = p^2 + q^2$，其中 $p \neq q$ 为整数，且恰有m 种不同的表示方式，此外， $M = r^2 + r^2$ 对于某个整数 $r > 0$ 成立。

相比之下，对于圆盘 $B_a:\ x^2 + y^2 < a^2$ in R^2，我们证明拉普拉斯算子的所有特征值（除主特征值外，主特征值是单重的）均为二重重数，并且积分 $\int_{w>0} w(x,y)\,dxdy$ and$\int_{w<0} w(x,y)\,dxdy$ 在整个特征空间上保持常数，且可以显式计算。对于二重特征值共振这一情形，我们给出了问题 (1.1) 在 B_a 上存在解的充要条件。我们直接证明了必要性部分，而充分性则通过验证定理 1.1 的条件得出。我们的结果可视为 Lazer-Leach 定理的一个偏微分方程类比。作为应用，我们给出了相应半线性热方程所有解无界的一个条件。

关于 R^n 中球上的径向解已有大量研究，参见例如 P. Ko- rman [4] 或 T. Ouyang 和 J. Shi [10], 。这些研究受到 B. Gidas、W.-M. Ni 和 L. Nirenberg 的经典定理 [2] 的启发，该定理断言，球上半线性狄利克雷问题的任何正解必为径向对称。我们的结果表明，即使在研究变号的非对称解时，球也可能是一个特殊区域。

此前，P. Korman 和 D.S. Schmidt [6] 研究了 B 上主特征值处的共振。他们构造了 $g(u)$，使得对于任意 $f(x,y) \in L^2(B_a)$，该问题都有无穷多个解。

2 二维圆盘上的共振

值得注意的是，二维圆盘 B_a 上的拉普拉斯算子的特征值：除主特征值为单重外，其余均具有二重重数。回忆一下（例如参见 [11], 第 251 页），在 B_a 上取零边界条件时，拉普拉斯算子的特征值为 $\lambda_{n,\ m} = \dfrac{\alpha_n^{\ m}}{a^2}$ ($n =$

0、1、2、.....； $m = 1$、2、.....），相应的特征函数为

$$J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}}{a}r\right)(A\cos n\theta + B\sin n\theta)\,, \tag{2.1}$$

其中$\alpha_{n,\ m}$ 是 $J_n(x)$的第 m个根， n阶第一类贝塞尔函数， $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (A 和 B 是任意常数)。不存在其他特征函数，因为上述函数构成了 $L^2(B_a)$中的完备集。主特征对为 $\lambda_1 = {}^{\alpha_0^2}{}_{,\ a^2}{}^{1} \approx \frac{5.78}{a^2}$, $\varphi_1(r) = J_0({}^{\alpha_0}{}_{,\ a}{}^{1}r)$。计算可得 $\lambda_2 = {}^{\alpha_1^2}{}_{,\ a^2}{}^{1} \approx \frac{14.62}{a^2}$，其中$\alpha_{1,\ 1} \approx 3.83$， 且 $\varphi_2 = J_1\left({}^{\alpha_1}{}_{,\ a}{}^{1}r\right)(A\cos\theta + B\sin\theta)$，等等，见下文的例子。主特征值是单重的，而所有其他特征值都是二重重数，因为任意两个阶数相差整数的贝塞尔函数都没有共同的根；参见 G.N. Watson [13], 第484页中的以下结果。

命题1 对任意整数 $n \geq 0$ 和 $m \geq 1$，函数 $J_n(x)$ 和$J_{n+m}(x)$ 除了在 $x = 0$ 处的零点外，没有其他公共零点。

显然，这一结果曾长期作为一个猜想（发表于1866年），在19世纪被称为布尔热猜想（得名于一位19世纪的法国数学家），直到C.L. Siegel于1929年证明它；参见 [13], 以及一篇关于贝塞尔函数、内容十分详尽的维基百科文章。“猜想”这一名称表明，人们曾用它来证明其他结果。它直接推出了我们所需的以下结果。

命题2 对于圆盘 B_a，除主特征值外，所有特征值的重数均为二。

证明：根据命题1，所有 $\alpha_{n,m}$ 均不相同，因此 $\lambda_{n,m}$ 的特征空间是二维的，由式（2.1）给出。♢

事实证明，对于任意特征值 λ_k, $k \geq 2$，在 λ_k 的特征空间中，所有 $w(x)$ 对应的两个积分 $\int_{w>0} w\,dx$ 和 $\int_{w<0} w\,dx$ （出现在 (1.3) 中）在 B_a 上均保持不变，而且这两个积分都可以轻松计算。令 $P_{n,\ m}$ 表示 $(0, a)$ 中满足 $J_n\left({}^{\alpha_n}{}_{,\ a}{}^{m}r\right) > 0$ 的子集，令 $N_{n,\ m}$ 表示 $(0, a)$ 中满足 $J_n\left({}^{\alpha_n}{}_{,\ a}{}^{m}r\right) < 0$ 的子集。以下量

$$J_{n,m} = 2\int_{P_{n,m}} J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}}{a}r\right) r\,dr - 2\int_{N_{n,m}} J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}}{a}r\right) r\,dr\,. \tag{2.2}$$

对于每一对 n 和 m，都可以使用 Mathematica 轻松计算。

命题 3 设 $w = J_n(\alpha_{n,\ m}r)\,(A\cos\ n\theta + B\sin n\theta)$ 是特征值 $\alpha_{n,\ \ a^2}^{2\ \ m} > \lambda_1$ 的特征空间中的任意元素，并将其归一化，使得 $A^2+B^2=1$。则在 B_a

$$\int_{w>0} w(r,\theta)\, r dr\, d\theta = J_{n,m}\,,$$
$$\int_{w<0} w(r,\theta)\, r dr\, d\theta = -J_{n,m}\,.$$

证明：设

$$A\cos n\theta + B\sin n\theta = \sqrt{A^2+B^2}\cos(n\theta-\delta) = \cos(n\theta-\delta)\ ,$$

其中 δ 为某个值。于是

$$w = J_n(\alpha_{n,m}r)\cos(n\theta-\delta)\ . \tag{2.3}$$

令 P 表示满足 $\cos(n\theta-\delta) > 0$ 的 $\theta\in(0,2\pi)$ 的集合，并令 N 表示满足 $\cos(n\theta-\delta) < 0$ 的 $\theta\in(0,2\pi)$ 的集合。容易证明

$$\begin{aligned}\textstyle\int_P \cos(n\theta-\delta)\ d\theta = 2\,,\\ \textstyle\int_N \cos(n\theta-\delta)\ d\theta = -2\,.\end{aligned} \tag{2.4}$$

于是，根据 (2.3)、(2.2) 和 (2.4)

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{w>0} w(r,\theta)\, r dr\, d\theta &= \textstyle\int_{P_{n,m}\times P} w(r,\theta)\, r dr\, d\theta + \int_{N_{n,m}\times N} w(r,\theta)\, r dr\, d\theta\\ &= \textstyle\int_{P_{n,m}} J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}}{a}r\right) r\, dr \int_P \cos(n\theta-\delta)\ d\theta\\ &+ \textstyle\int_{N_{n,m}} J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}}{a}r\right) r\, dr \int_N \cos(n\theta-\delta)\ d\theta = J_{n,m}\,,\end{aligned}$$

同理

$$\int_{w<0} w(r,\theta)\, r dr\, d\theta = \int_{P_{n,m}\times N} w(r,\theta)\, r dr\, d\theta + \int_{N_{n,m}\times P} w(r,\theta)\, r dr\, d\theta = -J_{n,m}\,,$$

证明完毕。 ♢

现在我们考虑问题（此处 $u = u(x,y)$）

$$\begin{aligned}\Delta u + \lambda_k u + g(u) = f(x,y)\,, \quad \text{for } (x,y)\in B_a\,,\\ u = 0 \ \text{ on } \partial B_a\,,\end{aligned} \tag{2.5}$$

特征值为 $\lambda_k = \alpha_{n\ \ a^2}^{2\ \ m} > \lambda_1$，其中某些 n 和 m对应于特征空间 $J_n\left(\alpha_{n,\ a^{\ m}}r\right)(A\cos\ n\theta + B\sin\ n\theta)$。记

$$\varphi_k = J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}}{a}r\right)\cos n\theta\,, \tag{2.6}$$

$$\psi_k = J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}}{a}r\right)\sin n\theta\,,$$

$$A_k = \int_{B_a} f(x,y)\varphi_k\,dxdy\,,$$

$$B_k = \int_{B_a} f(x,y)\psi_k\,dxdy\,.$$

对于任意 $f(x,y)$ 和 k，都可以用 Mathematica 轻松近似求得数值 A_k 和 B_k 。

定理2.1 假设 $g(u)$ 满足条件 (1.2)。则该条件

$$\sqrt{A_k^2+B_k^2} < J_{n,m}\left(g(\infty)-g(-\infty)\right) \tag{2.7}$$

对于 (.) 的解 $u\ x\ \in W^{2\,2}\ B_a \cap (),\ (),\ ()$ 的存在
$W_0^{1\,2}\ B_a$ 2 5
既是必要的也是充分的。

证明： (i) 必要性。分别将 (2.5) 乘以 φ_k 和 ψ_k ，并进行积分

$$\begin{aligned} A_k &= \textstyle\int_{B_a} g(u)\varphi_k\,dxdy\,,\\ B_k &= \textstyle\int_{B_a} g(u)\psi_k\,dxdy\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

将 (2.8) 中的第一个方程乘以 $\frac{A_k}{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}$，第二个方程乘以$\frac{B_k}{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}$，并将所得结果相加。记

$$w_k = J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}}{a}r\right)\left(\frac{A_k}{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}\cos n\theta + \frac{B_k}{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}\sin n\theta\right)\,,$$

并利用命题 3，得到

$$\sqrt{A_k^2+B_k^2} = \int_B g(u)w_k\,dxdy < g(\infty)\int_{w_k>0} w_k\,dxdy + g(-\infty)\int_{w_k<0} w_k\,dxdy$$

$$= J_{n,m}\left(g(\infty)-g(-\infty)\right)\,.$$

(ii) 充分性。假设 (2.7) 成立，我们将验证定理 1.1 的条件 (1.3)。假设 $\lambda_k = {}^{\alpha_n^2,}{}_{a^2}{}^{m}$ ，令

$$w(x,y) = J_n\left(\frac{\alpha_{n,m}}{a}r\right)\left(A\cos n\theta + B\sin n\theta\right)$$

是其特征空间中的任意元素。通过对 (1.3) 中的 w 进行缩放，我们可以假设

$$A^2 + B^2 = 1\,.$$

根据命题 3 和 (2.6)，我们需要验证的定理 1.1 中的条件 (1.3) 可写为

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{B_a} f(x,y)w(x,y)\,dxdy = AA_k + BB_k \\ < J_{n,m}\,(g(\infty) - g(-\infty)) = g(\infty)\textstyle\int_{w>0} w\,dxdy + g(-\infty)\int_{w<0} w\,dxdy\,.\end{aligned}$$

由于 $AA_k + BB_k \le \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$，根据 (2.7) 可知该不等式成立。由定理 1.1，问题 (2.5) 有解。♢

例子 考虑单位圆盘 $x^2 + y^2 < 1$, $a = 1$。Mathematica 可以很容易地求出贝塞尔函数的零点

$$\begin{gathered}\alpha_{0,1} \approx 2.40483\,,\ \ \alpha_{0,2} \approx 5.52008\,,\ \ \alpha_{0,3} \approx 8.65373\,,\ldots \\ \alpha_{1,1} \approx 3.83171\,,\ \ \alpha_{1,2} \approx 7.01559\,,\ldots \\ \alpha_{2,1} \approx 5.13562\,,\ \ \alpha_{2,2} \approx 8.41724\,,\ldots \\ \alpha_{3,1} \approx 6.38016\,,\ \ \alpha_{3,2} \approx 9.76102\,,\ldots\,.\end{gathered}$$

特征值为 $\lambda_1 = \alpha_{0,1}^2$, $\lambda_2 = \alpha_{1,1}^2$, $\lambda_3 = \alpha_{2,1}^2$, $\lambda_4 = \alpha_{0,2}^2$, $\lambda_5 = \alpha_{3,1}^2$, $\lambda_6 = \alpha_{1\,2}^2$., 等等。

我们来考虑第六个特征值处发生共振的情形

$$\begin{gathered}\Delta u + \lambda_6 u + \tfrac{u}{\sqrt{u^2+1}} = f(x,y)\,, \quad \text{for } x^2 + y^2 < 1\,, \\ u = 0, \ \text{on } x^2 + y^2 = 1\,.\end{gathered} \tag{2.9}$$

由上可知，λ_6的特征空间为 $J_1\,(\alpha_{1,2}r)\,(A\cos\,\theta + B\sin\,\theta)$，其中 A和 B 为任意数。$J_1\,(\alpha_{1,2}r)$ 在 (0, 1) 上的图像有一个根 $r_0 = {}^{\alpha_1}\!/_{\alpha_{1\,2}}$，且在 $P_{1,2} =$ (0, r_0) 上为正，在 $N_{1,2} =$ (r_0, 1) 上为负，见图 1。根据 (2.2)，使用 Mathematica

$$J_{1,2} = 2\int_0^{r_0} J_1\,(\alpha_{1,2}r)\,r\,dr - 2\int_{r_0}^1 J_n\,(\alpha_{1,2}r)\,r\,dr \approx 0.260759\,.$$

对于任意 $f(x, y)$，Mathematica 也可以轻松地计算出这些积分的高精度近似值

$$A_6 = \int_{x^2+y^2<1} f(x,y)J_1\left(\frac{\alpha_{1,2}}{a}r\right)\cos\theta\,dxdy\,,$$

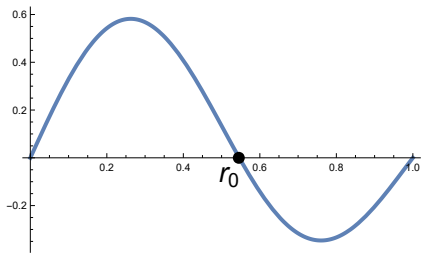


图 1：区间 (0, 1) 上 $J_1\left(\alpha_{1,\ 2}r\right)$ 的图像

$$B_6 = \int_{x^2+y^2<1} f(x,y) J_1\left(\frac{\alpha_{1,2}}{a} r\right) \sin\theta \, dxdy \, .$$

（这里 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 且 $dxdy = r\, drd\theta$。）由于 $g(\infty) = 1$ 和$g(-\infty) = -1$, 根据定理2.1, 问题 (2.9) 有解当且仅当

$$\sqrt{A_6^2 + B_6^2} < 2J_{1,2} \, .$$

现在我们考虑圆盘上的半线性热方程的一个应用B_a： $x^2 + y^2 < a^2$（这里 $u = u(x, y, t)$）

$$u_t = \Delta u + \lambda_k u + g(u) - f(x,y) \, , \quad \text{for } (x,y) \in B_a \, , t > 0 \tag{2.10}$$
$$u(x,y,t) = 0 \, , \quad \text{for } (x,y) \text{ on } \partial B_a \, , t > 0$$
$$u(x,y,0) = u_0(x,y) \, ,$$

其中给定函数 $f(x, y)$ 和 $u_0(x, y)$, 以及满足 (1.2) 的 $g(u)$。这里 λ_k,$k \geq 2$ 与上文一样, 是拉普拉斯算子的一个二重特征值。该方程的稳态满足方程 (2.5)。根据定理2.1, 若

$$\sqrt{A_k^2 + B_k^2} > J_{n,m} \left(g(\infty) - g(-\infty) \right) \, . \tag{2.11}$$

记 $w_k = \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}\varphi_k + \frac{B_k}{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}\psi_k$, 同上。（回忆一下, $A_k = \int_{B_a} f($ $x, y)\varphi_k \, dxdy$, $B_k = \int_{B_a} f(x, y)\psi_k \, dxdy$。）

定理2.2 假设 $g(u)$满足条件(1.2), 且(2.11)成立。那么, 对于任意初始数据 $u_0(x,$ $y)$, (2.10)的解都是无界的。事实上, 定义 $H(t) = \int_{B_a} u(x, y, t)w_k \, dxdy$, 则有 H $(t) \to -\infty$ 当 $t \to \infty$时。

证明：将 (2.10) 乘以 $\frac{A_k}{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}\varphi_k$, 并对 B_a 两边积分

$$\frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}} \int_{B_a} u_t \varphi_k \, dxdy = \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}} \int_{B_a} g(u)\varphi_k \, dxdy - \frac{A_k^2}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}} \, .$$

将 (2.10) 乘以 $\frac{A_k}{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}\psi_k$，并对 B_a 积分

$$\frac{A_k}{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}\int_{B_a} u_t\psi_k\,dxdy = \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}\int_{B_a} g(u)\psi_k\,dxdy - \frac{B_k^2}{\sqrt{A_k^2+B_k^2}}\,.$$

将这些结果相加，得到

$$H'(t) = \int_{B_a} g(u)w_k\,dxdy - \sqrt{A_k^2+B_k^2} < -\epsilon\,,$$

对某个 $\epsilon > 0$，通过估计积分 $\int_{B_a} g(u)w_k\,dxdy$（如定理 1.2 的第 (i) 部分所示），并利用 (2.11)。于是 $H(t) < H(0) - \epsilon t$，证明得证。♢

在常微分方程的背景下，G. Seifert [12], 、J.M. Alonso 和 R. Ortega [1], 以及 P. Korman [7] 给出了有关无界解的相关结果。

参考文献

[1] J.M. Alonso 和 R. Ortega，《共振处半线性方程的无界解》，《Nonlinearity》9，第 5 期，1099-1111（1996）。[2] B. Gidas、W.-M. Ni 和 L. Nirenberg，《通过最大值原理得到的对称性及相关性质》，《Commun. Math. Phys.》68，209-243（1979）。[3] S.P. Hastings 和 J.B. McLeod，《关于与共振相关问题中 Landesman、Lazer 和 Leach 结果的简短证明》，《Differential Integral Equations》24，第 5-6 期，435-441（2011）。[4] P. Korman，《半线性椭圆方程的全局解曲线》，World Scientific，新泽西州哈肯萨克（2012）。[5] P. Korman，《线性部分处于共振状态的非线性椭圆方程与方程组》，《Electron. J. Differential Equations》，第 67 号论文（2016）。[6] P. Korman 和 D.S. Schmidt，《共振振荡问题的无穷多个解及渐近性》，Alan C. Lazer 荣誉专刊，《Electron. J. Diff. Equ.》，特刊 01，301-313（2021）。[7]P. Korman，《周期系统的无界解》，arXiv 2303.12919。[8] E.M. Landesman 和 A.C. Lazer，《共振处线性椭圆边值问题的非线性扰动》，《J. Math. Mech.》19，609-623（1970）。

[9] A.C. Lazer 和 D.E. Leach，《共振处受迫谐振子的有界扰动》，Ann. Mat. Pura Appl. 82（4），49-68（1969）。[10] T. Ouyangand J. Shi，《一类半线性问题正解的精确重数，II》，微分方程杂志 158，第 1 期，94-151（1999）。[11] Y. Pinchover 和 J. Rubinstein，《偏微分方程导论》，剑桥大学出版社，剑桥，2005。[12] G. Seifert，《周期性强迫下无阻尼二阶非线性方程的共振》，Quart. Appl. Math. 48，第 3 期，527-530（1990）。[13] G.N. Watson，《贝塞尔函数理论论述》，剑桥大学出版社，剑桥，1995。[14] S.A. Williams，《非线性椭圆边值问题存在解的一个尖锐充分条件》，微分方程杂志 8，580-586（1970）。