arXiv:2601.06630v1 [math.CV] 10 Jan 2026

$\mathbb{C}^n$中 Schwarz 函数与欧拉算子的尖锐 Bohr-Rogosinski 半径

Molla Basir Ahamed、Sujoy Majumder* 和 Nabadwip Sarkar

Abstract. 本文致力于研究单位多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 上有界全纯映射的精细化 Bohr 型不等式的多维类比。我们建立了经典 Bohr 不等式的一个尖锐推广，证明在多变量情形下，对于模不超过 1 的全纯函数族，Bohr 半径仍为 $R_n = 1/(3n)$。此外，我们通过确定涉及 Schwarz 函数类 $\omega_{n,\ m} \in \mathcal{B}_{n,\ m}$以及局部模 $|f(z)|$ 的函数幂级数的尖锐半径，对多复变数中的 Bohr-Rogosinski 现象给出了确切的解决方案。利用径向（欧拉）导数算子$Df(z) = \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial f(z)}{\partial z_k}$，我们得到了导数的精细增长估计，将著名的一元结果推广到 $\mathbb{C}^n$。最后，本文建立了基于面积的 Bohr 不等式的多维版本。我们严格验证了所得常数的最优性，证明所有得到的半径都是尖锐的。

1. 引言与预备知识

Harald Bohr 的经典定理 [20], 首次提出于一个多世纪以前，至今仍不断推动着对如今所谓 Bohr 现象的广泛研究。20 世纪 90 年代，随着该理论成功推广到多复变数全纯函数以及更为抽象的泛函分析框架，这一主题再次引起了人们的兴趣。特别是在 1997 年，Boas 和 Khavinson [19]引入并确定了 n维 Bohr 半径，该半径对应于在多圆盘上模不超过 1 的全纯函数族（详见第 1.2 节的详细讨论）。这一开创性成果激发了数学众多领域对 Bohr 型问题的浓厚兴趣。随后，关于多维幂级数中的 Bohr 现象的研究进一步取得了进展，其中 Aizenberg [8, 10, 12], Aizenberg 等人 [7, 9, 11], Defant 和 Frerick [24],以及 Djakov 和 Ramanujan [29] 作出了重要贡献。关于 Bohr 不等式的不同方面及其推广的全面综述可参见 [6, 15, 25, 33, 35, 44, 49–51],，此外还可参阅 Kresin 和 Maz'ya 的专著 [43] 及其中的参考文献。特别是， [43, 第 6], 节专门讨论 Bohr 型定理，指出了将若干经典不等式推广到多复变数全纯函数，更重要的是推广到偏微分方程解的有前景方向。

从单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 的转变，并非只是索引方式的改变；它涉及底层复几何的根本性转变。尽管

2010数学主题分类：主要分类 32A05、30C80；次要分类 32A10、41A17。关键词和短语：Bohr 不等式；Bohr-Rogosinski 半径；全纯映射；单位多圆盘；径向导数；Schwarz 函数。*通讯作者：Sujoy Majumder。由 $\mathcal{AMS}$-LaTeX 排版。

经典的 Bohr 定理（1914年）为 $\mathbb{D}$上的幂级数给出了优雅的界，但在多变量情形下，必须协调 n 个相互独立的复变量与一个全局界。在多复变数（SCV）中，一个关键挑战是确定单变量精细化——例如涉及 Rogosinski 半径或基于面积的估计的精细化——在应用径向（欧拉）导数算子 $Df(z) = \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial f}{\partial z_k}$ 时，是否仍具有尖锐性。本文通过细致分析 n维施瓦茨引理，证明“1/3-现象”在 $\mathbb{C}^n$ 中依然成立，从而弥合这一差距。

1.1. **经典 Bohr 不等式及其近期影响。** 设 $\mathcal{B}$ 表示单位圆盘中解析函数的类 $\mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ 具有如下形式$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$满足 $|f(\zeta)| < 1$在 $\mathbb{D}$中。在狄利克雷级数的研究中，1914年，Harald Bohr [20] 发现了以下有趣的现象

定理 A. 若 $f \in \mathcal{B}$，则以下尖锐不等式成立：

$$M_f(r) := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \leq 1 \ \ for \ \ |\zeta| = r \leq \frac{1}{3}. \tag{1.1}$$

我们注意到，若 $|f(\zeta)| \leq 1$属于 $\mathbb{D}$且 $|f(\zeta_0)| = 1$对某个点 $\zeta_0 \in \mathbb{D}$成立，则根据最大模原理， f必为模为 1 的常数；因此，我们将注意力限制在非常值函数 $f \in \mathcal{B}$上。不等式 (1.1) 及其尖锐常数 $1/3$称为经典 Bohr 不等式，而 $1/3$ 称为函数族 $\mathcal{B}$的 Bohr 半径。Bohr [20] 最初为 $r \leq 1/6$建立了这一不等式，随后 Wiener 证明了常数 $1/3$ 是尖锐的。此后，出现了多种其他证明（见 [49, 51, 55, 56],，以及综述 [6]和 [31, 第 8]章）。其中许多研究运用了复分析、泛函分析、数论和概率论的方法，进一步发展了 Bohr 关于狄利克雷级数的思想及其应用理论。例如，文献 [7, 9, 10, 19, 29, 37]中得到了这一结果的各种多维推广。

值得注意的是，如果将 Bohr 不等式中的 $|a_0|$ 替换为 $|a_0|^2$，Bohr 半径便会从 $1/3$ 增大到 $1/2$。此外,_ 如果在定理 A 中采用 $a_0 = 0$ ，尖锐 Bohr 半径还可进一步改进至 $1/\sqrt{2}$（例如，参见 [38], [49, 推论 2.9], ；关于更一般的结果，可参见近期工作 [52]）。这些精细化依赖于如下形式的尖锐系数估计

$$|a_n| \leq 1 - |a_0|^2, \quad n \geq 1, ; f \in \mathcal{B}.$$

利用这些不等式，Kayumov 和 Ponnusamy [38] 指出，在极值情形 $|a_0| < 1$ 下无法得到定理 A 的尖锐形式。尽管如此，对于 $\mathcal{B}$ 中的每个函数（见 [15]），以及若干单叶函数子类（见 [10, 47]），都已建立了定理 A 的尖锐版本。

Bohr–Rogosinski 半径是经典博尔半径的自然类比。这一概念最初由 Rogosinski [54]在 Schur 类 $\mathcal{B}$的框架下提出。具体而言，如果 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$，那么对于每个整数 $N \geq 1$， N- 阶部分和 $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ 从属于单位圆盘，其含义是$|S_N(z)| < 1$ 对于所有 z 在圆盘 $\mathbb{D}_{1/2}$ 中均成立:$= \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$。数值 $r = 1/2$ 是使该包含关系对类 $\mathcal{B}$一致成立的最大半径，

因此称为 Bohr–Rogosinski 半径。对于函数 $f \in \mathcal{B}$，我们考虑由下式定义的 Bohr–Rogosinski 和 $R_N^f(z)$

$$R_N^f(z) := |f(z)| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n, \quad |z| = r. \tag{1.2}$$

注意，对于情形 $N = 1$，式（1.2）通过将固定的初始系数 $|a_0| = |f(0)|$ 替换为局部模 $|f(z)|$，推广了经典 Bohr 和。泛函不等式 $R_N^f(z) \leq 1$ 构成了 Bohr–Rogosinski 不等式。从几何函数论的角度看，若 B 和 R 分别表示 Bohr 半径与 Bohr–Rogosinski 半径，那么关系式 $B \leq R$ 是主控原理的直接推论，因为部分和受主控级数控制：

$$|S_N(z)| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| r^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

2005年，Aizenberg 等人 [11] 显著拓展了 Bohr–Rogosinski 不等式的适用范围，将其推广至从 $\mathbb{C}^n$中的开单位球到任意凸域的全纯映射。这项工作确立了 Rogosinski 定理的基础性多维类比，揭示了陪域的几何约束如何影响部分和的增长。随后，Aizenberg [13] 研究了将右半平面 $\sum a_n n^{-s}$： $\operatorname{Re} \mathbb{C}_+ = \{s \in \mathbb{C}$ 映入有界凸域 $s > 0\}$ 的普通狄利克雷级数的性质 $G \subset \mathbb{C}$。这项研究的一项重要贡献是证明了 Bohr 与 Rogosinski 收敛横坐标（分别对应不等式成立的条带）具有显著的几何不变性，不受目标域的具体选择影响 G。2012年，Aizenberg [14] 进一步从泛函分析视角出发，确定了全纯函数 Hardy 类 $H^p(\mathbb{D})$ $(1 \leq p \leq \infty)$ 的 Bohr 半径与 Rogosinski 半径。同一研究还通过分析 $\mathbb{C}^n$中 Reinhardt 域之间的映射，将理论拓展至更高维度。这些结果凸显了幂级数系数与域的内在对称性之间错综复杂的相互作用，为该领域后续的推广提供了坚实框架。

我们回顾一下，2021年，Kayumov等人 [42] 针对单位圆盘 $\mathbb{D}$内解析函数的 Bohr–Rogosinski 半径建立了若干重要结论。他们的工作起到了催化作用，随后激发了广泛的研究，旨在考察各种特殊函数类及更一般几何情形下的 Bohr–Rogosinski 不等式。

定理 B。 *[42]* 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中解析，且$|f(z)| < 1$ 在 $\mathbb{D}$中解析。那么

$$|f(z)| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n \leq 1 \ \ for \ \ r \leq R_N,$$

其中， R_N 是方程 $2(1+r)r^N-(1-r^2)=0$ 的正根。半径 R_N 是最佳可能值。此外，

$$|f(z)|^2+\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|r^n\leq 1 \ \ for \ \ r\leq R'_N,$$

其中，R'_N 是方程 $(1+r)r^N-(1-r^2)=0$ 的正根。半径 R'_N 是最佳可能值。

定理 C. *[42]* 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $\mathbb{D}$ 上解析，且满足 $|f(z)|\leq 1$ 在 $\mathbb{D}$ 中成立。那么，对每个 $m,N\in\mathbb{N}$,

$$|f(z^m)|+\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|r^n\leq 1 \ \ for \ \ r\leq R_{m,N},$$

其中 $R_{m,N}$ 是方程 $\psi_{m,N}=0$ 的正根，其中

$$\psi_{m,N}=2r^N\left(1+r^m\right)-\left(1-r\right)\left(1-r^m\right). \tag{1.3}$$

数值 $R_{m,N}$ 无法进一步改进。此外，$\lim_{N\to\infty}R_{m,N}=1$ 且 $\lim_{m\to\infty}R_{m,N}=A_N$，其中 A_N 是方程 $2r^N=1-r$ 的正根。另外，$A_1=1/3$ 和 $A_2=1/2$。

关于 Bohr–Rogosinski 半径在各种函数类中的最新进展，读者可参阅 [2–4, 17, 23, 30, 34] 及其中的大量参考文献。鉴于这些结果在单位圆盘中的重要性，研究它们的高维类比是很自然的。这引出了以下问题：

问题 1.1。 是否可以针对定义在单位多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;\mathbf{1}_n)$ 上的全纯函数，就其相关 *Schwarz* 函数建立尖锐的 *Bohr–Rogosinski* 型不等式？

2022年，Wu 等 [57] 获得了若干由单个参数刻画的 Bohr 型不等式，或表示为幂级数项的凸组合形式的不等式。在这一方向上，我们回顾下面的定理 D，它通过引入凸组合框架推广了经典 Bohr 不等式。

定理 D。 *[57, 定理 3.1]* 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中是解析的，且 $|f(z)|<1$ 在 $\mathbb{D}$ 中。则对任意 $t\in[0,1]$，有

$$t|f(z)|+(1-t)\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\,r^k\leq 1 \quad for\ r\leq R_1,$$

其中半径

$$R_1=\begin{cases}\dfrac{1-2\sqrt{1-t}}{4t-3}, & t\in\left[0,\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3}{4},1\right],\\ \dfrac{1}{2}, & t=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

是最佳可能的。

定理 E。 *[57, 定理 3。4]* 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在单位圆盘内解析 $\mathbb{D}$ 且 $|f(z)| < 1$ 在 $\mathbb{D}$。则对于任意 $\lambda \in (0, +\infty)$，不等式

$$|f(z)| + |f'(z)|r + \lambda \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| r^k \leq 1 \quad for\ r \leq R_3,$$

其中

$$R_3 = R_3(\lambda) = \begin{cases} r_\lambda, & \lambda \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right), \\ r_*, & \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

且 r_λ 和 $r_* \approx 0.3191$ 分别是方程在区间 $(0,\sqrt{2}-1)$ 内的唯一正实根

$$2\lambda r^4 + (4\lambda - 1)r^3 + (2\lambda - 1)r^2 + 3r - 1 = 0$$

以及 $r^4 + r^3 + 3r - 1 = 0$。此外，半径 R_3 是最佳的。

在本文中， S_r 表示子圆盘 $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ 在映射 f 下的像的面积。对于在单位圆盘内解析的函数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$，归一化面积 S_r/π 由 Dirichlet 积分给出

$$\frac{S_r}{\pi} = \frac{1}{\pi} \iint_{|z|<r} |f'(z)|^2 \, dx\, dy = \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 r^{2k}.$$

定理 F. *[57, 定理 3.5]* 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内解析，且 $|f(z)| < 1$ 在 $\mathbb{D}$ 内。那么，对于任意 $t \in (0, 1],$，均有

$$t \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k + (1-t)\left(\frac{S_r}{\pi}\right) \leq 1 \quad for\ r \leq R_4,$$

其中半径

$$R_4 = R_4(\lambda) = \begin{cases} r_t, & t \in \left(0, \frac{9}{17}\right), \\ \frac{1}{3}, & t \in \left[\frac{9}{17}, 1\right], \end{cases}$$

且数值 $r = r_t$ 是方程的唯一正根

$$tr^3 + tr^2 + (4 - 5t)r - t = 0$$

位于区间 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$内。

鉴于上述结果，自然会考虑以下问题：

Pro题 1.2. 我们能否建立定理 *A–F* 的多维类比 *?*

本研究的主要目标是建立若干精细化的 Bohr 型不等式的多维类比。具体而言，我们研究将单位多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 映入

单位圆盘 $\mathbb{D}$的全纯函数类所呈现的 Bohr?Rogosinski现象。本研究有效弥合了经典单变量理论与多复变几何之间的鸿沟。我们的主要贡献旨在推广已有的基准结果：定理 2.1 和 2.2将经典 Bohr 半径（定理 A）和 Rogosinski变体（定理B和C）推广到多圆盘 $\mathbb{D}^n$，所采用的是 Schwarz 函数类$\omega \in \mathcal{B}_{n,\ m}$。特别地，定理2.2解决了问题 1.1中提出的开放问题。定理 2.3 和2.4 通过以径向导数算子 $Df(z)$取代单变量导数，推广了凸组合和精细导数估计（定理D和E）；该算子是n 维情形下自然的几何对应物。定理 2.5 推广了 Bohr 不等式（定理 F）的 Dirichlet 积分和基于面积的版本，表明在多变量情形下，全纯映射的像的面积仍然能够给出一个精确的 Bohr 半径。

1.2. 多复变基础记号。对于 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ 和$w = (w_1, \ldots, w_n)$，在 $\mathbb{C}^n$ 中，我们记 $\langle z, w\rangle = z_1w_1 + \ldots + z_nw_n$和 $||z|| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$。复数 $\overline{z_1}$ 的绝对值记为 $|z_1|$，对于 $z \in \overline{\mathbb{C}^n}$，我们定义

$$||z||_\infty = \max_{1\le i\le n} |z_i|.$$

在全文中，对于 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$和 $p \in \mathbb{N}$，我们定义 $z^p = (z_1^p, \ldots, z_n^p)$。$\mathbb{C}^n$ 中的开多圆盘（或开多圆柱）是形如 $\mathbb{P}\Delta(a; r) \subset \mathbb{C}^n$的子集

$$\mathbb{P}\Delta(a; r) = \prod_{j=1}^{n} \Delta(a_j; r_j) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i - a_i| < r_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

点 $a = (a_1, \ldots\ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ 称为多圆盘的中心，$r = (r_1, \ldots\ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ $(r_i > 0)$ 称为多半径。容易看出

$$\mathbb{P}\Delta(0; 1) = \mathbb{P}\Delta(0; 1_n) = \prod_{j=1}^{n} \Delta(0_n; 1_n).$$

$\mathbb{P}\Delta(a; r)$ 的闭包称为以 a 为中心、以r 为多半径的闭多圆盘，记作 $\mathbb{P}\Delta(a; r)$。我们用 $C_k(a_k; r_k)$ 表示 $\Delta(a_k; r_k)$ 的边界，即以 a_k 为中心、半径为 r_k 的 z_k 平面上的圆。当然，$C_k(a_k, r_k)$ 可用通常参数化表示

$$\theta_k \to \gamma(\theta_k) = a_k + r_k e^{i\theta_k},\ \text{where}, 0 \le \theta_k \le 2\pi.$$

乘积 $C^n(a; r) := C_1(a_1; r_1) \times \ldots \times C_n(a_n; r_n)$ 称为多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(a; r)$ 的确定集。

维数为 n 的多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n)$ 由 n 个非负整数 α_j，$1 \le j \le n$ 构成；多重指标 α 的次数是其和 $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$，我们记作 $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$. 对于 $z = (z_1, \ldots\ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ 和多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n)$，我们定义

$$z^\alpha = \prod_{j=1}^{n} z_j^{\alpha_j} \quad \text{and} \quad |z|^\alpha = \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{\alpha_j}.$$

对于两个多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 和 $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$，我们定义 $\nu^\alpha = \nu_1^{\alpha_1} \ldots \nu_n^{\alpha_n}$. 设 f 是域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数，且 $c = (c_1, \ldots, c_n) \in$

Ω。那么在以 c 为中心、包含于 Ω 的多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(c;\ r) \subset$ 中， $f(z)$ 关于 $z_1 - c_1, \ldots, z_n - c_n$ 有幂级数展开，

$$f(z) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(z_1 - c_1)^{\alpha_1}(z_2 - c_2)^{\alpha_2}\ldots(z_n - c_n)^{\alpha_n}$$

$$= \sum_{|\alpha|=0} a_\alpha (z-c)^\alpha = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} P_{|\alpha|}(z-c),$$

在 $\mathbb{P}\Delta(c;\ r)$ 中绝对收敛，其中项 $P_k(z-c)$ 是次数为 k的齐次多项式。

我们的目标之一是建立定理 A-F 的多维类比。为此，我们将 f 视为 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 中的全纯函数，并定义 Euler 算子 D 如下：

$$Df(z) := \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial f(z)}{\partial z_k}.$$

这个算子也称为欧拉导数、全导数或径向导数。

设 $G \neq \varnothing$ 是 $\mathbb{C}^n$的一个开子集。设 f 是定义在 G上的全纯函数。对于点 $a \in \mathbb{C}^n$，我们写作 $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(z-a)$，其中项 $P_i(z-a)$要么恒为零，要么是次数为 i的齐次多项式。记 f 在 a 处的零点重数为 $k = \min\{i:\ P_i(z-a) \not\equiv 0\}$。显然，当 $f(a) = 0$ 且 $\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}(a) \not\equiv 0\right)$ 对于某个 $j = 1, 2, \ldots, n$成立时，1 是 f 在 a处的零点重数。

设 $\Delta_{z_k}(0;\ 1)$ 为 z_k 平面上的单位圆盘。设 ω_i: $\Delta_{z_k}(0;\ 1) \to \mathbb{C}$满足$|\omega_i(z)| \leq 1$对所有 $z \in \Delta_{z_k}(0;\ 1)$ 均成立，且 $\omega_i(0) = \omega_i^{(1)}(0) = \ldots = \omega_i^{(m-1)}(0) = 0$并且$\omega_i^{(m)}(0) \neq 0$, 其中 $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$。下文中，令 $z = (z_1,\ \ldots,\ z_n)$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 的一个元素，并令

$$\mathcal{B}_{n,m} = \{\omega(z) \in \mathbb{C}^n : \omega(z) = (\omega_1(z_1), \omega_2(z_2), \ldots, \omega_n(z_n))\}.$$

2. 主要结果

设 $f(z) = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha z^\alpha$ 是单位多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 上的全纯映射，满足$|f(z)| \leq 1$ 对所有 $z \in \mathbb{D}^n$均成立。我们首先在多复变数框架下讨论经典 Bohr 不等式。下面的定理给出了一个尖锐的多维类比，同时纳入函数的局部模与其幂级数系数，表明 $R_n = 1/3n$ 是 $\mathbb{D}^n$上 Bohr 现象的确切阈值。该结果表述为定理 2.1，是定理 A 的尖锐多变量推广。

定理 2.1。 设 f 是多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;1_n)$ 中的全纯函数，满足$|f(z)| \leq 1$对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1/n)$均成立。若 $f(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha z^\alpha$， 则

$$\mathcal{A}(z, \mathbf{r}) := \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |a_\alpha|\ |z|^\alpha \leq 1\ for\ ||z||_\infty = \mathbf{r} \leq R_n := \frac{1}{3n}.$$

多半径 $1/3n$ 是最佳可能值。

注 2.1。 请注意，在特殊情形 $n = 1$下，定理 2.1 给出了 $R_1 = 1/3$的经典博尔半径，表明我们的结果将全纯函数从单复变量推广到了多复变量。

超越经典博尔半径，我们研究 Bohr-Rogosinski 现象，该现象为幂级数的部分和提供了更精细的估计。定理2.2确立了 Schwarz 函数类中函数不等式的尖锐半径 $\mathcal{B}_{n,\,m}$，从而为 $\mathbb{C}^n$ 中的 Rogosinski 型增长问题提供了确定的解答。此结果在定理2.2中表述，对问题 1.1 所提出的关于这些界的最优性问题给出了全面解答。

定理 *2.2*。设 $f(z) = \sum_{|\alpha|=0} a_\alpha z^\alpha$ 是多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;\, 1_n)$ 中的一个全纯函数，满足 $|f(z)| \leq 1$，对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\, 1/n)$ 均成立。假设 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0;\, 1/n)$，且 $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ 满足 $||z||_\infty = r$。令 $\omega \in \mathcal{B}_{n,m}$，其中 $m \in \mathbb{N}$。那么，对每个 $m, N \in \mathbb{N}$，有

$$\mathcal{B}(z; \mathbf{r}) := |f(\omega(z))| + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=iN} |a_\alpha| r^\alpha \leq 1 \quad for\ n\mathbf{r} \leq R_{m,n,N}, \tag{2.1}$$

其中 $R_{m,\,n,\,N}$ 是方程 $\psi_{m,\,n,\,N}(r) = 0$的正根，其中

$$\psi_{m,n,N}(\mathbf{r}) = 2(n\mathbf{r})^N(1 + \mathbf{r}^m) - (1 - n\mathbf{r})(1 - \mathbf{r}^m).$$

数值$R_{m,\,n,\,N}$ 无法改进。此外，

$$\lim_{N\to\infty} R_{m,n,N} = \begin{cases} 1, & if\ n = 1 \\ \dfrac{1}{n}, & if\, n \geq 2. \end{cases}$$

且 $\lim_{m\to\infty} R_{m,\,n,\,N} = A_N$，其中 A_N是方程的正根

$$2(n\mathbf{r})^N = 1 - n\mathbf{r}.$$

注 2.2. (a)注意，$\psi_{m,\,1,\,N}(\mathbf{r}) = \psi_{m,\,N}(r)$ 且$R_{m,\,1,\,N} = R_{m,\,N}$。因此，定理 2.2 相较于定理 *E* 有显著改进。

(b)显然，$A_1 = 1/(3n)$，这意味着当 2.2 在特定选择 $m \to \infty$ 下时，定理 *2.2* $N = 1$恢复为经典 *Bohr* 不等式这一极限情形。

作为定理 2.2的直接应用，令幂映射 $\omega(z) = z^m$ 满足 $z \in \mathbb{C}^n$，即可得到以下推论。

推论 *2.1.* 设 $f(z) = \sum_{|\alpha|=0} a_\alpha z^\alpha$ 是定义在多圆盘$\mathbb{P}\Delta(0;\, 1_n)$ 上的全纯函数，满足 $|f(z)| \leq 1$ 对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\, 1/n)$ 均成立。假设 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0;\, 1/n)$ 且 $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ 满足 $||z||_\infty = r$。设 $\omega \in \mathcal{B}_{n,m}$ 对某个 $m \in \mathbb{N}$ 成立。那么对于每个 $m, N \in \mathbb{N}$，我们有

$$|f(z^m)| + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=iN} |a_\alpha| r^\alpha \leq 1 \quad for\ \mathbf{r} \leq R_{m,n,N}, \tag{2.2}$$

其中 $R_{m,\,n,\,N}$ 是方程 $\psi_{m,\,n,\,N}(\mathbf{r}) = 0$ 的正根。数值 $R_{m,\,n,\,N}$ 无法改进。

下面陈述定理 D 的多维版本。

定理 *2.3.* 设 $f(z) = \sum_{|\alpha|=0} a_\alpha z^\alpha$ 是多圆盘$\mathbb{P}\Delta(0; 1_n)$ 中的全纯函数，使得对于所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0; 1/n)$，都有 $|f(z)| \leq 1$。假设 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0; 1/n)$，且 $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ 满足 $||z||_\infty = r$。设 $\omega \in \mathcal{B}_{n,m}$ 对于某个 $m \in \mathbb{N}$。那么对于任意 $t \in [0, 1]$，有

$$\mathcal{C}(z, \mathbf{r}) := |f(\omega(z))| + (1-t) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| \, r^\alpha \leq 1$$

当 $n\mathbf{r} \leq R_{m,n,t}$ 时，其中 $R_{m,n,t}$ 是方程的最小正根

$$(4t-3)(n\mathbf{r})^{m+1} - (2t-1)(n\mathbf{r})^m + (2t-3)n^{m-1}(n\mathbf{r}) + n^{m-1} = 0.$$

半径 $R_{m,n,t}$ 是最佳可能的。

注 2.3。 若 $t = 0$，则定理 2.3 退化为经典 *Bohr* 半径问题的情形。

将基于导数的不等式推广到 $\mathbb{C}^n$ 往往会引入几何上的复杂性，而径向（Euler）导数算子 $Df(z)$ 则是在 $\mathbb{D}$中复导数的自然对应物。利用这一算子，我们推导出尖锐的增长估计，将单变量情形的已知界推广到多圆盘 $\mathbb{D}^n$。因此，我们将定理 2.4作为定理 E 的多维推广。

定理 *2.4*。设 $f(z) = \sum_{|\alpha|=0} a_\alpha z^\alpha$ 是多圆盘$\mathbb{P}\Delta(0; 1_n)$上的全纯函数，满足对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0; 1/n)$，均有 $|f(z)| \leq 1$。假设 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0; 1/n)$，且 $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ 满足 $||z||_\infty = r$。则对任意 $\lambda \in (0, +\infty)$，有

$$\mathcal{D}(z, \mathbf{r}) := |f(z)| + |Df(z)| + \lambda \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| \, r^\alpha \leq 1$$

对于 $n\mathbf{r} \leq R_{n,\lambda}$，其中

$$R_{n,\lambda} = \begin{cases} n\mathbf{r}_\lambda, & \lambda \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ n\mathbf{r}_*, & \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

这是可能达到的最佳结果，并且半径 $n\mathbf{r}_\lambda$ 和 $n\mathbf{r}_* \approx 0.3191$ 分别是方程的唯一正实根

$$2\lambda(n\mathbf{r})^4 + (4\lambda - 1)(n\mathbf{r})^3 + (2\lambda - 1)(n\mathbf{r})^2 + 3(n\mathbf{r}) - 1 = 0$$

and

$$(n\mathbf{r})^4 + (n\mathbf{r})^3 + 3(n\mathbf{r}) - 1 = 0$$

分别位于区间 $\left(0, \sqrt{2} - 1\right)$ 内。

最后，我们将关注点转向 Bohr 现象的测度论方面。以下定理通过将 $\mathbb{D}^n(r)$ 上的 Dirichlet 积分与映射的有界性联系起来，刻画了尖锐的基于面积的 Bohr 不等式。该结果表明，$1/3n$ 阈值仍是 $\mathbb{C}^n$ 中基于面积的估计的临界半径，为定理 F 提供了明确的多维类比。

定理 2.5。 设 $f(z) = \sum_{|\alpha|=0} a_\alpha z^\alpha$ 是多圆盘$\mathbb{P}\Delta(0;\, 1_n)$ 中的全纯函数，满足 $|f(z)| \leq 1$，对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\, 1/n)$均成立。假设 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0;\, 1/n)$ 且 $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ 满足 $||z||_\infty = \mathbf{r}$。令 $t \in (0, 1]$。那么

$$\mathcal{E}(z; \mathbf{r}) := t \sum_{k=0} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| r^\alpha + (1-t) \sum_{k=1} k \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 r^{2\alpha} \leq 1$$

˜对于 $n\mathbf{r} \leq R_{n,\ N}$，其中半径

$$\tilde{R}_{n,t} = \begin{cases} n\mathbf{r}_t, & t \in \left(0, \frac{9}{17}\right), \\ \frac{1}{3n}, & t \in \left[\frac{9}{17}, 1\right] \end{cases}$$

且数值 $n\mathbf{r}_t$ 是方程的唯一正根

$$t(n\mathbf{r})^3 + t(n\mathbf{r})^2 + (4-5t)(n\mathbf{r}) - t = 0$$

位于区间 $(0, 1/3)$ 内。

注 2。 **4.** 当 $t = 1$，定理 *2.5* 可归结为经典 *Bohr* 半径问题。

3. 关键引理

为了证明主要结果，我们需要以下引理。其中第一个引理是 [22, 定理 22] 的一个特例。

引理 3.1. 设 f 在多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;\, 1_n)$ 上全纯，并满足 $|f(z)| \leq 1$ 对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0; 1_n)$均成立。那么对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\, 1_n)$，有

$$|f(z)| \leq \frac{|f(0)| + ||z||_\infty}{1 + |f(0)|||z||_\infty}.$$

以下引理包含在 [36, 推论 1.3] 中。

引理 3.2. 设 f 在多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;\, 1_n)$ 上全纯，并满足 $|f(z)| < 1$ 对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\, 1_n)$均成立。那么对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$，有

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_n^{\alpha_n}} \right| \leq \alpha! \frac{1 - |f(z)|^2}{(1 - ||z||_\infty^2)^{|\alpha|}} (1 + ||z||_\infty)^{|\alpha| - N}$$

对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0; 1_n)$均成立，其中 N 是满足 $\alpha_j \neq 0$ 的指标 j 的个数。

以下引理包含在 [36, 引理 2.1] 中。

引理 3.3。 设 f 在多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$ 中全纯，且对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$，满足 $|f(z)| \leq 1$。假设对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$，满足 $f(z) = a_0 + \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} a_\alpha z^\alpha$。则对于任意多重指标 α，有

$$|a_\alpha| \leq 1 - |a_0|^2.$$

以下引理包含在 [32, 引理 6.1.28]中。

引理 3.4。 设 f 在多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$ 中全纯，且对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$，满足 $|f(z)| \leq 1$。假设 $k(\geq 1)$ 是 f 在 0 处的零点重数。则

$$|f(z)| \leq ||z||_\infty^k \ \textit{for all}\ z \in \mathbb{P}\Delta(0; 1_n).$$

以下引理包含于 [36, 推论 1.3] 中。

引理 3.5。 设 f 在多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$ 中全纯，且对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$ 都有 $|f(z)| < 1$。则对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$，有

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|} f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_n^{\alpha_n}}\right| \leq \alpha! \frac{1 - |f(z)|^2}{(1 - ||z||_\infty^2)^{|\alpha|}} (1 + ||z||_\infty)^{|\alpha| - N}$$

对所有 $z \in \mathbb{P}\Delta(0; 1_n)$，其中 N 是满足 $\alpha_j \neq 0$的指标 j 的个数。

4. 主要结果的证明

定理 2.1的证明。 根据给定条件， $f(z) = a_0 + \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} a_\alpha z^\alpha$ 在多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$ 中全纯，且 $|f(z)| \leq 1$ 在 $\mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$ 中成立。此外，由引理 3.3，可得

$$|a_\alpha| \leq 1 - |a_0|^2, \tag{4.1}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 满足 $|\alpha| = k$。 取 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$，使得 $\mathbf{r} = ||z||_\infty$。注意到

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha z^\alpha\right| &\leq \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |a_\alpha||z|^\alpha \\
&\leq \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |a_\alpha|\ ||z||_\infty^{|\alpha|} \\
&= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |a_\alpha|\ \mathbf{r}^{|\alpha|} \\
&\leq |a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|\ \mathbf{r}^{|\alpha|}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

由（4.1），可得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| \mathbf{r}^{|\alpha|} &\leq (1 - |a_0|^2) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{r}^k \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} 1 \\
&\leq (1 - |a_0|^2) \sum_{k=1}^{\infty} (n\mathbf{r})^k \\
&\leq (1 - |a_0|^2) \frac{n\mathbf{r}}{1 - n\mathbf{r}} \\
&\leq (1 - |a_0|) \frac{2n\mathbf{r}}{1 - n\mathbf{r}} \\
&\leq 1 - |a_0|
\end{aligned} \tag{4.3}$$

当 $\mathbf{r} \leq \frac{1}{3n}$。由（4.3）和（4.2），可得

$$\left|\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha z^\alpha\right| \leq \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |a_\alpha||z|^\alpha \leq 1 \text{ for } \mathbf{r} \leq \frac{1}{3n}. \tag{4.4}$$

通过考察以下针对 $a \in [0, 1)$ 的极值函数，证明半径 $1/(3n)$ 的尖锐性：

$$f_a(z) = \frac{a - (z_1 + \ldots + z_n)}{1 - a(z_1 + \ldots + z_n)}. \tag{4.5}$$

容易验证， f 在多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0; 1/n)$ 中全纯。由于

$$|a(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)| < 1,$$

我们看到， f_a 具有如下级数展开

$$f_a(z) = a - (1-a^2)\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1}(z_1 + \cdots + z_n)^k$$

对所有的 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1/n)$。对于点 $z = (r,\ \ldots\ldots,\ r)$，我们得到

$$f_a(z) = a - (1-a^2)\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1}(n\mathbf{r})^k.$$

因此，我们看到

$$\mathcal{A}_{f_a}(r) = a + (1-a^2)\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1}(n\mathbf{r})^k = a + (1-a^2)\frac{n\mathbf{r}}{1-na\mathbf{r}} > 1$$

若 $\mathbf{r} > 1/((1+2a)n)$。令 $a \to 1$，可得 $\mathcal{A}_{f_a}(r) > 1$ 对每个 $\mathbf{r} > 1/3n$均成立。该结果表明，半径 $1/3n$ 是最佳可能值，从而完成证明。□

定理 2.2 的证明。根据给定条件， $f(z) = a_0 + \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} a_\alpha z^\alpha$ 在多圆盘 $\mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$ 中是全纯的，且 $|f(z)| \leq 1$ 属于 $\mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$。设 $z \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1/n)$，使得对 $i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$，有 $|z_i| = r_i < 1/n$。设 $\omega(z) = (\omega_1(z)\ \ldots\ldots,\ \omega_n(z)) \in \mathcal{B}_{n,m}$。于是，由引理 3.4 可得

$$|\omega_i(z)| \leq r_i^m$$

对于 $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$。显然，

$$||\omega(z)||_\infty \leq \mathbf{r}^m,$$

其中 $\mathbf{r} = \max\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$。

因此，由引理 3.1，可得

$$|f(\omega(z))| \leq \frac{||\omega(z)||_\infty + |a_0|}{1 + |a_0|\ ||\omega(z)||_\infty} \leq \frac{\mathbf{r}^m + |a_0|}{1 + |a_0|\mathbf{r}^m}. \tag{4.6}$$

为使其符合几何函数论领域 SCI 收录期刊的标准，推导过程应以正式的逻辑顺序呈现。我已统一符号、修正代数推导步骤，并确保几何函数论术语准确。推荐版本结合（4.6）和（4.1），可得 Bohr–Rogosinski 和的以下估计：

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(z, \mathbf{r}) &\leq \frac{\mathbf{r}^m + |a_0|}{1 + |a_0|\mathbf{r}^m} + \sum_{k=1}^{\infty}(1 - |a_0|^2)(n\mathbf{r})^{kN} \\
&= \frac{\mathbf{r}^m + |a_0|}{1 + |a_0|\mathbf{r}^m} + (1 - |a_0|^2)\frac{(n\mathbf{r})^N}{1 - (n\mathbf{r})^N} \\
&= 1 + \frac{\Psi_{m,n,N}(\mathbf{r})}{(1 + |a_0|\mathbf{r}^m)(1 - (n\mathbf{r})^N)} \leq 1,
\end{aligned}$$

当 $\Psi_{m,\ n,\ N}(\mathbf{r}) \leq 0$ 时，该估计成立。这里，辅助函数 $\Psi_{m,\ n,\ N}(\mathbf{r})$ 定义为

$$\begin{aligned}\Psi_{m,n,N}(\mathbf{r}) &:= (\mathbf{r}^m + |a_0|)(1-(n\mathbf{r})^N) - (1+|a_0|\mathbf{r}^m)(1-(n\mathbf{r})^N) + (1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^N(1+|a_0|\mathbf{r}^m)\\ &= (1-|a_0|)\left[(1+|a_0|)(1+|a_0|\mathbf{r}^m)(n\mathbf{r})^N - (1-(n\mathbf{r})^N)(1-\mathbf{r}^m)\right]\\ &\leq (1-|a_0|)\left[2(1+\mathbf{r}^m)(n\mathbf{r})^N - (1-n\mathbf{r})(1-\mathbf{r}^m)\right],\end{aligned}$$

其中，我们利用了以下事实：$|a_0| \leq 1$ 以及 $(n\mathbf{r})^N \leq n\mathbf{r}$ 对于 $n\mathbf{r} < 1$。显然，当以下条件成立时，$\Psi_{m,\ n,\ N}(\mathbf{r}) \leq 0$

$$\Phi_{m,n,N}(\mathbf{r}) := 2(1+\mathbf{r}^m)(n\mathbf{r})^N - (1-n\mathbf{r})(1-\mathbf{r}^m) \leq 0.$$

由于 $\Phi_{m,\ n,\ N}(\mathbf{r})$ 是 $\mathbf{r}$ 的增函数，因此对于所有满足 $\mathbf{r} \leq R_{m,\ n,\ N}$的 $\mathbf{r}$，该不等式均成立，其中 $R_{m,\ n,\ N}$是方程 $\Phi_{m,\ n,\ N}(\mathbf{r}) = 0$的唯一正根。这就完成了定理第一部分的证明。

为证明数值 $R_{m,\ n,\ N}$ 是最佳可能的，我们令 $a \in [0,1)$，并考虑函数 $\omega(z) = (z_1^m,\ \ldots\ldots,\ z_n^m)$ 以及 f_a，如（4.5）所示。对于点

$$z = ((-1)^{(2m-1)/m}r, (-1)^{(2m-1)/m}r, \ldots, (-1)^{(2m-1)/m}r),$$

我们得到

$$|f_a(\omega(z))| = \frac{a+nr^m}{1+nar^m} \tag{4.7}$$

and

$$f_a(z) = a - (1-a^2)\sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1}(-1)^{k(2m-1)/m}(nr)^k. \tag{4.8}$$

因此，我们看到

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(z,\mathbf{r}) &= \frac{a+n\mathbf{r}^m}{1+na\mathbf{r}^m} + (1-a^2)\sum_{k=N}^{\infty} a^{k-1}(n\mathbf{r})^k\\ &= \frac{a+n\mathbf{r}^m}{1+na\mathbf{r}^m} + (1-a^2)\frac{a^{N-1}(n\mathbf{r})^N}{1-na\mathbf{r}}\\ &= 1 + \frac{(1-a)Q_{a,m,n,N}(\mathbf{r})}{(1+na\mathbf{r}^m)(1-na\mathbf{r})},\end{aligned} \tag{4.9}$$

其中

$$\begin{aligned}Q_{a,m,n,N}(\mathbf{r}) &= (1+a)a^{N-1}(n\mathbf{r})^N(1+na\mathbf{r}^m) - (1-na\mathbf{r})(1-n\mathbf{r}^m)\\ &\leq (1+a)(1+a\mathbf{r}^m)(n\mathbf{r})^N - (1-n\mathbf{r})(1-\mathbf{r}^m)\\ &\leq 2(1+\mathbf{r}^m)(n\mathbf{r})^N - (1-n\mathbf{r})(1-\mathbf{r}^m).\end{aligned}$$

简单计算可知，只有当 $Q_{a,m,n,N}(\mathbf{r}) > 0$ 时，(4.9) 右侧的表达式才大于 1。

显然，$Q_{a,\ m,\ n,\ N}(\mathbf{r})$ 是关于 $a \in [0,1$的严格递增函数。另请注意，表达式（4.9）对于所有 $a \in [0,1]$都小于或等于 1，仅当

$\mathbf{r} \leq R_{m,\ n,\ N}$。最后，当 $f = f_a$ 和 a 充分接近 **1** 时，我们看到

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 1^-} Q_{a,m,n,N}(\mathbf{r}) &= 2(n\mathbf{r})^N(1+n\mathbf{r}^m) - (1-n\mathbf{r})(1-n\mathbf{r}^m)\\ &= (1+n\mathbf{r}^m)(1-n\mathbf{r})\left(\frac{2(n\mathbf{r})^N}{1-n\mathbf{r}} - \frac{1-n\mathbf{r}^m}{(1+n\mathbf{r}^m)}\right) > 0,\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{B}_{f_a}(r) > 1$ 当 $\mathbf{r} > R_{m,\ n,\ N}$时。因此，半径 $R_{m,\ n,\ N}$ 是最佳可能的。□

定理的证明 2.3。取 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0; 1_n)$，使得 $\mathbf{r} = ||z||_\infty$现在，利用（4.6）和（4.1），得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}(z,\mathbf{r}):\\ &\leq t\frac{n\mathbf{r}^m + |a_0|}{1+n\mathbf{r}^m|a_0|} + (1-t)|a_0| + (1-t)(1-|a_0|^2)\frac{n\mathbf{r}}{1-n\mathbf{r}}\\ &= \frac{t(n\mathbf{r}^m+|a_0|)(1-n\mathbf{r}) + (1-t)(1+n\mathbf{r}^m|a_0|)\big[|a_0|(1-n\mathbf{r}) + (1-|a_0|^2)n\mathbf{r}\big]}{(1+n\mathbf{r}^m|a_0|)(1-n\mathbf{r})}\\ &= 1 + \frac{\psi_{m,n,t}(\mathbf{r})}{(1+n\mathbf{r}^m|a_0|)(1-n\mathbf{r})}\\ &\leq 1\end{aligned} \tag{4.10}$$

给定 $\psi_{m,\ n,\ t}(\mathbf{r}) \leq 0$，其中

$$\begin{aligned}\psi_{m,n,t}(\mathbf{r}) =&(1-n\mathbf{r})\big[t(n\mathbf{r}^m+|a_0|) - (1+n\mathbf{r}^m|a_0|)\big]\\ &+(1-t)(1+n\mathbf{r}^m|a_0|)\big[|a_0|(1-n\mathbf{r}) + (1-|a_0|^2)n\mathbf{r}\big].\end{aligned}$$

Set

$$\begin{aligned}&\alpha(x)\\ &= (1-n\mathbf{r})\big[t(n\mathbf{r}^m+x) - (1+n\mathbf{r}^m x)\big] + (1-t)(1+n\mathbf{r}^m x)\big[x(1-n\mathbf{r}) + (1-x^2)n\mathbf{r}\big]\\ &= -(1-t)n^2\mathbf{r}^{m+1}x^3 + (1-t)[n\mathbf{r}^m(1-n\mathbf{r}) - n\mathbf{r}]x^2\\ &\quad + \big[1-n\mathbf{r}-n\mathbf{r}^m+n^2\mathbf{r}^{m+1}+(1-t)n^2\mathbf{r}^{m+1}\big]x\\ &\quad + t[n\mathbf{r}^m - n\mathbf{r} - n^2\mathbf{r}^{m+1}] + 2n\mathbf{r} - 1,\end{aligned}$$

其中 $x = |a_0| \in [0, 1)$。

为证明不等式（4.10），只需证明

$$\alpha(x) \leq 0 \quad \text{for } n\mathbf{r} \leq R_{m,n,t}.$$

直接计算 $\alpha(x)$ 的一阶和二阶导数可得

$$\begin{aligned}\alpha'(x) =& -3(1-t)n^2\mathbf{r}^{m+1}x^2 + 2(1-t)\left[n\mathbf{r}^m(1-n\mathbf{r}) - n\mathbf{r}\right]x\\ &+1-n\mathbf{r}-n\mathbf{r}^m+n^2\mathbf{r}^{m+1}+(1-t)n^2\mathbf{r}^{m+1}\end{aligned}$$

and

$$\alpha''(x) = -6(1-t)n^2\mathbf{r}^{m+1}x + 2(1-t)\left[n\mathbf{r}^m(1-n\mathbf{r}) - n\mathbf{r}\right].$$

可以观察到，对于 $x \in [0,1]$， $\alpha''(x) \leq 0$，这意味着 $\alpha'(x)$ 在此区间上是减函数。因此， $\alpha'(x)$ 在端点$x = 1$处取得最小值。直接计算可得

$$\alpha'(x) \geq \alpha'(1) = \frac{1}{n^{m-1}}\left[(4t-3)(n\mathbf{r})^{m+1} - (2t-1)(n\mathbf{r})^m + (2t-3)n^{m-1}(n\mathbf{r}) + n^{m-1}\right]. \tag{4.11}$$

现在考虑以下三种情形。

情形 1. 设 $t \in [0, 1/2]$。通过应用笛卡尔符号法则，我们发现多项式的系数中符号变化的次数至多为三次

$$Q_t(\rho) = (4t-3)\rho^{m+1} - (2t-1)\rho^m + (2t-3)n^{m-1}\rho + n^{m-1}, \quad \rho = n\mathbf{r},$$

鉴于 $t \leq 1/2$，系数满足：

- 首项系数（$4t-3$） < 0,
- 系数 $-$（$2t-1$） ≥ 0,
- 一次项系数（$2t-3$）$n^{m-1} < 0$,
- 常数项 $n^{m-1} > 0$。

该分布（$-$， $+$， $-$， $+$）恰好确认了三次符号变化。此外，我们注意到

$$Q_t(0) = n^{m-1} > 0 \text{ and } Q_t(1) = (2t-2)(1+n^{m-1}) < 0.$$

根据介值定理，在区间（**0**，**1**）内至少存在一个根。因此，对于所有 $n\mathbf{r} \in [0, R_{m,n,t}]$，都有 $Q_t(n\mathbf{r}) \geq 0$，其中 $R_{m,\ n,\ t}$ 表示方程 $Q_t(n\mathbf{r}) = 0$ 的最小正根。

不等式（4.11）表明 $\alpha'(x) \geq 0$ 对所有 $n\mathbf{r} \in [0, R_{m,n,t}]$均成立，这表明$\alpha(x)$是 x 在区间 $[0,1]$上的非递减函数。因此，我们有 $\alpha(x) \leq \alpha(1) = 0$ 对所有 $n\mathbf{r} \in [0, R_{m,n,t}]$ 和 $x \in [0,1]$均成立。

情形 2. 令 $t \in (1/2, 3/4]$。通过对多项式应用笛卡尔符号法则

$$Q_t(\rho) = (4t-3)\rho^{m+1} - (2t-1)\rho^m + (2t-3)n^{m-1}\rho + n^{m-1}, \quad \rho = n\mathbf{r},$$

我们来考察各系数的符号：

- 首项系数（$4t-3$）非正，因为 $t \leq 3/4$。
- 系数 $-$（$2t-1$）在 $t > 1/2$ 时严格为负。
- 一次项系数（$2t-3$）n^{m-1} 在 $t \leq 3/4$ 时严格为负。
- 常数项 n^{m-1} 严格为正。

对于 $t \in (1/2,\ 3/4)$，非零系数的符号序列为 $(-,\ -,\ -,\ +)$；若 $t = 3/4$，则为 $(0,\ -,\ -,\ +)$。这两种情况下都恰好有一次符号变化。因此，笛卡尔符号法则保证恰好存在一个正根。此外，由于

$$Q_t(0) = n^{m-1} > 0 \text{ and } Q_t(1) = (2t-2)(1+n^{m-1}) < 0,$$

介值定理保证这个唯一的正根$R_{m,\ n,\ t}$ 位于区间 $(0,\ 1)$ 内。因此，对于所有 $n\mathbf{r} \in [0, R_{m,n,t}]$， $Q_t(n\mathbf{r}) \geq 0$。

不等式 (4.11) 表明，对于所有 $n\mathbf{r} \in [0, R_{m,n,t}]$ 和 $x \in [0,1]$，$\alpha'(x) \geq 0$。因此，$\alpha(x)$ 是 x 在此区间上的非递减函数。因此，$\alpha(x) \leq \alpha(1) = 0$ 对于所有 $n\mathbf{r} \in [0, R_{m,n,t}]$，论证得以完成。

情形 3. 令 $t \in (3/4,\ 1]$。我们考察多项式系数的符号分布

$$Q_t(\rho) = (4t-3)\rho^{m+1} - (2t-1)\rho^m + (2t-3)n^{m-1}\rho + n^{m-1}, \quad \rho = n\mathbf{r}.$$

对于 $t \in (3/4,\ 1]$，系数的符号如下：

- 首项系数（$4t-3$）严格为正。
- 系数 $-(2t-1)$ 严格为负。
- 一次项系数（$2t-3$）n^{m-1} 严格为负。
- 常数项 n^{m-1} 严格为正。

符号序列为 $(+,\ -,\ -,\ +)$，这表明恰有两次符号变化。根据笛卡尔符号法则，$Q_t(\rho)$要么有两个正根，要么没有正根。注意，$Q_t(0) = n^{m-1} > 0$ 且 $Q_t(1) = (2t-2)(1+n^{m-1}) \leq 0$。由于 $Q_t(1) \leq 0$（等号仅当 $t = 1$时成立），介值定理保证在区间$(0,1]$内至少有一个根。结合符号变化和端点值，可知存在唯一根$R_{m,\ n,\ t} \in (0,\ 1)$，使得对所有 $n\mathbf{r} \in [0, R_{m,n,t}]$，均有 $Q_t(\rho) \geq 0$。

不等式(4.11)意味着 $\alpha'(x) \geq 0$ 对所有 $n\mathbf{r} \in [0, R_{m,n,t}]$ 及 $x \in [0,1]$均成立。因此，$\alpha(x)$在该区间上是关于 x 的非递减函数。由此可得$\alpha(x) \leq \alpha(1) = 0$ 对所有 $n\mathbf{r} \in [0, R_{m,n,t}]$均成立，论证至此完成。

为了证明数 $R_{m,\ n,\ t}$ 是最优的，我们令 $a \in [0,1)$ 并考虑函数 $\omega(z) = (z_1^m,\ \ldots,\ z_n^m)$ 和 f_a，它们由 (4.5) 给出。令

$$z = ((-1)^{(2m-1)/m}r, (-1)^{(2m-1)/m}r, \ldots, (-1)^{(2m-1)/m}r).$$

利用 (4.7) 和 (4.8)，经过简单计算可得

$$\begin{aligned} & t|f_a(\omega(z)| + (1-t)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|r^\alpha \\ &= t\frac{a+n\mathbf{r}^m}{1+an\mathbf{r}^m} + (1-t)a + (1-t)(1-a^2)\frac{n\mathbf{r}}{1-an\mathbf{r}} \\ &= \frac{t(a+n\mathbf{r}^m)(1-an\mathbf{r}) + (1-t)(1+an\mathbf{r}^m)\big[a(1-an\mathbf{r}) + (1-a^2)n\mathbf{r}\big]}{(1+an\mathbf{r}^m)(1-an\mathbf{r})}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

为了证明尖锐性，只需证明对于任意 $n\mathbf{r} > R_{m,\ n,\ t}$，存在某个 $a \in [0,1)$，使 Bohr–Rogosinski 和超过 1。具体而言，我们证明存在 $a \in [0,1)$，使 (4.12) 右端严格大于 1，这等价于证明

$$\mu(a,n,t,\mathbf{r}) > 0 \quad \text{for } n\mathbf{r} > R_{m,n,t} \text{ and some } a \in [0,1),$$

其中

$$\begin{aligned} \mu(a,n,t,\mathbf{r}) =& (1-a)\Big[2n^2a^2\mathbf{r}^{m+1}(1-t) - \big((2t-1)na\mathbf{r} + a - t(1+a)\big)n\mathbf{r}^m \\ & - n\mathbf{r}\big((t-1)(1+a) - a\big) - 1\Big]. \end{aligned}$$

我们将 $a \in [0,1)$ 的辅助函数 $\rho(a)$ 定义为

$$\begin{aligned}\rho(a) := {} & 2n^2a^2\mathbf{r}^{m+1}(1-t) - [(2t-1)na\mathbf{r} + a - t(1+a)]\, n\mathbf{r}^m \\ & - n\mathbf{r}\,[(t-1)(1+a) - a] - 1.\end{aligned}$$

对 a求导，得到

$$\begin{aligned}\rho'(a) &= 4n^2a\mathbf{r}^{m+1}(1-t) - [(2t-1)n\mathbf{r} + 1 - t]\, n\mathbf{r}^m - n\mathbf{r}(t-2) \\ &\geq \frac{1}{n^{m-1}}\left[((1-2t)n\mathbf{r} + t - 1)\,(n\mathbf{r})^m + (2-t)n^m\mathbf{r}\right].\end{aligned}$$

直接分析可知，对于所有 $t \in [0,1]$ 和 $n\mathbf{r} \in [0,1)$，$\rho'(a) \geq 0$，这意味着 $\rho(a)$在区间 $[0,1]$上单调不减。因此，$\rho(a)$在 $a = 1$处取得最大值：

$$\rho(a) \leq \rho(1) = \frac{1}{n^{m-1}}\left[(3-4t)(n\mathbf{r})^{m+1} - (1-2t)(n\mathbf{r})^m + (2t-3)n^{m-1}(n\mathbf{r}) - n^{m-1}\right],$$

对于每个固定的 $t \in [0,1]$ 和 $n\mathbf{r} \in [0,1)$,

注意，若 $n\mathbf{r} > R_{m,\,n,\,t}$，则 $\rho(1) > 0$。由 $\rho(a)$在区间$[0,1],$ 上的连续性可知,

$$\lim_{a\to 1^-}\rho(a) = \rho(1) > 0.$$

因此，对于任意固定的 $n\mathbf{r} > R_{m,n,t}$，存在充分大的 $a \in [0,1)$，使得 $\rho(a) > 0$，这意味着 $\mu(a, n, t, \mathbf{r}) > 0$。这表明当 $n\mathbf{r} > R_{m,n,t}$时，不等式 (4.12) 不成立，因此半径$R_{m,n,t}$ 是尖锐的。□

定理 2.4 的证明。 设 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{D}^n$ 满足 $\mathbf{r} = \|z\|_\infty$。直接计算可得

$$\frac{n\mathbf{r}}{1-(n\mathbf{r})^2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{for } 0 \leq n\mathbf{r} \leq \sqrt{2} - 1.$$

根据引理 3.5，我们有如下估计

$$|Df(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-\mathbf{r}^2}n\mathbf{r} \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-(n\mathbf{r})^2}n\mathbf{r}. \tag{4.13}$$

此外，应用引理 3.3可得

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|r^\alpha \leq (1-|a_0|^2)\sum_{k=2}^{\infty}(n\mathbf{r})^k = (1-|a_0|^2)\frac{(n\mathbf{r})^2}{1-n\mathbf{r}}. \tag{4.14}$$

接下来，考虑辅助函数

$$\Phi(X) = X + \lambda(1-X^2),$$

其中 $X = |f(z)|$ 且 $\lambda = \frac{n\mathbf{r}}{1-(n\mathbf{r})^2}$。由于 $\lambda \leq 1/2$，函数 $\Phi(X)$ 在区间 $[0,1]$ 上递增。因此，当且仅当 $\Phi(X)$ 的上界为 $\Phi(X_0)$ 时，

$$X \leq X_0 = \frac{n\mathbf{r} + |a_0|}{1 + |a_0|n\mathbf{r}},$$

其中 X_0 是施瓦茨引理为全纯映射给出的界 .

将估计式（4.7）、（4.13）和（4.14）代入主要不等式，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(z,\mathbf{r}) &\le |f(z)| + \frac{n\mathbf{r}}{1-(n\mathbf{r})^2}\left(1-|f(z)|^2\right) + \lambda\frac{(1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^2}{1-n\mathbf{r}} \\ &\le \frac{n\mathbf{r}+|a_0|}{1+n\mathbf{r}|a_0|} + \frac{n\mathbf{r}}{1-(n\mathbf{r})^2}\left(1-\left(\frac{n\mathbf{r}+|a_0|}{1+n\mathbf{r}|a_0|}\right)^2\right) + \lambda\frac{(1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^2}{1-n\mathbf{r}} \\ &= \frac{n\mathbf{r}+|a_0|}{1+n\mathbf{r}|a_0|} + \frac{n\mathbf{r}(1-|a_0|^2)}{(1+n\mathbf{r}|a_0|)^2} + \lambda\frac{(1-|a_0|^2)(n\mathbf{r})^2}{1-n\mathbf{r}} \\ &= 1 + \frac{\delta(n\mathbf{r})}{(1+|a_0|n\mathbf{r})^2(1-n\mathbf{r})},\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中

$$\delta(n\mathbf{r}) = (1-|a_0|)\left[(1-n\mathbf{r})\left(|a_0|(n\mathbf{r})^2+2n\mathbf{r}-1\right) + \lambda(n\mathbf{r})^2(1+|a_0|)(1+|a_0|n\mathbf{r})^2\right].$$

为证明不等式（4.15），只需证明 $\delta(n\mathbf{r}) \le 0$ 当 $n\mathbf{r} \le R_{m,n,\lambda}$。注意到

$$\begin{aligned}\delta(n\mathbf{r}) &\le (1-|a_0|)\left[(1-n\mathbf{r})((n\mathbf{r})^2+2n\mathbf{r}-1) + 2\lambda(n\mathbf{r})^2(1+n\mathbf{r})^2\right] \\ &= (1-|a_0|)\,\xi(n\mathbf{r}),\end{aligned}$$

其中

$$\xi(n\mathbf{r}) = 2\lambda(n\mathbf{r})^4 + (4\lambda-1)(n\mathbf{r})^3 + (2\lambda-1)(n\mathbf{r})^2 + 3n\mathbf{r} - 1.$$

只需证明 $\xi(n\mathbf{r}) \le 0$ 当 $n\mathbf{r} \le R_{m,n,\lambda}$。

接下来，我们将其分为两种情形进行讨论。

情形 1。令 $\lambda \in (1/2,\ \infty)$。我们定义辅助函数 $w(n\mathbf{r})$，使得

$$\xi(n\mathbf{r}) > (n\mathbf{r})^4 + (n\mathbf{r})^3 + 3n\mathbf{r} - 1 =: w(n\mathbf{r}), \quad n\mathbf{r} \in [0,1).$$

直接计算表明，$\xi(\sqrt{2}-1) > w(\sqrt{2}-1) = 6-4\sqrt{2} > 0$。由于 $\xi(\bar{n}\mathbf{r})$ 是 $n\mathbf{r}$ 在 $[0,1)$ 上的单调递增函数，并且满足 $\xi(0) = -1 < 0$，由介值定理可知，存在唯一的 $n\mathbf{r}_\lambda \in (0,\ \sqrt{2}-1)$，使得 $\xi(n\mathbf{r}_\lambda) = 0$。因此，对于所有 $n\mathbf{r} \in [0, n\mathbf{r}_\lambda]$，都有 $\xi(n\mathbf{r}) \le 0$。

情形 2。令 $\lambda \in (0,\ 1/2]$。在这种情况下，辅助函数 $\xi(n\mathbf{r})$ 满足不等式

$$\xi(n\mathbf{r}) \le w(n\mathbf{r}) := (n\mathbf{r})^4 + (n\mathbf{r})^3 + 3n\mathbf{r} - 1, \quad n\mathbf{r} \in [0,1).$$

注意到，$w(n\mathbf{r})$ 在区间 $[0,1)$ 上严格递增，且 $w(0) = -1 < 0$，$w(\sqrt{2}-1) = 6-4\sqrt{2} > 0$。根据介值定理，存在唯一根 $n\mathbf{r}^* \in (0,\ \sqrt{2}-1)$，使得 $w(n\mathbf{r}^*) = 0$。因此，对于所有 $n\mathbf{r} \in [0, n\mathbf{r}^*]$，都有 $w(n\mathbf{r}) \le 0$，这意味着 $\xi(n\mathbf{r}) \le 0$ 在同一区间上成立。

为证明其尖锐性$R_{n,\ N}$，令 $a \in [0,1)$ 并考虑全纯函数 f_a 在$\mathbb{P}\Delta(0;\ 1/n)$ 上由（4.5）给出。对于点 $z = (-r,\ -r,\ \ldots,\ -r)$，我们得到

$$\begin{aligned}&|f_a(z)| + |Df_a(z)| + \lambda\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}^{\infty}|a_\alpha|\,r^\alpha \\ &= \frac{n\mathbf{r}+a}{1+n\mathbf{r}a} + \frac{(1-a^2)n\mathbf{r}}{(1+an\mathbf{r})^2} + \lambda\frac{(1-a^2)a(n\mathbf{r})^2}{1-an\mathbf{r}} \\ &= \frac{(a+n\mathbf{r})\left(1-a^2(n\mathbf{r})^2\right) + (1-a^2)\left[n\mathbf{r}(1-an\mathbf{r}) + \lambda a(n\mathbf{r})^2(1+an\mathbf{r})^2\right]}{(1+an\mathbf{r})(1-a^2(n\mathbf{r})^2)}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

为确立该结果的尖锐性，还需证明：对于任意 $n\mathbf{r} > R_{n,\ \lambda}$，都存在参数 $a \in [0,1)$，使得（4.16）右端超过 1。这等价于证明

$$(1-a)\Big[\lambda(n\mathbf{r})^4a^4+(\lambda(n\mathbf{r})^4+2\lambda(n\mathbf{r})^3)a^3+\big((2\lambda-1)(n\mathbf{r})^3+\lambda(n\mathbf{r})^2\big)a^2 + \big((\lambda-1)(n\mathbf{r})^2+n\mathbf{r}\big)a+2n\mathbf{r}-1\Big] > 0 \tag{4.17}$$

$n\mathbf{r} > R_{n,\ \lambda}$。

对于 $a \in [0,1)$，我们定义辅助函数 $K(a,\lambda,n\mathbf{r})$ 如下：

$$K(a,\lambda,n\mathbf{r}) := \lambda(n\mathbf{r})^4a^4+\left[\lambda(n\mathbf{r})^4+2\lambda(n\mathbf{r})^3\right]a^3+\left[(2\lambda-1)(n\mathbf{r})^3+\lambda(n\mathbf{r})^2\right]a^2 + \left[(\lambda-1)(n\mathbf{r})^2+n\mathbf{r}\right]a+2n\mathbf{r}-1.$$

为确立半径 $R_{n,\lambda}$ 的尖锐性，尚需证明：对于 $n\mathbf{r}> R_{n,\lambda}$，存在一个 $a \in [0,1)$，使得 $K(a,\lambda,n\mathbf{r}) > 0$。为此，我们通过以下情形考察辅助函数 K 的符号。

情形 1。设 $\lambda \in (1/2,\infty)$。对于每个固定的 $n\mathbf{r} \in [0,1)$，显然，$K(a,\lambda,n\mathbf{r})$ 是 $a \in [0,1)$ 的单调递增函数。因此，对于 $a \in [0,1)$，我们有如下估计

$$K(a,\lambda,n\mathbf{r}) \le K(1,\lambda,n\mathbf{r}) = 2\lambda(n\mathbf{r})^4+(4\lambda-1)(n\mathbf{r})^3+(2\lambda-1)(n\mathbf{r})^2+3n\mathbf{r}-1 \quad = \xi(n\mathbf{r}).$$

回顾一下，$\xi(n\mathbf{r})$ 在 $[0,1)$ 上单调递增，且 $\xi(n\mathbf{r}_\lambda) = 0$。因此，若$n\mathbf{r} > n\mathbf{r}_\lambda$，则有 $\xi(n\mathbf{r}) > 0$。由 K 关于 a 的连续性可知，

$$\lim_{a\to 1^-} K(a,\lambda,n\mathbf{r}) = K(1,\lambda,n\mathbf{r}) = \xi(n\mathbf{r}) > 0$$

对于 $n\mathbf{r} > n\mathbf{r}_\lambda$。这保证了对任意 $n\mathbf{r} > n\mathbf{r}_\lambda$，都存在充分大的 $a \in [0,1)$，使得 $K(a,\ \lambda,\ n\mathbf{r}) > 0$，这意味着不等式 (4.17) 成立。

情形 2. 设 $\lambda \in (0,\ 1/2]$。在此情形下，对于 $a \in [0,1)$，辅助函数 K 满足以下不等式：

$$K(a,\lambda,n\mathbf{r}) \le K(a,1/2,n\mathbf{r}) \le (n\mathbf{r})^4+(n\mathbf{r})^3+3n\mathbf{r}-1 = w(n\mathbf{r}).$$

$w(n\mathbf{r})$ 在 $[0,1)$ 上严格单调递增，这意味着只要 $n\mathbf{r} > n\mathbf{r}^*$，就有 $w(n\mathbf{r}) > 0$，其中$n\mathbf{r}^*$ 是 $w(n\mathbf{r}) = 0$ 的唯一正根。根据 K 的定义，

$$\lim_{a\to 1^-} K(a,\lambda,n\mathbf{r}) = w(n\mathbf{r}) > 0$$

当 $n\mathbf{r} > n\mathbf{r}^*$ 时。由 K 关于 a 在 $[0,1]$，对任意 $n\mathbf{r} > n\mathbf{r}^*$ 的连续性可知，我们可以找到一个充分大的 $a \in [0,1)$，使得 $K(a,\ \lambda,\ n\mathbf{r}) > 0$。这证实不等式（4.17）成立，从而确立半径 $n\mathbf{r}^*$ 的尖锐性。□

定理 2.5 的证明。取 $z = (z_1,\ \ldots,\ z_n) \in \mathbb{P}\Delta(0;\ 1_n)$，使得 $\mathbf{r} = ||z||_\infty$。利用引理 3.3，可得

$$\sum_{k=1}^{} k\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|^2r^{2\alpha} \le (1-|a_0|^2)^2\sum_{k=1}^{}k(n\mathbf{r})^{2k} = (1-|a_0|^2)^2\frac{(n\mathbf{r})^2}{(1-n\mathbf{r})^2}. \tag{4.18}$$

结合引理3.3 和估计式（4.18），我们推得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(z,\mathbf{r}) &\le t|a_0|+(1-|a_0|^2)\frac{t(n\mathbf{r})}{1-n\mathbf{r}}+(1-|a_0|^2)^2\frac{(1-t)(n\mathbf{r})^2}{(1-n\mathbf{r})^2} \\ &= \frac{t\,|a_0|\,(1-(n\mathbf{r})^2)^2+t(n\mathbf{r})\,(1-|a_0|^2)(1+n\mathbf{r})(1-(n\mathbf{r})^2)+(n\mathbf{r})^2(1-t)(1-|a_0|^2)^2}{(1-n\mathbf{r})^2}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

˜只需证明，对于所有 $\mathbf{r} \leq R_{n,\ t}$，式（4.19）右端不大于 1。这等价于证明

$$\varphi(x) \leq 0 \quad for\ n\mathbf{r} \leq \tilde{R}_{n,t}$$

其中 $x = |a_0| \in [0,1)$ 且

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (1-(n\mathbf{r})^2)^2(tx-1) + t(n\mathbf{r})(1+n\mathbf{r})(1-(n\mathbf{r})^2)(1-x^2) + (n\mathbf{r})^2(1-t)(1-x^2)^2 \\ &= (1-t)(n\mathbf{r})^2x^4 - \left[2(1-t)(n\mathbf{r})^2 + t(n\mathbf{r})(1+n\mathbf{r})(1-(n\mathbf{r})^2)\right]x^2 \\ &\quad + t(1-(n\mathbf{r})^2)^2x + (1-t)(n\mathbf{r})^2 + (1-(n\mathbf{r})^2)\left[(1+t)(n\mathbf{r})^2 + t(n\mathbf{r}) - 1\right].\end{aligned}$$

$\varphi(x)$ 的一阶和二阶导数为

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 4(1-t)(n\mathbf{r})^2x^3 - 2\left[2(1-t)(n\mathbf{r})^2 + tn\mathbf{r}(1+n\mathbf{r})(1-(n\mathbf{r})^2)\right]x + t(1-(n\mathbf{r})^2)^2, \\ \varphi''(x) &= 12(1-t)(n\mathbf{r})^2x^2 - 2\left[2(1-t)(n\mathbf{r})^2 + tn\mathbf{r}(1+n\mathbf{r})(1-(n\mathbf{r})^2)\right].\end{aligned}$$

由于 $1-t \geq 0$, $\varphi''(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上关于 x 的非递减函数。因此，对于所有 $x \in [0,1]$，我们有如下上界

$$\varphi''(x) \leq \varphi''(1) = 2n\mathbf{r}\left[t(n\mathbf{r})^3 + t(n\mathbf{r})^2 + (4-5t)n\mathbf{r} - t\right].$$

定义辅助函数

$$\psi(n\mathbf{r}) := t(n\mathbf{r})^3 + t(n\mathbf{r})^2 + (4-5t)n\mathbf{r} - t,$$

上述不等式可改写为 $\varphi''(x) \leq 2n\mathbf{r}\psi(n\mathbf{r})$。此外，$\psi$ 的导数为

$$\psi'(n\mathbf{r}) = 3t(n\mathbf{r})^2 + 2tn\mathbf{r} + (4-5t).$$

我们注意到 $\psi'(1) = 4 > 0$ 且 $\psi'(0) = 4-5t$。由于 $\psi'(n\mathbf{r})$ 在$[0,1)$上严格递增，我们根据 $\psi'(0)$ 的符号区分以下两种情形。

情形 1。设 $0 < t \leq 4/5$。在此情形下，$\psi'(0) = 4-5t \geq 0$。由于 $\psi'(n\mathbf{r})$ 严格递增，ψ 在 $[0,1)$ 上严格递增。我们进一步区分以下两种子情形:

(i) 假设 $t \in (0, 9/17)$。则

$$\psi(0) = -t < 0 \text{ and } \psi(1/3) = \frac{4}{3} - \frac{17}{27}t > 0.$$

根据介值定理，存在唯一的 $n\mathbf{r}_t \in (0,1/3)$，使得$\psi(n\mathbf{r}_t) = 0$。对于任意 $n\mathbf{r} \in [0, n\mathbf{r}_t]$，有 $\psi(n\mathbf{r}) \leq 0$，这意味着 $\varphi''(x) \leq 2n\mathbf{r}\psi(n\mathbf{r}) \leq 0$ 对所有 $x \in [0,1]$均成立。因此，$\varphi'(x)$ 是非递增的，从而

$$\varphi'(x) \geq \varphi'(1) = t(1+n\mathbf{r})(1-(n\mathbf{r})^2)(1-3n\mathbf{r}) > 0$$

对于 $n\mathbf{r} \in [0, n\mathbf{r}_t] \subset [0,1/3)$ 。这确保 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$, 上单调不减，从而得到

$$\varphi(x) \leq \varphi(1) = (t-1)(1-(n\mathbf{r})^2)^2 \leq 0.$$

（ii）假设 $t \in [9/17, 4/5]$。则

$$\psi(1/3) = \frac{4}{3} - \frac{17}{27}t \leq 0 \text{ and } \psi(1) = 4(1-t) \geq 0.$$

因此，存在唯一的 $n\mathbf{r}_t^* \in [1/3,1)$，使得 $\psi(n\mathbf{r}_t^*) = 0$。对于 $n\mathbf{r} \in [0,1/3] \subset [0, n\mathbf{r}_t^*]$，同理可得 $\varphi''(x) \leq 0$。遵循与子情形 (i) 相同的逻辑，条件 $\varphi(x) \leq 0$ 对所有 $n\mathbf{r} \in [0,1/3]$ 仍然成立。

情形 2. 设 $4/5 < t \leq 1$。在这种情况下，方程 $\psi'(\rho) = 0$ （其中 $\rho = n\mathbf{r}$）有两个实根：

$$\rho_5 = \frac{\sqrt{4t^2 - 3t(4-5t)} - t}{3t} = \frac{2\sqrt{4t^2-3t} - t}{3t} \quad \text{and} \quad \rho_6 = -\frac{2\sqrt{4t^2-3t} + t}{3t}.$$

容易验证，$\rho_6 < 0 < \rho_5 \leq 1/3 < 1$。由于当 $\rho \in [0, \rho_5$ 时，$\psi'(\rho) < 0$，且当 $\rho \in (\rho_5, 1)$ 时，$\psi'(\rho) > 0$，辅助函数 $\psi(\rho)$ 在区间 $[0, 1/3]$ 上的最大值取在端点处。注意到 $\psi(0) = -t < 0$，并且

$$\psi(1/3) = \frac{4}{3} - \frac{17}{27}t < 0 \text{ for } t > 4/5,$$

我们得出，对所有 $n\mathbf{r} \in [0, 1/3]$，$\psi(n\mathbf{r}) < 0$。因此，

$$\varphi''(x) \leq 2(n\mathbf{r})\psi(n\mathbf{r}) < 0, \quad n\mathbf{r} \in [0, 1/3],$$

这意味着 $\varphi'(x)$ 是关于 x 的递减函数。因此，当 $n\mathbf{r} \in [0, 1/3]$ 时，$\varphi'(x) \geq \varphi'(1) > 0$。由此可知，$\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$, 上单调不减，因此

$$\varphi(x) \leq \varphi(1) = (t-1)(1-(n\mathbf{r})^2)^2 \leq 0, \quad n\mathbf{r} \in [0, 1/3].$$

证明至此完成。 □

5. 总结性评述

本文在单位多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 中成功建立了若干精细化 Bohr 型不等式的尖锐多维类比。通过将经典 Bohr 现象拓展至包含 Bohr-Rogosinski 半径和 Schwarz 函数的情形 $\mathcal{B}_{n,\,m}$，我们证明了在适当缩放后，“1/3-现象”在高维中仍保持其结构完整性。

我们采用径向（Euler）导数算子 $Df(z)$，它自然地适用于推广单变量导数增长估计。此外，多变量情形下基于面积的 Bohr 不等式的解决，证实了 Bohr 半径的几何解释在不同测度论视角下仍然一致。通过精心构造的极值函数验证了所有所得结果的尖锐性，从而为这些不等式在 $\mathbb{D}^n$ 上确立了明确的边界。

本文所述结果为进一步研究开辟了若干有前景的方向：

问题 5.1. *(转向单位球：)* 设 $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1\}$为 $\mathbb{C}^n$中的开单位球。已知多圆盘 $R_{m,n,N}$ 的尖锐半径已在定理 $\mathbb{D}^n$中建立 *2.2*，一个重要的开放问题是确定尖锐的 ***Bohr-Rogosinski*** 半径 $R(\mathbb{B}^n)$，使得对于任意 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}^n, \mathbb{D})$，不等式成立

$$|f(\omega(z))| + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=iN} |a_\alpha| r^\alpha \leq 1$$

对 $\|z\|_2 \leq R(\mathbb{B}^n)$成立。与多圆盘不同，在多圆盘中，$|z|^\alpha \leq r^{|\alpha|}$ 是逐坐标应用的，而 $\mathbb{B}^n$ 的几何性质要求我们研究变量之间的耦合，以及半径对范数诱导的几何的潜在依赖：

$$R(\mathbb{B}^n) = \sup\{r \in (0,1) : M_f(r) \leq 1, \forall f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}^n, \mathbb{D})\}$$

其中 $M_f(r)$ 表示限制在欧几里得球上的相应 ***Bohr*** 型求和 *ll.*

问题 5.2. *(一般 **Reinhardt** 域：)* 设$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界完备 *Reinhardt* 域，其闵可夫斯基泛函为 $h_\Omega(z) = \inf\{t > 0 : z/t \in \Omega\}$。鉴于多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 是$(z) = \max_{1\le j\le n} |z_j|$的一个特例，我们主要结果的一种自然推广，是确定 *Bohr-Rogosinski* 半径 $R(\Omega)$，使得对任意 $f(z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{H}(\Omega\ \mathbb{D})$：

$$|f(\omega(z))| + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=iN} |a_\alpha|\rho_\alpha \le 1 \quad for\ h_\Omega(z) \le R(\Omega)$$

其中 $\rho_\alpha =$ 上确界$_{z\in\Omega} |z^\alpha|$。本研究聚焦于 $\partial\Omega$的对称性和几何对数凸性如何影响最佳常数，尤其探讨多重指标系数 a_α 与该域特定权重分布之间的相互作用

$$R(\Omega) := \sup\left\{ r \in (0,1) : \sup_{f\in\mathcal{H}(\Omega,\mathbb{D})} \left(|f(\omega(z))| + \sum_{\alpha\neq 0} |a_\alpha z^\alpha| \right) \le 1,\ z \in r\Omega \right\}.$$

问题 5.3。*(算子理论推广与一致代数：)* 令 $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ 表示多圆盘上有界全纯函数构成的巴拿赫代数。一个重要的推广方向是在复合算子 $C_\varphi :\ f \mapsto f \circ \varphi$的框架下研究 *Bohr* 型不等式。具体而言，可以寻求最佳半径 R_φ，使得对于给定的自映射 φ: $\mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$，以下算子范数不等式成立：

$$\|C_\varphi(f)\|_{\mathcal{B}} := |(f \circ \varphi)(0)| + \sum_{\alpha\neq 0} |a_\alpha||z^\alpha| \le \|f\|_\infty \quad for\ \|z\|_\infty \le R_\varphi$$

此外，为了连接几何函数论与泛函分析，设 $\mathcal{A}$ 是紧豪斯多夫空间 X上的一致代数。我们拟通过定义广义 *Bohr* 半径 $R(\mathcal{A})$ 来研究元素 $h \in \mathcal{A}$ 的 *Bohr* 现象，使其满足：

$$\sup\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \|h_n\| r^n : h = \sum h_n, \|h\| \le 1 \right\} \le 1 \quad for\ r \le R(\mathcal{A})$$

其中，分解 $h = \sum h_n$ 对应于相对于 $\mathcal{A}$代数结构的抽象幂级数展开。这将把 $\mathbb{C}^n$中的结果推广到非交换或抽象函数环境，这一点可由狄利克雷级数和冯·诺依曼不等式的性质得到启示。

问题 5.4。***(高阶径向导数与泰勒系数稳定性:)*** 虽然本研究为一阶欧拉算子$Df(z) = \sum_{k=1}^n z_k \frac{\partial f}{\partial z_k}$ 确定了锐利半径，但一个重要的推广方向是研究高阶径向（欧拉）算子 $D^m f(z)$，其递归定义为 $D^m f(z) = D(D^{m-1} f(z))$，其中 $m \in \mathbb{N}$。具体而言，我们提出确定锐利的 *Bohr* 型半径 $R_{n,m,\lambda}$，使得对于任意 $f(z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{H}(\mathbb{D}^n, \mathbb{D})$，涉及 m 阶导数的不等式成立：

$$|f(z)| + |D^m f(z)| + \lambda \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| r^\alpha \le 1 \quad for\ \|z\|_\infty = r \le R_{n,m,\lambda}$$

鉴于该算子对幂级数的作用为 $D^m f(z) = \sum_\alpha |\alpha|^m a_\alpha z^\alpha$，本研究旨在刻画泰勒系数 a_α 在多项式因子 $|\alpha|^m$ 加权下的增长情况。目标是求出相应主控级数方程的正根：

$$A(r) + \sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k| r^k + \lambda \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| r^k = 1$$

扩展到多维情形 $z \in \mathbb{C}^n$，这将有助于更深入地理解 ***Bohr*** 现象在反复微分下的结构稳定性。

利益冲突： 作者声明，就本文的发表而言不存在利益冲突。

经费来源： 不适用。

数据可用性声明： 由于本研究期间未生成或分析任何数据集，数据共享不适用于本文。

作者贡献： 所有作者在稿件准备工作中贡献相同。

References

[1] M. B. Ahamed, 《某些类调和映射的锐精细 Bohr-Rogosinski不等式》, 《复变函数与椭圆方程》69(4)(2024年), 585-606.[2] M. B. Ahamed 和S. Ahammed, 《某些函数类的 Bohr-Rogosinski 型不等式：解析、单叶与凸函数》, 《数学成果》78, 171 (2023年). https://doi.org/10.1007/s00025-023-01953-z.[3] M. B. Ahamed 和 V. Allu, 《某些全星形调和映射的 Bohr-Rogosinski不等式》, 《马来西亚数学科学学会通报》45 (2022年), 1913-1927. [4] M. B. Ahamed 和 V. Allu, 《某类近凸调和映射的 Bohr-Rogosinski 半径》, 《加拿大数学通报》66(3)(2023年), 1014?1029.[5] M. B. Ahamed 和 P. P. Roy, 《单位圆盘上解析函数的改进 Bohr 不等式》, 《数学科学论文集》135, 31 (2025年). https://doi.org/10.1007/s12044-025-00835-4.[6] R. M. Ali, Y. Abu-Muhanna 和 S. Ponnusamy, 《论 Bohr 不等式》, 载于：N.K. Govil 等编, 《逼近理论与应用复分析进展》, 载于：《施普林格优化及其应用》第117卷, 2016年, 269-300页.[7] L. Aizenberg, 《幂级数 Bohr 定理的多维类比》, 《美国数学会会刊》128(4) (1999), 1147-1155.[8] L. Aizenberg, 《幂级数 Bohr 定理的多维类比》, 《美国数学会会刊》128(4)(2000年), 1147–1155.[9] L. Aizenberg, A. Aytuna和 P. Djakov, 《多复变数全纯函数空间中基的一条 Bohr 定理的推广》, 《数学分析及其应用杂志》258(2) (2001), 429-447.[10] L. Aizenberg, 《Carathéodory 不等式的推广及多维幂级数的 Bohr 半径》, 载于：《复分析专题选讲》, 载于：《算子理论：进展与应用》第158卷, Birkh¨auser, 巴塞尔, 2005年, 87-94页.[11] L. Aizenberg, M. Elin 和 D. Shoikhet, 《关于全纯映射的 Rogosinski 半径及其若干应用》, 《数学研究》168 (2)(2005), 147-158. [12] L. Aizenberg, 《幂级数 Bohr 半径相关结果的推广》, 《数学研究》180 (2007), 161-168. [13] L. Aizenberg, V. Gotliv 和 A. Vidras, 《普通狄利克雷级数的博尔与罗戈辛斯基横坐标》, 《计算方法与函数理论》9 (1)(2009), 65-74.

[14] L. Aizenberg, 《关于幂级数 Bohr 现象和 Rogosinski现象的评述》, 《分析数学与物理》2 (2012年), 69-78.[15] S. A. Alkhaleefah, I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy, 《关于具有固定零系数的 Bohr 不等式》, 《美国数学会会刊》147(12) (2019年), 5263-5274.
[16] S. A. Alkhaleefah, I. R. Kayumov和 S. Ponnusamy, 《有界解析函数的 Bohr-Rogosinski不等式》, 《罗巴切夫斯基数学杂志》41(2020年), 2110-2119.[17] V. Allu和 V. Arora, 《凹单叶函数的 Bohr-Rogosinski 型不等式》, 《数学分析及其应用杂志》 520(1)(2023年), 126845.[18] C. BÉnÉteau, A. Dahlner 和 D. Khavinson, 《关于 Bohr 现象的评述》, 《计算方法与函数论》4(1) (2004年), 1-19.[19] H. P. Boas 和 D. Khavinson, 《多变量中的 Bohr 幂级数定理》, 《美国数学会会刊》125(1997 年), 2975-2979.[20] H. Bohr, 《一条关于幂级数的定理》, 《伦敦数学会会刊》2(13)(1914年), 1-5.[21] F. Carlson, 《关于单位圆内有界函数的系数》, Ark. Mat. Astron. Fys., 27A(1) (1940年)（法文）, 第8页.[22] S. L. Chen, H. Hamada, S. Ponnusamy 和 R. Vijayakumar, 《Banach空间中的 Schwarz型引理及其应用》, 《分析数学杂志》152 (2024年), 181-216.[23] N. Das, 《Bohr 与Rogosinski现象的精细化》, 《数学分析及其应用杂志》508(1)(2022年), 125847[24] A. Defant 和 L. Frerick, 《多维 Bohr半径的对数下界》, 《以色列数学杂志》152(1) (2006年), 17-28.[25] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerd'a, M. Ounaës, 和 K. Seip, 《齐次多项式的 Bohnenblust-Hille 不等式具有超压缩性》, 《数学年刊》(2) 174 (2011年), 第1期, 485-497
[26] A. Defant, D. Garcia 和 M. Maestre, 《Bohr 幂级数定理与局部Banach空间理论》, 《纯粹与应用数学杂志》557 (2003年), 173-197.[27] A. Defant, S. R. Garcia和 M. Maestre, 《Reinhardt 域第一和第二Bohr半径的渐近估计》, 《逼近理论杂志》128 (2004年), 53-68.
[28] A. Defant, M. Maestre和 U. Schwarting, 《向量值全纯函数的 Bohr 半径》, 《数学进展》231(5) (2012年), 2837-2857.[29] P. B. Djakov和 M. S. Ramanujan, 《关于 Bohr 定理及其推广的一则评述》, 《分析杂志》8(2000年), 65-77.[30] K. Gangania 和 S. S. Kumar, 《$\mathcal{S}^*(\psi)$ 和 $\mathcal{C}(\psi)$ 的 Bohr-Rogosinski 现象》, 《地中海数学杂志》19, 161(2022年). https://doi.org/10.1007/s00009-022-02074-7[31] S. R. Garcia, J. Mashreghi和 W. T. Ross, 《有限Blaschke乘积及其联系》, 施普林格, 查姆, 2018年.[32] I. Graham 和 G. Kohr, 《一维与高维几何函数论》, Marcel Dekker公司, 纽约, 2003年.[33] H. Hamada, T. Honda, 和 G. Kohr, 《取值于齐次球的全纯映射的 Bohr 定理》, 《以色列数学杂志》173(2009年), 177–187.[34] H. Hamada, T. Honda 和 M. Kohr, 《取值于高维复Banach空间的全纯映射的 Bohr-Rogosinski 半径》, 《分析数学与物理》15, 64 (2025年). https://doi.org/10.1007/s13324-025-01061-x[35] M.-S. Liu 和 S. Ponnusamy, 《精细Bohr不等式的多维类比》, 《美国数学会会刊》149(5)(2021年), 2133–2146.[36] Y. Liu and Z. Chen, 《多圆盘上 Schur 类的高阶Schwarz-Pick引理》, 《印度纯粹与应用数学杂志》43 (4) (2012) 411-419.[37] S. Jia, M. S. Liu 和 S. Ponnusamy, 《涉及 Schwarz映射的精细版 Bohr 不等式的多维类比》, 《分析数学与物理》, (2025年) 15:79. https://doi.org/10.1007/s13324-025-01084-4.[38] I. R. Kayumov和 S. Ponnusamy, 《奇解析函数的 Bohr 不等式》, 《计算方法与函数论》17(2017年), 679-688.[39] I. R. Kayumov和 S. Ponnusamy, 《改进版Bohr不等式》, 《巴黎科学院数学报告》356(3) (2018年), 272-277.

[40] I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy，解析函数的 Bohr-Rogosinski 半径，预印本，参见 https://arxiv.org/abs/1708.05585。[41] I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy，关于幂次 Bohr 不等式，芬兰科学院数学年刊 44(2019)，301-310。[42] I. R. Kayumov、 D. M. Khammatova和 S. Ponnusamy，解析函数的 Bohr-Rogosinski 现象与 Cesáro 算子，《数学分析及其应用杂志》496(2021) 124824。[43] G. Kresin 和 V. Maz'ya，尖锐实部定理：统一方法；由俄文译出并由 T. Shaposhnikova 编辑，数学讲义，第 1903 卷，施普林格，柏林，2007。[44] S. Lata和 D. Singh，非交换 Hardy 空间中的 Bohr 不等式，《美国数学会会刊》150(1)(2022)，201-211。[45] G. Liu、 Z. Liu 和 S. Ponnusamy，有界解析函数的精细 Bohr 不等式，《数学科学通报》173(2021)，103054。[46] M. S. Liu、 Y. M. Shang和 J. F. Xu，解析函数的 Bohr 型不等式，《不等式应用杂志》(2018) 345。[47] Y. Abu-Muhanna，从属与有界调和类中的 Bohr 现象，《复变函数与椭圆方程》55(11) (2010)，1071-1078。[48] Y. Abu-Muhanna 和 R. M. Ali，解析函数映入紧凸体外部时的 Bohr 现象，《数学分析及其应用杂志》379(2) (2011)，512-517。[49] V. I. Paulsen、 G. Popescu、 D. Singh，关于 Bohr 不等式，《伦敦数学会会刊》85(2) (2002)，493-512。[50] V. I. Paulsen 和 D. Singh，一致代数的 Bohr 不等式，《美国数学会会刊》132(12) (2004)，3577-3579。[51] V. I. Paulsen、 D. Singh，Bohr 不等式的推广，《伦敦数学会通报》38(6) (2006)，991-999。[52] S. Ponnusamy 和 K. J. Wirths，原点处有多重零点的函数的 Bohr 型不等式，《计算方法与函数论》20 (2020)，559-570。[53] G. Popescu，多变量 Bohr 不等式，《美国数学会汇刊》359(11) (2007)，5283-5317。.[54] W. Rogosinski，关于幂级数及其部分和的界，《数学杂志》17 (1923)，260-276。.[55] S. Sidon，关于 Bohr 先生的一个定理，《数学杂志》26(1927)，731-732[56] M. TomiĆ，论 H. Bohr 的一个定理，《斯堪的纳维亚数学杂志》11(1962)，103-106。[57] L. Wu、 Q. Wang 和 B. Long，有界解析函数的若干单参数 Bohr 型不等式，《皇家精确、物理与自然科学学院杂志 A 辑》（2022）116:61 https://doi.org/10.1007/s13398-022-01207-7。Molla Basir Ahamed、
Department of Mathematics、 Jadavpur University、 Kolkata-700032,
West Bengal， India.电子邮箱：mbahamed.math@jadavpuruniversity.in
Sujoy Majumder， Department of Mathematics， Raiganj University， Raiganj,
WestBengal-733134， India.电子邮箱：sm05math@gmail.comNabadwip Sarkar,
Department of Mathematics， Raiganj University， Raiganj， WestBengal-733134,
India.电子邮箱：naba.iitbmath@gmail.com