arXiv:2601.06626v1 [math.DS] 10 Jan 2026

欣钦猜想及相关主题

´ ´ ´范爱华、范世磊、埃尔韦·克费莱克和马蒂娜·凯夫莱克

Abstract. 受欣钦于1923年提出、并于1970年被Marstrand推翻的猜想启发，我们研究与给定递增整数序列相关联的函数欣钦类。当欣钦类包含 $L^p(\mathbb{T})$时，我们称该序列为 L^p-欣钦序列。我们确立了欣钦序列的基本性质，给出若干构造，并提出有待进一步研究的开放问题。我们还开始研究紧阿贝尔群上的群自同态的欣钦序列。在傅里叶紧性假设下，我们证明，自同态斜积的遍历性（分别为弱混合或强混合）等价于底系统具有相应的性质，这支持了这样一种观点：此类斜积中的典型纤维轨道应构成欣钦序列。

Contents

1. 引言 2 2. 整数欣钦序列 3 2.1. L^p-欣钦序列的刻画 $1 \leq p \leq \infty$ 32.2. 欣钦性质取决于排序 5 2.3. 欣钦序列的并集与交 6 2.4. 乘法构造与待探讨的问题 8 2.5. 图厄-莫尔斯序列是欣钦序列 9 2.6. 正则函数与欣钦类 11 3. 群自同态的欣钦序列 12 3.1. 紧阿贝尔群上的满同态 12 3.2. 欣钦类与欣钦序列的概念 14 3.3. L^p-收敛 14 3.4. 满同态的幂序列 16 3.5. 满同态的均匀分布序列与满同态的乘积 18 4. 群上的自同态斜积 21 4.1. 斜积 22 4.2. 傅里叶紧性 22 4.3. 遍历性 23 4.4. 弱混合性质与强混合性质 24 4.5. 特征值 26 4.6. 弱意义下的随机欣钦序列 26 参考文献 27

2020 数学主题分类。11J71, 28D05。关键词与短语。一致分布，欣钦类，斜积。作者获得了国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12331004、12231013 和 12571205）。

1. Introduction

众所周知，对于任意互不相同的整数序列 $E = (\lambda_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Z}$，实数序列 $(\lambda_n x)_{n\geq 1}$ 对勒贝格几乎处处的点 $x \in [0,1)$ 模 1 均匀分布（简称模 1 分布）。因此，对于定义在区间 $[0,1)$ 上、并视为圆周 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的黎曼可积函数 f，我们有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\lambda_n x) = \int_{\mathbb{T}} f d\mathbf{m} \quad a.e. \tag{1.1}$$

1923年，欣钦 [32] 猜想，当 $E = \mathbb{N}$时，性质 (1.1) 对有界的博雷尔可测函数 f成立。然而，Marstrand [37] 在 1970年通过一个反例推翻了这一猜想：该反例是某个开集的示性函数。布尔甘 [10]则用他的熵方法，非构造性地证明了马斯特兰德定理。这促使我们定义欣钦类： $E =(\lambda_n) \subset \mathbb{N}$ 为

$$\mathcal{K}_E := \Big\{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\lambda_n x) = \int_{\mathbb{T}} f d\mathbf{m} \quad \text{a.e.} \Big\}. \tag{1.2}$$

“欣钦类”一词由 Fan-Queff´elec-Queff´elec 于 [26], 提出，他们从不同角度研究了Furstenberg序列（半群 $\{2^n 3^m : n \geq 0, m \geq 3\}$的递增有序序列）。如果 $\mathcal{K}_E$ 包含 $L^1(\mathbb{T})$ 的某个子空间A ，我们就称 E 为 A-欣钦序列（在[37]中称为 A^*-序列）。因此，我们将讨论 $1 \leq p \leq \infty$的-欣钦序列 L^p。 L^1-欣钦序列简称为欣钦序列。所谓欣钦问题，是指确定给定序列的欣钦类或研究相关问题。典型的问题如下：给定的整数序列是否为某个$1 \leq p \leq \infty$的 L^p-欣钦序列？欣钦问题涵盖范围广泛：整数序列有许多不同类型，而且——正如我们将看到的——这一问题也会出现在任意紧阿贝尔群上（见第3节）。

让我们回顾一些已知结果。赖科夫 [41] 证明了（2^n）是一个欣钦序列。这也可由伯克霍夫遍历定理推出，正如里斯 [42]所指出的。对于Furstenberg序列 $\{s_n\}$ ，即按递增顺序排列的Furstenberg集 $S := \{2^n 3^m : n \geq 0, m \geq 0\}$中的元素序列，奈尔[38] 基于 $\mathbb{N}^2$-作用的贝夫利遍历定理，证明了（s_n）是一个 L^1-欣钦序列；此前，Marstrand 已证明（s_n）是一个 L^∞-欣钦序列 [37]。 [26] 中改进了 Marstrand 关于 S的结果，而 [25]中则给出了奈尔结果的另一种证明。然而，Rosenblatt [43] 证明，极度稀疏的序列（2^{2^n}）不是一个 L^∞-欣钦序列。布尔甘 [11]证明，对于每个 $p > 1$， （2^{n^2}）都是一个 L^p-欣钦序列；但布措利奇和莫尔丁[13] 证明， （2^{n^2}）不是一个 L^1-欣钦序列。这些结果表明，欣钦问题似乎颇为微妙。参见综述论文 [12] 和 [14] ， 了解相关有趣信息。值得指出的是，贝克 [5] 通过将序列改为连续的环面直线，在连续情形下“挽救”了欣钦猜想。

本文研究欣钦序列的基本性质，并通过乘法过程构造新的例子。我们还考察了这一过程的随机化版本，由此得到斜积，并分析其遍历的、弱混合和强混合性质。

在第2节中，我们将研究整数欣钦序列的基本性质，提出一种生成欣钦序列的过程，并给出一些有待研究的问题。

第3节专门讨论紧阿贝尔群上的自同态欣钦序列。

在第4节中，我们研究由斜积产生的随机序列，并考察由此得到的保测动力系统的遍历性质和混合性质。

2. Khintchin sequences of integers

本节中，我们考虑整数序列，并将其视为紧群 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$上的自同态序列。下一节将研究任意紧阿贝尔群。关于特殊群 $\mathbb{T}$ 的这些讨论中，有很大一部分同样适用于一般的紧阿贝尔群。我们主要关注相关欣钦算子作用于可积函数时相对于勒贝格测度$\mathbf{m}$的几乎处处收敛。首先回顾作为基本工具的巴拿赫原理和 Bellow-Jones 原理。随后研究欣钦序列的并集、交与子序列。接着介绍一种构造可能的欣钦序列的方法，并证明特殊的乘法 Thue-Morse 序列是欣钦序列。最后提出许多未解决问题。

2.1. 对 L^p-欣钦序列在 $1 \le p \le \infty$上的刻画。我们主要关注，对于每个属于 $L^p(\mathbb{T})$ 的 f（对某个 $1 \le p \le \infty$），$T_n f(x)$ 几乎处处收敛的问题，其中 T_n 是与 (λ_n) 相关联的算子，称为欣钦算子，

$$T_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k x), \quad n \ge 1.$$

回顾一下，(λ_k) 是给定的整数序列。我们的算子 T_n对所有博雷尔可测函数 f都有定义。它们在线性空间 $L^p(\mathbb{T})1 \le p \le \infty$上均为线性且压缩的，因为 $x \mapsto \lambda_k x$ 模 1 运算保持勒贝格测度$\mathbf{m}$ （我们假设 $\lambda_k \neq 0$）。为回答这类算子序列几乎处处收敛的问题，当 $1 \le p < \infty$时，我们将应用巴拿赫原理；当 $p = \infty$时，则应用 Bellow 和 Jones 提出的修正的巴拿赫原理。我们先在一般情形下介绍这两个原理。还要指出，Sawyer 的弱型极大不等式适用于我们的欣钦算子序列（见 [45]）。

设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为一个概率空间。我们用 $L^0(X, \mathcal{B}, \mu)$ 表示所有可测函数构成的空间。通常，$L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ $(1 \le p \le \infty)$ 表示勒贝格空间。空间 $L^0(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个完备度量空间，其度量为

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} d\mu(x).$$

关于此度量的收敛就是依概率收敛。

设 $(\mathbb{B}, \ \|\cdot\|)$ 为一个巴拿赫空间。我们将考虑算子 $S\colon \mathbb{B} \to L^0(X, \ \mathcal{B}, \ \mu)$，通常假设它们是线性或次线性 的，即

$$|S(af)| = |a|\,|S(f)|, \quad |S(f+g)| \le |S(f)| + |S(g)|,$$

且连续，也就是说依概率连续（即 $L^0(X,\ \mathcal{B},\ \mu)$ 配备上述度量）。设 (S_n) 是从 $\mathbb{B}$ 到 $L^0(X,\ \mathcal{B},\ \mu)$ 的一列线性算子。对任意 $f \in \mathbb{B}$，我们定义极大函数

$$S^*f(x) = \sup_{n\geq 1} |S_n f(x)|.$$

这个极大算子 S^* 是次线性的。在这种情况下，经典的巴拿赫原理表述如下。

Banach Principle [4].假设每个线性算子

$$S_n : (\mathbb{B}, \|\cdot\|) \to (L^0(X, \mathcal{B}, \mu), d(\cdot,\cdot))$$

是连续的。设对每个 $f \in \mathbb{B},\ S^*f(x) < \infty$ 几乎处处成立。那么

(B1) 极大算子 $S^* :\ \mathbb{B} \to L^0(X, \mathcal{B}, \mu)$ 在 0 处连续 ;

(B2) 集合 $\{f \in \mathbb{B} : \lim S_n f(x) \text{ exists } a.e.\}$ 在 $\mathbb{B}$ 中是闭集。

反过来，如果对所有 $f \in \mathbb{B}$，$\lim S_n f(x)$ 几乎处处存在，那么显然对每个 $f \in \mathbb{B},\ S^*f(x) < \infty$ 几乎处处成立。

注意，线性算子 S_n 的连续性，以及对每个 $f \in \mathcal{B},\ S^*f(x) < \infty$ 几乎处处成立这一假设，意味着存在一个非增函数$C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，使得

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0$$

and

$$\forall f \in \mathcal{B},\ \forall \alpha > 0, \qquad \mu\{x : S^*f(x) > \alpha\|f\|\} \leq C(\alpha).$$

更多细节请参见 [48, 定理 5.1。2] 。最后一个不等式通常称为极大不等式。

我们有关于 L^p-欣钦序列（$1 \leq p < \infty$）的如下刻画 .

定理 2.1 (L^p-欣钦序列的刻画，适用于 $1 \leq p < \infty$)。 假设 $1 \leq p < \infty$。整数序列 (λ_n) 是欣钦序列，当且仅当对每个 $f \in L^p(\mathbb{T})$，$T^*f(x) < \infty$**m**-几乎处处成立，其中 $T^*f(x)$ =上确界$_n |T_n f(x)|$ （T_n 为欣钦算子）。

证明。 必要性显然。

下面证明充分性。对上文定义的欣钦算子 (T_n) 应用巴拿赫原理，其中 $\mathbb{B} = L^p(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}),\ \mathbf{m})$，$\mathbf{m}$ 为勒贝格测度。由于 $1 \leq p < \infty$，连续函数在 $L^p(\mathbb{T})$ 中稠密。另一方面，对于每个连续函数 f，极限 $\lim_{n\to\infty} T_n f(x)$ 几乎处处存在，因为对于几乎每个 x，$(\lambda_k x)$ 都是等分布的。于是，根据巴拿赫原理，对于每个$f \in L^p(\mathbb{T})$，极限 $\lim_{n\to\infty} T_n f(x)$ 几乎处处存在。为确认该极限等于 $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx$，我们应用定理 3.1 ；该定理保证 $T_n f$ $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx$ 的 L^p-收敛。定理 3.1 将在紧阿贝尔群上的群自同态这一框架下证明。□

这个针对 $1 \leq p < \infty$ L^p-欣钦序列的刻画将非常有用。但在 $p = \infty$ 的欣钦问题中，上述巴拿赫原理并不适用，因为连续函数在 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中不稠密。黎曼可积函数也不稠密。

现在介绍 Bellow-Jones 原理。设

$$B_\infty = \{f \in L^\infty(\mu) : \|f\|_\infty \leq 1\}$$

为 $L^\infty(X,\ \mathcal{B},\ \mu)$ 的闭单位球。已知，限制在B_∞ 上的度量 $d(f,\ g)$ 对每个 $1 \le p < \infty$ 都等价于度量 $\|f-g\|_p$。因此，对于由 $d(\cdot,\ \cdot)$ 或 $\|\cdot\|_p$ 定义的任意此类度量， B_∞ 都是完备度量空间。下文中，我们始终使用 B_∞ 的这一拓扑。Bellow 和 Jones 对巴拿赫原理作了如下修改。

Bellow-Jones Principle [7].假设每个线性算子

$$S_n : L^\infty(X,\mathcal{B},\mu) \to L^0(X,\mathcal{B},\mu)$$

都是连续的，即依概率连续。设 $S^*f(x) < \infty$ 几乎处处成立，对每个$f \in L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$ 均如此，并且 $S^*\colon B_\infty \to L^0(X,\mathcal{B},\mu)$ 在0处连续。则

(B3) 集合 $\{f \in B_\infty : \lim S_n f(x)$ 存在 $a.e.\}$ 在 B_∞ 中是闭集。

反过来，若对所有 $f \in L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$，$\lim S_n f(x)$ 几乎处处存在，则对每个 $f \in L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$，$S^*f(x) < \infty$ 几乎处处成立，并且 $S^*\colon B_\infty \to L^0(X,\mathcal{B},\mu)$ 在0处连续。

与巴拿赫原理相比，Bellow-Jones 原理要求额外条件： S^*在 0 处连续，这意味着当$f_n \in B_\infty$ 依概率趋于 0 时， S^*f_n 也依概率趋于 0。若将巴拿赫原理应用于 $\mathbb{B} = L^\infty(X,\mathcal{B},\mu)$，结论 (B1) 表明，当 $\|f_n\|_\infty \to 0$ 时， S^*f_n 依概率趋于 0。后一断言比额外条件弱，因为 $\|f_n\|_\infty \to 0$ 比 f_n依概率趋于 0 更强。

定理 2.2 （欣钦序列的 L^∞-刻画）。 整数序列（λ_n）是 L^∞-欣钦序列，当且仅当对每个 $f \in L^\infty$（$\mathbb{T}$）和T^*： $B_\infty \to B_\infty$ 在0处连续，其中 B_∞ 赋有依概率收敛拓扑。

证明。必要性可直接由 Bellow-Jones 原理得出。

为证明充分性，我们将 Bellow-Jones 原理应用于空间 $L^\infty(\mathbb{T},\ \mathcal{B},\ \mathbf{m})$ 上的算子 (T_n)。注意， B_∞ 中的连续函数在 B_∞ 中稠密，且对每个连续函数 f，极限 $\lim_{n\to\infty} T_n f(x)$ 几乎处处存在。因此，对每个 $f \in L^\infty(\mathbb{T})$，$\lim_{n\to\infty} T_n f(x)$ 几乎处处存在。为确认该极限等于 $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx$，我们仍可应用定理 3.1，因为对每个 $1 \le p < \infty$， $f \in L^p(\mathbb{T})$。□

我们将在下一节讨论任意紧阿贝尔群上的群自同态欣钦序列，上述刻画对这些序列仍然成立。

2.2. **欣钦性质取决于排序**。 首先我们注意到，当讨论欣钦类时，排序很重要。只需考察 $\mathbb{N}$ （按自然递增顺序排列）。Marstrand 证明了 $\mathcal{K}_{\mathbb{N}} \not\supset L^\infty(\mathbb{T})$。然而，重新排列 $\mathbb{N}$ 可以使 $\mathbb{N}$ 成为欣钦序列。

定理2.3。 存在一种对 $\mathbb{N}$ 的重新排序 $\{r_n\}$，使得 $\mathcal{K}_{\{r_n\}} = L^1$（$\mathbb{T}$）。

证明。 令 P 为幂 2^n $(0 \le n < \infty)$ 的递增序列。令 P' 为幂 2^{3^m} $(0 \le m < \infty)$ 的递增序列，它是 P的一个非常“小”的子序列。将 $\mathbb{N}\setminus(P\setminus P') = (\mathbb{N}\setminus P)\sqcup P'$按递增顺序排列为 $\{b_0, b_1, \cdots, b_m, \cdots\}$。然后，我们将 P 中的 2^{3^m} 替换为 b_m，得到序列 $P^* = \{r_n\}$，它是 $\mathbb{N}$的一个重新排序。假设$f \in L^1(\mathbb{T})$。根据 Birkhoff定理，我们有

$$a.e. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(2^k x) = \int f d\mathbf{m}. \tag{2.1}$$

这是一个很漂亮的等式。当 $k = 3^m$时，项 $f(2^{3^m}x)$将被去掉。我们将证明该等式仍然成立，见下文 (2.2)。当项 $f(2^{3^m}x)$被去掉时，我们用 $f(b_m x)$替换它。我们还将证明这一修改也不会影响该等式，见 (2.3)。

由于 $f(2^k x) = o(k)$ 几乎处处成立（这是 (2.1) 的推论），我们有 $f(2^{3^m}x) = o(3^m)$，因此

$$a.e. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m:3^m<n} f(2^{3^m}x) = 0. \tag{2.2}$$

另一方面，由于 $\sum n^{-2} \int |f(nx)|dx < \infty$，我们有 $f(nx) = O(n^2)$ 几乎处处成立，因此

$$a.e. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m:3^m<n} f(b_m x) = 0, \tag{2.3}$$

因为 $b_m = O(m^2)$ 且 $\sum_{k:\ 3^m<n} b_m^2$ 至多相差一个常数的有界量

$$\sum_{k:3^m<n} m^4 = o(\log^5 n).$$

结合 (2.1)、(2.2) 和 (2.3) 得到

$$a.e. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(r_k x) = \int f d\mathbf{m}.$$

□

In 以下，整数序列均假定按递增顺序排列 d.

2.3. 欣钦序列的并集与交。 考虑两个整数的递增序列 $A = (a_n)$ 和 $B = (b_n)$。我们用 $A \vee B$ 表示将并集 $A \cup B$ 中的整数重新排序后得到的递增序列。注意，重复的整数只计数一次，并且我们始终按递增顺序排列 $A \vee B$ 中的整数。我们将证明，如果 (a_n) 和 (b_n) 是欣钦序列，那么 $(a_n) \vee (b_n)$ 也是欣钦序列。欣钦序列的子序列也同样被考虑。

关于子序列，我们需要相对密度的概念。令 $\Lambda \subset \mathbb{N}$，并令 $E \subset \Lambda$ 为 Λ 的子集。我们将 E 在 Λ 中的下密度定义为

$$\underline{d}_\Lambda(E) = \varliminf_{N\to\infty} \frac{|E \cap [1, N]|}{|\Lambda \cap [1, N]|}.$$

E 在 Λ 中的上密度 $\overline{d}_\Lambda(E)$ 类似地通过下极限定义。如果 $\underline{d}_\Lambda(E) = \overline{d}_\Lambda(E)$，我们用 $d_\Lambda(E)$ 表示这个共同值，称为 E 在 Λ 中的密度。

当 $\Lambda = \mathbb{N}$ 时，我们将讨论下密度 $d(E) := \underline{d}_{\mathbb{N}}(E)$ 等。

定理 2.4. 设 $A = (a_n)$ 和 $B = (b_n)$ 是某个$1 \le p \le \infty$对应的两个 L^p-欣钦序列。设 $A' \subset A$ 是 A 的一个子序列。那么

(a) $A \vee B$ 是一个 L^p-欣钦序列。(b) A' 是一个 L^p-欣钦序列，如果 $d_A(A') > 0$。(c) $A \cap B$ 在条件 $d_A(A \cap B) > 0$下是一个 L^p-欣钦序列。

证明。我们先引入以下记号。设 $f \in L^p(\mathbb{T})$。记

$$\begin{aligned} A_n f(x) &= \frac{1}{|A \cap [1,n]|} \sum_{a \in A \cap [1,n]} f(ax), \\ B_n f(x) &= \frac{1}{|B \cap [1,n]|} \sum_{a \in B \cap [1,n]} f(ax), \\ U_n f(x) &= \frac{1}{|(A \cup B) \cap [1,n]|} \sum_{a \in (A \cup B) \cap [1,n]} f(ax). \end{aligned}$$

Let

$$A^* f(x) := \sup_{n \geq 1} |A_n f(x)|, \quad B^* f(x) := \sup_{n \geq 1} |B_n f(x)|, \quad U^* f(x) := \sup_{n \geq 1} |U_n f(x)|.$$

当 $1 \leq p < \infty$ 时的 (a) 证明。由定理 2.1，只需证明

$$U^* f(x) < \infty \quad \text{a.e. for every } f \in L^p(\mathbb{T}).$$

由于极大算子是次线性的，不失一般性，我们可以假设$f(x) \geq 0$ 几乎处处。关键在于以下观察:

$$\sum_{a \in (A \cup B) \cap [1,n]} f(ax) = \sum_{a \in A \cap [1,n]} f(ax) + \sum_{a \in B \cap [1,n]} f(ax) - \sum_{a \in (A \cap B) \cap [1,n]} f(ax).$$

由于 f 非负，我们得到

$$U_n f(x) \leq \frac{|A \cap [1,n]|}{|(A \cup B) \cap [1,n]|} \cdot A_n f(x) + \frac{|B \cap [1,n]|}{|(A \cup B) \cap [1,n]|} \cdot B_n f(x).$$

Then

$$\forall\ 0 \leq f \in L^p(\mathbb{T}), \qquad U^* f(x) \leq A^* f(x) + B^* f(x) < \infty \ \ a.e.$$

beca利用 A 和 B 是 L^p-欣钦序列，由定理 2.1 可得

$$\forall\ 0 \leq f \in L^p(\mathbb{T}), \quad A^* f(x) < \infty \ a.e \text{ and } \ B^* f(x) < \infty \ a.e.$$

当 $1 \leq p < \infty$ 时的 (b) 证明。只需注意，对于非负的 $f \in L^p(\mathbb{T})$

$$\frac{1}{|A' \cap [1,n]|} \sum_{a \in A' \cap [1,n]} f(x) \leq \frac{|A \cap [1,n]|}{|A' \cap [1,n]|} \cdot \frac{1}{|A \cap [1,n]|} \sum_{A \cap [1,n]} f(ax).$$

根据假设和定理 2.1，我们有 $A^* f(x) < \infty$ 几乎处处成立，因此

$$\sup_n \frac{1}{|A' \cap [1,n]|} \sum_{a \in A' \cap [1,n]} f(x) \leq C A^* f(x) < \infty \quad a.e.,$$

对于某个依赖于相对密度 $d_A(A') > 0$ 的常数 $C > 0$ 。左边的项正是与子序列 A' 相关联的极大函数。最后应用定理 2.1 即得结论。

当 $p = \infty$ 时 (a) 的证明。上述估计 $U^* f(x) \leq A^* f(x) + B^* f(x)$ 对非负函数 $f \in L^\infty$ 仍然成立。于是，对于复值函数 $f \in L^\infty$ ，我们有

$$U^* |f|(x) \leq 4[A^* |f|(x) + B^* |f|(x)].$$

根据假设和定理 2.2，对于 $f \in B_\infty$，有 $A^* |f|(x) < \infty$ 几乎处处成立，且 $B^* |f|(x) < \infty$ 几乎处处成立，因此 $U^* f(x) < \infty$几乎处处成立。根据假设和定理 2.2， $A^* :\ B_\infty \to B_\infty$

并且 $B^*:\ B_\infty \to B_\infty$ 在 0 处连续。因此，$U^*:\ B_\infty \to B_\infty$也如此。最后应用定理 2.2 即可得出结论。

当 $p=\infty$ 时的 (b) 的证明。论证与 $p=\infty$ 的 (a) 的证明类似。

Pro(c) 的证明。这是 (b) 的推论，因为 $A\cap B$ 是 A 的子序列。 □

以下结论直接由定理 2.4 以及 Marstrand 的结果得出：$\mathbb{N}$ 不是一个 L^∞-欣钦序列。

推论 2.5。如果将 $\mathbb{N}$ 分解为两个不相交集合 Λ_1 和 Λ_2，那么集合 Λ_1 和 Λ_2 中至少有一个不是 L^∞-欣钦序列（该序列由集合中的整数按递增顺序排列而成）。

以下推论由 $\{2^n\}$ 和 $\{3^m\}$ 是 L^1-欣钦序列这一事实得出。

推论 2.6。$\{2^n\}\vee\{3^m\}=\{1,2,3,4,8,9,16,27,32,64,81,\cdots\}$ 是一个 L^1-欣钦序列。

下面的推论由以下事实得出：$\{2^n3^m:\ n\ge 0,\ m\ge 0\}$ 和 $\{3^n5^m:\ n\ge 0,\ m\ge 0\}$ 都是 L^1-欣钦序列。

推论 2.7。$\{2^n3^m:\ n\ge 0, m\ge 0\}\vee\{3^n5^m:\ n\ge 0, m\ge 0\}$ 是一个 L^1-欣钦序列。

2.4. **乘法构造与建议探讨的问题**。构造较规则或较不规则的整数序列有多种方法，我们将研究它们的欣钦类。下面介绍一种方法。首先回顾一下，每个满足 $|a|\ge 2$ 的整数 a都定义了一个扩张满同态 $\tau_a(x)=ax$ 模 1，它作用于 $\mathbb{T}$并保持勒贝格测度。考虑乘积空间 $\Omega:=(\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\})^{\mathbb{N}}$。$\Omega$ 中的任意序列 $(\omega_n)\in$ 都会生成一个（稀疏）整数序列 $(\omega_n\cdots\omega_2\omega_1)_{n\ge1}$。下面的问题自然而然地出现了。

问题 1. 这个序列$(\omega_n\cdots\omega_2\omega_1)_{n\ge1}$的欣钦类是什么？在什么条件下，$(\omega_n\cdots\omega_2\omega_1)_{n\ge1}$ 是欣钦序列？

$(\omega_n\cdots\omega_2\omega_1)_{n\ge1}$ 的欣钦类取决于 $\omega\in\Omega$。引言中提到的例子都是上述构造的特例。赖科夫例子(2^n)对应于对所有 $n\ge1$ 取 $\omega_n=2$ 的情形，而Rosenblatt 的例子(2^{2^n})对应于对所有 $n\ge1$取$\omega_n=2^{2^{n-1}}$ 的情形。如果对所有 $n\ge1$取 $\omega_n=2^{2n-1}$，我们得到 $\omega_n\cdots\omega_2\omega_1=2^{n^2}$，相应的序列$(2^{n^2})$曾由布尔甘、布措利奇和莫尔丁研究。

空间 Ω 很大（在乘积拓扑下并非紧致）。要回答其中每个 ω 对应的问题 1，似乎并不现实。我们可以考虑一个比 Ω 小的空间 Ω_0。这样，针对 $\omega\in\Omega_0$ 的问题 1 就会简单一些。例如，固定两个整数，比如 2 和 3，并考虑 $\Omega_0:=\{2,3\}^{\mathbb{N}}$。

我们提出的问题 1 的一个子问题如下。我们独立地取 2 或 3，从而得到一个由 2 或 3 组成的随机序列（ω_n）。更准确地说，我们假设 ω_n's 相互独立，且 $P(\omega_n=2)=p=1-P(\omega_n=3)$（$0<p<1$ 固定）。于是，我们称（ω_n）为一个由 2 或 3 组成的 p-伯努利序列。

问题2。设 (ω_n) 是一个 p-伯努利序列，其取值为2或3。$(\omega_n\cdots\omega_2\omega_1)_{n\ge1}$ 几乎必然是欣钦序列吗？

我们可以猜想，对于某个 $p \geq 1$，$(\omega_n \cdots \omega_2\omega_1)_{n\geq 1}$ 几乎必然是一个 L^p-欣钦序列。我们无法证明这一猜想，但可以证明以下结果。该结果支持这一猜想，但距离猜想所述的结论仍相去甚远。

定理 2.8。 如果(ω_n) 是某个 $0 < p < 1$ 的 p-伯努利序列，取值为2 或3 ，那么对于任意 $f \in L^1(\mathbb{T})$，我们有 $f \in \mathcal{K}_{\{\omega_n \cdots \omega_1\}}$ 几乎处处成立。

定理 2.8 是我们将要证明的一个结果（见定理 4.5）的非常特殊情形。实际上，利用安斋斜积构造，可以构造出一大类随机欣钦序列的候选者，甚至可以在任意紧阿贝尔群上进行构造。

空间 $\Omega_0 = \{2,3\}^{\mathbb{N}}$ 是一个紧致度量空间。移位映射 $\sigma : \Omega_0 \to \Omega_0$ 定义为 $(\sigma\omega)_n = \omega_{n+1}$，且是连续的。因此，我们得到一个拓扑动力系统 (Ω_0, σ)。空间 Ω_0 仍然很大。我们可以考虑 Ω_0, 的子空间，例如子移位，即闭的σ-不变子空间 Ω_{00} （即 $\sigma(\Omega_{00}) \subset \Omega_{00}$）。这样的子系统很多 (Ω_{00}, σ)。它们可以是极小的（即，每个轨道 $(\sigma^n\omega)_{n\geq 0}$ 在 Ω_{00} 中都是稠密的），也可以是唯一遍历的（即，在 Ω_{00} 上存在唯一的 σ-不变概率测度）。

问题 3. 设Ω_{00} 是Ω_0 的一个极小且唯一遍历的子移位。对于每个 $\omega \in \Omega_{00}$，$(\omega_n \cdots \omega_2\omega_1)_{n\geq 1}$ 是否都是 L^p-欣钦序列?

是的，我们将证明图埃-莫尔斯子移位就是这种情况（见定理 2.10）。这是我们所知的第一个此类例子。此后，文献证明了这一结论对与平衡原始替代序列相关的子移位类成立。例如，斐波那契序列（ω_n） $\in \{2,3\}^\infty$ 的 2 和 3 就是这种情况。

回忆一下，Ω_0 是一个完备的度量（紧致）空间。我们来考察 Ω_0, 中那些能产生欣钦序列的序列所构成的集合，记作$K_{2,3}$。

问题 4. 是否存在$K_{2,3} \neq \Omega_0$ （即存在由2 和3组成的序列，使其首项乘积不构成欣钦序列）？ $K_{2,3}$ 是Ω_0中的第二纲贝尔集吗?

问题 4 中的第一个问题有肯定答案：在 [25],中，作者利用 Avila 和 Candela 提出的罗赫林引理 [2]构造了 $\Omega_0 = \{2,3\}^\infty$ 中的非欣钦序列。但我们尚未回答第二个问题。

类似地，我们用 $K_{2,\ 3,\ 4,\ \cdots}$ 表示 $\{2,3,4,\cdots\}^\infty$ 中（可以选取任意大于 2 的整数）经乘法作用后产生欣钦序列的序列集合。在这种情况下，我们知道$K_{2,\ 3,\ 4,\ \cdots}$ 是 $\{2,3,4,\cdots\}^\infty$的真子集。Rosenblatt 的反例不属于$K_{2,\ 3,\ 4,\ \cdots}$。

问题5。 $K_{2,\ 3,\ 4,\ \cdots}$ 是 $\{2,3,4,\cdots\}^\infty$ 中的第二类贝尔纲集合吗?

让我们在问题列表中加入下面这个问题。

问题6. 假设 (a_n) 是欣钦序列。那么平移序列 (a_n+a)（其中 $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$）仍是欣钦序列吗？特别地，$(2^n + 1)$ 是欣钦序列吗?

2.5. 图厄-莫尔斯序列是欣钦序列。 将 2 和 3 视为字母表 $\{2,3\}$ 中的字母，然后考虑替换

$$2 \mapsto 23, \quad 3 \mapsto 32$$

它生成图厄-莫尔斯序列（t_n）：

$$2, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, \cdots$$

（参见 [40] 关于代换）。接着考虑稀疏序列（t_n^*），它由以下乘积定义

$$t_n^* = t_n \cdots t_2 t_1.$$

我们称（t_n^*）为 2 和 3 的 *Thue-Morse* 乘积序列。（t_n^*）$_{n\geq 1}$ 的前几项为：$2^1 \cdot 3^0$，$2 \cdot 3$，$2 \cdot 3^2$，$2^2 \cdot 3^2$，$2^2 \cdot 3^3$，$2^3 \cdot 3^3$，$2^4 \cdot 3^3$，$2^4 \cdot 3^4$，$2^4 \cdot 3^5$，$2^5 \cdot 3^5$，$2^6 \cdot 3^5$，$2^6 \cdot 3^6$，$2^7 \cdot 3^6$，$\cdots$或

$$2 \cdot 6^0, 6, 3 \cdot 6;\quad 6^2, 3 \cdot 6^2;\quad 6^3, 2 \cdot 6^3;\quad 6^4, 3 \cdot 6^4;\quad 6^5, 2 \cdot 6^5;\quad 6^6, 2 \cdot 6^6;\quad \cdots \tag{2.4}$$

我们看到（t_n^*）$_{n\geq 1}$中有三类项：$a \cdot 6^n$，其中 $a = 1$，2，3。定义

$$\mathcal{U}_a = \{n \geq 0 : a \cdot 6^n = t_m^* \text{ for some } m\}, \qquad (a = 1, 2, 3).$$

显然，$6^{\mathcal{U}_1}$、$2 \cdot 6^{\mathcal{U}_2}$ 和 $3 \cdot 6^{\mathcal{U}_3}$ 的并集是所有满足 $n \geq 1$的 λ_n 的集合 .

引理 2.9。 $\mathcal{U}_1$、$\mathcal{U}_2$ 和 $\mathcal{U}_3$ 的密度分别等于$d_1 = \frac{1}{2}$、$d_2 = \frac{1}{4}$和$d_3 = \frac{1}{4}$。 – –

–

证明。 *</style}*对于该领域的专家而言，这一结果众所周知。为方便读者，我们给出证明。由于序列（）是由 *23* 和 *32* 构成的序列，显然的密度为*1 2*。注意，$n \in \mathcal{U}_2$ 当且仅当 $n = 2m + 1$ 和 $t_{2m+1} = 2$成立，且 $n \in \mathcal{U}_3$ 当且仅当 $n = 2m + 1$ 和$t_{2m+1} = 3$成立。然而，已知（t_{2m+1}）$_{m\geq 0}$ 也是一个图厄-莫尔斯序列，并且还已知（t_n）中 2 和 3 的出现频率均等于$_{1\ 2}$。因此，$\mathcal{U}_2$ 和 $\mathcal{U}_3$的密度均为$_{1\ 4}$。□

现在我们可以陈述并证明以下结果。

定理 2.10. *Thue-Morse* 乘积序列 $(t_n^*)_{n\geq 1}$ 是一个 L^1-欣钦序列。

证明. 对于 $f \in L^1(\mathbb{T})$ 和 $N \geq 1$，我们有

$$\sum_{n=1}^{N} f(t_n^* x) = \sum_{k\in\mathcal{U}_1, 6^k\leq N} f(6^k x) + \sum_{k\in\mathcal{U}_2, 2\cdot 6^k\leq N} f(2 \cdot 6^k x) + \sum_{k\in\mathcal{U}_3, 3\cdot 6^k\leq N} f(3 \cdot 6^k x).$$

根据定理 2.4 (b) 以及勒贝格测度关于$x \mapsto 6x$ 模 1 是遍历的这一事实，我们有

$$a.e. \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k\in\mathcal{U}_a, a\cdot 6^k\leq N}^{N} f(a \cdot 6^k x) = d_a \int f(ay)dy = d_a \int f(z)dz$$

对于 $a = 1$，2 和 3。因此

$$a.e. \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(t_n^* x) = (d_1 + d_2 + d_3) \int f(z)dz = \int f d\mathbf{m}.$$

□

这里的证明基于图厄-莫尔斯序列的特定结构。关键在于，式 (2.4) 中只有 6 的幂。对于斐波那契序列，这种论证并不适用，因为它不像图厄-莫尔斯序列那样以 6 为基数。不过，[25] 现在已经证明了如下结果。

定理 2.11 ([25])。 任意 C-平衡原始替代序列都能以我们上文介绍的方式产生一个欣钦序列。

因此，对于由一个 C-平衡序列定义的子移位，问题 3 得到了肯定回答。

回顾一下，替换 σ 定义为给定有限字母表 A 上的自由幺半群的非消去态射，并且存在一个在 σ作用下保持不变的无限词；若存在整数 n，使得 n对 σ 的任意字母的 n 次迭代像 σ^n 都包含字母表中的所有字母，则称其为本原的 。

若字母表 A 上的无限词 u 满足：对于 u 的任意两个等长因子（w, w'）以及字母表中的任意字母 a，该字母 a 在这两个因子中的出现次数之差 $||w|_a - |w'|_a|$ 的绝对值都不超过某个常数 $C \geq 1$，则称该无限词 u 为 C-平衡的 。当 $C = 1$时，通常称词 u为平衡的。无限词 u 的平衡函数 $B(n)$定义如下：

$$B(n) = \max_{a \in A} \max_{|w|=|w'|=n} ||w|_a - |w'|_a|$$

（上确界取遍因子 w, w' of u），其中 $|w|_a$ 表示字母 a 在词 w中的出现次数。Adamczewski [3] 根据替换 σ 的关联矩阵的第二大特征值，对平衡函数的行为作出了精确描述。特别地，由本原替换不动点得到的无限词是 C-平衡的（对某个常数 C），当且仅当关联矩阵的第二大特征值的模小于 1（这就是 Pisot 情形），或者它是模为 1 的单特征值，并且满足某种额外的组合条件；该条件不仅取决于关联矩阵，还取决于各字母出现的顺序（即替换对各字母的像中字母的排列顺序）。

我们的斐波那契序列定义如下：

$$2 \mapsto 23, \quad 3 \mapsto 2.$$

斐波那契序列的前几项为：

$$2, 3, 2, 2, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 3, 2, 2, 3, \cdots .$$

2.6. **正则函数与欣钦类**。 整数序列 (λ_n) 若满足对某个 q 有 $\inf_k \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \geq q > 1$，则称为 Hadamard 稀疏序列。下面陈述 Erd¨os 的一个结果，该结果指出，具有某种正则性的函数属于欣钦类 $\mathcal{K}_{\{\lambda_n\}}$。

定理 2.12 (厄¨尔 [19]) 。 设 (λ_n) 是一个由整数构成的 *Hadamard* 间隙序列。设$f \in L^2(\mathbb{T})$。那么， $f \in \mathcal{K}_{\{\lambda_n\}}$ 若存在常数 $A > 0$ 和 $\alpha > 0$，使得当N 充分大时，我们有

$$\sum_{|n| \geq N} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \frac{A}{(\log \log N)^\alpha}. \tag{2.5}$$

正如 Rosenblatt 的例子所示，一般而言，要使 f 属于欣钦类， f 必须具备一定的正则性。厄尔多什的条件 (2.5) 就是这样一个充分条件。

将上述 Erd¨os 结果与 Cuny 和 Fan [16]的一个结果的推论进行比较是很有意思的。

定理 2.13 ([16])。 设(λ_n)是一个由整数构成的 *Hadamard* 间隙序列。设 $f \in L^2(\mathbb{T})$ 满足 $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = 0$。假设存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$\sum_{|n|>N} |\widehat{f}(n)|^2 = O\left(\frac{1}{\log^{1+\epsilon} N}\right). \tag{2.6}$$

那么对于任意平方可和序列 (a_n)，级数 $\sum a_n f(\lambda_n x)$ 几乎处处收敛。

证明。 [16]中的一个结果断言，若

$$\omega_{f,2}(\delta) = O\left(\frac{1}{\log^{\alpha/2} \frac{1}{\delta}}\right)$$

对于某个 $\alpha > 1$，其中 $\omega_{f,\ 2}(\cdot)$ 是 f 的 L^2-连续模，定义为

$$\omega_{f,2}(\delta) = \sup_{|h|\le\delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_2.$$

我们将利用关于 f 的傅里叶系数所作的假设来检验这一条件。事实上，

$$\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_2^2 = \sum_n |\widehat{f}(n)|^2 |e^{2\pi inh} - 1|^2 = 4\sum_n |\widehat{f}(n)|^2 |\sin \pi nh|^2.$$

令 $R(N) = \sum_{|n|>N} |\widehat{f}(n)|^2$. 取整数 $N = [h^{-1/2}]$，使得 $Nh \le h^{1/2}$ 且

$$\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_2^2 \le 4 \sum_{|n|\le N} |\widehat{f}(n)|^2 (nh)^2 + 4R(N) \le 4\|f\|_2^2 h + 4R(h^{-1/2}).$$

由于 $R(N) = O(1/\log^{\alpha} N)$，上述估计中的主项为 $R(h^{-1/2})$。于是我们得到了所需的估计。□

加波什金 [31]给出了一个例子，说明条件 (2.6) 是最优的，即 ϵ 不能降为0。

3. Khintchin sequences of group endomorphisms

本节将欣钦序列的概念推广到任意紧阿贝尔群。在这类群上的自同态不一定交换，这使问题更具挑战性。

3.1. 紧阿贝尔群上的满同态。考虑一个紧阿贝尔群$\curvearrowright G$ ，其对偶群为 G ，哈尔测度为 dx，有时记作$\mathbf{m}$。令 $C(G)$为定义在 G上的连续函数所构成的巴拿赫空间，并赋予上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$。 $C(G)$的对偶空间 $C(C)^*$ 可表示为 G上有限博雷尔测度构成的空间 $M(G)$。若点列（x_n）$_{n\ge0}$ 取自 G ，且概率测度 $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{x_k} \in M(G)$按弱*拓扑收敛到哈尔测度，则称其为等分布或均匀分布；也就是说，对每个连续函数 $f \in C(G)$，都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_n) = \int_G f d\mathbf{m}. \tag{3.1}$$

$\widehat{}$一个等价的表述（韦伊判别法）是：对任意 $\gamma \in G \setminus \{1\}$，都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma(x_n) = 0.$$

关于 [34] 请参阅此处，以获取有关紧群（甚至非阿贝尔群）上一致分布的更多信息。

我们用 End(G) 表示 G 上所有连续端同态构成的半群，用 Epi(G) 表示 G 上所有连续满射端同态构成的半群（也称为满同态），并用 Aut(G) 表示 G 的所有连续自同构构成的群。任何满同态都保持哈尔测度。让我们回顾这一事实的简单证明。设 τ 是 G 上的一个满同态，B 是 G 的一个博雷尔集。对于任意 $y \in G$，存在某个 $y' \in G$，使得 $\tau(y') = y$，从而

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \circ \tau^{-1}(B - y) &= \int 1_B(\tau(x) + y) d\mathbf{m}(x) = \int 1_B(\tau(x) + \tau(y') d\mathbf{m}(x) \\ &= \int 1_B(\tau(x + y') d\mathbf{m}(x) = \int 1_B(\tau(x) d\mathbf{m}(x) = \mathbf{m} \circ \tau^{-1}(B). \end{aligned}$$

让我们来看两个紧阿贝尔群的典型例子。

例 1。已知对于 $G = \mathbb{T}^d$（即 d 维环面），我们有

$$\mathrm{End}(\mathbb{T}^d) \simeq M_d(\mathbb{Z}), \quad \mathrm{Epi}(\mathbb{T}^d) \simeq GL_d(\mathbb{Z}), \quad \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^d) \simeq SL_d(\mathbb{Z}),$$

其中，$M_d(\mathbb{Z})$ 是整矩阵的集合（即元素属于 $\mathbb{Z}$ 的矩阵），$GL_d(\mathbb{Z})$ 是满足 $\det M \neq 0$ 的整矩阵 M 的集合，而 $SL_d(\mathbb{Z})$ 是满足 $\det M = \pm 1$ 的整矩阵 M 的集合（参见 [47], 第 15 页）。因此，$\mathbb{T}^d$ 上的端同态具有 $x \mapsto Ax \mod \mathbb{Z}^d$ 的形式，其中 $A \in M_d(\mathbb{Z})$ 为某个矩阵。保持哈尔测度的端同态正是满射端同态。其中一些满射端同态关于哈尔测度是遍历的，其特征在于相应矩阵没有以单位根为特征值的根（参见 [47]）。

例 2. 对于加法群 $\mathbb{Z}_p$ of p-进数，我们有

$$\mathrm{End}(\mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p, \quad \mathrm{Epi}(\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{U},$$

其中 $\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\}$ 是 $\mathbb{Z}_p$的单位群，这里将 $\mathbb{Z}_p$ 视为 p-进整数环。因此，$\mathbb{Z}_p$ 上的满同态（或等价地，自同构）具有形式 $x \to ax$，其中 $a \in \mathbb{U}$。但是请注意，$\mathbb{Z}_p$ 上没有任何满同态能关于哈尔测度遍历，因为 $p^m\mathbb{Z}_p$ 都是关于$m \geq 1$的具有正测度的不变集。关于群 $\mathbb{Z}_p$的信息，请参阅 [33]。

回到一般的紧阿贝尔群 G。任意自同态 $\tau \in$End(G)$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$都会诱导出其伴随映射，即 G上的连续自同态 $\tau^* : G \to G$，具体为

$$\tau^*(\gamma) = \gamma \circ \tau \quad \text{for} \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

容易看出，τ^* 是单射（分别地，满射）当且仅当 τ 是满射（分别地，单射）。这里我们将“单射”作为“injective”的同义词，将“满射”作为“surjective”的同义词。我们假定所有自同态$\widehat{}$都是满射，因此它们的伴随映射都是单射。由于 G 是离散的，$\widehat{}$动力系统（G，τ^*）相对简单，可用作研究满同态在 G上的作用的工具。例如，众所周知，一个满同态是遍历的（相对于哈尔测度）当且仅当每个特征 $\gamma \neq 1$ 的 τ^*-轨道都是无限的

（这里，1 表示对偶群的单位元，其运算假定为乘法。）

3.2. **欣钦类与欣钦序列的概念。** 设给定一个满态射序列 $\{\tau_n\} \subset \mathrm{Epi}(G)$，其中圆周群 G 是一个紧阿贝尔群。我们将研究群 G 上序列 $\{\tau_n x\}_{n\geq 1}$在 $x \in G$时的一致分布。首先要找出 $\{\tau_n\}$ 的条件，使得 $\{\tau_n x\}_{n\geq 1}$ 对几乎所有 $x \in G$都均匀分布。如果 $\{\tau_n x\}_{n\geq 1}$ 对几乎所有 $x \in G$都均匀分布，我们就称 $\{\tau_n\}$ 是满同态的均匀分布序列 。沿用 [26] 对 $\mathbb{Z}$中的欣钦类的研究，对于均匀分布序列 $\{\tau_n\} \subset \mathrm{Epi}(G)$，我们将其欣钦类定义为：

$$\mathcal{K}_{\{\tau_n\}} = \left\{ f \in L^1(G) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_n x) = \int f d\mathbf{m} \ \ a.e. \right\}.$$

由于 $\{\tau_n\}$ 是均匀分布序列，我们有 $\mathcal{K}_{\{\tau_n\}} \supset C(G)$。此外，如果 B 是 G 中的博雷尔集，且 $\mathbf{m}(\partial B) = 0$，则有 $1_B \in \mathcal{K}_{\{\tau_n\}}$，其中 ∂B 表示 B 的边界。对于一般的博雷尔集 B， $1_B \in \mathcal{K}_{\{\tau_n\}}$ 未必成立。即使在 $G = \mathbb{T}$ 的情况下也是如此（ Marstrand[37]），正如我们之前提到的。

当 $\mathcal{K}_{\{\tau_n\}} = L^1(G)$ 时，我们称 $\{\tau_n\}$ 是 欣钦序列，对应于 G。 当 $\mathcal{K}_{\{\tau_n\}}$包含一个子空间 $\mathbb{B}$，该子空间属于 $L^1(G)$ 时，我们称 $\{\tau_n\}$ 是 $\mathbb{B}$-欣钦序列，对应于 G。 例如，我们可以讨论某个 $1 \leq p \leq \infty$的 L^p-欣钦序列。

^众所周知，互不相同的整数序列在 $\mathbb{Z} = T$ 中都是均匀分布序列。但这一说法对于一般的紧阿贝尔群并不成立。例如， $\mathbb{Z}_p$ 中不存在均匀分布序列，因为 $\mathbb{Z}_p$ 上的满同态都是自同构，而自同构会保持每个开集不变 $p^m\mathbb{Z}_p$ $(m \geq 1)$。如前所述，自然数集 $\mathbb{N}$ 按递增顺序排列后不是欣钦序列（Marstrand定理）；而序列 $\{2^n\}$ 是欣钦序列（Birkhoff定理），也是 Furstenberg序列，即富斯滕伯格集 $\{2^n 3^m$ 按递增顺序排列所得的序列： $n \geq 0$, $m \geq 0\}$。在一般群中，即使在 $\mathbb{T}^d$ 上且具有 $d \geq 2$，情况也更为复杂。

3.3. **L^p-收敛。** 然而，对于 ud-序列和 L^p-可积函数， L^p-收敛总是成立。

定理 3.1。 设 $1 \leq p < \infty$。设 (τ_n) 是紧阿贝尔群 G 上的满态射序列。则对于任意 $f \in L^p(G)$，有

$$L^p - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\tau_n x) = \int_G f d\mathbf{m}.$$

证明。 不妨设 $\int f d\mathbf{m} = 0$。令

$$A_N f(x) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\tau_n x).$$

只需证明

$$\lim_{N\to\infty} \|A_N f\|_p = 0. \tag{3.2}$$

由于 (τ_n) 是均匀分布序列，对于任意连续函数 f，我们有 $A_N f(x) \to 0$ 几乎处处成立，因此根据勒贝格控制收敛定理，(3.2) 对连续函数成立。

对于一般函数 $f \in L^p(G)$，其中 $\int f d\mathbf{m} = 0$，我们按如下方式用连续函数逼近 f（还有其他逼近方式）。取单位元 1_G 的一个开邻域 V_ϵ，其参数为 $\epsilon > 0$，使得当 $\epsilon \downarrow 0$时，V_ϵ 递减至 $\{1_G\}$。令

$$f^{(\epsilon)}(x) := f * \eta_\epsilon(x) = \int f(y)\eta_\epsilon(x-y)dy, \quad \text{where} \quad \eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\mathbf{m}(V_\epsilon)} 1_{V_\epsilon}(x).$$

注意，对于固定的 $\epsilon > 0$，$f^{(\epsilon)}(\cdot)$ 是连续函数；当 $\epsilon \to 0$时，$\|f - f^{(\epsilon)}\|_p \to 0$。由于

$$\|A_N f\|_p \le \|A_N f - A_N f^{(\epsilon)}\|_p + \|A_N f^{(\epsilon)}\|_p,$$

并且由于 $\|A_N f^{(\epsilon)}\|_p \to 0$（(3.2) 对连续函数已证），我们有

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \|A_N f\|_p \le \overline{\lim_{N\to\infty}} \|A_N f - A_N f^{(\epsilon)}\|_p.$$

然而，由于 τ_n 保持哈尔测度不变，我们有

$$\|A_N f - A_N^{(\epsilon)} f\|_p \le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \|f\circ\tau_n - f^{(\epsilon)}\circ\tau_n\|_p = \|f - f^{(\epsilon)}\|_p.$$

因此

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \|A_N f\|_p \le \|f - f^{(\epsilon)}\|_p.$$

令 $\epsilon \to 0$ 以完成证明。 □

推论3.2。设 (A_n) 是一个递增的扩张整系数 $d \times d$ 矩阵序列。对于任意$f \in L^p(\mathbb{T}^d)$ *(* $1 \le p < \infty$*)*，其平均值

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f(A_n \cdots A_2 A_1 x)$$

在 L^p-范数下收敛到 $\int f d\mathbf{m}$。

证明。这可由下文证明的定理 3.1 和定理 3.9 立即得到。扩张性质将在后文讨论：一个矩阵是扩张的，当且仅当其奇异值都大于 1（参见引理 3.8）。□

特别地，若 (λ_n) 是一个递增的自然数序列，使得对所有 $n \ge 1$ 都有 $\lambda_n | \lambda_{n+1}$（实际上并不需要这种整除关系），那么对于任意 $f \in L^p(\mathbb{T})$，$N^{-1}\sum_{n=1}^N f(\lambda_n x)$ 在 L^p-范数下趋于 $\int f$。Rosenblatt 的例子表明，对于一般的此类 $\{\lambda_n\}$，$N^{-1}\sum_{n=1}^N f(\lambda_n x)$ 的几乎处处收敛可能不成立。

我们指出两项与定理 3.1 相关的工作。第一项是布卢姆和汉森所得结果的以下特殊情形 [8]：如果 $\tau_n = \tau^{k_n}$ 是某个强混合自同构 τ 的 G，并且对于某个严格递增的正整数序列（k_n），那么定理 3.1 的结论对序列（τ_n）成立。非零高斯整数 $\mathbf{n} = a + ib$ 满足 a，$b \in \mathbb{Z}$ 定义了从 $\mathbb{T}^2$到

$$T_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

在 [20], the co 定理 3.1 的结论对于某个此类满同态序列得以证明 s.

3.4. 满同态的幂序列。如果 $\tau \in \mathrm{Epi}(G)$ 是幂零的（即 $\tau^m = I$ 对某个 $m \geq 1$），那么 $\{\tau^n\}$ 是周期性的，不能成为均匀分布序列。然而，如果 τ 不是幂零的，我们有如下分类。

命题 3.3。假设 $\tau \in \mathrm{Epi}(G)$ 不是幂零的。那么，$\{\tau^n\}$ 是 G 上的满态射均匀分布序列，当且仅当 τ 是遍历的。在这种情况下，我们有 $\mathcal{K}_{\{\tau^n\}} = L^1(G)$。

证明。根据伯克霍夫遍历定理，τ 的遍历性意味着 $\{\tau^n\}$ 是均匀分布序列，且 $\mathcal{K}_{\{\tau^n\}} = L^1(G)$。另一方面，$\tau$ 非遍历意味着对于某个 $\gamma \in G \setminus \{1\}$，于是对于某个 $m \geq 1$，有 $\tau^{*m}\gamma = \gamma$（我们假设 m 是最小的一个）。于是，非平凡三角多项式

$$f = \sum_{k=0}^{m-1} \tau^{*k}\gamma = \sum_{k=0}^{m-1} \gamma \circ \tau^k$$

是 τ-不变的。因此，

$$\forall x, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^n x) = f(x).$$

因此，对几乎所有的 x，$(\tau^n x)$ 都不均匀分布，因为 $f(x) \neq \int f d\mathbf{m}$ 几乎处处 $\square$ 并不成立。

让我们看看特殊群 $\mathbb{T}^d$。

推论 3.4. 假设 $\tau \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$。那么，$\{A^n\}$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的均匀分布满同态序列，当且仅当 A 没有单位根特征值。在此情况下，我们有 $\mathcal{K}_{\{A^n\}} = L^1(\mathbb{T}^d)$。

关于 $\{A^n x\}$ 的均匀分布的例外集在 [21–23中进行了研究36]。

设 τ 是 G 上的遍历满同态，设 $\mathcal{U} = \{u_k\}$ 是正整数的递增序列。于是我们考虑由 $\tau_n = \tau^{u_n}$ 定义的满态射序列 $\tau^{\mathcal{U}} := \{\tau_n\}$。

定理 3.5. 设 τ 是 G 上的遍历满同态。若 $\mathcal{U}$ 具有正下密度，则序列 $\tau^{\mathcal{U}}$ 是欣钦序列，即

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{U} \cap [1, n]|}{n} > 0.$$

证明。在这种一般的紧群情形下，我们不能直接应用定理 2.4 (b)，因为其证明依赖于将定理 3.1 应用于一个整数子序列。因此，我们给出一个自足论证。

对于在 $L^1(G)$ 中稠密的三角多项式 f，我们有

$$a.e. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{U} \cap [1, n]|} \sum_{k \in \mathcal{U} \cap [1,n]} f(\tau^k x) = \int_G f d\mathbf{m}. \tag{3.3}$$

事实上，我们只需验证 $f = \gamma \in G \setminus \{1\}$ 的情形下的 (3.3)。由于 τ^* 是首一的，函数 $f \circ \tau^k = \tau^{*k}\gamma$ 是彼此不同的特征（这里用到了遍历性），因此它们相互正交。于是，由于大数定律适用，(3.3) 得证。

接下来，为了证明对每个 $f \in L^1(G)$（无论其值如何），(3.3) 中的极限都存在，根据巴拿赫原理，我们只需为这些平均值证明一个极大不等式

$$T_n f(x) := \frac{1}{|\mathcal{U} \cap [1,n]|} \sum_{k \in \mathcal{U} \cap [1,n]} f(\tau^k x)$$

对所有 $f \in L^1(\mathbb{T})$。由于 $\mathcal{U}$ 具有正下密度，正如 Conze 所指出的 [15, Lemme4], 由经典霍普夫极大不等式很容易推出这样的不等式，因为假设 $f \geq 0$ 我们有

$$T_n f(x) \leq \frac{n}{|\mathcal{U} \cap [1,n]|} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k \in [1,n]} f(\tau^k x) \leq C \cdot \frac{1}{n} \sum_{k \in [1,n]} f(\tau^k x)$$

其中 $C > 0$ 是一个取决于正下密度的常数。

现在来确定式 (3.3) 中的极限，暂记为 $L_f(x)$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个三角多项式 g_ϵ，使得 $\|f - g_\epsilon\|_1 < \epsilon$。根据我们刚刚证明的结果，有

$$L_f(x) = L_{f-g_\epsilon}(x) + \int g_\epsilon d\mathbf{m} \quad a.e. \tag{3.4}$$

显然，我们还有

$$\left| \int g_\epsilon d\mathbf{m} - \int f d\mathbf{m} \right| < \epsilon. \tag{3.5}$$

现在来处理 L_{f-g_ϵ}。由法图引理，得到 $\|L_{f-g_\epsilon}\|_1 \leq \|f - g_\epsilon\|_1$. 。然后，根据马尔可夫不等式，我们得到估计

$$\mathbf{m}\{x : |L_{f-g_\epsilon}(x)| > \sqrt{\epsilon}\} \leq \sqrt{\epsilon}.$$

那么，博雷尔-坎泰利引理推出，对于几乎所有x，$|L_{f-g_{n^{-4}}}(x)| = O(n^{-2})$，其中 $n \to \infty$。因此，由 (3.4) 和 (3.5) 可得

$$a.s. \quad L_f(x) = \int f d\mathbf{m} + O(n^{-2}),$$

这给出 $L_f(x) = \int f d\mathbf{m}$几乎处处成立。

□

当 $\mathcal{U}$ 的密度为零时，问题就更加微妙。显然，欣钦序列的概念与遍历理论中的普适好序列概念相关（见 [44]）。关于普适好序列和普适坏序列的研究，为我们提供了有关 $\tau^{\mathcal{U}}$的信息。例如，根据布尔甘的结果 [11]， $\tau^{\{n^2\}}$是一个 $p > 1$的 L^p-欣钦序列；而根据 Buczolich-Mauldin 的结果 [13]，它不是一个 L^1-欣钦序列，正如特殊情形 $\tau(x) = 2x$ 模 1 中已经提到的那样。

我们也可以考虑随机幂集，而不是 $\mathcal{U}$。令$\mathbf{p} = (p_n)_{n \geq 1}$，其中$0 \leq p_n < 1$ 对于满足 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$ 的 $n \geq 1$ 成立。设 (ξ_n) 为$\mathbf{p}$-伯努利序列，即由一列相互独立的取值为 0 或 1 的随机变量组成的序列，满足

$$P(\xi_n = 1) = p_n.$$

我们考虑整数的随机集 $\mathcal{R}$，也记作 $\mathcal{R}_{\mathbf{p}}$，称为 $\mathbf{p}$-伯努利集，其定义为

$$\mathcal{R} := \mathcal{R}_{\mathbf{p}} := \{n \geq 1 : \xi_n = 1\} = \{n_1(\omega) < n_2(\omega) < \cdots\},$$

以及 τ 的随机幂集合:

$$\tau^{\mathcal{R}} := \tau^{\mathcal{R}_{\mathbf{P}}} := \{\tau^{n_1(\omega)}, \tau^{n_2(\omega)}, \cdots\}.$$

布尔甘 [9] 证明，当 $p_n = (\log\log\ n)^B$ $(n \geq 3)$ 且 $B > 1$ 时， $\tau^{\mathcal{R}}$ 对于 $p > 1 + \frac{1}{B}$ 几乎必然是一个 L^p-欣钦集。注意， $^n\tau^{\mathcal{R}}$ 相对于 $\tau^{\mathbb{N}}$ 的密度为零。

由定理 3.5 可得以下推论。

推论 3.6. 在假设条件下， $\tau^{\mathcal{R}}$ 几乎必然是一个 L^1-欣钦序列

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n} > 0.$$

证明。 我们只需证明 $\mathcal{R}$ 几乎必然具有正下密度。为此，注意到

$$\frac{|\mathcal{R} \cap [1,n]|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{n} \times \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{\sum_{k=1}^n p_k}.$$

于是我们得到

$$a.s. \quad \varliminf_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{R} \cap [1,n]|}{n} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{n} > 0,$$

因为

$$a.s. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{\sum_{k=1}^n p_k} = 1. \tag{3.6}$$

事实上，令 $s_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$，并考虑鞅

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - p_k}{s_k},$$

它是 L^2-有界的

$$\mathbb{E}(M_n^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k(1-p_k)}{s_k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{s_k^2} < \infty.$$

于是，根据杜布收敛定理，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - p_k}{s_k}$ 几乎必然收敛。再由克罗内克引理，得到 (3.6)。□

3.5. 满同态的均匀分布序列与满同态的乘积。 圆周群 $\mathbb{T}$ 上的任意互异满同态序列都是均匀分布序列。但一般群上并非如此。例如，正如我们已经提到的，将 $\mathbb{Z}_p$ 视为加法群时，其上不存在均匀分布的满同态序列。

Here 是满同态序列 $\{\tau_n\}$ 成为均匀分布序列的一个条件。

命题 3.7。 若 $\{\tau_n\} \subset \mathrm{Epi}(G)$ 是一个满态射序列，使得 $\tau_n^*\gamma \neq \tau_m^*\gamma\widehat{\ }$ 对任意 $\gamma \in G\backslash\{1\}$ 和任意整数 $n \neq m$ 均成立，那么 $\{\tau_n\}$ 是一个均匀分布序列，并且对 $\{\tau_n\}$ 进行任意重新排序后，所得序列仍是均匀分布序列。因此，对任意连续函数 $f \in C(G)$，我们有

$$a.e. \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\tau_n x) = \int_G f d\mathbf{m}.$$

^证明。 根据韦伊判别法，只需证明对任意 $\gamma \in G \setminus \{1\}$ ，我们有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \gamma(\tau_n x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tau_n^* \gamma(x) = 0 \quad \mathbf{m}-a.e.$$

这一假设意味着 $\tau_n^*\gamma$对于不同的 n而言，它们是互不相同的群特征。因此，它们是 $L^2(G)$中的正交归一函数，并满足大数定律（例如，我们可以应用著名的 Davenport-Erd¨os-LeVeque 定理 [17]）。证明了(τ_n)是均匀分布序列后，根据韦伊判别法，我们立即得到等式。□

给定圆周群 G上的满态射序列 $\{A_n\}$ ，我们通过复合构造一个新的满态射序列

$$\tau_n = A_{n-1} \cdots A_1 A_0.$$

根据命题 3.7，以下是关于 $\{A_n\}$ 的一个充分条件，使得对于几乎每个 $x \in G$，$\{A_{n-1} \cdots A_1 A_0 x\}_{n\geq 1}$ 均匀分布：对于任意整数 $0 \leq n \leq m < \infty$ 以及任意非平凡特征 $\gamma \in G \setminus \{1\}$， $\gamma(A_{m-1} \cdots A_{n+1} x)$和 $\gamma(x)$是不同的特征。

但上述条件并不实用，因为其中涉及乘积 $A_{m-1} \cdots A_{n+1}$。当 $G = \mathbb{T}^d$时，我们给出一个更实用的充分条件。若一个 $d \times d$ 矩阵A满足以下条件，则称其为扩张的

$$\inf_{\|u\|=1} \|Au\| > 1 \tag{3.7}$$

其中 $\|u\|$ 表示 u的欧几里得范数。回顾一下，对称矩阵 A^TA 具有非负特征值，这些特征值可按 $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_d$排序，而 $\sqrt{\lambda_j}(1 \leq j \leq d)$称为 A的奇异值。

引理 3.8。设 A 为实矩阵。以下条件等价：

（1） A是扩张的；（2） A^T 是扩张的；

（3） A 的奇异值大于1。

证明。（1）与（3）等价，这由等式

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = \langle A^TAu, u\rangle$$

以及 A^TA 的特征向量彼此正交这一事实可知。事实上，设 $A^TAu_j = \lambda_j u_j$且 $\|u_j\| = 1$。对于任意单位向量 u，可将其写为 $u = \sum_{j=1}^d \alpha_j u_j$，其中$\sum_{j=1}^d \alpha_j^2 = 1$，于是有

$$\|Au\|^2 = \sum_{j=1}^d \lambda_j \alpha_j^2.$$

(1) 与 (2) 等价，是由 (1) 与 (3) 等价以及 A^TA 和 AA^T 具有相同特征值得出的。□

下述定理中的条件很实用，因为它针对单个矩阵提出，而且易于检验。

定理 3.9。 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathbb{T}^d$上的一列扩张端同态。那么，序列 $\{A_{n-1}\cdots A_1A_0\}$ 是一个均匀分布序列。因此，对于任意 $f\in C(\mathbb{T}^d)$，我们有

$$a.e.\quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(A_n\cdots A_2A_1x)=\int_{\mathbb{T}^d} f d\mathbf{m}.$$

证明。 设 $\tau_n=A_{n-1}\cdots A_1A_0$。只需验证命题 3.7 中的条件 $\tau_n^*\gamma\neq\tau_m^*\gamma$，该条件可重述如下

$$\forall v\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\},\forall n<m,\quad vA_{n-1}\cdots A_1A_0\neq vA_{m-1}\cdots A_1A_0.$$

由于矩阵 A_k' 均可逆，我们只需验证 $v\neq vA_{m-1}\cdots A_{n+1}A_n$。这确实成立：首先注意到，由引理 3.8 可知，转置 A_n^T 是膨胀的，因此

$$\lambda(A_n):=\inf_{\|v\|=1}\|vA_n\|>1.$$

因此我们有

$$\|vA_{m-1}\cdots A_{n+1}A_n\|\geq\|vA_{m-1}\cdots A_{n+1}\|\lambda(A_n)\geq\|v\|\lambda(A_{m-1})\cdots\lambda(A_n)>\|v\|.$$

□

定理 3.9 断言，圆周群 $\mathbb{T}^d$ 上膨胀端同态的乘积构成 ud-序列。但定理 3.9 不适用于 $\mathbb{T}^d$ $(d\geq 2)$ 上的自同构，因为它们不是膨胀的。如下例所示，$\mathbb{T}^d$ 上某些满足 $d\geq 2$ 的自同构序列可能是 ud-序列，而另一些则不是。首先注意到，$\mathbb{T}$ 上只有两个自同构：$x\mapsto x$ 和 $x\mapsto -x$。因此，$\mathbb{T}$ 上不存在由互不相同的自同构组成的序列，自然也就谈不上自同构的 ud-序列。

例 1. 考虑由下式定义的矩阵 $B_n\in SL_2(\mathbb{Z})$

$$B_n=\begin{pmatrix} b_n & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad \text{with}\ \ b_n\in\mathbb{Z}.$$

B_n 的特征多项式为 $\lambda^2-b_n\lambda-1$，特征值为 $\frac{1}{2}\left(b_n\pm\sqrt{b_n^2+4}\right)$。注意，行列式 $B_n=\overline{-1}$。若 $b_n=0$，则 B_n 的特征值为 ±1。若 $b_n\neq 0$，一个特征值的绝对值大于 1，另一个则小于 1，因此 B_n 是双曲的，故而是遍历的。假设 b_n 彼此不同，则 B_n 是圆周群 $\mathbb{T}^2$ 的不同自同构。但命题 3.7 中的条件并不满足。事实上，我们有

$$B_nB_m^{-1}=\begin{pmatrix} b_n & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -b_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & b_n-b_m\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

由此可知，$B_nB_m^{-1}$具有 $(v_1,\ v_2)$，其中 $v_1=0$ 是 $\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,\ 0)\}$ 中的左不动点，这仅仅是因为

$$(v_1,v_2)B_nB_m^{-1}=(v_1,(b_n-b_m)v_1+v_2).$$

利用 Weyl 判别法很容易验证，$\{B_n\}$ 不是均匀分布序列。事实上，对于任意点$\mathbf{x}=(x_1,x_2)^T$，即 $\{B_n\mathbf{x}\}$不是均匀分布。确实，$B_n\mathbf{x}=(b_nx_1+x_2,x_1)^T$。对于特征 $\gamma(\mathbf{x})=e^{2\pi ix_2}$，我们有

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\gamma(B_n\mathbf{x})=e^{2\pi ix_1}$$

它不会趋于 0。事实上，$\{B_n\mathbf{x}\}$ 的$\mathbf{x}$ 轨道始终位于一维环面 $\mathbb{T}\times\{x_1\}$中。

现在我们给出一个自同构的均匀分布序列。

例 2. 现在考虑由以下方式定义的矩阵 $B_n \in SL_2(\mathbb{Z})$

$$B_n = \begin{pmatrix} b_n & b_n^2 - 1 \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad b_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

注意 $\det B_n = 1$。假设 b_n 彼此不同。若 $n \neq m$，则 B_n 和 B_m 在 $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$中没有左不动点，因为

$$(v_1, v_2)B_n = (v_1 b_n, v_1(b_n^2 - 1) + b_n v_2).$$

因此，若 b_n彼此不同，则 $\{B_n\}$ 是一个均匀分布序列，即对于几乎所有 $x \in \mathbb{T}^2$， $\{B_n x\}$都是均匀分布的。

我们考虑特殊情形（对应于 $b_n = n$）：

$$B_n' = \begin{pmatrix} n & n^2 - 1 \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

我们声称 $\{B_n'\}$ 不是一个 L^∞-欣钦序列。事实上，若 g 是 Marstrand 的一个反例，表明 $\{n\} \subset \mathbb{Z}$ 不是一个 L^∞- 欣钦序列，并且考虑 $f(x_1, x_2) = g(x_2) \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$，则得到

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(B_n' x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(n x_2),$$

其几乎处处不趋于 $\int g(x)dx = \int f(x_1, x_2)dx_1 dx_2$。

为了构造一个均匀分布序列，或者更好地说，一个欣钦序列 $\{\tau_n\}$，就像我们对整数的欣钦序列所做的那样，我们首先选取一个满态射序列 $\{A_n\}$，然后考虑乘积 $\tau_n = A_{n-1} \cdots A_1 A_0$。

下面是一个例子。设 $\{t_n\} \in \{0,1\}^\infty$ 为图厄-莫尔斯序列， C_0， C_1 为两个给定的满同态。我们通过 $\{t_n\}$ 从 $\{C_0, C_1\}$ 中选取 A_n： $A_n = C_{t_n}$.

命题3.10。 设 $\{t_n\} \in \{0,1\}^\infty$ 为图厄-莫尔斯序列。若紧阿贝尔群上的两个满同态C_0 和 C_1 彼此交换，且乘积自同态 $C_0 C_1$ 是遍历的，则序列 $(C_{t_1} C_{t_2} \cdots C_{t_n})$ 是一个欣钦序列。

这一结果的证明与定理 2.10 的证明相同。

当 C_0 和 C_1 不可交换时，我们不知道会发生什么。特别地，我们有以下未解决问题。假设 C_0 和 C_1 是扩张矩阵，但不可交换，我们知道 $C_{t_n} \cdots C_{t_2} C_{t_1}$ 是均匀分布序列（见命题3.9）。

问题 7. 假设 C_0 和 C_1 是扩张但不可交换的矩阵。乘法 Thue-Morse 序列 $C_{t_n} \cdots C_{t_2} C_{t_1}$ 是欣钦序列吗？我们也对其他本原序列提出这个问题。

4. Skew products of endomorphisms on groups

本节介绍一种利用斜积的随机构造。换言之，我们将乘法过程随机化，以生成欣钦序列。我们找到一个称为傅里叶紧性的条件，它保证斜积动力系统与基动力系统具有相同的性质。这些性质包括遍历性、弱混合和强混合。

4.1. 斜积。保测变换的斜积一般形式由安斋 [1] 于1951年提出。我们先回顾其定义。设 $(\Omega\ \mathcal{A}, \mu, \sigma)$ 是一个保测动力系统。设 $(X, \mathcal{B}, \nu)$ 是另一个概率空间。另一方面，对每个 $\omega \in \Omega$，都对应一个保概率测度 ν 的可测变换 $\psi_\omega : X \to X$。设 $(\omega, x) \mapsto \psi_\omega(x)$ 是一个从 $\Omega \times X$ 到 X 的可测映射。基于 $(\Omega\ \mathcal{A}, \mu, \sigma)$ 的 $\{\psi_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的斜积变换，记为 S: $\Omega\ \times X \to \Omega\ \times X$，定义如下:

$$S(\omega, x) = (\sigma\omega, \psi_\omega(x)).$$

于是，S 保持 μ 与 ν的乘积测度 $\mu\otimes\nu$。保持测度的动力系统 $(\Omega\ \times X,\ \mathcal{A}\times\mathcal{B},\ \mu\otimes\nu,\ S)$ 称为以 $(\Omega\ \mathcal{A},\ \mu,\ \sigma)$ 为基底的保持测度系统 $(X,\ \mathcal{B},\ \nu,\ \psi_\omega)$ 的斜积。若 ψ_ω 恒等于某个固定变换 ψ，则得到 $(\Omega\ \mathcal{A},\ \mu,\ \sigma)$ 与 $(X,\ \mathcal{B},\ \nu,\ \psi)$ 的直积。

本文专门研究 $X = G$ 为紧阿贝尔群的情形，$\nu = \mathbf{m}$（有时记作 dx）是 G 上的博雷尔域 $\mathcal{B}$ 上的Haar概率测度，而ψ_ω是 G上的自同态:

$$\psi_\omega = A_\omega x$$

其中 A_ω 是 G 的满射端同态（我们也可以考虑紧非阿贝尔群，但本文不讨论这类群）。

我们的模型定义如下。令 $\Omega = \mathrm{Epi}(G)^{\mathbb{N}}$，并令 σ 为 Ω 上定义的移位，其中 $(\omega_n)_{n\geq 0} \mapsto (\omega_{n+1})_{n\geq 0}$。则斜积变换 $S : \Omega \times G \to \Omega\ \times G$ 定义为

$$S(\omega, x) = (\sigma\omega, \omega_0 x).$$

回忆一下，如果 μ 是一个 σ-不变测度，那么 $\mu \times \mathbf{m}$ 是 S-不变的。

我们将研究满同态的斜积的遍历性、弱混合性质和强混合性质。为简单起见，如果概率测度ν 在映射 T 下不变且具有遍历性，我们就称其为 T-遍历的。类似地，我们也讨论弱 T-混合和强 T-混合。

4.2. 傅里叶紧性。 我们首先讨论一个将要采用的假设。照例，对于 $f \in L^1(\mu \times \mathbf{m})$，我们用 Sf 表示 $f \circ S$。因此，对于特征 $\gamma \in \widehat{G}$，有$S^n\gamma(\omega,\ x) = \gamma(\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0 x)$，这可视为 G 的一个随机特征。它不过是 $(\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0)^*(\gamma)$。我们将采用以下假设：几乎处处地，对于任意有限特征集 $\Gamma \subset G$，存在一个整数 $m_0 = m_0(\omega,\ \Gamma)$，使得

$$\forall m \geq m_0, \quad (\omega_{m-1}\omega_{m-2}\cdots\omega_1\omega_0)^*(\widehat{G} \setminus \{1\}) \subset \Gamma^c.$$

也就是说，当 m 足够大时，伴随映射 $(\omega_{m-1}\omega_{m-2}\cdots\omega_1\omega_0)^*$ 会将 $G \setminus \{1\}$ 推到 Γ 之外。如果这一假设得到验证，我们就称满同态的斜积具有傅里叶紧性。

在群 $\mathbb{T}$ 上，$\mathrm{Epi}(\mathbb{T})$ 被视为 $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，使得 $\Omega\ = (\mathbb{Z}^*)^{\mathbb{N}}$。对于整数 a，用 $[a]$ 表示 Ω 中首项为 a 的所有序列构成的集合。若 μ 是一个 σ-不变的遍历测度，且对于某个满足 $|a| \geq 2$ 的整数 a，有 $\mu([a]) > 0$，那么我们的满同态斜积是傅里叶紧的。事实上，若我们记

$$N_n(\omega, a) = \#\{0 \leq k \leq n-1 : \omega_k = a\},$$

伯克霍夫遍历定理意味着

$$a.s. \quad \lim_{n\to\infty}\frac{N_n(\omega,a)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1_{[a]}(\sigma^k\omega)=\mu([a])>0.$$

因此，几乎必然存在一个整数 $n(\omega)$，使得 $N_n(\omega,\ a)\ >\ ^{\mu}{}_{([a])\ 2}\ \ ^{n}$ 对于 $n\geq n(\omega)$。由此可得

$$|\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0|\geq|a|^{\frac{\mu([a])n}{2}}>2^{\frac{\mu([a])n}{2}} \tag{4.1}$$

它 这意味着 $(\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0)^*(\mathbb{Z}^*)$ 位于区间 $[-2^{\mu}{}_{([a])^2}{}^{n},\ 2^{\mu([a])n}_{2}]$之外。——

注意，与 -1 和 1 对应的群$\mathbb{T}$上只有两个自同构。所有其他满同态都是“扩张的”。上述傅里叶紧性的证明得益于这一扩张性质。在带有 $d\geq 2$的群 $\mathbb{T}^d$ 上，存在许多非扩张的满同态。与上述论证相同，可以证明，若 σ-不变测度 μ 是遍历的，并且对一组扩张矩阵赋予正测度，则 $\mathbb{T}^d$ 上的满同态斜积具有傅里叶紧性。

4.3. **遍历性**。

定理 4.1. 设 G是一个紧阿贝尔群，其对偶群 G可数。假设满同态的斜积具有傅里叶紧性。那么 $\mu\otimes\mathbf{m}$ 是 S-遍历的，当且仅当 μ 是σ-遍历的。

证明。 由于 σ 是 S的一个因子， S-遍历性蕴含 σ-遍历性。我们只需证明反向命题。

假设 μ 是 σ-遍历的。设 $f\in L^2(\mu\times\mathbf{m})$ 是一个 S-不变函数。也就是说，

$$f(\sigma\omega,\omega_0x)=f(\omega,x)\quad \mu\times\mathbf{m}-a.e. \tag{4.2}$$

我们将证明 f 几乎处处为 $\mu\times\mathbf{m}$-常数。

记 $f_\omega(x)$ 为 $=f(\omega,x)$。根据富比尼定理，对于几乎所有 ω（关于 μ），f_ω 是 $L^2(\mathbf{m})$ 上定义良好的函数。首先注意，由于满射自同态 $x\mapsto\omega_0x$ 保持$\mathbf{m}$，不变性 (4.2) 蕴含

$$\|f_{\sigma\omega}(\cdot)\|_{L^2(\mathbf{m})}=\|f_\omega(\cdot)\|_{L^2(\mathbf{m})}.$$

因此，范数函数 $\omega\mapsto\|f_\omega(\cdot)\|_{L^2(\mathbf{m})}$ 是 σ-不变的，故由 μ 的遍历性可知，它几乎处处为常数。基于同样的理由，积分函数 $\omega\mapsto\int f_\omega d\mathbf{m}$ 也是 σ-不变的，因此为常数。所以，不失一般性，我们可以假设 $\int f_\omega d\mathbf{m}=0$。

现在考虑 $f_\omega(\cdot)$ 的傅里叶级数

$$f_\omega(x)=\sum_{\gamma\in\widehat{G}\setminus\{1\}}\widehat{f_\omega}(\gamma)\gamma(x).$$

于是，不变性 (4.2) 可转化为

$$\sum_{\gamma\in\widehat{G}\setminus\{1\}}\widehat{f_{\sigma\omega}}(\gamma)\omega_0^*(\gamma)=\sum_{\gamma\in\widehat{G}\setminus\{1\}}\widehat{f_\omega}(\gamma)\gamma. \tag{4.3}$$

换言之，我们有

$$\forall\gamma\in\widehat{G}\setminus\{1\},\quad \widehat{f_{\sigma\omega}}(\gamma)=\widehat{f_\omega}(\omega_0^*(\gamma)). \tag{4.4}$$

通过迭代，对于所有 $\gamma \in G \setminus \{1\}$ 和所有 $n \geq 1$，我们得到

$$\widehat{f_{\sigma^n\omega}}(\gamma) = \widehat{f_\omega}(\omega_0^*\omega_1^* \cdots \omega_{n-1}^*(\gamma)) = \widehat{f_\omega}((\omega_{n-1} \cdots \omega_1\omega_0)^*(\gamma)). \tag{4.5}$$

因此，根据范数 $\|f_\omega\|_{L^2(\mathbf{m})}$ 的不变性以及递归公式（4.5），我们得

$$\forall n \geq 1, \quad \|f_\omega\|^2_{L^2(\mathbf{m})} = \|f_{\sigma^n\omega}\|^2_{L^2(\mathbf{m})} = \sum_{\gamma \in \widehat{G}\setminus\{1\}} |\widehat{f_\omega}((\omega_{n-1} \cdots \omega_1\omega_0)^*(\gamma))|^2.$$

设 Γ 是 G的任意有限子集。傅里叶紧性的假设意味着，几乎必然存在 $n(\omega)$，使得

$$\forall n \geq n(\omega), \quad \|f_\omega\|^2_{L^2(\mathbf{m})} \leq \sum_{\gamma \in \Gamma^c} |\widehat{f_\omega}(\gamma)|^2.$$

这一点，再结合 Parseval恒等式，可得 $\|f_\omega\|^2_{L^2(\mathbf{m})} = 0$ 几乎必然，因此 $f = 0$. □

4.4. 弱混合性质与强混合性质。 若 $\mu \times \mathbf{m}$ 是 S-弱混合的，则 μ 必定是 σ-弱混合的。下面给出其逆命题。

定理 4.2。 设 G 是一个紧阿贝尔群，其对偶群 G可数。假设满同态的斜积具有傅里叶紧性。若 μ 是弱 σ-混合的，则 $\mu \times \mathbf{m}$是弱 S-混合的。

证明。 称 $\mu \times \mathbf{m}$ 是 S-弱混合的，是指 $(\mu \times \mathbf{m}) \times (\mu \times \mathbf{m})$ 是 $S \times S$-遍历的 ([47])。回顾一下， $S \times S$: $(\Omega \times G) \times (\Omega \times G)$ 定义如下:

$$(\omega', x;\ \omega'', y) \mapsto (\sigma\omega', \omega_0' x;\ \sigma\omega'', \omega_0'' y).$$

乘积 $S \times S$可视为 $\Omega \times \Omega$ 上移位 $\sigma \times \sigma$ 的 $G \times G$ 自同态斜积。换言之， $S \times S$ 可定义在 $(\Omega \times \Omega) \times (G \times G)$ 上，如下:

$$(S \times S)(\omega', \omega''; x, y) \mapsto (\sigma\omega', \sigma\omega''; \omega_0' x, \omega_0'' y).$$

由于假设 μ 是弱 σ-混合的， $\mu \times \mu$ 是 $\sigma \times \sigma$-遍历的。根据定理 4.1，$(\mu \times \mathbf{m}) \times (\mu \times \mathbf{m})$ 是 $S \times S$-遍历的。□

定理 4.2 也可以由定理 4.4 推出，后者将在下一小节中证明。

将 σ 扩展到 S时，强混合性质也得以保留。

定理 4.3. 设 G 是一个紧阿贝尔群，其可数对偶群为 G。假设满同态的斜积具有傅里叶紧性。如果 μ 是 σ-混合的，那么 $\mu \otimes \mathbf{m}$ 是S-混合的。

证明。Rec 因此， $\mu \otimes \mathbf{m}$ 是 S-混合的，这意味着对于任意 $F, G \in L^2(\mu \otimes \mathbf{m})$，我们有e

$$\lim_{n\to\infty} \int F \cdot G \circ S^n d\mu \otimes \mathbf{m} = \int F d\mu \otimes \mathbf{m} \cdot \int G d\mu \otimes \mathbf{m}.$$

只需证明对于属于稠密函数族的 F 和 G这一结论成立。因此，我们可以假设 $F(\omega,\ x) = f_1(\omega)f_2(x)$，且 $G(\omega,\ x) = g_1(\omega)g_2(x)$，其中 $f_1,\ g_1 \in L^\infty(\mu)$ 且$f_2,\ g_2 \in L^\infty(\mathbf{m})$。甚至可以进一步假设 f_2 和 g_2 是三角多项式。

我们首先观察到

$$\int F \cdot G \circ S^n d\mu \otimes \mathbf{m} = \int_\Omega f_1(\omega) g_1(\sigma^n\omega) \left(\int_{\mathbb{T}} f_2(x) g_2(\omega_{n-1} \cdots \omega_1\omega_0 x) d\mathbf{m}(x) \right) d\mu(\omega). \tag{4.6}$$

由于 σ 具有混合性，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_1(\omega)g_1(\sigma^n\omega)d\mu(\omega)=\int_\Omega f_1(\omega)d\mu(\omega)\int_\Omega g_1(\omega)d\mu(\omega). \tag{4.7}$$

因此，我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_G f_2(x)g_2(\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0x)d\mathbf{m}(x)=\widehat{f_2}(1)\widehat{g}_2(1). \tag{4.8}$$

将 f_2 展开为傅里叶级数（由于我们假设 f_2 是一个多项式，因此这是一个有限和），得到

$$\int_G f_2(x)g_2(\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0x)d\mathbf{m}(x) \;=\; \sum_{\gamma\in\widehat{G}}\widehat{f_2}(\gamma)\int\gamma(x)g_2(\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0x)d\mathbf{m}(x).$$

现在将 g_2 展开为傅里叶级数，使得

$$g_2(\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0x)=\sum_{\gamma'\in\widehat{G}}\widehat{g}_2(\gamma')(\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0)^*(\gamma')(x).$$

将其代入上一个等式，然后积分，得到

$$\int_G f_2(x)g_2(\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0x)d\mathbf{m}(x)=\widehat{f_2}(1)\widehat{g}_2(1)+\sum_{\gamma'\in\widehat{G}\setminus\{1\}}\widehat{f_2}((\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0)^*(\overline{\gamma'}))\widehat{g}_2(\gamma'). \tag{4.9}$$

令 $R_n(\omega)$ 表示上一个和。由柯西-施瓦茨不等式，得到

$$|R_n(\omega)|\le\|g_2\|_2\sqrt{\sum_{\gamma'\in\widehat{G}\setminus\{1\}}|\widehat{f_2}((\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0)^*(\overline{\gamma'}))|^2}$$

根据傅里叶紧性，其几乎必然趋于零。因此，(4.8) 得证。利用 (4.9)，将 (4.6) 写成如下形式

$$\int F\cdot G\circ S^nd\mu\otimes\mathbf{m}=\widehat{f_2}(1)\widehat{g}_2(1)\int_\Omega f_1(\omega)g_1(\sigma^n\omega)d\mu(\omega)+\int_\Omega f_1(\omega)g_1(\sigma^n\omega)R_n(\omega)d\mu(\omega).$$

注意到，对于所有 ω，$R_n(\omega)$ 都被 $\|f_2\|_2\|g_2\|_2$ 所界，因此 $f_1(\omega)g_1(\sigma^n\omega)R_n(\omega)$ 几乎必然被常数 $\|f_1\|_\infty\|g_1\|_\infty\|f_2\|_2\|g_2\|_2$ 所界。因此，应用勒贝格控制收敛定理，可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_1(\omega)g_1(\sigma^n\omega)R_n(\omega)d\mu(\omega)=0.$$

因此，我们确实可以利用 (4.7) 对 (4.6) 取极限，从而得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int Fd\mu\otimes\mathbf{m}\cdot\int G\circ S^nd\mu\otimes\mathbf{m}=&\widehat{f_2}(1)\widehat{g}_2(1)\int f_1d\mu\int g_1d\mu\\=&\int Fd\mu\otimes\mathbf{m}\int Gd\mu\otimes\mathbf{m}.\end{aligned}$$

□

4.5. 特征值。 现在我们将证明，斜积动力系统与基本动力系统具有相同的特征值。事实上，定理 4.1 的证明几乎可以原样重用，以证明以下结果。与上述关于弱混合性质的定理 4.2 相比，这个结果更强，因为一个系统是弱混合的，当且仅当 1 是其单特征值，且它没有其他特征值。

定理 4.4。 假设 μ 是 σ-遍历的。那么，作用于$L^2(\mu\otimes\mathbf{m})$ 上的算子 $F\mapsto F\circ S$ 与作用于 $L^2(\mu)$上的算子 $f\mapsto f\circ\sigma$ 具有完全相同的特征值。更准确地说，$F\circ S=\lambda F$具有特征值 $F\in L^2(\mu\otimes\mathbf{m})$ 当且仅当 $F(\omega,x)=f(\omega)$具有特征值 $f\in L^2)(\mathbf{m})$，且 $f\circ\sigma=\lambda f$。

证明。 只需证明“仅当”部分，因为“当”部分显而易见。假设特征方程

$$F(\sigma\omega,\omega_0x)=\lambda F(\omega,x) \tag{4.10}$$

对某个满足 $|\lambda|=1$的 λ，存在一个非平凡解 $F\in L^2(\mu\otimes\mathbf{m})$。由于假设 μ 是遍历的，$\mu\otimes\mathbf{m}$是 S-遍历的（定理 4.1）。记 $f_\omega(x)$为 $=F(\omega,x)$。由特征方程，首先可得以下事实

$$\|f_{\sigma\omega}\|_{L^2(\mathbf{m})}=\|f_\omega\|_{L^2(\mathbf{m})};\quad |\widehat{f_{\sigma^n\omega}}(\gamma)|=|\widehat{f_\omega}((\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0)^*\gamma)|. \tag{4.11}$$

这里我们用到了事实 $|\lambda|=1$，以及满同态保持哈尔测度这一事实。第二个等式与 (4.5)) 类似，它比较的是傅里叶系数的绝对值，而不是直接比较傅里叶系数。但这对我们来说已经足够。与定理 4.1 的证明一样，由 (4.11) 和帕塞瓦尔恒等式可得

$$\|f_\omega\|^2_{L^2(\mathbf{m})}=\|f_{\sigma^n\omega}\|^2_{L^2(\mathbf{m})}=\left|\int f_\omega d\mathbf{m}\right|^2+\sum_{\gamma\in\widehat{G}\setminus\{1\}}|\widehat{f_\omega}((\omega_{n-1}\cdots\omega_1\omega_0)^*\gamma)|^2$$

对所有 $m\geq 1$都成立。但由于傅里叶紧性，最后一个和在 $n\to\infty$时趋于零。因此我们得到

$$\int|f_\omega|^2d\mathbf{m}=\left|\int f_\omega d\mathbf{m}\right|^2.$$

这意味着 $f_\omega(\cdot)$是常数。因此，对于某个定义在 Ω 上的函数 f，有 $F(\omega,\ x)=f(\omega)$；该函数必定是 σ 的特征函数，对应于特征值 λ （参见 (4.10)）。□

4.6. 弱意义下的随机欣钦序列。回忆一下，Ω =Epi$(G)^{\mathbb{N}}$ 中的 σ 是 Ω 上定义的移位，其定义为 $(\omega_n)_{n\geq0}\mapsto(\omega_{n+1})^{n\geq0}$，而 μ 是一个 σ-不变测度。满同态的斜积 $S\colon\Omega\times G\to\Omega\times G$ 定义如下

$$S(\omega,x)=(\sigma\omega,\omega_0x).$$

定理 4.5. 设 G是一个紧阿贝尔群，其对偶群为 G。假设满同态的斜积具有傅里叶紧性，且测度 μ 是 σ-遍历的。那么对任意 $f\in L^1(G)$，几乎必然有 μ

$$\mathbf{m}-a.e.\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\omega_{k-1}\cdots\omega_1\omega_0x)=\int_G fd\mathbf{m}. \tag{4.12}$$

证明。 令 $F(\omega,x)=f(x)$。这是将定理 4.1 应用于函数$F\in L^1(\mu\times\mathbf{m})$ 的简单应用，因为 $S^k(\omega,x)=(\sigma^k\omega,\omega_{k-1}\cdots\omega_1\omega_0x)$。□

问题 8。 定理 4.5 中的序列 $\{\omega_{k-1}\cdots\omega_1\omega_0\}$ 在 G 上几乎必然是欣钦序列吗?

Lacey、Petersen、Wierdl 和 Rudolph [35]研究了具有普遍代表序列的随机遍历定理。这与问题 8 有关。不幸的是, [35] 中的结果并未为问题 8 提供答案。实际上, [35] 中研究的变换是可逆的, 而我们的满同态未必可逆。

References

[1] H. Anzai, 《环面上的遍历斜积变换》, 《大阪数学杂志》3（1951年）, 83–99.[2] A. Avila 和 P. Candela, 《可交换自同态的塔及其组合应用》, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）66（2016）, 第4期, 1529–1544.[3] B. Adamczewski, 《本原替换不动点的平衡性》, 《理论计算机科学》307（2003）, 第1期, 47–75。Words.[4] S. Banach, 《关于线性泛函几乎处处收敛》, 《数学科学通报》50（1926）, 27-32–291. ´J. Beck, 《从欣钦猜想中的强一致分布到超一致运动》, Mathematika 61（2015）, 第3期, 591–707.[5] T. Bewley, 《将比尔霍夫和冯·诺伊曼遍历定理推广到半群作用》, 《高等科学研究所概率论与统计物理学专刊》B辑7, 第4期（1971）, 283–291.[6] A. Bellow 和 R. L. Jones, 《关于[7] 的巴拿赫原理》, 《数学进展》120（1996）, 155–172. L^∞J. R. Blum 和 D. L. Hanson, 《关于子序列的均值遍历定理》, 《美国数学会通报》66（1960）, 308–311.[8] J. Bourgain, 《关于整数某些子集上的极大遍历定理》, 《以色列数学杂志》61（1988）, 39–72.[9] J. Bourgain, 《几乎处处收敛与有界熵》, 《以色列数学杂志》63（1988）, 第1期, 79–97, DOI 10.1007/BF02765022.[10] J. Bourgain, 《算术集合的逐点遍历定理》, 《高等科学研究所数学出版物》69（1989）, 5–41.[11] Z. Buczolich, 《非负函数平移函数级数的几乎处处收敛问题》, 《实分析交流》48（2023）, 第1期, 49–75. ´Z. Buczolich 和 R. D. Mauldin, 《发散平方平均》, 《数学年刊》（第二辑）171（2010）, 第3期, 1479–1530.[12] K. Chan 和 R. Nair, 《强一致分布中的问题》, 《塔特拉山数学出版物》59（2014）, 51–64.[13] J.-P. Conze, 《子序列的遍历平均收敛》, 《概率计算论文集》, 1973年, 第7–15页.[14] C. Cuny 和 A. H. Fan, 《以鞅方法研究级数的几乎处处收敛》, 《随机过程及其应用》127（2017）, 第8期, 2725–2750.[15] H. Davenport、P. Erdős 和 W. J. LeVeque, 《关于一致分布的韦伊判别法》, 《密歇根数学杂志》10（1963）, 311–314. ´A. del Junco 和 J. Rosenblatt, 《遍历理论与数论中的反例》, 《数学年刊》245（1979）, 第3期, 185–197.[16] P. Erdős, 《关于大数强律》, 《美国数学会汇刊》67（1949）, 51–56.[17] M. Easwaran, 《多维欣钦-马斯特兰型问题》, 博士论文, 俄亥俄州立大学（2012）, 90页. ¨A. Fan, 《R[18] 自同态轨道的均匀分布》, 《巴黎科学院报告》I辑数学313（1991）, 第11期, 735–738.[19] A. Fan, 《Hadamard型稀疏性与均匀分布》, 《数学讨论集》66（1993）, 第1期, 151–163. ¨A. Fan, 《里斯-赖科夫级数的几乎处处收敛》, 《数学讨论集》68（1995）, 第2期, 241–248.[20] A. Fan, 《加权遍历平均的多重分形分析》, 《数学进展》377, 107488, 34页（2021）。

[25]A. Fan、S. Fan 和 T. Li，《有限生成乘法半群中的欣钦序列》，预印本（2025年）。[26] A. Fan、H. Queff´elec 和 M. Queff´elec，《富斯滕伯格集及其随机版本》，《数学教学》（第二辑）70（2024），61–120.[27] A. Fan、H. Queff´elec 和 M. Queff´elec，《富斯滕伯格集的新旧结果》，第181–218页，载于《分形及相关领域的新进展》，J. Barral、A. Batakis、S. Seuret 编，Birkhauser，2025年。[28] J. N. Franklin，《随机过程的确定性模拟》，《数学计算》17（1963），28–59.[29] J. N. Franklin，《模一矩阵幂剩余的均匀分布》，《数学计算》18（1964），560–568.[30] H. Furstenberg 和 H. Kesten，《随机矩阵的乘积》，《数学统计年刊》31（1960），457–469.[31] V. F. Gaposhkin，《一个收敛系统》（俄文），《数学文集》（新系列）74（116）（1967），93–99.[32] A. Khintchine，《一个具有算术应用的连分数定理》，《数学杂志》18（1923年），第1期，289–306. ¨N. Koblitz，《¨进数、[33] 进分析与ζ函数》，施普林格，1984年. pL. Kuipers 和 H. Niederreiter，《序列的一致分布》，纯粹与应用数学，Wiley-Interscience pJohn Wiley & Sons[34] 纽约-伦敦-悉尼，1974年. [M. Lacey、K. Petersen、M. Wierdl 和 D. Rudolph，《具有普遍代表序列的随机遍历定理》，《庞加莱研究所概率论与统计学年刊》30（1994），第3期，353–395.], E. Lesigne，《多维里斯-赖科夫和的大数定律》，《组合数学》110（1998），第1期，39–49.[35] J. M. Marstrand，《关于欣钦的强一致分布猜想》，《伦敦数学会会刊》（第三辑）21（1970），540–556.´R. Nair，《关于强一致分布》，《算术学报》56（1990），第3期，183–193.[36] A. Quas 和 M. Wierdl，《非传统遍历平均的发散速率》，《遍历理论与动力系统》30（2010），第1期，233–262.[37] M. Queff[38] elec，《替代动力系统——谱分析》，《数学讲义》1294，施普林格，2010年.[39] D. Raikov，《关于可和函数的一些算术性质》，《数学文集》43（1936），377–384.[40] F. Riesz，《论遍历理论》，《海尔维蒂数学评论》17（1945），221–239.˙J. Rosenblatt，《遍历理论中的普遍坏序列》，载于《几乎处处收敛 II》，第二届国际会议论文集，美国伊利诺伊州埃文斯顿，1989年，学术出版社，波士顿（1991），227–245.[41] J. M. Rosenblatt 和 M. Wierdl，《通过调和分析证明逐点遍历定理》，载于《遍历理论及其与调和分析的联系》，PK. Petersen 和 I. A. Salama 编，伦敦数学学会讲义系列205，剑桥大学出版社，1995年.[42] S. Sawyer，《弱型极大不等式》，《数学年刊》（第二辑）84（1966），157–174.´E. Seneta，《非负矩阵与马尔可夫链》，施普林格统计学丛书，施普林格，2006年.[43] P. Walters，《遍历理论导论》，数学研究生教材，第79卷，施普林格出版社，纽约-柏林，1982年.[44] M. Weber，《动力系统与过程》，IRMA数学与理论物理讲座，第14卷，欧洲数学会（EMS），苏黎世，2009年.[45] A. Zygmund，《三角级数》，第I、II卷，第三版，剑桥数学文库，剑桥大学出版社，剑桥，2002年。Robert A. Fefferman 作序。

(A. Fan) LAMFA, UMR 7352 CNRS, University of Picardie, 33 rue Saint Leu, 80039Amiens, France and Wuhan Institute for Math & AI, Wuhan University, Wuhan 430072,China电子邮箱地址:ai-hua.fan@u-picardie.fr
(S. Fan) School of Mathematics and Statistics, and Key Lab NAA–MOE, Central China Normal University, Wuhan 430079, China电子邮箱地址:slfan@ccnu.edu.cn
(H. Queffélec) CNRS, Laboratoire Paul Painlevé, UMR 8524 & Labex CEMPI (ANR-LABX-0007-01), Université de Lille Cité Scientifique, Bât. M2 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, FRANCE电子邮箱地址: herve.queffelec@univ-lille.fr(M. Queffélec) CNRS, Laboratoire Paul Painlevé, UMR 8524, & Labex CEMPI (ANR-LABX-0007-01), Université de Lille Cité Scientifique, Bât. M2 59655 Villeneuve d'AscqCedex, FRANCE电子邮箱地址: martine.queffelec@univ-lille.fr