arXiv:2601.06643v1 [math.CA] 10 Jan 2026

关于某些 B-样条的渐近性质：用类 theta 函数表示

MICHAEL I. GANZBURG

Dedicated to Professor Yuri Abramovich Brudnyi on the occasion of his 90th birthday

ABSTRACT. 本文借助类 theta 函数，求得具有特殊节点的相关 B-样条 $B_N^*(t) := t^{-N} B_N(t)$ 的梅林变换的渐近行为。证明基于幂函数的多项式插值以及某些类 theta 函数的性质。本文还讨论了B_N^* 和 B_N 的逐点渐近性。

1. INTRODUCTION

本文讨论用类 theta 函数表示的具有特殊节点的 B-样条的渐近行为。

1.1. 关于 B-样条。 B-样条 $B_N(t) = B_N(t,\ \Omega)\quad t \in \mathbb{R}$，其节点集 Ω 由 Curry 和 Schoenberg 在开创性论文 [8]中引入（定义见式 (3.1)，其中B_N）。 B-样条在数值分析、小波和逼近论中发挥着重要作用（例如参见 [18, 6, 3, 19]）；此外，它们还用作插值差的积分表示中的类 Peano 核 [8,式 (1.5)]。

B样条分布的渐近行为已在 [8, 定理 6] 中作了描述（另见 [7]和 [14, 定理 10.5.1]），具体如下：

定理 *1.1.* 单调函数 $F\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$，满足 $F(-\infty) = 0$ 且 $F(\infty) = 1$，当且仅当 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \Lambda(t)\, dt$时，它是 B样条分布 $F_N(x) := \int_{-\infty}^{x} B_N(t, \Omega)\, dt$ 的极限；当 $N \to \infty$ 时，对所有 F连续的 x 均成立，其中 Λ 是 *P´olya* 频率函数（等价定义见 [14, 第 7] 节或 [8,第 *10.*5] 节）。

特别地，由于特征函数 $\chi_{[\delta,\infty)}$ 是 P´olya 分布函数（参见 [8,第 10.5] 节），因此存在一个 B-样条分布序列 $F_{N,\ \delta}$ 使得 $\lim_{N\to\infty} F_{N,\ \delta}(x) = \chi_{[\delta,\infty)}(x)\quad \delta \in \mathbb{R}$ （另见 $\delta = 0$ 条件下的例 1.6）。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 41A15；次要分类 44A20、44A35。
Key words and phrases. B-样条、相关 B-样条、梅林变换、多项式插值、θ函数。

根据定理 1.1 的判据，若对所有 F连续的 x，$\lim_{N\to\infty} F_N(x) = F(x)$，则 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \Lambda(t)\, dt$，其中 Λ 是一个 P´olya 频率函数。关于 B-样条渐近行为的以下结果由 [8, 定理 7] 得出（另见 [14, 定理 10.5.2]）：

定理 1.2。 以下陈述成立：

(i) 如果 $F \neq \chi_{[\delta,\infty)}$、$\delta \in \mathbb{R}$ 和 $\Lambda \neq \Lambda_0$，其中

$$\Lambda_0(t) := \begin{cases} |\delta_1|^{-1} e^{-t/\delta_1+\delta/\delta_1-1}, & t/\delta_1 \geq \delta/\delta_1 - 1, \\ 0, & t/\delta_1 < \delta/\delta_1 - 1, \end{cases} \qquad \delta \in \mathbb{R}, \quad \delta_1 \neq 0,$$

then

$$\lim_{N\to\infty} B_N(t, \Omega) = \Lambda(t) \tag{1.1}$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致；

(ii) 如果 $\Lambda = \Lambda_0$，则 (1.1) 在 *t* 的取值位于点 $t = \delta - \delta_1$ 的任意小邻域之外时一致成立，其中 Λ_0 不连续；

(iii) 如果 $F = \chi_{[\delta,\infty)}$、$\delta \in \mathbb{R}$，则 $\lim_{N\to\infty} B_N(t, \Omega) = 0$ 在 *t* 的取值位于点 $t = \delta$ 的任意小邻域之外时一致成立。

定理 1.2 被用于 [8, 第 9] 节和 [18, 第 4]节，以求得某些B-样条的渐近行为（见例 1.3、1.5 和 1.6）。

例 1.3。 等距节点，$\Omega = \{k - (N+1)/2 : \ 0 \leq k \leq N+1\}$。对于缩放的基数 B-样条，以下用高斯函数表示的极限关系成立：

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{(N+1)/12}\; B_N\left(\sqrt{(N+1)/12}\, t, \Omega\right) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-t^2/2\right) \tag{1.2}$$

在 $\mathbb{R}$上一致成立。关系式(1.2) 至少从 *20* 世纪初起就已为人所知（见 *Sommerfeld*[20]，、*Tricomi* [23]，、*Curry-Schoenberg* [8, 例 9。4]，以及 *Unser* 等人 [24]）。*Brinks* [4, 定理 2] 将这一关系推广到了 B_N的导数。*Xu* 和 *Wang* [25, 定理 3。1] 找到了 B_N 的导数在 (1.2)中的逼近过程的收敛阶。

例 1.4。 节点分布不过于集中。令 $\Omega = \{t_k : \ 0 \leq k \leq N+1\} \subset \mathbb{R}$，其中节点满足以下两个条件：*1.* $\sum_{k=0}^{N+1} t_k = 0$ 和 *2.* $\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N+1} |t_k|^3\right) / \left(\sum_{k=0}^{N+1} t_k^2\right)^{3/2} = 0$。*Rzeszut* 和 *Wojciechowski* 运用概率方法 [17, 定理 1]，将 (1.2) 推广到以下形式的广泛集合类 Ω：

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\left(\sum_{k=0}^{N+1} t_k^2\right)^{1/2}}{N+2}\; B_N\left(\frac{\left(\sum_{k=0}^{N+1} t_k^2\right)^{1/2}}{N+2}\; t, \Omega\right) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-t^2/2\right) \tag{1.3}$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致成立。此外，作者通过将 (1.3) 推广到 B_N 的导数，并求出 (1.3) 中 B_N 的导数所对应的幂权逼近过程的收敛阶，推广并加强了 [4] 和 [25]中的结果。

例1.5。 倒数结点， $N = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}, \Omega = \{1/(2k-1): \ -\nu \le k \le \nu+1\}$。以下关系可用一个非高斯函数表示：

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu+1} B_{2\nu}\left(\frac{t}{2\nu+2}, \Omega\right) = \frac{2}{\pi \cosh t} \tag{1.4}$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致成立（见 [8, 例9。5]）。比较 (1.2) 和 (1.4)， [8] 的作者指出，(1.4) 中的节点密度在原点附近更高，因此， $1/\cosh t$ 的衰减速度远慢于$\exp\left(-t^2/2\right)$。此外，很容易看出，对于这些节点，例 *1.4* 的条件 *2* 不满足。

例 1.6。 切比雪夫结点，$\Omega = \left\{\cos \frac{k\pi}{N+1}: \ \ 0 \le k \le N+1\right\}$。这些节点与次数为 $N+2$ 的多项式 $(x^2-1)U_N(x)$ 的零点重合，其中 U_N 是第二类切比雪夫多项式。特别地， B_N 是 $[-1,1]$ 上的一个完美 B-样条（见 *Schoenberg* [18, 定理1]）。*Schoenberg* [18, 定理 4] 还证明了

$$\lim_{N\to\infty} B_N(t, \Omega) = 0, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus D, \tag{1.5}$$

在点 $t = 0$ 的任意小邻域 D 之外，对所有 t 一致成立。此外，由于 $\sum_{k=0}^{N+1} \cos^2 \frac{k\pi}{N+1} = (N+3)/2$ （例如，参见 [13, 公式 1.351(2)]），这些节点满足例 *1.4* 的两个条件。因此，以下高斯渐近是式 (1.3) 的推论：

$$\lim_{N\to\infty} \frac{2^{-1/2}(N+3)^{1/2}}{N+2} B_N\left(\frac{2^{-1/2}(N+3)^{1/2}}{N+2} t, \Omega\right) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-t^2/2\right). \tag{1.6}$$

因此，(1.6) 描述了 $B_N(t,\Omega)$ 在原点邻域内的渐近行为。渐近式 (1.5) 和(1.6) 均验证了当 $N \to \infty$ 时， $B_N(t,\Omega)$ 收敛到 δ 函数（参见定理 *1.2 (iii)* ）。

然而，序列B-样条收敛到非高斯函数的例子（包括关系式 (1.4) 和 (1.5)）只有少数几个。

本文证明如下形式的极限关系：

$$\lim_{N\to\infty} A_N M\left(B_N^*\left(C_N \cdot, \Omega\right), s\right) = M(\Theta(\cdot), s) \tag{1.7}$$

对于所谓的“关联” B-样条 $B_N^*(t, \Omega) := t^{-N} B_N(t, \Omega)$，其节点集具有特殊形式，包括平方等距结点以及 Gegenbauer 多项式和 Hermite多项式的平方零点

（参见定理6.1）。这里， $M(f,\ s)$ 是 $f,\ \Theta$ 的梅林变换； Θ 是第 4 节中定义的类 theta 函数，而 $A_N,\ C_N$ 是明确给出的常数。

在某些情况下，逐点渐近关系具有如下形式

$$\lim_{N\to\infty} A_N B_N^*\left(C_N t,\Omega\right)=\Theta(t),\qquad t\in[0,\infty), \tag{1.8}$$

而相应的 B_N 渐近性可由（1.7）推出（见定理 6.2）。特别地，我们证明了具有类切比雪夫节点的 B样条的（1.8）（见推论 6.4 和 6.7），并求得例 1.6 中的完全 B样条在点-1右邻域内的渐近行为。（见推论 6.7 和注 6.8）。

本文的主要结果及其证明见第 6 节。定理6.1中（1.7）的证明基于作者在[12] 中发展的幂函数多项式插值（见第 2 节）、 B样条及相关 B样条的性质（见第 3 节），以及某些类 theta 函数的性质（见第 4 节）。

为了由 (1.7) 推导定理 6.2 的 (1.8)，并证明推论 6.4，我们需要解析函数的傅里叶变换和梅林变换满足的某些不等式，以及切比雪夫多项式的一些估计（见第 5 节）。此外，第 5 节还包含有关梅林变换的一些标准性质。下文给出符号和一些预备知识。

1.2. 符号与预备知识。 令 $\mathbb{N}:=\{1,2,\ldots\}$, $\mathbb{R}$ 为所有实数的集合， $\mathbb{C}=\mathbb{R}+i\mathbb{R}$ 为所有复数的集合，而 $\mathcal{P}_n$ 为所有次数不超过 n 且系数为实数的一元代数多项式的集合。接下来，我们用 $C(I)$ 表示有限或无限区间 I 上的所有复值连续函数的集合，并用 $C^{(M)}(I)$ $M\in\mathbb{N}$表示 I 上所有 M 次连续可微复值函数的集合。再令 $L_1(I)$ 表示区间 I 上所有可积复值函数 F 构成的空间，其范数有限，为 $\|F\|_{L_1(I)}:=\int_I|F(y)|dy$。

此外，我们还需要由 $\mathcal{L}$ 所有快速衰减函数 $F\in C([0,\infty))$ 构成的集合，该集合满足条件 $\lim_{t\to\infty} t^\eta F(t)=0$ 对所有 $\eta\in[0,\infty)$ 都成立。注意，如果 $F\in\mathcal{L}$，则函数 $t^\eta F(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，并且对于所有 $\eta\in[0,\infty)$ 都属于 $L_1([0,\infty))$。

我们还将使用以下特殊函数：伽马函数 $\Gamma(s)$、上不完全伽马函数 $\Gamma(s,\tau)$ $\tau\in[0,\infty)$、黎曼ζ函数 $\zeta(s)$、狄利克雷β函数$\beta(s)$，以及θ函数 $\vartheta_1(z,s)$ 和 $\vartheta_4(z,s)$ $z\in\mathbb{C}$, $s\in\mathbb{C}$。

在全文中， $N\in\mathbb{N}$， $s\in\mathbb{C}$，且索引 d 取两个值之一： $d=0$ 或 $d=1$。我们还使用以下记号：

$$h_d(z):=\begin{cases}\cosh z, & d=0,\\ \sinh z, & d=1,\end{cases}\qquad z\in\mathbb{C}. \tag{1.9}$$

接下来，令 $f \in C([A,B])$，并令 $R_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$ 为一个零点为 $z_k \in [A,B]$，$1 \le k \le n+1$、重数为 1 的多项式。f 在节点 z_k，$1 \le k \le n+1$ 处的拉格朗日插值多项式记为 $L_n(z) = L_n(z,\ f(z)\ R_{n+1}z) \in \mathcal{P}_n$。

我们还使用记号 $\lesssim$ 和 $\gtrsim$，含义如下：若对相关范围内的 $\tau,\gamma,\ldots$，存在一个与基本参数 $\tau,\gamma,\ldots$ 无关的常数 $C>0$，使得 $\varphi(\tau,\gamma,\ldots) \le C\delta(\tau,\gamma,\ldots)$，或 $\varphi(\tau,\gamma,\ldots) \ge C\delta(\tau,\gamma,\ldots)$，则记作 $\varphi(\tau,\gamma,\ldots) \lesssim \delta(\tau,\gamma,\ldots)$ 或 $\varphi(\tau,\gamma,\ldots) \gtrsim \delta(\tau,\gamma,\ldots)$。某些参数对 C 的依赖关系通过下标表示，例如 $\lesssim_{a,b}$。若无下标，则表示 C 是一个绝对常数。

1.3. 更多预备知识：特殊多项式序列。 这里，我们定义一类特殊的代数多项式序列，其零点用作插值节点。本文也讨论了该类序列的一些例子。定义和例子取自作者的专著 [12, 第 3] 节。

设 $\beta = \beta_{(d)} = (\beta_N)_{N=1}^{\infty}$ 和 $\gamma = \gamma_{(d)} = (\gamma_N)_{N=1}^{\infty}$ 是递增的正数序列，$\delta = \delta_{(d)} = (\delta_N)_{N=1}^{\infty}$ 是递减的正数序列，并满足以下条件

$$\lim_{N\to\infty} \beta_N = \lim_{N\to\infty} \gamma_N = \lim_{N\to\infty} \delta_N^{-1} = \infty.$$

定义1.7。 [12, 定义3.1。1] 设 $\Pi_d := (P_{2N+d})_{N=1}^{\infty}$ 是一列偶（若 $d=0$）或奇（若 $d=1$）多项式 $P_{2N+d}(z) = z^{2N+d} + \ldots \in \mathcal{P}_{2N+d}$，它们只有实零点 $\pm x_k = \pm x_{k,\ N,\ d}$，$1-d \le k \le N$，$x_0 = 0$，重数为 1，并满足以下渐近性质：对于任意满足 $|z| \le \gamma_N$ 的 $z \in \mathbb{C}$，以下不等式成立：

$$\left| \frac{\beta_N^d\, P_{2N+d}(z/\beta_N)}{P_{2N+d}^{(d)}(0)} - \cos(z - d\pi/2) \right| \lesssim_{\Pi_d} \delta_N \min(|z|^2, 1) h_d(|z|).$$

于是我们记作 $\Pi_d \in \mathbb{P}_d(\beta,\gamma,\delta)$。

满足定义1.7的多项式序列示例包括 Gegenbauer 多项式、Hermite多项式，以及具有等距零点的多项式。下面给出的每个示例中，我们都列出了 P_{2N+d} 和 β_N 的公式，以及保证包含关系 $(P_{2N+d})_{N=1}^{\infty} \in \mathbb{P}_d(\beta,\ \gamma,\ \delta)$成立的 γ_N 和 δ_N 的条件。其他示例（如 Williams–Apostol 多项式和 Lommel多项式），以及 Laguerre多项式在 $\alpha \ne -1/2$ 时的一个反例，见 [12,第3节2]。

例 1.8. $[-1,1]$ 上的归一化 *Gegenbauer* 多项式（参见 [12, 第 3.2 节。1]）：对于 $\lambda \ge 0$,

$$P_{2N+d} = \frac{\Gamma(\lambda)(2N+d)!}{\Gamma(2N+d+\lambda)2^{2N+d}} C_{2N+d}^{\lambda},$$

$$\beta_N = 2N+d+\lambda, \qquad \gamma_N = o(N^{2/3}), \qquad \gamma_N \gtrsim \log(N+1), \qquad \delta_N \ge \gamma_N^3/N^2.$$

归一化勒让德多项式以及第一类和第二类归一化切比雪夫多项式 T_{2N+d} 和 U_{2N+d}分别是 P_{2N+d} 在 $\lambda = 1/2$、0、1 时的特例。

例1.9. $[-1,1]$ 上的具有等距零点的多项式（见 [12, 第3.2节。2]）：

$$P_{2N+d}(z) = z^d \prod_{k=1}^{N} \left(\left(\frac{2k+d-1}{2N+d-1} \right)^2 - z^2 \right),$$
$$\beta_N = (2N+d-1)\pi/2, \qquad \gamma_N = o(N^{1/2}), \qquad \delta_N \geq \gamma_N^2/N.$$

例1.10. $\mathbb{R}$ 上的归一化埃尔米特多项式（见 [12,第3.2节。4]）：

$$P_{2N+d} = 2^{-(2N+d)} H_{2N+d},$$
$$\beta_N = \sqrt{4N+2d+1}, \qquad \gamma_N = o(N^{1/2}), \qquad \gamma_N \gtrsim \log(N+1), \qquad \delta_N \geq \gamma_N^2/N.$$

2. Polynomial Interpolation of Power Functions

令 h_d 由(1.9)定义。多项式插值差的以下渐近表示已在 [12,推论4.3.1(a)]中证明。

定理 2.1. 令$(P_{2N+d})_{N=1}^{\infty} \in \mathbb{P}_d(\beta, \gamma, \delta)$ （见定义*1.7*），并令$(y_N)_{N=1}^{\infty}$为实非零数列，使得$\lim_{N\to\infty} \beta_N |y_N| = \infty$。则以下结论成立：***(a)*** 若$\operatorname{Re} s > d$，且 $s - d \neq 2$，4，.....，则

$$|y_N|^{s-d} - L_{2N}\left(y_N, |y|^{s-d}, y^{1-d}P_{2N+d}(y)\right)$$
$$= \frac{2\sin((s-d)\pi/2)}{\pi\beta_N^{s-d}} \frac{P_{2N+d}(y_N)}{y_N^d P_{2N+d}^{(d)}(0)} \left(\int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{h_d(t)} dt + o(1) \right), \tag{2.1}$$

当 $N \to \infty$ 时，(2.1) 中的收敛在直线 实部$s = r > d$ 上是一致的
。（***b***）对于固定的 $m \in \mathbb{N}$、 $1 \leq m \leq N$，

$$|y_N|^{2m} \log|y_N| - L_{2N}\left(y_N, |y|^{2m}\log|y|, y^{1-d}P_{2N+d}(y)\right)$$
$$= \frac{(-1)^m}{\beta_N^{2m}} \frac{P_{2N+d}(y_N)}{y_N^d P_{2N+d}^{(d)}(0)} \left(\int_0^{\infty} \frac{t^{2m+d-1}}{h_d(t)} dt + o(1) \right), \tag{2.2}$$

当 $N \to \infty$ 时。

注 2.2。 由于 $y^{1-d}P_{2N+d}(y) = y\prod_{k=1}^{N}(y^2 - x_k^2)$，(2.1) 和 (2.2) 中的插值节点为 0， $\pm x_1$，.....，$\pm x_N$。

注 2.3。 (2.1)（或 (2.2)）中的积分与 ζ函数之间的关系由下式给出（参见例如 [9,第 1 节12]）：

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{h_d(t)}dt = \begin{cases} 2\Gamma(s)\beta(s), & d=0, \\ 2\Gamma(s)\left(1-2^{-s}\right)\zeta(s), & d=1, \end{cases} \qquad \operatorname{Re} s > d.$$

由于函数 $|y|^{s-d}$ 和 $|y|^{2m}\log|y|$ 以及定理 2.1 中的插值多项式 L_{2N} 都是偶函数，我们可以作代换 $u = y^2$ ，并讨论相应的插值差在 $[0,\infty)$ 上的情形。定义

$$Q_N(u) := \prod_{k=1}^{N}\left(u - x_k^2\right), \tag{2.3}$$

其中 $x_k = x_{k,N,d}$, $1 \le k \le N$, 是 P_{2N+d} 的正零点。容易看出 t

$$P_{2N+d}^{(d)}(0) = Q_N(0). \tag{2.4}$$

在下面的推论中，我们用插值节点 0, $x_1^2, \ldots, x_N^2$ 重写关系式 (2.1) 和 (2.2)。

推论 2.4. 设 $(P_{2N+d})_{N=1}^{\infty} \in \mathbb{P}_d(\beta,\gamma,\delta)$ ，并设 Q_N 由(2.3)定义，其中 x_k, $1 \le k \le N$, 是 P_{2N+d} 的正零点。此外，设$(u_N)_{N=1}^{\infty}$ 是正数序列，满足 $u_N \notin \{x_1,\ldots,x_N\}$ 且 $\lim_{N\to\infty}\beta_N u_N = \infty$。则以下结论成立：*(a)* 若$\operatorname{Re} s > d$ 且 $s-d \ne 2,\ 4, \ldots,$ 则

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\beta_N^{s-d}Q_N(0)}{Q_N\left(u_N^2\right)}\left(u_N^{s-d} - L_N\left(u_N^2, u^{\frac{s-d}{2}}, uQ_N(u)\right)\right) = \frac{2\sin((s-d)\pi/2)}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{h_d(t)}dt. \tag{2.5}$$

(2.5) 中的收敛在直线$\operatorname{Re} s = r > d$上一致。

(b) 对于固定的 $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\beta_N^{2m}Q_N(0)}{Q_N\left(u_N^2\right)}\left(u_N^{2m}\log u_N^2 - L_N\left(u_N^2, u^m\log u, uQ_N(u)\right)\right) = (-1)^m\int_0^\infty \frac{t^{2m+d-1}}{h_d(t)}dt. \tag{2.6}$$

证明。 若令 $u_N = |y_N|$, 则关系式 (2.5) 和 (2.6) 立即由 (2.1)-(2.4) 得出。(2.5) 中的一致收敛由定理 2.1 (a) 得出。□

定理6.1的证明基于定理 2.1。以下命题用于定理 6.2 的证明。注意，定理 2.1 (a) 的证明也基于此命题。

命题2.5。 [12, 等式（2.3.21）] 设 $G_{2N} \in \mathcal{P}_{2N}$ 为一个实零点重数均为1的偶多项式，且$(y_N)_{N=1}^{\infty}$ 为一个实非零数列。若 $0 <$实部 $s < 2N+1$，并且

$s \neq 2$、4.....，则

$$|y_N|^s - L_{2N}\left(y_N, |y|^s, yG_{2N}(y)\right) = \frac{2\sin(s\pi/2)}{\pi} G_{2N}(y_N) \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{\left(1+(t/y_N)^2\right) G_{2N}(it)} dt. \tag{2.7}$$

3. Properties of B-splines and Associated B-splines

定义 3.1. 次数为 N、节点集为 $\Omega = \{t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}\} \subset \mathbb{R}$ 的 B-样条 B_N 由以下公式定义

$$B_N(t) = B_N(t, \Omega) := (N+1) \sum_{v \in \Omega} \frac{(v-t)_+^N}{W'(v)}, \quad t \in \mathbb{R}; \qquad W(u) := \prod_{v \in \Omega} (u - v). \tag{3.1}$$

定义 3.2. 节点集为 $\Omega = \{t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}\} \subset [0, \infty)$的关联 B-样条 B_N^* 由以下公式定义

$$B_N^*(t) = B_N^*(t, \Omega) := t^{-N} B_N(t, \Omega), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

其中 $B_N^*(0) := \lim_{t \to 0+} B_N^*(t)$。

B_N 的以下三个性质是众所周知的（例如，参见 [19, 定理 4.17、4.23 和 4.24],）。

性质 3.3。支集与正性：

$$B_N(t, \Omega) \begin{cases} = 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\min \Omega, \max \Omega), \\ > 0, & t \in (\min \Omega, \max \Omega). \end{cases} \tag{3.3}$$

性质 3.4。归一化：

$$\int_{\min \Omega}^{\max \Omega} B_N(t, \Omega) dt = 1. \tag{3.4}$$

性质 3.5。对称性：

$$B_N(t, \Omega) = (-1)^{N+1} (N+1) \sum_{v \in \Omega} \frac{(t-v)_+^N}{W'(v)}, \tag{3.5}$$

其中 W 定义于(3.1)中。

很容易证明 B_N 和 B_N^*的下两个性质。

性质 3.6。第一个区间：

$$B_N(t, \Omega) = \frac{(-1)^{N+1}(N+1)(t - \min \Omega)^N}{W'(\min \Omega)}, \qquad t \in [\min \Omega, \min(\Omega \setminus \{\min \Omega\})]. \tag{3.6}$$

证明。 该性质可直接由（3.5）得出。 □

性质 3.7。 B_N^* 的支集与正性：

$$B_N^*(t,\Omega)\begin{cases} =0, & t\in(0,\min\Omega]\cup[\max\Omega,\infty),\\ =\frac{(-1)^{N+1}(N+1)}{W'(\min\Omega)}, & t=\min\Omega=0,\\ >0, & t\in(\min\Omega,\max\Omega). \end{cases} \tag{3.7}$$

证明。 关系式 (3.7) 直接由关系式 (3.2)、(3.3) 和 (3.6) 得出。 □

注意，关系式 (3.7) 表明，当 $\min\Omega=0$ 时，B_N^* 在 $\min\Omega$ 处存在跳跃间断。

最 后，我们证明了 Curry–Schoenberg结果的一个重要推广 [8,p. 74]。

性质 3.8。 多项式插值：

若 $f\in C([\min\Omega,\ \max\Omega])\cap C^{(N+1)}((\min\Omega,\ \max\Omega])$ 且

$$\int_{\min\Omega}^{\max\Omega}\left|f^{(N+1)}(t)\right|(t-\min\Omega)^N dt<\infty, \tag{3.8}$$

then

$$f(u)-L_N(u,f(u),w(u))=\frac{w(u)}{(N+1)!}\int_{\min\Omega}^{\max\Omega}B_N(t,\Omega)f^{(N+1)}(t)\,dt,\qquad u\in\Omega, \tag{3.9}$$

其中 $w(u):=\prod_{v\in\Omega\ v\neq u}(u-v)$。

˜证明。 不失一般性，假设 $\min\Omega=0$ 且 $\max\Omega=1$。接下来，令 f 为 f 在 $[0,2]$ 上的一个延拓，使得 $\tilde f\in C^{(N+1)}([0,2])$。

于是，性质 3.8 是加权积分连续模的下述性质的推论：

$$\lim_{\tau\to0+}\int_0^1|F(t+\tau)-F(t)|\ t^N\,dt=0, \tag{3.10}$$

其中 $F:=\tilde f^{(N+1)}$。事实上，若 $f\in C^{(N+1)}([0,1])$，则 (3.9) 是众所周知的（参见例如 [8, 第 74] 页或[19, 定理 4.23]）。因此有下述等式：

$$\tilde f(u+\tau)-L_N(u,\tilde f(u+\tau),w(u))=\frac{w(u+\tau)}{(N+1)!}\int_0^1 B_N(t,\Omega)F(t+\tau)\,dt,\qquad u\in\Omega, \tag{3.11}$$

由于对于任意 $\tau\in(0,1]$，$\tilde f(\cdot+\tau)\in C^{(N+1)}([0,1])$。然后将 $\tau\to0+$ 代入 (3.11)，由于 $f\in C([0,1])$，我们得到 (3.9) 的左端；而 (3.9) 的右端则由 (3.11) 和 (3.10) 得出，因为 $B_N^*(t,\ \Omega)$ 根据定义 3.2 和性质 3.7 在 $[0,1]$ 上有界。

为证明 (3.10)，注意到对于满足 $0 < \tau \le \delta \le 1/2$ 的任意 τ 和 δ，下列不等式成立：

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |F(t+\tau) - F(t)|\, t^N\, dt \\
&\le \int_0^\delta |F(t)|\, t^N\, dt + \int_0^\delta |F(t+\tau)|\, t^N\, dt + \int_\delta^1 |F(t+\tau) - F(t)|\, t^N\, dt \\
&\le 2\int_0^{2\delta} |F(t)|\, t^N\, dt + \int_\delta^1 |F(t+\tau) - F(t)|\, dt := I_1 + I_2. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

此外，由条件 (3.8) 可知，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, 1/2]$使得 $I_1 < \varepsilon/2$。最后，存在 $\tau = \tau(\varepsilon) \in (0, \delta]$ 使得 $I_2 < \varepsilon/2$。因此，$I_1 + I_2 < \varepsilon$，且 (3.10) 可由 (3.12) 得出。至此，该性质的证明完成。□

接下来，我们利用性质 3.7 和 3.8，得到多项式插值差的另一种表示。

推论 3.9。令 $\min\Omega = 0$, $u \in \Omega$，且 $w(u) = \prod_{v\in\Omega\, v\ne u}(u-v)$。则以下陈述成立：

(a) 若 实部 $s > d$，且 $s - d \ne 2, 4, \ldots$，则

$$u^{\frac{s-d}{2}} - L_N\left(u, u^{\frac{s-d}{2}}, w(u)\right) = M_{N,s,d}\, w(u) \int_0^{\max\Omega} B_N^*(t,\Omega) t^{\frac{s-d}{2}-1} dt, \qquad (3.13)$$

其中

$$M_{N,s,d} := (-1)^{N+1} \frac{\Gamma(N+1-(s-d)/2)}{\Gamma((d-s)/2)(N+1)!}. \qquad (3.14)$$

(b) 若 $m \in \mathbb{N}$ 和 $m < N+1$，则

$$(1/2)u^m \log u - L_N\left(u, (1/2)u^m \log u, w(u)\right) = \tilde{M}_{N,m}\, w(u) \int_0^{\max\Omega} B_N^*(t,\Omega) t^{m-1} dt, \qquad (3.15)$$

其中

$$\tilde{M}_{N,m} := (1/2)(-1)^{m+N} \frac{m!(N-m)!}{(N+1)!}. \qquad (3.16)$$

证明。(a) 令 $f(u) := u^{\frac{s-d}{2}}$，一可得

$$f^{(N+1)}(t) = (N+1)! M_{N,s,d}\, t^{\frac{s-d}{2}-N-1}, \qquad t > 0, \qquad (3.17)$$

其中 $M_{N,\ s,\ d}$ 由 (3.14) 定义。因此，f 满足性质 3.8 关于 $[0, \max\Omega]$,的所有条件，并且由 (3.9)、(3.17) 和定义 3.2 可得 (3.13)。

(b) 令 $f(u) := (1/2)u^m \log\ u$，由莱布尼茨乘积法则可得，对于 $1 \le m < N+1$,

$$f^{(N+1)}(t) = (-1)^N (1/2)(N+1)! t^{m-N-1} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \binom{m}{k}}{N+1-k} = (N+1)! \tilde{M}_{N,m} t^{m-N-1}, \qquad (3.18)$$

˜其中 $M_{N,\ m}$ 由 (3.16) 定义，而 (3.18) 中最后一个等式由部分分式分解得出

$$\frac{1}{\prod_{k=0}^{m}(z-k)} = \frac{(-1)^m}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\binom{m}{k}}{z-k}$$

对于 $z = N+1$。因此， f 满足性质 3.8 中关于 $[0,\max\Omega]$, 的所有条件，而式 (3.15) 可由式 (3.9)、(3.18) 和定义 3.2 得出。□

以下推论结合了推论 2.4 和推论 3.9。

推论3.10. 设 $x_k = x_{k,N,d}$, $1 \le k \le N$ 是 P_{2N+d} 的正零点，其中 $(P_{2N+d})_{N=1}^{\infty} \in \mathbb{P}_d(\beta,\gamma,\delta)$。此外，设 $(u_N)_{N=1}^{\infty}$ 是一个正数序列，满足 $u_N \notin \{x_1,\dots,x_N\}$ 且 $\lim_{N\to\infty}\beta_N u_N = \infty$。若 $\operatorname{Re} s > d$，则对于节点集 $\Omega_{N+2,d} := \{0, u_N^2, x_{1,N,d}^2, \dots, x_{N,N,d}^2\}$，以下关系成立：

$$\Gamma\left(1+\frac{s-d}{2}\right)\lim_{N\to\infty}\left[u_N^2\,\beta_N^{s-d}\,N^{-1-(s-d)/2}\prod_{k=1}^{N}x_{k,N,d}^2\right.$$
$$\left.\times\int_0^{\max\Omega_{N+2,d}} B_N^*\left(t,\Omega_{N+2,d}\right)t^{(s-d)/2-1}dt\right] = \int_0^{\infty}\frac{t^{s/2-1}}{h_d(\sqrt{t})}dt. \tag{3.19}$$

收　敛在直线 (3.19) 上的任意紧子集上一致成立，其中 $\operatorname{Re} s = r > d$　　.

证明。证明基于推论 2.4 和 3.9。为证明 $\operatorname{Re} s > d$ and $s-d \neq 2,4,\dots$时的 (3.19)，我们首先使用推论 2.4 的陈述 (a)，并将 (2.5) 左端的插值差替换为 (3.13) 右端，其中 $w(u) = u\,Q_N(u)$ 和 $u = u_N^2$（回顾一下， Q_N 由 (2.3) 定义）。

接下来，我们利用欧拉反射公式化简极限表达式

$$\frac{2}{\pi}\Gamma\left(\frac{d-s}{2}\right)\sin\left(\frac{(s-d)\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\Gamma\left(1+(s-d)/2\right)} \tag{3.20}$$

以及极限关系（例如，参见 [9,式 1.18(5)]）

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\Gamma(N+1-(s-d)/2)}{(N+1)!}\,N^{1+(s-d)/2} = 1. \tag{3.21}$$

因此，我们得到 $\operatorname{Re}\ s > d$ and $s-d \neq 2,4,\dots$时的 (3.19)。(3.19) 中的一致收敛由推论 2.4 得出，因为 (3.21) 中的收敛在直线 $\operatorname{Re} s = r > d$ 上的任意紧子集上一致成立（参见 [9, 式 1.18(4)]）。

事实证明，对于 $s-d = 2m,\ \ m \in \mathbb{N}$, (3.19) 也成立。事实上，利用推论 2.4 的结论 (b)，然后将 (2.6) 左端的插值差替换为 (3.15) 的右端，其中 $w(u) = u\,Q_N(u)$ 和 $u = u_N^2$，即可得到 $s-d = 2m,\ \ m \in \mathbb{N}$ 的 (3.19)。

□

注 3.11。 $B_N(\cdot,\ \Omega)$ 的归一化性质由 (3.4) 给出。在 (3.19) 中令 $s=2+d$，即可得到 $B_N^*(\cdot,\ \Omega_{N+2,\ d})$ 的归一化性质的如下极限形式：

$$\lim_{N\to\infty} u_N^2\,\beta_N^2\,N^{-2}\prod_{k=1}^{N}x_{k,d}^2\int_0^{\max\Omega_{N+2,d}}B_N^*\left(t,\Omega_{N+2,d}\right)dt=\begin{cases}4\beta(2), & d=0,\\ 14\zeta(3), & d=1.\end{cases}$$

此外，将 $s=2m+2+d$ 代入式（3.19），可得$B_N^*(\cdot,\ \Omega_{N+2,\ d})$各阶矩的渐近公式。注意，Neuman [15,第 3]节给出了 B-样条各阶矩的组合表示。

4. Theta-like Functions and their Properties

下面定义两个类 theta 函数，

$$\Theta_d(t):=\begin{cases}1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\exp\left(-(\pi^2/4)(2k+1)^2t^{-1}\right)}{2k+1}, & d=0,\\ 1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\exp\left(-(\pi k)^2\,t^{-1}\right), & d=1,\end{cases}\qquad t>0, \tag{4.1}$$

其中，Θ_1与 $\vartheta_4\left(0,\ i\pi t^{-1}\right)$一致，而 Θ_0与 $\vartheta_1\left(0,\ i\pi t^{-1}\right)$的导数和积分有关（见 [2, 第 548] 页及式（4.5））。注意，θ函数 ϑ_4 和 ϑ_1 采用 Rademacher [16,第 166]页的记号。

下面讨论 Θ_d 的某些性质。

引理 4.1. *(a)* Θ_d 在 $(0,\infty)$ 上连续，且 $\sup_{t\in(0,\infty)}|\Theta_d(t)|<\infty$。

(b) 下列等式成立：

$$H_d(t):=t\int_0^{\infty}\Theta_d(1/z)e^{-tz}dz=\frac{t^{d/2}}{h_d\left(\sqrt{t}\right)},\qquad t>0, \tag{4.2}$$

其中 h_d 由 (1.9) 定义。

(c) 下列渐近性成立：

$$\Theta_d(t)=\begin{cases}4(\pi t)^{-1/2}e^{-t/4}\left(1+O\left(t^{-1}\right)\right), & d=0,\\ 2(t/\pi)^{1/2}e^{-t/4}\left(1+O\left(e^{-2t}\right)\right), & d=1,\end{cases}\qquad t\to\infty. \tag{4.3}$$

证明. (a) 结论可直接由 (4.1) 得出。

(b) 注意，根据陈述 (a)，拉普拉斯变换 $H_d(t)/t$ 在 $t>0$ 上存在。然后，对 (4.2) 和 (4.1) 中相应的指数函数进行积分，并利用双曲函数的部分分式分解，对于 $t>0$，可得

$$H_0(t)=1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)\left(\pi^2(k+1/2)^2+t\right)}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{\pi^2(k+1/2)^2+t}=\frac{1}{\cosh\sqrt{t}};$$

$$H_1(t)=1+2t\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(\pi k)^2+t}=\frac{\sqrt{t}}{\sinh\sqrt{t}}.$$

因此 (4.2) 成立。

(c) 根据 θ函数的性质，以下恒等式成立：

$$\Theta_1(t) = 2(t/\pi)^{1/2} e^{-t/4} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k(k+1)t}\right), \qquad t > 0,$$

见 [16, 第 177] 页或 [2, 第 548]页。因此，对于 $d = 1$，(4.3) 成立。

为证明 (4.3) 对 $d = 0$ 成立，我们首先需要以下关系：

$$\begin{aligned} \Theta_0^*(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) \exp\left(-(\pi^2/4)(2k+1)^2 x\right) \\ &= (\pi x)^{-3/2} e^{-1/(4x)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) e^{-k(k+1)x^{-1}}\right) \\ &= (\pi x)^{-3/2} e^{-1/(4x)} \left(1 + O\left(e^{-2x^{-1}}\right)\right), \qquad x \to 0+, \end{aligned} \tag{4.4}$$

见 [2, 第 548–549] 页。接下来，由 (4.1) 和 (4.4) 可得

$$\begin{aligned} \Theta_0(t) &= \pi \int_0^{1/t} \Theta_0^*(x) dx \\ &= \pi^{-1/2} \int_0^{1/t} x^{-3/2} e^{-1/(4x)} \left(1 + O\left(e^{-2/x}\right)\right) dx \\ &= 2\pi^{-1/2} \Gamma(1/2, t/4) \left(1 + O\left(e^{-2t}\right)\right), \qquad t \to \infty. \end{aligned} \tag{4.5}$$

最后，利用 $\Gamma(1/2,\ \tau)$ 在 $\tau \to \infty$ 时的渐近行为（见 [10, 第 9 节。2]），由 (4.5) 得到 (4.3) 对 $d = 0$ 成立。 □

5. The Mellin Transform

我们首先需要了解一些关于由下式定义的梅林变换的已知事实

$$M(F, s) := \int_0^{\infty} F(t)\, t^{s-1} dt, \qquad \operatorname{Re} s > 0, \quad t^{\operatorname{Re} s - 1} F(t) \in L_1([0, \infty)).$$

特别地，当 $F \in \mathcal{L}$ 时，$M(F,\ \cdot)$ 存在。

此外，两个函数 $F \in \mathcal{L}$ 和 $G \in \mathcal{L}$ 的梅林卷积由积分定义 s

$$H(t) := \int_0^{\infty} F(\tau) G\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau} = \int_0^{\infty} G(\tau) F\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau}. \tag{5.1}$$

命题 5.1。（另见，例如 [5, 第 4 节，定理 3]）由 （5.1）定义的梅林卷积 H 属于 $\mathcal{L}$。此外，成立以下关系：

$$M(H, s) = M(F, s) M(G, s). \tag{5.2}$$

命题 5.2。（另见，例如 [5, 第6节，定理 6]）如果 $F \in \mathcal{L}$ 且 $M(F, r+i\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$ 对于某个$r \in \mathbb{R}$成立，则

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} M(F, r+i\tau)\, t^{-r-i\tau} d\tau, \qquad t > 0.$$

接下来，我们用梅林变换来定义一个条件，该条件将用于定理 6.2。

定义 5.3。设 $(u_N)_{N=1}^{\infty}$ 为正数序列，并设 $\beta = (\beta_N)_{N=1}^{\infty}$ 为满足 $\lim_{N\to\infty}\beta_N = \infty$的递增正数序列。此外，设 $(G_{2N})_{N=1}^{\infty}$ 为来自 $\mathcal{P}_{2N}$ 的偶多项式序列，其具有 $2N$ 个重数为 1 的实零点，$G_{2N}(0) \neq 0$。如果对于给定的 $r > 0$，存在常数 $N_0 = N_0(r)$ 和 $\mu = \mu(r)$，使得下列不等式成立，则称 $(G_{2N})_{N=1}^{\infty}$ 满足 (r, β)-条件：

$$\sup_{N\in\mathbb{N},\, N\geq N_0} \beta_N^r \left| \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{\left(1+(t/u_N)^2\right) G_{2N}(it)} dt \right| \lesssim_r |\operatorname{Im} s|^{\mu}\, e^{-(\pi/2)|\operatorname{Im} s|}, \qquad \operatorname{Re} s = r. \tag{5.3}$$

以下关于解析函数的傅里叶变换和梅林变换的估计，有助于验证某些多项式的（r, β）-条件。函数$f \in L_1$(ℝ)的傅里叶变换由公式

$$\widehat{f}(v) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ivx} dx, \qquad v \in \mathbb{R}.$$

引理 5.4. 设复值函数 f 满足以下条件：

(i) f 在带状区域 $S_\delta := \{x+iy\colon\, x\in\mathbb{R},\, |y| < \delta\}$, $\delta > 0$上解析；
(ii) f 在 $\mathbb{R}$上为实值；(iii) $\sup_{\xi\in S_\delta} |\operatorname{Re} f(\xi)| < \infty$；(iv) $\sup_{|y|<\delta} \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re} f(x+iy)|\, dx \leq K(\delta) < \infty$。

则 $f \in L_1(\mathbb{R})$ 且

$$\left|\widehat{f}(v)\right| \leq 2K(\delta) e^{-\delta|v|}, \qquad v \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

证明。若满足条件 (i)、(ii) 和 (iii)，则已知（见 [1, 第 110] 节或 [21,第 3.8 节5]），几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$ 存在极限

$$\lim_{y\to\pm\delta} \operatorname{Re} f(x+iy) = g(x), \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| < \infty, \tag{5.5}$$

并且成立如下表示式：

$$f(x) = \frac{1}{2\delta}\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{\cosh\frac{\pi(x-t)}{2\delta}} dt. \tag{5.6}$$

除（5.5）外，条件（iv）还意味着 $g \in L_1(\mathbb{R})$，因为根据（5.5）、Fatou引理和条件（iv），

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx \leq \liminf_{y\to\pm\delta} \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{Re}\, f(x+iy)|dx \leq K(\delta). \tag{5.7}$$

于是，由于……，(5.4) 可由 (5.6) 和 (5.7) 得出

$$\left|\widehat{f}(v)\right| = |\widehat{g}(v)| \,/\, \cosh \delta v \leq 2K(\delta)e^{-\delta|v|}.$$

□

引理 5.5。 设 $r > 0$ 为一个固定数，且复值函数 F 满足以下条件：

(i) F 在区域 $A_\delta := \{w \in \mathbb{C}: |\arg\, w| < \delta\}$, $0 < \delta < \pi$；(ii) F 在 $\mathbb{R}$ 上为实值；(iii) $\sup_{w\in A_\delta} |\mathrm{Re}\,(w^r F(w))| < \infty$；(iv) $\sup_{|\arg w|<\delta} \int_0^\infty R^{r-1} \left|\mathrm{Re}\,\left(e^{ir\arg\, w} F\left(Re^{i\arg w}\right)\right)\right| dR \leq K_1(\delta,\ r) < \infty$。

Then

$$|M(F, r+iv)| \leq 2K_1(\delta, r)e^{-\delta|v|}, \qquad v \in \mathbb{R}.$$

证明。 在积分 $\int_0^\infty F(t)\ t^{r+iv-1}dt$ 中作标准代换 $t = e^x$，我们便将引理 5.5 化为关于 $f(\xi) = e^{r\xi}F(e^\xi)$ 的引理 5.4。

□

注 5.6。 引理 5.4 和 5.5 的不同版本广为人知（例如，参见 [22, 定理 26 和 31] 以及 [11, 第 6] 节）。

在验证（r, β）-条件时，下面这个引理 5.5 的版本很有帮助。

引理 5.7。 设 $r > 0$ 为一个固定数，且设 u_N、β_N 和 G_{2N}、$N > r/2$ 分别为定义 *5.3* 中的数和多项式。若 $\alpha \in (0, \pi/2)$，并且存在 $N_0 = N_0(r)$ 使得

$$\sup_{N\in\mathbb{N},\, N\geq N_0} \beta_N^r \sup_{|\arg w|<\pi/2-\alpha} \int_0^\infty R^{r-1} \left|G_{2N}\left(iRe^{i\arg w}\right)\right|^{-1} dR \leq K_2(\alpha, r) < \infty, \tag{5.8}$$

则对于函数 $F_N(t) := \left(\left(1 + (t/u_N)^2\right) G_{2N}(it)\right)^{-1}$，

$$\sup_{N\in\mathbb{N},\, N\geq N_0} \beta_N^r \left|M\left(F_N, r+iv\right)\right| \leq (\pi/\alpha)K_2(\alpha, r)e^{-(\pi/2-\alpha)|v|}, \qquad v \in \mathbb{R}. \tag{5.9}$$

证明。 首先注意， $\left(1+(\cdot/u_N)^2\right)G_{2N}(i\cdot)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值多项式，其所有零点均为虚零点。由此很容易看出，对于引理 5.7 中的函数 $F=F_N$，引理 5.5 的条件 (i)、(ii) 和 (iii) 在 $\delta=\pi/2-\alpha$ 的情况下均成立。接下来，对于 $\alpha\in(0,\pi/2)$,

$$\inf_{|t|\le\pi/2-\alpha}\inf_{\lambda\ge0}\left|1+\lambda e^{2it}\right|\ge\min\{1,(4/\pi)\alpha\}.$$

因此， $\left|1+(R/u_N)^2e^{2it}\right|\ge(2/\pi)\alpha$ 适用于 $R\ge0$ 和 $N\in\mathbb{N}$。所以，如果引理 5.7 中的 (5.8) 成立，那么引理 5.5 中的条件 (iv) 对于 $\delta=\pi/2-\alpha$ 和 $K_1(\delta,\ r)=(\pi/2)\alpha^{-1}K_2(\delta,\ r)$ 也成立，且适用于引理 5.7 中的函数 $F=F_N$。因此，引理 5.7 可由引理 5.5 推出。□

在下一个引理中，我们证明切比雪夫型多项式序列满足 $(r,\ \beta)$-条件。

引理 5.8。设 $G_{2N}(t)=t^{-d}Q_{2N+d,\ \lambda}(t)/Q^{(d)}_{2N+d,\ \lambda}(0)$ 和 $\beta_N=\beta_{N,\ \lambda}:=2N+d+\lambda$，其中 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$ 并且

$$Q_{2N+d,0}(t):=T_{2N+d}(t):=(1/2)\left(\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{2N+d}+\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{-(2N+d)}\right),\tag{5.10}$$

$$Q_{2N+d,1}(t):=U_{2N+d}(t):=\frac{\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{2N+d+1}-\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{-(2N+d+1)}}{2\sqrt{t^2-1}},\tag{5.11}$$

$$T^{(d)}_{2N+d}(0)=(-1)^N(2N+1)^d,\qquad U^{(d)}_{2N+d}(0)=(-1)^N(2N+2)^d.\tag{5.12}$$

于是，对于任意 $r>1-d$, $\mu=3+\max\{r+d-2,0\}$，以及 $N_0=N_0(r,d,\lambda)$，不等式(5.3) 成立。

证明。 我们首先证明以下不等式:

$$\sup_{N\in\mathbb{N},\,N\ge N_0}\beta^r_{N,\lambda}Q^{(d)}_{2N+d,\lambda}(0)\sup_{\alpha<\arg w<\pi-\alpha}\int_0^\infty R^{r+d-1}\left|Q_{2N+d,\lambda}\left(Re^{i\arg w}\right)\right|^{-1}dR$$
$$\lesssim_{r,d,\lambda}\alpha^{-(2+\max\{r+d-2,0\})},\tag{5.13}$$

其中 $\alpha\in(0,\pi/2)$ 是一个固定数，且 $N_0=N_0(r,d,\lambda)$。

由 (5.10) 和 (5.11) 可得

$$T_{2N+d}(w)=(1/2)\left(z^{2N+d}+z^{-(2N+d)}\right),\qquad w=Re^{i\arg w},\quad z=\rho e^{it},\tag{5.14}$$

$$U_{2N+d}(w)=\frac{z^{2N+d+2}-z^{-(2N+d)}}{z^2-1},\qquad w=Re^{i\arg w},\quad z=\rho e^{it},\tag{5.15}$$

其中， z 是单位圆外的一点，而 $w=(1/2)(z+1/z)$是椭圆上的一点；该椭圆的焦点为$(-1,\ 0)$和$(1,\ 0)$，且其半轴之和等于 $\rho>1$。由于 $w=$

$(1/2)((\rho+1/\rho)\cos\ t+i(\rho-1/\rho)\sin\ t)$，我们可知

$$R=R(\rho,\arg w)=\frac{\rho^2-1}{2}\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{4}{(\rho^2-1)^2+(\rho^2+1)^2\tan^2(\arg w)}}, \tag{5.16}$$

$$\frac{dR(\rho,\arg w)}{d\rho}=\frac{\rho(\rho^4-1)}{4R(\rho,\arg w)}\sqrt{\frac{1}{\rho^4}+\frac{16\tan^2(\arg w)}{\left((\rho^2-1)^2+(\rho^2+1)^2\tan^2(\arg w)\right)^2}}. \tag{5.17}$$

设 w 满足条件 $\alpha<\arg\ w<\pi-\alpha$，其中 $\alpha\in(0,\pi/2)$ 是一个固定数（参见 (5.13)）。那么 $\alpha^2\le\tan^2(\arg w)$，并且以下关系可由 (5.16) 和 (5.17) 直接推出：

$$\frac{\left(\rho^2-1\right)}{\rho}\lesssim R(\rho,\arg w)\lesssim\frac{\left(\rho^2-1\right)}{\alpha},\qquad 0\le\frac{dR(\rho,\arg w)}{d\rho}\lesssim\frac{\rho\left(\rho^4-1\right)}{\alpha^2\,R(\rho,\arg w)}. \tag{5.18}$$

利用代 换 (5.16)、关系式 (5.14)、(5.15)、(5.18) 以及初等不等式

$$\frac{\rho-1}{\rho^{n+1}-1}\le\frac{1}{(n-k+1)\rho^k},\qquad \rho>1,\quad k,n\in\mathbb{N},\quad 1\le k\le n,$$

我们得到 $N>N_0(r,\ d,\ \lambda)$,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty R^{r+d-1}\left|Q_{2N+d,\lambda}\left(R\,e^{i\arg w}\right)\right|^{-1}dR\lesssim_\lambda\frac{1}{\alpha^2}\int_1^\infty\frac{(R(\rho,\arg w))^{r+d-2}\,\rho\left(\rho^4-1\right)}{\rho^{2N+d+2\lambda}-\rho^{-(2N+d)}}d\rho\\&\lesssim_{r,d,\lambda}\frac{1}{N\alpha^{2+\max\{r+d-2,0\}}}\int_1^\infty\frac{(\rho-1)^{r+d-2}}{\rho^N}d\rho\lesssim_{r,d,\lambda}\frac{1}{\alpha^{2+\max\{r+d-2,0\}}N^{r+d}}.\end{aligned}$$

因此， 我们得到 (5.13)。因此，(5.8) 中的常数 K_2 满足不等式

$$K_2(\alpha,r)\lesssim_{r,d,\lambda}\alpha^{-(2+\max\{r+d-2,0\})}. \tag{5.19}$$

接下来，利用引理 5.7，由 (5.9)、(5.12) 和 (5.19) 可知，对于任意 $\alpha\in(0,\ \pi/2)$，以下不等式成立：

$$\sup_{N\in\mathbb{N},\,N\ge N_0}\beta_{N,\lambda}^r\left|\int_0^\infty\frac{t^{s+d-1}Q_{2N+d,\lambda}^{(d)}(0)}{\left(1+(t/u_N)^2\right)Q_{2N+d,\lambda}(it)}dt\right|\lesssim_{r,d,\lambda}\frac{1}{\alpha^{3+\max\{r+d-2,0\}}}e^{-(\pi/2-\alpha)|\operatorname{Im}s|}. \tag{5.20}$$

最后，取

$$\alpha=\begin{cases}|\operatorname{Im}s|^{-1}, & |\operatorname{Im}s|>3/\pi,\\ \pi/3, & |\operatorname{Im}s|\le 3/\pi\end{cases}$$

在（5.20）中，我们得到（5.3），其中 $\mu=3+\max\{r+d-2,0\}$。 □

6. Asymptotics of B_N^*

下述定理讨论了缩放后的相关 B-样条 B_N^* （见定义 3.2）的梅林变换与类 theta 函数 Θ_d （见（4.1））之间的极限关系。

定理6.1。 设 $x_k = x_{k,N,d}$, $1 \le k \le N$ 是 P_{2N+d} 的正零点，其中 $(P_{2N+d})_{N=1}^{\infty} \in \mathbb{P}_d(\beta, \gamma, \delta)$ （见定义*1.7*）。此外，设 $(u_N)_{N=1}^{\infty}$ 是正数序列，满足 $u_N \notin \{x_1, \dots, x_N\}$ 且 $\lim_{N\to\infty} \beta_N u_N = \infty$。若 $\operatorname{Re} s > d$，则对于节点集 $\Omega_{N+2,d} := \{0, u_N^2, x_{1,N,d}^2, \dots, x_{N,N,d}^2\}$，下列关系成立：

$$\lim_{N\to\infty} \left[\frac{u_N^2 \prod_{k=1}^N x_{k,N,d}^2}{N} \int_0^\infty B_N^*\left(\frac{N}{\beta_N^2} t, \Omega_{N+2,d}\right) t^{(s-d)/2-1} dt \right] = \int_0^\infty \Theta_d(t) t^{(s-d)/2-1} dt. \tag{6.1}$$

收敛 在任意紧子集上，直线 $\operatorname{Re} s = r > d$ 上的 (6.1) 收敛是一致的。

证明。 首先注意， $F(\tau) := \Theta_d(\tau)$ 根据引理 4.1 (b) 属于 $\mathcal{L}$，并且 $G(\tau) := \tau e^{-\tau} \in \mathcal{L}$。于是，由关系式 (4.2)，两个函数 F 和 G （见 (5.1)）的梅林卷积 H_d 为

$$H_d(t) = \int_0^\infty \Theta_d(t/\tau) e^{-\tau} d\tau = t \int_0^\infty \Theta_d(1/z) e^{-tz} dz = \frac{t^{d/2}}{h_d\left(\sqrt{t}\right)}, \qquad t > 0. \tag{6.2}$$

接下来，由于 $M(G, s) = \Gamma(1+s)$，由 (6.2) 和命题 5.1 的关系 (5.2) 可得

$$\int_0^\infty \frac{t^{s/2-1}}{h_d(\sqrt{t})} dt = M\left(H_d, \frac{s-d}{2}\right) = M\left(\Theta_d, \frac{s-d}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{s-d}{2}\right). \tag{6.3}$$

因此，对 (3.19) 左端进行变量替换，并将 (3.19) 右端替换为 (6.3) 右端，即得 (6.1)。(6.1) 中的一致收敛由推论3.10得出。

□

自然会产生如下问题：是否也能证明 B_N^* 的逐点渐近关系？我们将在以下定理中探讨这个问题。

定理 6.2. 设序列 $(P_{2N+d})_{N=1}^{\infty} \in \mathbb{P}_d(\beta, \gamma, \delta)$、$(u_N)_{N=1}^{\infty}$ 和集合 $\Omega_{N+2,d}$ 与定理 *6.1* 中相同。此外，假设序列 $\left(z^{-d} P_{2N+d}(z) / P_{2N+d}^{(d)}(0)\right)_{N=1}^{\infty}$ 满足 (r, β)-条件（见定义 *5.3*）。那么，下述关系成立：

$$\lim_{N\to\infty} \left[\frac{u_N^2 \prod_{k=1}^N x_{k,N,d}^2}{N} B_N^*\left(\frac{N}{\beta_N^2} t, \Omega_{N+2,d}\right) \right] = \Theta_d(t), \qquad t \in [0, \infty). \tag{6.4}$$

证明。 证明分为三个步骤。

步骤 1。 我们首先需要一些公式。假设 $d < \operatorname{Re} s < 2N + d + 1$ 且 $s - d \ne 2$, 4, ...。

然后令 $Q_N(u) = G_{2N}(y) = y^{-d}P_{2N+d}(y)/P^{(d)}_{2N+d}(0)$ 以及 $u_N = |y_N|$，由（2.7）、（2.3）和（2.4）可得

$$\begin{aligned} & u_N^{s-d} - L_N\left(u_N^2, u^{\frac{s-d}{2}}, uQ_N(u)\right) \\ &= \frac{2i^d\sin((s-d)\pi/2)}{\pi}\frac{Q_N\left(u_N^2\right)}{Q_N\left(0\right)}P^{(d)}_{2N+d}(0)\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{\left(1+(t/u_N)^2\right)P_{2N+d}(it)}dt. \end{aligned} \tag{6.5}$$

现在利用 (6.5)、(3.13)、(3.14) 和 (3.20)，可得

$$\begin{aligned} g_N(s) &:= \frac{u_N^2\prod_{k=1}^N x_{k,N,d}^2}{N}\int_0^\infty B_N^*\left(\frac{N}{\beta_N^2}t, \Omega_{N+2,d}\right)t^{(s-d)/2-1}dt \\ &= u_N^2\,\beta_N^{s-d}\,N^{-1-(s-d)/2}\prod_{k=1}^N x_{k,N,d}^2\int_0^{\max\Omega_{N+2,d}} B_N^*\left(t,\Omega_{N+2,d}\right)t^{(s-d)/2-1}dt \\ &= \left(\frac{2i^d}{\Gamma\left(1+\frac{s-d}{2}\right)}\right)\left(\frac{(N+1)!}{N^{1+(s-d)/2}\Gamma\left(N+1-\frac{s-d}{2}\right)}\right)\int_0^\infty \frac{\beta_N^{s-d}\,P^{(d)}_{2N+d}(0)\,t^{s-1}}{\left(1+(t/u_N)^2\right)P_{2N+d}(it)}dt, \end{aligned} \tag{6.6}$$

其中由 (6.1) 可知,

$$\lim_{N\to\infty} g_N(s) = M\left(\Theta_d, \frac{s-d}{2}\right), \qquad \operatorname{Re} s > d. \tag{6.7}$$

步骤 2。我们的下一个目标是求出 $|g_N(s)|$ 关于 $|\operatorname{Im} s|$ 的一个“良好”上界估计。换言之，我们需要估计 (6.6) 右端三个因子的绝对值。

第一个估计

$$\left|\frac{2i^d}{\Gamma\left(1+\frac{s-d}{2}\right)}\right| < \frac{12e^{(\pi/4)|\operatorname{Im} s|}}{|\operatorname{Im} s|^{\frac{\operatorname{Re} s-d+1}{2}}}, \qquad |\operatorname{Im} s| \gtrsim_{\operatorname{Re} s,d} 1, \tag{6.8}$$

可由已知关系直接得到

$$\lim_{y\to\infty}\Gamma(\sigma+iy)e^{(\pi/2)|y|}|y|^{1/2-\sigma} = \sqrt{2\pi}$$

（例如，参见 [9, 式 1.18(6)]）。

接下来，由（3.21）可得

$$\frac{(N+1)!}{\left|N^{1+(s-d)/2}\Gamma\left(N+1-\frac{s-d}{2}\right)\right|} < \frac{2\Gamma(M)}{|\Gamma(M+iy)|}, \quad M := N+1-(\operatorname{Re} s-d)/2 \gtrsim_{\operatorname{Re} s,d} 1, \tag{6.9}$$

其中 $y = (-\operatorname{Im} s)/2$。由于 $|\arg(M+iy)| \le \pi/2$，我们可以对（6.9）右端中的两个伽马函数之商应用斯特林公式（例如，参见 [9, 式 1.18(2)]）。因此,

$$\frac{\Gamma(M)}{|\Gamma(M+iy)|} \le \frac{e^{y\arg(M+iy)}}{\left(\sqrt{1+(y/M)^2}\right)^{M-1/2}}\left(1+C/M\right) := A(M,y)\left(1+C/M\right), \tag{6.10}$$

其中 $C>0$ 是一个绝对常数。注意，$y\arg(M+iy) \ge 0$，因此不失一般性

我们可以假设 $y \ge 1$ 和 $M \ge 1$。

此外，如果 $1 \le M \le \sqrt{y}$，那么

$$A(M,y) \le y^{-M/2+1/4} e^{(\pi/2)y}. \tag{6.11}$$

若 $1 \le \sqrt{y} < M$，则

$$A(M,y) \le e^{y \arg(M+iy)} \le e^{(\pi/2)y} e^{-y \operatorname{arccot}(\sqrt{y})} \le e^{(\pi/2)y - \sqrt{y/2}}. \tag{6.12}$$

由此得出，由 (6.11) 和 (6.12) 可知，对于任意固定的 $M_0 > 0$ 以及任意 $M \ge 2M_0 + 1/2$,

$$A(M,y) \lesssim_{M_0} y^{-M_0} e^{(\pi/2)y}, \qquad y \ge 1. \tag{6.13}$$

Fin最后，合并关系式 (6.9)、(6.10) 和 (6.13)，我们得到第二个估计 e

$$\frac{(N+1)!}{\left|N^{1+(s-d)/2}\Gamma\left(N+1+\frac{s-d}{2}\right)\right|} \lesssim_{M_0} \frac{e^{(\pi/4)|\operatorname{Im} s|}}{|\operatorname{Im} s|^{M_0}}, \qquad N \gtrsim_{\operatorname{Re} s, M_0, d} 1, \quad |\operatorname{Im} s| \ge 1, \tag{6.14}$$

对于任意固定的 $M_0 > 0$。

右端 (6.6) 中积分的第三个估计由 (r,β)-条件推出。事实上，根据定理 6.2 和定义 5.3 的假设，存在常数 $r^* = r + d > d$和 $\mu(r^*, d)$，使得

$$\beta_N^{\operatorname{Re} s - d} \left| \int_0^\infty \frac{P_{2N+d}^{(d)}(0)\, t^{s-1}}{\left(1 + (t/u_N)^2\right) P_{2N+d}(it)} dt \right| \lesssim_{\operatorname{Re} s, d} |\operatorname{Im} s|^{\mu(\operatorname{Re} s, d)}\, e^{-(\pi/2)|\operatorname{Im} s|}, \quad \operatorname{Re} s = r^*. \tag{6.15}$$

因此，将估计式 (6.8)、(6.14) 和 (6.15) 与等式 (6.6) 结合起来，可得

$$|g_N(s)| \lesssim_{\operatorname{Re} s, M_0, d} |\operatorname{Im} s|^{-M_0 - \frac{\operatorname{Re} s - d + 1}{2} + \mu(\operatorname{Re} s, d)}, \qquad \operatorname{Re} s = r^*, \tag{6.16}$$

对任意固定的 $M_0 > 0$ 和 $N \gtrsim_{r^*, M_0, d} 1$, $|\operatorname{Im} s| \gtrsim_{r^*, d} 1$。

第3步。这里，我们讨论 g_N 的某些性质，并完成定理的证明。定义函数

$$Q_{N,d}(t) := \frac{u_N^2 \prod_{k=1}^N x_{k,N,d}^2}{N} B_N^*\left(\frac{N}{\beta_N^2} t, \Omega_{N+2,d}\right), \qquad t \in [0,\infty). \tag{6.17}$$

命题 6.3。存在 $r^* > d$，使得以下陈述成立：

(a) $Q_{N,d} \in \mathcal{L}$. *(b)* $g_N(s) = M\left(Q_{N,d}, \frac{s-d}{2}\right)$, $\operatorname{Re} s = r^*$。*(c)* $\lim_{N\to\infty} M\left(Q_{N,d}, \frac{s-d}{2}\right) = M\left(\Theta_d, \frac{s-d}{2}\right)$, $\operatorname{Re} s = r^*$，且在直线 $\operatorname{Re} s = r^*$ 的任意紧子集上一致收敛。

—— ——

(*d*) 对于任意 $M_1 > 0$,

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} |g_N(r^* + 2i\tau)| \lesssim_{r^*, M_0, d} (1 + |\tau|)^{-M_1}, \qquad \tau \in \mathbb{R}. \tag{6.18}$$

(*e*) $M\left(Q_{N,\,d},\ (r^*-d)/2+i\cdot\right)\in L_1(\mathbb{R})$。

证明。陈述 (a) 可由 (6.17) 和性质 3.7 得出，而 (b) 是 (6.6) 的推论。此外，(c) 可由陈述 (b) 和关系式 (6.7) 得出。为证明 (d)，我们首先注意到，根据陈述 (c)，对于直线 $\operatorname{Re} s = r^*$ 的一个紧子集 K，

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\max_{\tau\in K}|g_N(r^*+2i\tau)|<\infty. \tag{6.19}$$

Then (6.18) 可由 (6.19) 和 (6.16) 得出。最后，(e) 可由 (a)、(b) 和 (d). □

接下来,

$$Q_{N,d}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} M(Q_{N,d},(r^*-d)/2+i\tau)\,t^{-(r^*-d)/2-i\tau}d\tau,\qquad t\in[0,\infty), \tag{6.20}$$

$$\Theta_d(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} M(\Theta_d,(r^*-d)/2+i\tau)\,t^{-(r^*-d)/2-i\tau}d\tau,\qquad t\in[0,\infty). \tag{6.21}$$

事实上，反演公式 (6.20) 可由命题 5.2 以及命题 6.3 的陈述 (a) 和 (e) 得出。为证明 (6.21)，我们首先注意到，根据引理 4.1 (b)，$\Theta_d\in\mathcal{L}$。接下来，$M(\Theta_d,\ (r^*-d)/2+i\cdot)\in\mathcal{L}$，这也可由关系式 (6.7) 和 (6.18) 得出。因此，(6.21) 可由命题 5.2 得出。

最后，结合 (6.20)、(6.21) 以及命题 6.3 的 (b)、(c) 和 (d)，由控制收敛定理可知,

$$\lim_{N\to\infty} Q_{N,d}(t)=\Theta_d(t),\qquad t\in[0,\infty).$$

因此，(6.4) 得证。 □

下面的推 论表明，极限关系 (6.4) 对切比雪夫多项式也成立。

推论 6.4. 设 $\beta_N=\beta_{N,\lambda}:=2N+d+\lambda$，并令 $P_{2N+d}:=2^{-(2N+d-1+\lambda)}Q_{2N+d,\lambda}$, $N\in\mathbb{N}$, $\lambda=0$或 $\lambda=1$为第一类或第二类归一化切比雪夫多项式（参见(5.10) 或(5.11)，另见例 *1.8*）。此外，设$(u_{N,\lambda})_{N=1}^{\infty}$ 为正数序列，满足 $u_{N,\lambda}$不是 $Q_{2N+d,\lambda}$ 的零点，且$\lim_{N\to\infty}\beta_{N,\lambda}u_{N,\lambda}=\infty$。则下列关系成立:

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{u_{N,\lambda}^2}{N\,2^{2N+d-1+\lambda}}B_N^*\left(\frac{N}{(2N+d+\lambda)^2}t,\Omega_{N+2,d,\lambda}\right)\right]=\Theta_d(t),\qquad t\in[0,\infty); \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned}&B_N\left(\frac{N}{(2N+d+\lambda)^2}t,\Omega_{N+2,d,\lambda}\right)\\&=\frac{N\,2^{2N+d-1+\lambda}}{u_{N,\lambda}^2}\Theta_d(t)\left(\frac{N}{(2N+d+\lambda)^2}t\right)^N(1+o(1)),\qquad t\in[0,\infty);\end{aligned} \tag{6.23}$$

当 $N\to\infty$ 时，其中

$$\Omega_{N+2,d,0}:=\{0,u_{N,0}^2\}\bigcup\left\{\cos^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{4N+2d}\right):1\le k\le N\right\}, \tag{6.24}$$

$$\Omega_{N+2,d,1}:=\{0,u_{N,1}^2\}\bigcup\left\{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2N+d+1}\right):1\le k\le N\right\}. \tag{6.25}$$

证明。 序列 $\left(2^{-(2N+d-1+\lambda)}Q_{2N+d,\lambda}\right)_{N=1}^{\infty}$ 根据例 1.8 属于 $\mathbb{P}_d(\beta,\gamma,\delta)$，此外，序列 $\left(t^{-d}Q_{2N+d,\lambda}(t)/Q_{2N+d,\lambda}^{(d)}(0)\right)_{N=1}^{\infty}$ 满足引理 5.8 中的 (r,β)-条件。另请注意，$\prod_{k=1}^{N}x_k^2=2^{-(2N+d-1+\lambda)}$。因此，(6.22)由定理 6.2 得出，而(6.23)则直接由(6.22)和(3.2)推出。□

注 6.5。 由(6.23)可得

$$\lim_{N\to\infty}B_N\left(\frac{N}{(2N+d+\lambda)^2}t,\Omega_{N+2,d,\lambda}\right)=4\lim_{N\to\infty}NB_N\left(t,\frac{(2N+d+\lambda)^2}{N}\Omega_{N+2,d,\lambda}\right)=0$$

对于任意 $t\neq 0$，即， B-样条在 $N\to\infty$趋于δ函数（参见定理 1.2 (iii)和例 1.6）。此外，请注意，定理 6.2 和推论 6.4 中的所有节点均为非负，因此例 1.4 的条件 1 不成立。这就是无法将(6.4)和(6.22)与(1.3)进行比较的原因。

备注 6.6。 我们猜想，类似于 (6.22) 和 (6.23) 的关系对于规范化的 Gegenbauer 多项式和 Hermite 多项式，以及零点等距分布的多项式（见例 1.8–1.10）也成立。

事实证明，对于节点位于区间$[-1,\infty)$内的 B-样条，关系 (6.23) 可以改写。

推论 6.7. 设

$$\Omega_{N+2,d,0}^{*}:=\{-1,2u_{N,0}^2-1\}\bigcup\left\{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N+d}\right):1\le k\le N\right\}, \tag{6.26}$$

$$\Omega_{N+2,d,1}^{*}:=\{-1,2u_{N,1}^2-1\}\bigcup\left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{2N+d+1}\right):1\le k\le N\right\}, \tag{6.27}$$

其中 $(u_{N,\ \lambda})_{N=1}^{\infty}$ 是正数序列，满足 $\lim_{N\to\infty}N\,u_{N,\ \lambda}=\infty$ 且 (6.26)和(6.27) 右端中的两个集合不相交。那么

$$\begin{aligned}&B_N\left(\frac{2N}{(2N+d+\lambda)^2}t-1,\Omega_{N+2,d,\lambda}^{*}\right)\\&=\frac{N\,2^{2N+d-1+\lambda}}{2u_{N,\lambda}^2}\Theta_d(t)\left(\frac{2N}{(2N+d+\lambda)^2}t\right)^N(1+o(1)),\qquad t\in[0,\infty),\quad \lambda=0,\,1,\end{aligned} \tag{6.28}$$

作为 $N\to\infty$。

证明。 通过初等计算,

$$B_N\left(y, \Omega_{N+2,d,\lambda}\right) = 2B_N\left(2y-1, \Omega^*_{N+2,d,\lambda}\right), \tag{6.29}$$

其中集合 $\Omega_{N+2,\ d,\ \lambda}$ 和 $\Omega^*_{N+2,\ d,\ \lambda}$ 由 (6.24)–(6.27) 定义。因此，(6.28) 由 (6.23) 和 (6.29) 得出。 □

注 6.8。 若取 $u_{N,\ 1} = 1$，则 (6.27) 中定义的集合 $\Omega^*_{N+2,\ 1,\ 1} \subseteq [-1,1]$ 由多项式 $(x^2-1)U_N(x) \in \mathcal{P}_{N+2}$ 的所有零点组成。因此， $d=1$ 和 $\lambda = 1$的关系 (6.28) 描述了例 1.6 中完美 B-样条在点 -1 右侧邻域内的渐近行为（参见 (1.5) 和 (1.6)）。此外，注意若取 $u_{N,\ 0} = 1$，则 (6.26) 中定义的集合 $\Omega^*_{N+2,\ 0,\ 0} \subseteq [-1,1]$ 由多项式 $(x^2-1)T_N(x) \in \mathcal{P}_{N+2}$ 的所有零点组成。

致谢。 我们感谢匿名审稿人提出的宝贵建议。此外，感谢 Maciej Rzeszut 和 Michał Wojciechowski 分享参考文献 [17]。

References

[1] N. I. Akhiezer，《逼近理论讲义》，第2版，Nauka，莫斯科，1965年（俄文）。[2] B. C. Berndt，《拉马努金笔记》第五部分，Springer–Verlag，纽约，1998年。[3] C. de Boor，《样条实用指南》，修订版，Springer-Verlag，纽约，2001年。[4] R. Brinks，关于 B-样条导数向高斯函数导数的收敛，《计算与应用数学杂志》**27**，第1期（2008年），79–92页。[5] P. Butzer、S. Jansche，梅林变换的直接方法，《傅里叶分析与应用杂志》**3**（1997年），325–376页。[6] Ch. K. Chui，《小波导论》，学术出版社，波士顿、圣迭戈，1992年。[7] H. B. Curry、I. J. Schoenberg，关于样条分布及其极限：P´olya分布函数，摘要380t，《美国数学会通报》**53**（1947年），1114页。[8] H. B. Curry、I. J. Schoenberg，关于P´olya频率函数IV：基本样条函数及其极限，《数学分析杂志》**17**（1966年），71–107页。[9] A. Erd´elyi、W. Magnus、F. Oberhettinger和F. G. Tricomi，《高等超越函数》，第I卷，McGraw-Hill，纽约，1953年。[10] A. Erd´elyi、W. Magnus、F. Oberhettinger和F. G. Tricomi，《高等超越函数》，第II卷，McGraw-Hill，纽约，1953年。[11] M. A. Evgrafov，级数与积分表示，载于《科学与技术成果：科学与技术进展》，苏联科学院全苏科学技术信息研究所，莫斯科，1986年，5–92页（俄文）。[12] M. I. Ganzburg，多项式插值与ζ函数的渐近表示，《数学论文集》**496**（2013年），117页。[13] I. S. Gradshteyn、I. M. Ryzhik，《积分、级数与乘积表》，第5版，学术出版社，波士顿，1994年。[14] S. Karlin，《全正性》，第I卷，斯坦福大学出版社，斯坦福，1968年。[15] E. Neuman，B-样条的矩与傅里叶变换，《计算与应用数学杂志》**7**（1981年），51–62页。[16] H. Rademacher，《解析数论专题》，Springer–Verlag，纽约，1973年。

[17] M. Rzeszut、M. Wojciechowski， *B*-样条在施瓦茨半范数意义下逼近高斯密度和厄米函数，《逼近理论杂志》（2026年），论文编号106276。[18] I. J. Schoenberg，完美 *B*-样条与一个时间最优控制问题。《以色列数学杂志》**10**（1971年），261–274页。[19] L. L. Schumaker，《样条函数：基础理论》，第3版，剑桥大学出版社，纽约，2007年。[20] A. Sommerfeld，《高斯误差定律的一种特别直观的推导》，J. A. Barth出版社，莱比锡，1904年，第848–859页。[21] A. F. Timan，《实变函数逼近论》，培格曼出版社，纽约，1963年。[22] E. C. Titchmarsh，《傅里叶积分理论导论》，克拉伦登出版社，牛津，1937年。[23] F. Tricomi， ¨关于具有恒定分布律的多个随机变量之和，¨《德国数学家协会年报》**42**（1933年），174–179页。[24] M. Unser、A. Aldroubi、M. Eden， *B*-样条小波向Gabor函数的渐近收敛，《IEEE信息论汇刊》**38**，第2期（1992年），864–872页。[25] Y. Xu、R. Wang， *B*-样条、欧拉数与立方体切片的渐近性质，《计算与应用数学杂志》**236**（2011年），988–995页。

212 Woodburn Drive, Hampton, VA 23664, USA
Email address: michael.ganzburg@gmail.com