arXiv:2601.06654v1 [math.GT] 10 Jan 2026

海加德弗洛尔同调中的有理手术正合三角

GHEEHYUN NAHM

摘要。我们在二元域上构造了一族新的 Heegaard Floer 理论手术正合三角。该族推广了 Ozsváth 和 Szabó 针对正整数 n的 n- 和 $1/n$- 手术正合三角，也推广了作者近期提出的 2-手术正合三角，使其适用于所有正有理斜率。

这一构造归结为一个组合问题，涉及亏格 1 Heegaard 图中的三角形计数映射和四边形计数映射。本文的主要贡献是解决这一组合问题；对于斜率 $r \neq n,\ 1/n$，这一问题尤为棘手。一个关键思路是使用一种与 Spin^c 共轭对称性密切相关的对合。

目录

1. 引言 2 1.1. 证明思路 4 1.2. 修正的结 Floer 同调群 $\boldsymbol{HFK}^-_p$,q,k(Y, K) 6 1.3. 结构安排 8 1.4. 约定 9 1.5. 致谢 9 2. 带局部系统的 Heegaard Floer 同调 9 2.1. 局部系统 10 2.2. 正性与弱容许性 11 2.3. 标准平移 12 3. 主要局部计算 13 3.1. 亏格 1 Heegaard 图 13 3.2. 局部系统 14 3.3. 陈述 14 3.4. 恢复定理 1.1 和定理 1.3 16 4. 局部系统与覆盖空间 18 4.1. 亏格 1 Heegaard 图的一个覆盖空间 18 4.2. 标准基元素的提升与三角形计数映射 19 4.3 三角形计数映射的显式公式 22 4.4. 标准基元素的提升与四边形计数映射 23 5. 帽版本 24 5.1. 之字形 ZZ_0 24 5.2. 三角形计数映射 26 5.3. 四边形计数映射 29 6. 负版本 30 6.1. $k = 0$ 31的三角形计数映射 6.2. 一般 k 34的三角形计数映射

作者的研究部分得到了 ILJU Academy and Culture Foundation、Simons 合作项目低维拓扑中的新结构以及普林斯顿百年奖学金的资助。

6.3. 图示证明 35 7. 示例 38 7.1. 情形
$k = 0$ 387.2. 情形
(p, q, k) =(5, 3, 1) 和 (5, 3, 2) 39 附录 A. 第 6.1 小节的计算 40 附录 B. 将定理 1.3 化归为定理 3.4 43 B.1. 三角形检测引理 43 B.2. 假设定理 3.4 时定理 1.3 的证明 45 附录 C. 弱容许性与正性 47 C.1. 条件 48 C.2. 弱容许性 49 C.3. 正性 51 参考文献 54

1. 引言

Heegaard Floer 同调是由 Ozsváth 和 Szabó 定义的一种强大的闭合定向3维流形不变量 [OS04c]。Heegaard Floer 同调的一个重要性质是它具有手术正合三角：在 [OS04b的第 9], 节中，Ozsváth 和 Szabó 为斜率 $r = n$或 $1/n$正整数 n构造了手术正合三角，其中涉及纽结的0手术、纽结的 r手术，以及底层3维流形的 Heegaard Floer 同调群；参见[Flo88、KMOS07]。

还有一种与之密切相关的纽结不变量，称为结 Floer 同调，由 Ozsváth 和 Szabó 定义 [OS04a] ，Rasmussen 也独立地给出了定义 [Ras03]。Ozsváth、Stipsicz 和 Szabó[OSS17a] 定义了结 Floer 同调的一种变体，称为 t修正纽结 Floer 同调，并用它定义了一族无穷多个结同痕不变量。在 [OSS17b], 中，他们采用特殊情形 $t = 1$ ，并将其称为无向结 Floer 同调，以给出光滑4维交叉帽数的下界。

最近，作者 [Nah25，定理 1.3] 构造了一个适用于斜率2的新手术正合三角。这个手术正合三角涉及纽结的0-手术的 Heegaard Floer 同调群、纽结的2-手术，以及底层3-流形中该纽结的无向结 Floer 同调；这是 Heegaard Floer 理论中 Bhat 最近提出的2-手术正合三角[Bha23]在瞬子 Floer 同调中的类比。

本文在含两个元素的域 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上构造 Heegaard Floer 理论中的一族新手术正合三角（定理 1.3）。对于每组三元组 (p, q, k)，其中 p 和 q 是互素正整数，且 $k = 0, \cdots, p - 1$，我们构造一个适用于斜率 p/q 的手术正合三角。这一族包含 Ozsváth 和 Szabó 的 n-手术和 $1/n$-手术正合三角，以及作者的 2-手术正合三角：它们分别对应于 (p, q, k) =$(n, 1, 0)$、$(1, n, 0)$ 和 $(2, 1, 1)$。

这些手术正合三角 $k = 0$ 仅涉及 Heegaard Floer 同调群，并将 Ozsváth 和 Szabó 的 n-和 $1/n$-手术正合三角直接推广到了所有正有理斜率 p/q。请注意，即使对于 $k = 0$，构造一般 $(p, q) \neq (n, 1)$、$(1, n)$的手术正合三角尤其棘手：更多讨论请参见第1.1.1 小节及注释3.6 。

对于一般的 $(p,\ q,\ k)$，手术正合三角中的三个同调群有两个是 Heegaard Floer 同调群，而第三个群是结 Floer 同调的一种变体 $\boldsymbol{HFK}^-_{p\ ,\ q,\ k}(Y,\ K)$，我们在定义 1.12 中给出了该变体。应将这种结 Floer 同调变体视为一种 $2k/p$-修正纽结 Floer 同调：详见小节 1.2 中的进一步讨论。

为清楚起见，我们首先在定理 $k=0$ 中单独陈述主定理 1.1。为使陈述更加清晰，定理 1.1 分为两种情形， $p \geq q$ 和 $p<q$。在小节 7.1 中，我们针对 1.1 的特殊情形重述定理：其中 $p \geq q$， $Y=S^3$，且框架 λ 为塞弗特框架（推论 7.1）；我们还描述了平凡结和右手三叶结在 $(p,\ q)=(5,\ 3)$ 时的这一手术正合三角。

定理 1.1 (主定理，特殊情形 $k=0$)。设 K 是闭定向3维流形 Y 中的一个纽结，框架为 λ，子午线为 μ。那么，对于所有满足p 和 q 为互素正整数的有理数 $p/q>0$，都存在一个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性正合三角，其中涉及 λ 手术 $Y_\lambda(K)$、 $p\mu+q\lambda$ 手术 $Y_{p\mu+q\lambda}(K)$ 以及底层流形 Y 的 *Heegaard Floer* 同调群。更准确地说：

(1) 若 $p \geq q$，则该正合三角涉及 *(A)* q 个 $\boldsymbol{HF}^-(Y_\lambda(K))$ 的副本，*(B)* $\boldsymbol{HF}^-(Y_{p\mu+q\lambda}(K))$，以及 *(C)* 带扭曲系数的 *Heegaard Floer* 同调群 $\boldsymbol{HF}^-(Y;\ \mathbb{F}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}])$，其中扭曲由该纽结的同调类 $[K] \in H_1(Y)$ 给出；也就是说，存在一个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性正合三角

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{j=0}^{q-1} \boldsymbol{HF}^-(Y_\lambda(K)) & \longrightarrow & \boldsymbol{HF}^-(Y_{p\mu+q\lambda}(K)) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & \underline{\boldsymbol{HF}^-}(Y;\ \mathbb{F}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]) & \end{array}$$

(2) 若 $p<q$，则该恰三角涉及（*A*）带扭曲系数的 *Heegaard Floer* 同调群的直和 $\boldsymbol{HF}^-(Y_\lambda(K);\ \mathbb{F}[\mathbb{Z}/s_i\mathbb{Z}])$，其中 $i=0,\cdots,p-1$ 的扭曲由对偶结的同调类 $[K_\lambda] \in H_1(Y_\lambda(K))$ 给出，并且

$$s_i=\begin{cases} \lceil q/p \rceil & i=0,\cdots,(q \bmod p)-1 \\ \lfloor q/p \rfloor & i=(q \bmod p),\cdots,p-1 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 q 模 $p \in \{0,\cdots,p-1\}$ 是 q 除以 p所得的余数，（*B*） $\boldsymbol{HF}^-(Y_{p\mu+q\lambda}(K))$，以及（*C*）带扭曲系数的 *Heegaard Floer* 同调群 $\boldsymbol{HF}^-(Y;\ \mathbb{F}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}])$，其中扭曲由纽结的同调类 $[K] \in H_1(Y)$ 给出；也就是说，存在一个$\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性正合三角

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=0}^{p-1} \underline{\boldsymbol{HF}^-}(Y_\lambda(K);\ \mathbb{F}[\mathbb{Z}/s_i\mathbb{Z}]) & \longrightarrow & \boldsymbol{HF}^-(Y_{p\mu+q\lambda}(K)) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & \underline{\boldsymbol{HF}^-}(Y;\ \mathbb{F}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]) & \end{array}$$

注1.2。若 $K \subset Y$是零调和的，那么 $\boldsymbol{HF}^-(Y;\ \mathbb{F}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}])$ 就是 p 个 $\boldsymbol{HF}^-(Y)$ 的副本。

下述定理是我们的主定理，它是定理1.1的推广。在小节7.2中，我们将描述采用塞弗特框架时，平凡结和右手三叶结的这一手术正合三角，其中 $(p,q,k)=(5,3,1)$ 和 $(5,3,2)$。

定理 1.3 （主定理，一般情形）。设 K 是闭定向 Y 中的一个纽结，框架为 λ，子午线为 μ。那么，对于所有满足 p 和 q 互素且为正整数的有理数 $p/q>0$，若 $k=0$、$\cdots$、$p-1$，则存在一个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性正合三角

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=0}^{\min(p,q)-1} \underline{\boldsymbol{HF}^-}(Y_\lambda(K);\ \mathbb{F}[\mathbb{Z}/s_i\mathbb{Z}]) & \longrightarrow & \boldsymbol{HF}^-(Y_{p\mu+q\lambda}(K)) \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & \boldsymbol{HFK}^-_{p,q,k}(Y,K) & \end{array}$$

这里， s_0、 $\cdots$、 s_{p-1} 由公式（*1.1*）给出； $\boldsymbol{HF}^-(Y_\lambda(K); \mathbb{F}[\mathbb{Z}/s_i\mathbb{Z}])$ 是带扭曲系数的 *Heegaard Floer* 同调群，其中扭曲由对偶结的同调类 $[K_\lambda] \in H_1(Y_\lambda(K))$ 给出；而 $\boldsymbol{HFK}^-_{p,q,k}(Y,K)$ 是我们在定义 *1.12* 中定义的修正纽结 *Floer* 同调群。

注记 1.4（定理 1.1 和1.3关于帽、加号和无穷版本）。 在我们的正合三角（定理 1.1 和 1.3）中导出同调群的链复形是 $\mathbb{F}[\![U]\!]$- 模。因此，我们按标准方式定义帽、加号和无穷版本，即通过以下代数修改：若 $\boldsymbol{C}^-$ 是一个由 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-模构成的链复形，则定义

$$\widehat{C} := \boldsymbol{C}^- \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}[\![U]\!]/U,\ C^+ := \boldsymbol{C}^- \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} (U^{-1}\mathbb{F}[\![U]\!]/\mathbb{F}[\![U]\!]),\ C^\infty := \boldsymbol{C}^- \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} U^{-1}\mathbb{F}[\![U]\!].$$

我们的主定理（定理 1.1和 1.3）在帽、加号和无穷版本中同样成立（见附录 B.2）。

由于作者的 2-手术正合三角 [Nah25，定理 1.3]（定理 1.3关于 $(p,\ q,\ k) = (2,\ 1,\ 1)$）是 Bhat 的 Heegaard Floer 类比 2-手术正合三角 [Bha23] 在瞬子 Floer 同调中的版本，因此我们提出以下问题。

问题 1.5。 定理 *1.3*中的手术正合三角是否在瞬子 *Floer* 同调中也有类似的结果？瞬子 *Floer* 理论中与 $\boldsymbol{HFK}^-_{p,q,k}(Y,K)$ 对应的对象是什么？

1.1. **证明思路**。 为了构造有理手术正合三角（定理 1.1 和 1.3），我们采用 [OS05] 的策略（比较 [Man07、Zem23、Nah25]），利用三角检测引理 [OS05，引理 4。2]（引理 B.1），并将问题归结为亏格 1Heegaard 图中的局部计算，进而归结为一个纯组合问题（定理 3.4）：我们在第 3.4小节和附录 B中回顾这一方法。本文的主要贡献是解决这个纯组合问题；对于一般的 $p/q \neq n, 1/n$，这个问题尤其棘手；我们将在下文和注 3.6中讨论。

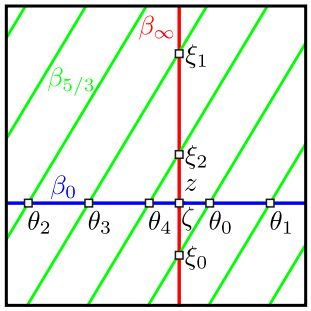


图 1.1。 $r = 5/3$的亏格 1 Heegaard 图（$\mathbb{T}^2$， β_0， β_r， β_∞， z）。交点 $\{\theta_0,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\} = \beta_0 \cap \beta_r$、 $\{\xi_0,\xi_1,\xi_2\} = \beta_r \cap \beta_\infty$ 和 $\{\zeta\} = \beta_\infty \cap \beta_0$ 已标出。

1.1.1. 情形 $k = 0$. 令 p, q 为互素正整数，令 $r = p/q$，暂且先关注$k = 0$ 情形（一般的 k见子小节 1.1.2）。构造斜率为 r 的有理手术恰当三角时，相关的亏格 1 Heegaard 图（$\mathbb{T}^2, \beta_0, \beta_r, \beta_\infty, z$）由三条附着曲线 $\beta_0, \beta_r, \beta_\infty$ 组成，其斜率分别为 0、 r、 ∞： $r = p/q = 5/3$见图 1.1。我们按如下方式为 β_0 和 β_∞ 配备局部系统（关于为何需要局部系统，见注 1.6）：(A) 为 β_0 配备秩为 q 的局部系统（E_0, ϕ_0），其中 $E_0 := \bigoplus_{j=0}^{q-1} x_j \mathbb{F}[\![U]\!]$ 以 $x_0, \cdots, x_{q-1}$ 为基，而 ϕ_0 是单值化，其定义推迟到第 3 节再给出，并且

(B) 为 β_∞ 配备秩为 p 的局部系统 $(E_\infty,\ \phi_\infty)$ 其中 $E_\infty := \bigoplus_{i=0}^{p-1} y_i\mathbb{F}[\![U]\!]$ 且 ϕ_∞ 是单值化，其定义也推迟到第3节。

现在，组合问题是找到一些循环

$$\psi_{0r}\in \boldsymbol{CF}^-(\beta_0^{(E_0,\phi_0)},\beta_r),\ \psi_{r\infty}\in \boldsymbol{CF}^-(\beta_r,\beta_\infty^{(E_\infty,\phi_\infty)}),\ \psi_{\infty 0}\in \boldsymbol{CF}^-(\beta_\infty^{(E_\infty,\phi_\infty)},\beta_0^{(E_0,\phi_0)})$$

使得三角形计数映射消失，即

$$\mu_2(\psi_{0r}\otimes\psi_{r\infty})=0,\ \mu_2(\psi_{r\infty}\otimes\psi_{\infty 0})=0,\ \mu_2(\psi_{\infty 0}\otimes\psi_{0r})=0, \tag{1.2}$$

并且四边形计数映射是模 U 意义下的单位映射[1]，即

$$\mu_3(\psi_{0r}\otimes\psi_{r\infty}\otimes\psi_{\infty 0})\equiv \mathrm{Id}\ \ \mu_3(\psi_{r\infty}\otimes\psi_{\infty 0}\otimes\psi_{0r})\equiv \mathrm{Id}\ \ \mu_3(\psi_{\infty 0}\otimes\psi_{0r}\otimes\psi_{r\infty})\equiv \mathrm{Id}\ \mathrm{mod}\ U. \tag{1.3}$$

链复形

$$\boldsymbol{CF}^-(\beta_0^{(E_0,\phi_0)},\beta_r),\ \boldsymbol{CF}^-(\beta_r,\beta_\infty^{(E_\infty,\phi_\infty)}),\ \boldsymbol{CF}^-(\beta_\infty^{(E_\infty,\phi_\infty)},\beta_0^{(E_0,\phi_0)}) \tag{1.4}$$

都是 $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 上的自由秩 pq 模，微分为零 $\partial=0$。此外，E_0，E_∞ 的基以及交点 $\beta_0\cap\beta_r$、$\beta_r\cap\beta_\infty$ 和 $\beta_\infty\cap\beta_0$ 给出了这些链复形的基。[2]

将这些循环 ψ_{0r}、$\psi_{r\infty}$、$\psi_{\infty 0}$ 表示为上述基元素的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性组合后，方程（1.2）便成为一个包含 $3pq$ 个变量的 $3pq$ 上的二次方程组 $\mathbb{F}[\![U]\!]$，而方程（1.3）则成为一个额外的三次方程组。我们的主要结果是，这两个方程组总是存在一个共同解。对于一般的 $p/q\neq n$，$1/n$证明这一点尤其棘手：事实上，我们找到的循环并非仅仅是若干基元素之和；这些 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性组合的系数通常很复杂。具体例子见注3.6 。

主要有两个思路：首先，我们将注意力限制在链复形 (1.4) 的特定子空间上；这些子空间由标准基元素张成（定义 4.5）。限制到这些子空间后，三角形计数映射会更具对称性，并且方程（1.2）可化为更易处理的线性方程组。更具体地说，我们定义一个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性映射 $F\colon X\to Y$，它作用于两个自由的、秩为 q 的模 X、Y之间，且这两个模都定义在 $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 上；我们还考虑 F的伴随映射 $F^*\colon Y^*\to X^*$。于是，元素 $(x,y)\in\ker F\oplus\ker F^*$可导出方程（1.2）的一个解$\psi_{0r},\psi_{r\infty},\psi_{\infty 0}$；见第 6 节。

第一个主要思路的动机在于：若我们限制在这些特定的子空间上，那么 $\mathbb{T}^2$ 中 $\beta^{(E_0,\phi_0)}_0,\beta_r,\beta_\infty^{(E_\infty,\phi_\infty)}$ 的多边形计数映射，可以通过 $\mathbb{T}^2$ 的覆盖空间中曲线的多边形计数映射来清晰地解释，且无需局部系统；参见第4节。受这一解释的启发，我们先在第 5 节中求得模 U 意义下的一个解，即求得$\psi_{0r},\psi_{r\infty},\psi_{\infty 0}$模 U，记作 $\psi_{0r},\psi_{r\infty},\psi_{\infty 0}$，使其满足模$U$ 意义下的公式（1.2）和公式（1.3）。结果表明，若 $x\in\ker F$ 和 $y\in\ker F^*$ 都非零，则

[1]注意，方程（1.3）并不严谨：在 Heegaard Floer 同调中，我们通常避免定义 $\boldsymbol{CF}^-(\beta,\beta)$，更不用说单位元 $\mathrm{Id}\in\boldsymbol{CF}^-(\beta,\beta)$ 了。相反，我们考虑附着曲线的标准平移（见第 2.3 小节）：例如，我们不证明 $\mu_3(\psi_{0r}\otimes\psi_{r\infty}\otimes\psi_{\infty 0})\equiv\mathrm{Id}\ \mathrm{mod}\ U$，而是令 β_0'为 β_0的标准平移（见图 3.1），定义相应的圈 $\psi'_{\infty 0}\in\boldsymbol{CF}^-(\beta_\infty^{(E_\infty,\phi_\infty)},\beta_0'^{(E_0,\phi_0)})$（这是 $\psi_{\infty 0}$在第 2.3 小节所述最近点映射下的像），令 $\Theta_0^+\in\beta_0\cap\beta_0'$为最高分次交点，并证明

$$\mu_3(\psi_{0r}\otimes\psi_{r\infty}\otimes\psi'_{\infty 0})\equiv \mathrm{Id}_{E_0}\Theta_0^+\mod U.$$

[2]将交点 $\beta_0\cap\beta_r$记为 $\theta_0,\cdots,\theta_{p-1}$，$\beta_r\cap\beta_\infty$ 记为 $\xi_0,\cdots,\xi_{q-1}$，并将 $\beta_\infty\cap\beta_0$记为 ζ。那么，链复形 $\boldsymbol{CF}^-(\beta_0^{(E_0,\phi_0)},\beta_r)$ 作为 $\mathbb{F}[\![U]\!]$- 模 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0,\mathbb{F}[\![U]\!])$ 上的自由模，由交点 θ_i生成，因此其基为 $x_j^*\theta_i$，其中 $i=0,\cdots,p-1$ 以及 $j=0,\cdots,q-1$。类似地，$\boldsymbol{CF}^-(\beta_r,\beta_\infty^{(E_\infty,\phi_\infty)})$ 的基为 $\{y_i\xi_j\}_{i,j}$，而 $\boldsymbol{CF}^-(\beta_\infty^{(E_\infty,\phi_\infty)},\beta_0^{(E_0,\phi_0)})$ 的基为 $\{x_jy_i^*\zeta\}_{i,j}$。

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$对应的 ψ_{0r}， $\psi_{r\infty}$， $\psi_{\infty 0}$模 U 化为 ψ_{0r}， $\psi_{r\infty}$， $\psi_{\infty 0}$。因此，接下来只需证明 $\ker F \neq 0$。

第二个主要思路是利用亏格1 海加德图（图1.1）的对称性来证明$\ker F \neq 0$。这种对称性与 Heegaard Floer 同调的 Spin^c 共轭对称性密切相关，并诱导出一个对合 ι ，作用于 X 和 Y ，使得 F 是 ι-等变的。计算 ι的不动子空间的秩，可得秩$X^\iota = $秩$Y^\iota + 1$，从而推出秩$(\ker F) \geq 1$；见第6节。

备注1.6（局部系统的必要性）。为了应用三角形检测引理，我们希望找到一个海加德四元组图 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_r, \boldsymbol{\beta}_\infty, z)$ ，使得正合三角中的同调群为 $\boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_i)$ ，其中 $i \in \{0, r, \infty\}$。（关于这与上述亏格3.4 的关系，进一步讨论请见小节1 图。）然而，由于定理1.1中考虑了扭曲系数，我们应当改为在 $\boldsymbol{\beta}_0$ 和 $\boldsymbol{\beta}_\infty$ 上赋予局部系统，并要求

$$\bigoplus_{i=0}^{\min(p,q)-1} \underline{\boldsymbol{HF}^-}(Y_\lambda(K); \mathbb{F}[\mathbb{Z}/s_i\mathbb{Z}]) \cong \boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_0^{(E_0,\phi_0)}),$$

$$\boldsymbol{HF}^-(Y_{p\mu+q\lambda}(K)) \cong \boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_r),$$

$$\underline{\boldsymbol{HF}^-}(Y; \mathbb{F}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]) \cong \boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_\infty^{(E_\infty,\phi_\infty)}).$$

1.1.2. 一般情形 k。 </style>对于一般的， 我们同样希望为 配备某个局部系统（， ϕ_∞^k），使得

$$\boldsymbol{HFK}^-_{p,q,k}(Y, K) \cong \boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_\infty^{(E_\infty^k,\phi_\infty^k)}).$$

为此，我们需要允许单值化 ϕ_∞^k 事先包含 U的负幂，如[Zem23、Nah25]。

我们希望解决寻找满足以下方程的循环这一组合问题：

$$\psi_{0r} \in \boldsymbol{CF}^-(\beta_0^{(E_0,\phi_0)}, \beta_r),\ \psi_{r\infty} \in \boldsymbol{CF}^-(\beta_r, \beta_\infty^{(E_\infty^k,\phi_\infty^k)}),\ \psi_{\infty 0} \in \boldsymbol{CF}^-(\beta_\infty^{(E_\infty^k,\phi_\infty^k)}, \beta_0^{(E_0,\phi_0)})$$

满足方程（1.2）和（1.3。这里的主要思想是，可以定义局部系统 $(E_\infty^k, \phi_\infty^k)$ ，或者换言之 $\boldsymbol{HFK}^-_{p,q,k}(Y, K)$ ，使得这个组合问题类似于 $k = 0$所对应的问题。具体而言，如果像小节 1.1.1 中那样，将范围限制在由标准基元素张成的子空间上，那么三角形计数映射 μ_2 不依赖于k （命题6.4）。

1.2. **修正的结 Floer 同调群** $\boldsymbol{HFK}^-_{p,q,k}(Y, K)$。 为了定义并阐释这些修正的结 Floer 同调群 $\boldsymbol{HFK}^-_{p,q,k}(Y, K)$，我们首先回顾纽结 Floer 链复形 $\mathcal{CFK}^-(Y, K)$、带扭曲系数的 Heegaard Floer 链复形，以及 t-修正的纽结 Floer 链复形 $t\boldsymbol{CFK}^-(Y, K)$ 的定义。

Co约定 1.7。 全文中，将 $\mathbb{F}[\![W, Z]\!]$ 视为一个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-代数，其结构通过 $U = WZ$ 给出 .

定义 1.8（纽结 Floer 链复形 [OS04a，Ras03]）。设 K 是闭定向三维流形 Y 中的一个纽结。设 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, w, z)$ 是表示该纽结$K \subset Y$的双基点 Heegaard 图。则纽结 Floer 链复形 $\mathcal{CFK}^-(Y, K)$ 由交点 $\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$在 $\mathbb{F}[\![W, Z]\!]$ 上自由生成：

$$\mathcal{CFK}^-(Y, K) := \bigoplus_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}}} \mathbb{F}[\![W, Z]\!]\mathbf{x},$$

并且微分由对基点 w 赋予权重 W 以及对 z 赋予权重 Z进行计数给出：

$$\partial \mathbf{x} := \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}}} \sum_{\phi \in D(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \mu(\phi)=1} \#\mathcal{M}(\phi) W^{n_w(\phi)} Z^{n_z(\phi)} \mathbf{y},$$

其中 $D(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 表示从 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 的二维链集合（定义 2.3）。

定义 1.9（带有 $\mathbb{F}[\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}]$ 扭曲系数 [OS04b，第 8] 节的 Heegaard Floer 链复形）。设 Y 是一个闭定向三维流形，N 是一个正整数，且 $\gamma\in H_1(Y)$。设 $K\subset Y$ 是任意一个同调类为 γ 的纽结。设 $E_N:=\bigoplus_{i=0}^{N-1}e_i\mathbb{F}[\![U]\!]$ 是 $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 上以 e_0、$\cdots$、e_{N-1} 为基的自由秩为 N 的模。定义 $\phi_N\colon E_N\to E_N$ 为如下的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性映射：$\phi_N(e_i)=e_{i+1}$，其中 e 的指标按模 N 解释。令 W 作用为 ϕ_N、Z 作用为 $U\phi_N^{-1}$，从而将 E_N 视为一个 $\mathbb{F}[\![W,Z]\!]$-模。那么，系数为 $\mathbb{F}[\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}]$、由 γ 扭曲的 Heegaard Floer 链复形定义为

$$\underline{\boldsymbol{CF}^-}(Y;\mathbb{F}[\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}]):=\mathcal{CFK}^-(Y,K)\otimes_{\mathbb{F}[\![W,Z]\!]}E_N,$$

并将其同调记为 $\boldsymbol{HF}^-(Y;\mathbb{F}[\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}])$。

定义 1.10 (t-修正的结 Floer 链复形 [OSS17a])。设 p为正整数，且 $k=0,\cdots,p-1$。设 $D_{p,k}:=\mathbb{F}[\![U^{1/p}]\!]$，并将其视为一个 $\mathbb{F}[\![W,Z]\!]$-模，其中 W的作用为 $U^{k/p}$，而 Z的作用为 $U^{1-(k/p)}$。设 K是闭定向三维流形 Y中的一个纽结，设 $t=2k/p$，并进一步假设 p与 k 互素。则，t-修正的结 *Floer* 链复形 为

$$t\boldsymbol{CFK}^-(Y,K):=\mathcal{CFK}^-(Y,K)\otimes_{\mathbb{F}[\![W,Z]\!]}D_{p,k},$$

并将其同调记为 $t\boldsymbol{HFK}^-(Y,K)$。

注 1.11。作者的 2-手术正合三角 [Nah25，定理 1.3] 涉及无定向纽结 Floer 同调群，其定义为 $t\boldsymbol{HFK}^-(Y,K)$ 对于 $t=1$。

现在，我们定义修正的结 Floer 链复形 $\boldsymbol{CFK}^-_{p,q,k}(Y,K)$，并将其与带扭曲系数的 Heegaard Floer 同调以及 $2k/p$-修正纽结 Floer 同调进行比较。

定义 1.12（修正的结 Floer 链复形 $\boldsymbol{CFK}^-_{p,q,k}(Y,K)$）。设 K是闭定向三维流形 Y中的一个纽结，设 p,q是互素正整数，且 $k=0,\cdots,p-1$。设 $E_{p,q,k}:=\bigoplus_{i=0}^{p-1}e_i\mathbb{F}[\![U]\!]$ 是 $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 上的自由秩为 p的模，其基为 $e_0,\cdots,e_{p-1}$。定义$\phi_{p,q,k}:E_{p,q,k}\to E_{p,q,k}$ 为如下的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性映射:

$$\phi_{p,q,k}(e_i)=\begin{cases}Ue_{i+q} & \text{if } i+q\in\{0,\cdots,k-1\} \mod p\\ e_{i+q} & \text{if } i+q\in\{k,\cdots,p-1\} \mod p\end{cases},$$

其中，e 的指标按模 p解释。令W 的作用为 $\phi_{p,q,k}$、Z 的作用为 $U\phi_{pq}^{-1}{}_{,k}$，从而将 $E_{p,q,k}$ 视为一个 $\mathbb{F}[\![W,Z]\!]$-模。令

$$\boldsymbol{CFK}^-_{p,q,k}(Y,K):=\mathcal{CFK}^-(Y,K)\otimes_{\mathbb{F}[\![W,Z]\!]}E_{p,q,k},$$

并将其同调记为 $\boldsymbol{HFK}^-_{p,q,k}(Y,K)$。

在下面的一系列注记中，我们在各种情形下比较修正的结 Floer 链复形$\boldsymbol{CFK}^-_{p,q,k}(Y,K)$、带扭曲系数的 Heegaard Floer 链复形以及 $2k/p$-修正的结 Floer 链复形。

注记 1.13（情形 $k=0$）。若 $k=0$，则

$$\boldsymbol{CFK}^-_{p,q,0}(Y,K)\simeq\underline{\boldsymbol{CF}^-}(Y;\mathbb{F}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}])$$

其中我们对 $[K]\in H_1(Y)$ 施加扭曲。

注 1.14（情形 $q=k$）。如果 $q=k$，那么我们有

$$\boldsymbol{CFK}^-_{p,q,q}(Y,K)\simeq\frac{2q}{p}\boldsymbol{CFK}^-(Y,K). \tag{1.5}$$

事实上，将 $D_{p,\ k}$视为一个以 $d_i := U^{i/p}, i = 0,\ \cdots,\ p-1$为基的自由秩 p $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 模。于是，

$$Wd_i = \begin{cases} Ud_{i+k} & \text{if } i+k \in \{0, \cdots, k-1\} \mod p \\ d_{i+k} & \text{if } i+k \in \{k, \cdots, p-1\} \mod p \end{cases},$$

其中，d 的指标按模 p 解释。因此，$\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性映射

$$D_{p,q} \to E_{p,q,q} : d_i \mapsto e_i$$

是一个 $\mathbb{F}[\![W,\ Z]\!]$-模同构，因此方程（1.5）成立。

注 1.15（情形（$p,\ k$）$= 1$）。更一般地，我们来考虑这样的情形：q 和 k 不一定相等，但 p 和 k 仍然互素。在这种情形下，$\boldsymbol{HFK}^-_{p,\ q,\ k}(Y,\ K)$ 不再与 $\frac{2k}{p}\boldsymbol{HFK}^-(Y,\ K)$ 同构，但我们仍可以得到类似的结论。作为一个具体例子，我们来考虑情形（$p,\ q,\ k$）$=$（5，1，2）。考虑 $\mathbb{F}[\![W,\ Z]\!]$-子代数

$$R_{5,1,2} := \mathbb{F}[\![U^{2/5}, U^{3/5}]\!] \subset D_{5,2} = \mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!].$$

将 $\mathbb{F}[\![U^{2/5},\ U^{3/5}]\!]$ 视为一个以 1，$U^{6/5}$，$U^{2/5}$，$U^{3/5}$，$U^{4/5}$ 为基的自由 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-模；那么 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性映射

$$R_{5,1,2} \to E_{5,1,2} : 1 \mapsto e_1, U^{6/5} \mapsto e_4, U^{2/5} \mapsto e_2, U^{3/5} \mapsto e_0, U^{4/5} \mapsto e_3$$

是一个 $\mathbb{F}[\![W, Z]\!]$-模同构。因此，$\boldsymbol{HFK}^-_{5,1,2}(Y, K)$ 是定义在 $\mathbb{F}[\![U^{2/5}, U^{3/5}]\!]$ 上、而非定义在 $\mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!]$ 上的 $4/5$-修正纽结 Floer 同调群。

一般而言，若 p 和 k 互素，则我们在引理 3.10 中证明，存在某个 $\mathbb{F}[\![W, Z]\!]$-子模 $R_{p,q,k} \subset D_{p,k} = \mathbb{F}[\![U^{1/p}]\!]$，它与 $E_{p,q,k}$ 作为 $\mathbb{F}[\![W, Z]\!]$-模同构。因此，$\boldsymbol{HFK}^-_{p,q,k}(Y, K)$ 是定义在模 $R_{p,q,k}$ 上、而非定义在 $\mathbb{F}[\![U^{1/p}]\!]$ 上的 $2k/p$-修正纽结 Floer 同调。

注记 1.16（对 $\boldsymbol{HFK}^-_{p,\ q,\ k}(Y,\ K)$ 的诠释）。鉴于上述注记，对于一般的（p、q、k），我们应将修正纽结 Floer 同调群 $\boldsymbol{HFK}^-_{p,\ q,\ k}(Y,\ K)$ 视为带扭曲系数的$2k/p$-修正纽结 Floer 同调的一种形式。

1.3. **组织结构**。为证明定理1.3，我们需要考察单值化可能涉及 U负次幂的局部系统上的 Heegaard Floer 同调，如 [Zem23、Nah25]中所述。第 2节回顾这一情形下的 Heegaard Floer 同调。特别是，在第 2.2小节中，我们回顾这些局部系统带来的额外细微之处；我们在附录 C中处理这些问题。

利用附录 B中回顾的标准论证，定理 1.1 和 1.3 可归结为涉及多边形计数映射的组合局部计算；第 3 节旨在精确陈述主要局部计算（定理3.4）。粗略地说，这表明我们可以找到某些圈，使得三角形计数映射（μ_2）为零，而四边形计数映射（μ_3）模 U 下等于单位元（回顾脚注 1）。在第 5.3小节中，我们找到了模 U 的圈，并证明四边形计数映射模U下等于单位元。要找到这些圈的提升，使得三角形计数映射为零，则更为复杂；我们将在第 6节证明这一点。

回顾第 1.1 小节，我们有三个主要思路，其中两个适用于 $k = 0$，另一个则适用于一般的 k：首先，我们定义标准基元素，并限制在由它们张成的子空间上。其次，对于 $k = 0$，我们考虑一个对合，以证明可以使三角形计数映射消失。第三，对于一般的 k，我们定义局部系统，使得三角形计数映射与情形 $k = 0$相同。

在第 4 节中，我们阐述第一个主要思路。我们定义标准基元素，并证明对于带有局部系统的附着曲线，其多边形计数映射可以解释为覆盖空间中的多边形计数映射，前提是我们将范围限制在由标准基元素张成的子空间上。

在第 5 节中，我们阐述局部系统定义的动机（从而解释第三个主要思想的若干部分），找出模 U 的循环，并证明四边形计数映射模 U 是单位元。为求完整，我们还证明三角形计数映射模 U 消失，从而证明帽版本的主要局部计算；负版本的主要局部计算的证明并不依赖于此。

在第 6 节中，我们完成主要局部计算的证明。我们分别在第 6.1 和 6.2 小节阐述第二和第三个主要思想，并分别说明对于 $k = 0$ 以及一般的k，存在一些循环，它们模 5 U 后化为第 5 节中的循环，且三角形计数映射消失。这些论证涉及一些技术引理，我们在附录 A 中证明这些引理。这些证明纯属代数推导；在第 6.3 小节中，我们给出第二个主要思想中对合的“图示解释”，以及第三个主要思想的“图示证明”，我们认为这样更有启发性。

在第7节中，我们描述了关于1.1和1.3的定理$(p,\ q) = (5,\ 3)$以及 $k = 0$、1、2的定理，其中讨论了平凡结 O 和带有塞弗特框架的右手三叶结 T，其塞弗特框架见于 S^3。

1.4. 约定。定义 a模 $n \in \{0, \cdots, n-1\}$对 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$和 $a \in \mathbb{Z}$或 $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$如下：如果 $a \in \mathbb{Z}$，则 a模 n表示 a 模 n的余数；如果 $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，则 a 模 n表示 a在 $\{0, \cdots, n-1\}$中的代表元。如果 a与 n互素，则 a^{-1}模 n是满足 $ra \equiv 1$模 n的整数 $r \in \{0, \cdots, n-1\}$。

对于绘制在平面上的海加德图，几乎复结构沿逆时针方向旋转。例如，图5.1和5.2中的三角形分别对红色、蓝色、绿色顺序具有全纯代表。

我们使用记号 $]x, y[$ 表示 x 与 y 之间的开区间，以避免将 $]x, y[$与点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$混淆。

1.5. **致谢**。 定理 1.1 源于这样一个问题：Heegaard Floer 同调中是否存在有理手术正合三角；定理1.3 则进一步受到 Bhat 的 2-手术正合三角（见瞬子 Floer 同调） [Bha23] 的启发，并由此引出了[Nah25，定理 1。3]。我们感谢 Peter Ozsváth 向作者提出这个问题，鼓励作者对此开展研究，解释了本文中的许多论证，并进行了有益的讨论。我们也感谢 Ian Zemke 一直以来的支持，向作者介绍了许多前人的工作，尤其是 [Zem23], ，并进行了有益的讨论。感谢 Deeparaj Bhat 于 2023 年 3 月分享他关于 2-手术正合三角的工作。感谢 Jae Hee Lee、Robert Lipshitz、Jacob Rasmussen 和 Fan Ye 参与有益的讨论。

2. 带局部系统的 Heegaard Floer 同调

本文考虑配备局部系统的附着曲线，这些局部系统原则上涉及 的负幂 U，Zemke 最近首次研究了这类系统 [Zem23] (比较 [Nah25])。本节回顾这一新背景下的 Heegaard Floer 同调。

定义 2.1（Heegaard 图 [OS08，定义 3.1]）。给定一个闭的、定向的、亏格为 g 的曲面 Σ，附着曲线 $\boldsymbol{\alpha} = \alpha^1 \cup \cdots \cup \alpha^g$ 是由 g 条两两不相交的简单闭曲线 $\alpha^1, \cdots, \alpha^g$ 在 Σ 上的并组成，其像张成 $H_1(\Sigma)$ 的一个 g 维子空间。Heegaard 图是由这样的曲面 Σ、附着曲线 $\boldsymbol{\alpha}_0, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$，以及曲线上一个远离附着曲线的点 z 组成的集合 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}_0, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, z)$，我们称该点为基点。我们假设附着曲线横截相交，且不存在三重交点。

定义 2.2（二维链）。给定一个 Heegaard 图 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, z)$，基本二链 是 $\Sigma \setminus (\boldsymbol{\alpha}_0 \cup \cdots \cup \boldsymbol{\alpha}_m)$ 的一个连通分支，而二维链 是基本二链的形式和。

将 $\boldsymbol{\alpha}_i$-边界记为 $\mathcal{D}$，即 $\partial_{\boldsymbol{\alpha}_i}\mathcal{D}$（这是一个一维链）。若二链 $\mathcal{D}$ 满足对所有 i，$\partial_{\boldsymbol{\alpha}_i}\mathcal{D}$ 都是一个圈，则称其为无角二链。

若 $\mathcal{D}$ 是一个二链，且 x 是一个远离附着曲线的点，则 $\mathcal{D}$ 在 x 处的局部重数 $n_x(\mathcal{D})$ 是包含 x 的基本二链在 $\mathcal{D}$ 中的系数。滥用记号，若 $x = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 是这类点的集合，则令 $n_x(\mathcal{D}) := n_{x_1}(\mathcal{D}) + \cdots + n_{x_n}(\mathcal{D})$。

若一个二链的所有局部重数均为非负数，则称该二链非负。

定义 2.3（顶点为 $\mathbf{x}1$、$\cdots$、$\mathbf{x}k{+}1$ 的二链集合 $D(\mathbf{x}1, \cdots, \mathbf{x}k{+}1)$）。设 $k \geq 1$ 为一个整数，且 $\mathbf{x}_j \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_{i_{j-1}}} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_{i_j}}$ 是 $j = 1$、$\cdots$、$k+1$ 的交点（将 i 和 $\mathbf{x}$ 的指标视为模 $k+1$）。定义顶点为 $\mathbf{x}1$、$\cdots$、$\mathbf{x}k{+}1$ 的二链集合 $D(\mathbf{x}1, \cdots, \mathbf{x}k{+}1)$ 为满足下列条件的二链 $\mathcal{D}$ 所构成的集合：

$$\partial(\partial_{\boldsymbol{\alpha}_{i_j}}\mathcal{D}) = \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j,\ \partial_{\boldsymbol{\alpha}_i}\mathcal{D} = 0$$

对于 $j = 1, \cdots, k+1$ 和 $i \neq i_1, \cdots, i_{k+1}$。

2.1. 局部系统。 我们为附着曲线赋予如下形式的局部系统。

定义 2.4（局部系统）。给定 Heegaard 图的一条附着曲线 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 上的局部系统是一个三元组 (E, ϕ, A)，其中 (1) E 是有限生成自由 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-模，(2) ϕ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E, E)$ 的一个元素，我们称之为单值化，(3) A 是 Heegaard 曲面上的一条定向弧，它与 $\boldsymbol{\alpha}$ 横截相交于一点。[3] 记作 $\boldsymbol{\alpha}^{(E,\phi,A)}$，或简记为 $\boldsymbol{\alpha}^{(E,\phi)}$或 $\boldsymbol{\alpha}^{E}$，表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 赋有局部系统 (E, ϕ, A)。

若 $E = \mathbb{F}[\![U]\!]$ and $\phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}$，则称 $(E,\ \phi,\ A)$ 为平凡局部系统。在这种情形下，我们可以不指定定向弧 A，并直接写作 $\boldsymbol{\alpha}$，而不写作 $\boldsymbol{\alpha}^{(E,\phi,A)}$。

粗略地说，每当一个二链 $\boldsymbol{\alpha}$的边界 $\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{D}$ 相交时 A，我们就会得到 ϕ 或 ϕ^{-1} 的贡献，具体取决于交点的符号。更精确地说，我们有定义2.5 和2.6。

细心的读者或许已经注意到，ϕ^{-1} 先验地并未定义；不过，正如我们将在小节 2.2 和附录 C中解释的那样，方程 (2.1) 和 (2.2) 对本文中的所有 Heegaard 图和局部系统都是良定义的（经细微修改后）。

定义 2.5（Heegaard Floer 链复形）。给定一个 Heegaard 图 $(\Sigma,\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ z)$ 和局部系统 $(E_{\boldsymbol{\alpha}},\ \phi_{\boldsymbol{\alpha}},\ A_{\boldsymbol{\alpha}})$，以及 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 上的 $(E_{\boldsymbol{\beta}},\ \phi_{\boldsymbol{\beta}},\ A_{\boldsymbol{\beta}})$，分别定义 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-模 $\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}},\ \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}})$ 为 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_{\boldsymbol{\alpha}},\ E_{\boldsymbol{\beta}})$ 的若干份拷贝的直和：

$$\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}}) := \bigoplus_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_{\boldsymbol{\alpha}}, E_{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{x},$$

并将微分 ∂ 定义为满足以下条件的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性映射：

$$\partial(e\mathbf{x}) = \sum_{\mathcal{D} \in D(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \mu(\mathcal{D})=1} \#\mathcal{M}(\mathcal{D}) U^{n_z(\mathcal{D})} \rho(\mathcal{D})(e)\mathbf{y}, \tag{2.1}$$

其中 $e \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_{\boldsymbol{\alpha}},\ E_{\boldsymbol{\beta}})$，而 $\rho(\mathcal{D}) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_{\boldsymbol{\alpha}},\ E_{\boldsymbol{\beta}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_{\boldsymbol{\alpha}},\ E_{\boldsymbol{\beta}})$ 是 $\mathcal{D}$ 的单值：

$$\rho(\mathcal{D}) = \phi_{\boldsymbol{\beta}}^{\#(A_{\boldsymbol{\beta}} \cap \partial_{\boldsymbol{\beta}}\mathcal{D})} \circ e \circ \phi_{\boldsymbol{\alpha}}^{\#(A_{\boldsymbol{\alpha}} \cap \partial_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{D})},$$

其中，交数 $\#(A_{\boldsymbol{\alpha}} \cap \partial_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{D})$ 和 $\#(A_{\boldsymbol{\beta}} \cap \partial_{\boldsymbol{\beta}}\mathcal{D})$ 按符号计数。

[3]当然，我们只需考虑 p 上的定向点 $\boldsymbol{\alpha}$，而不必考虑定向弧。我们选择这个定义，是为了简化标准平移（小节2.3）的论述。

定义 2.6（多边形计数映射 μ_n）。类似地定义（高阶）复合映射 μ_d：如果$\boldsymbol{\alpha}^{(E_0,\phi_0,A_0)\,0},\cdots,\boldsymbol{\alpha}^{(E_d,\phi_d,A_d)\,d}$是带有局部系统的附着曲线，则复合映射定义为

$$\begin{aligned}(2.2)\quad \mu_d : \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_0},\boldsymbol{\alpha}_1^{E_1})\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}_{d-1}^{E_{d-1}},\boldsymbol{\alpha}_d^{E_d})\to\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_0},\boldsymbol{\alpha}_d^{E_d}):\\ e_1\mathbf{x}_1\otimes\cdots\otimes e_d\mathbf{x}_d\mapsto \sum_{\mathcal{D}\in D(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_d,\mathbf{y}),\ \mu(\mathcal{D})=2-d} \#\mathcal{M}(\mathcal{D})U^{n_z(\mathcal{D})}\rho(\mathcal{D})(e_1\otimes\cdots\otimes e_d)\mathbf{y},\end{aligned}$$

其中 $\rho(\mathcal{D})$是的单值化，定义如下：

$$\rho(\mathcal{D}):\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0,E_1)\otimes\cdots\otimes\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_{d-1},E_d)\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0,E_d):$$

$$e_1\otimes\cdots\otimes e_d\mapsto \phi_d^{\#(A_d\cap\partial_{\boldsymbol{\alpha}_d}(\mathcal{D}))}\circ e_d\circ\phi_{d-1}^{\#(A_{d-1}\cap\partial_{\boldsymbol{\alpha}_{d-1}}(\mathcal{D}))}\circ e_{d-1}\circ\cdots\circ\phi_1^{\#(A_1\cap\partial_{\boldsymbol{\alpha}_1}(\mathcal{D}))}\circ e_1\circ\phi_0^{\#(A_0\cap\partial_{\boldsymbol{\alpha}_0}(\mathcal{D}))}.$$

2.2. **正性与弱容许性。给定一个海加德图**$(\Sigma,\boldsymbol{\alpha}_0,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,z)$ 以及其上的局部系统(E_i,ϕ_i,A_i)，在 $\boldsymbol{\alpha}_i$上，附着曲线 $\boldsymbol{\alpha}^{(E_i,\phi_i,A_i)\,i}$ 与局部系统一起构成一个 A_∞-范畴，并使几乎复结构的改变诱导一个 A_∞-函子，需要满足两个技术条件。本小节在引理2.8中讨论这一问题的一个简单情形；完整论述见附录C 。

首先注意，我们并未要求 $\phi_i\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_i,E_i)$可逆；事实上，对于本文所考察的某些 ϕ_i，其逆元先验上可能只是$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(U^{-1}E_i,U^{-1}E_i)$中的元素。因此，粗略地说，对于本文所考察的所有海加德图和局部系统，我们必须检查U 的负幂不会出现在 μ_d及由改变几乎复结构所诱导的映射中。我们称此性质为正性。

其次，求和（2.2）原则上可能是无穷的，因此我们需要检查它是否定义良好，同时也要检查由改变几乎复结构所诱导的映射是否定义良好。按照标准约定，我们称之为弱容许性。事实证明，对于本文所考虑的局部系统，通常的弱容许性定义（定义2.7）是适用的。

定义 2.7（弱容许性）。如果对于每个无角二链 $\mathcal{D}$，只要 $n_z(\mathcal{D})=0$ 具有正的和负的局部重数，则 Heegaard 图 $(\Sigma,\ \boldsymbol{\alpha}_0,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m,\ z)$ 是弱容许的。

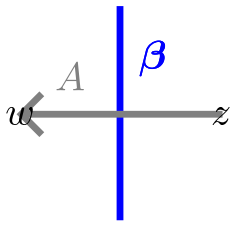


图 2.1。引理 A 2.8附近 Heegaard 图的局部图示。如果路径 γ 在 $\boldsymbol{\beta}$ 中沿该图从上到下经过，则$\#(A\cap\gamma)=1$。

如果只有两条附着曲线，且其中一条配备了平凡局部系统，那么引理2.8给出了一个保证正性和弱容许性的简单条件。

引理 *2.8*（链复形良定义，简单情形）。设 $(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},z)$ 是一个弱可容许的 *Heegaard* 图，且 (E,ϕ,A) 是 $\boldsymbol{\beta}$ 上的一个局部系统。若 *(1)* $U\phi^{-1}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E,E)$，*(2)* 定向弧 A 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 不相交，且 *(3)* A 的起点是 z（见图 *2.1*），则

$(\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^E)\ \partial)$ 是一个良定义的链复形。此外，若令 w 为 A 的终点，则

$$\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^E)\cong \mathcal{CFK}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\otimes_{\mathbb{F}[\![W,Z]\!]} E,$$

其中 $\mathcal{CFK}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是由双基点 *Heegaard* 图 1.8（定义 $(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},w,z)$）定义的纽结 *Floer* 链复形，并且 E 视为一个 $\mathbb{F}[\![W,Z]\!]$-模，其中 W 作用为 ϕ，而 Z 作用为 $U\phi^{-1}$。

证明。首先，弱容许性条件确保 $\mathcal{CFK}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 上的微分定义良好。$\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^E)$ 和 $\mathcal{CFK}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\otimes_{\mathbb{F}[\![W,Z]\!]} E$ 的底层模都是由交点 $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}}\cap\mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}}$ 在 E 上自由生成的；这给出了它们之间的一个模同构，记作 Ψ。因此，对于任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}}\cap\mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}}$ 以及二链 $\mathcal{D}\in D(\mathbf{x},\mathbf{y})$，通过考察 $A\cap\mathcal{D}$ 的端点，我们得到

$$\#(A\cap\partial_{\boldsymbol{\beta}}\mathcal{D})=n_w(\mathcal{D})-n_z(\mathcal{D}),$$

因此

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi^{\#(A\cap\partial_{\boldsymbol{\beta}}\mathcal{D})}=(U\phi^{-1})^{n_z(\mathcal{D})}\phi^{n_w(\mathcal{D})}.$$

这说明模同构 Ψ是一个链映射，特别地，∂ on$\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^E)$ 是一个定义良好的微分。□

2.3. **标准平移。** 在 Heegaard Floer 同调中，我们不定义 $\boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$ 和 $\boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$ 中的单位元，而是考虑 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一个标准平移 $\boldsymbol{\alpha}'$，并定义 $\Theta^+_{\boldsymbol{\alpha}}\in\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}')$ 作为单位元。在本小节中，我们回顾这一做法，并为配备局部系统的附着曲线建立记号。

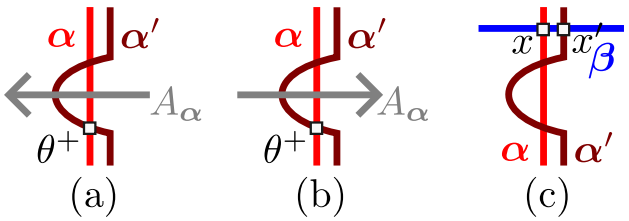


图 2.2。(a)、(b)：定向弧 $A_{\boldsymbol{\alpha}}$附近，$\boldsymbol{\alpha}$的标准平移 $\boldsymbol{\alpha}'$ 的两种情形。图中未画出基点。(c)：x' 是距离 x最近的点。

设 $\boldsymbol{\alpha}=\alpha^1\cup\cdots\cup\alpha^g$ 是某个 Heegaard 图中的一条附着曲线。另一条附着曲线 $\boldsymbol{\alpha}'=\alpha'^1\cup\cdots\cup\alpha'^g$是 $\boldsymbol{\alpha}$的一个标准平移，如果每个 α'^i都是通过将 α^i稍稍推离而得到，随后再在一个小区域内进行修改，使得 $|\alpha^i\cap\alpha'^j|=2\delta_{ij}$。假设这些小区域与所有并非 $\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{\alpha}$的标准平移的附着曲线均不相交。定义$\Theta^+_{\boldsymbol{\alpha}}\in\mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}}\cap\mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}'}$为 $\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}')$中最高同调分次上的交点，也就是说，它由图 θ^+ 中的交点给出，见 2.2 (a) 和 (b)。

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 配备了局部系统 $(E_{\boldsymbol{\alpha}},\ \phi_{\boldsymbol{\alpha}},\ A_{\boldsymbol{\alpha}})$，则进一步假设，在定向弧 $A_{\boldsymbol{\alpha}}$ 附近，Heegaard 图呈现为图 2.2 (a) 或 (b) 所示（事实上，本文只考虑图 2.2 (a) 的情形即可）。特别地，$A_{\boldsymbol{\alpha}}$ 与所有其他附着曲线 $\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\alpha}'$均不相交。

为 $\boldsymbol{\alpha}'$ 配备相同的局部系统（$E_{\boldsymbol{\alpha}}$，$\phi_{\boldsymbol{\alpha}}$，$A_{\boldsymbol{\alpha}}$）。那么，

$$\mathrm{Id}_{E_{\boldsymbol{\alpha}}}\Theta^+_{\boldsymbol{\alpha}}\in\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}},\boldsymbol{\alpha}'^{E_{\boldsymbol{\alpha}}})$$

是一个圈，并且对于任何其他配备局部系统（$E_{\boldsymbol{\beta}}$，$\phi_{\boldsymbol{\beta}}$，$A_{\boldsymbol{\beta}}$）的附着曲线 $\boldsymbol{\beta}$ ，

$$\mu_2(-\otimes\mathrm{Id}_{E_{\boldsymbol{\alpha}}}\Theta^+_{\boldsymbol{\alpha}}):\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}},\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}})\to\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}},\boldsymbol{\alpha}'^{E_{\boldsymbol{\alpha}}})$$

根据与 [OS04c，命题 9 相同的论证，它是一个拟同构。8]。

一个密切相关的模同构是最近点映射

$$\Phi : \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\beta}^{E_\beta}, \boldsymbol{\alpha}^{E_\alpha}) \to \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\beta}^{E_\beta}, \boldsymbol{\alpha}'^{E_\alpha}),$$

定义如下：对于每个 $\mathbf{x} = \{x^1, \cdots, x^g\} \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}}$，定义 它的最近点 $\mathbf{x}' = \{x^{1'}, \cdots, x^{g'}\} \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\beta}} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}'}$ 令每个 $x^{i'} \in \boldsymbol{\beta} \cap \boldsymbol{\alpha}'$ 为 $x^i \in \boldsymbol{\beta} \cap \boldsymbol{\alpha}$ 的最近点（见图 2.2 (c)）。类似地，如果 $\boldsymbol{\beta}'$ 是 $\boldsymbol{\beta}$的标准平移，则定义

$$\Phi : \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\beta}^{E_\beta}, \boldsymbol{\alpha}^{E_\alpha}) \to \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\beta}'^{E_\beta}, \boldsymbol{\alpha}^{E_\alpha}), \ \Phi : \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\beta}^{E_\beta}, \boldsymbol{\alpha}^{E_\alpha}) \to \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\beta}'^{E_\beta}, \boldsymbol{\alpha}'^{E_\alpha})$$

类似地。给定一个元素 $\psi \in \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\beta}^{E_\beta}, \boldsymbol{\alpha}^{E_\alpha})$，我们将 $\Phi(\psi)$ 记作 ψ'，也可滥用记号记作 ψ。注意， Φ 一般不是链映射。

3. 主要局部计算

通过运用三角形检测引理 [OS05，引理 4.2] ，以及颈拉伸论证这一标准方法，构造手术正合三角（定理 1.3）可归结为在亏格 1 Heegaard 图中的组合局部计算。本文的主定理就是这一组合局部计算，本节的目标是准确陈述这一结果（定理 3.4）。我们将在小节 3.4 和附录 B 中回顾定理 1.3 如何由定理 3.4 推出。

注意，变量的指标通常应按模 p 或 q 来理解，具体取决于上下文；有些变量的指标属于指标集 I (定义3.1)。粗略来说， $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 和 $j \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$。

定义 3. 1. 指标集 I 是由满足 $c_i \neq 0$的(i, ℓ)组成的集合，其中 $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ，并且 $\ell \in \mathbb{Z}/c_i\mathbb{Z}$.

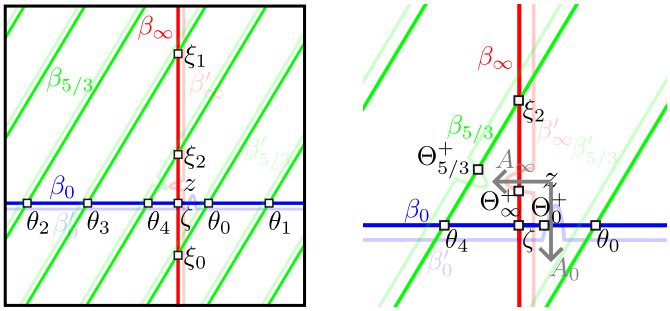


图 3.1. $\mathbb{T}^2$ 上(p, q)对应的曲线和交点 $=$ (5,3)。右图：放大后显示交点 $\Theta^+_0, \Theta^+_r, \Theta^+_\infty$ 以及定向弧A_∞, A_0。若路径 γ 在 β_∞ 中从上方向下方延伸，则 #$(A_\infty \cap \gamma)$ $= 1$；若路径 γ 在 β_0 中从左向右延伸，则 #$(A_0 \cap \gamma) = 1$。

3.1. **亏格 1 Heegaard 图。** 设 p， $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ 互素，并设 $r = p/q$。首先描述我们所使用的亏格 1 Heegaard 图（见图 3.1）；这里，Heegaard 曲面为 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$。注意，这个亏格 1 Heegaard 图是弱可容许的。

附着曲线 β_0、 β_r、 β_∞。圆 β_0 是 $\mathbb{R}^2$ 的 x轴在 $\mathbb{T}^2$上的投影，而 β_∞是 $\mathbb{R}^2$ 的 y轴在 $\mathbb{T}^2$上的投影。考虑 $\mathbb{R}^2$ 中斜率为 r 的一条直线，它与 x轴交于点 $(1/(2p), 0)$。圆 β_r 是这条直线在 $\mathbb{T}^2$上的投影。

标准平移。令 β_0'、β_r'、β_∞' 分别为 β_0、β_r、β_∞的标准平移，如图3.1所示，并令 Θ_0^+、Θ_r^+、Θ_∞^+ 分别为、$\beta_r\cap\beta_r'$、$\beta_\infty\cap\beta_\infty'$中最高同调分次上的交点。

注意，我们可以自由交换 β_0 和 β_0'、β_r 和 β_r'，以及 β_∞ 和 β_∞'：Heegaard 图中Θ_0^+、Θ_r^+、Θ_∞^+ 的位置会发生变化，但主要局部计算定理3.4的陈述和证明不受影响。

其中 交点 θ_i、ξ_j、ζ。令 $\pi\colon\ \mathbb{R}^2\twoheadrightarrow\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 为商映射。在 $\mathbb{R}^2$ ，

$$\overline{\pi}^{-1}(\beta_r)\cap([0,1]\times\{0\})$$

由 p 个点组成。将它们在 $\mathbb{T}^2$ 中的像从左到右记为 θ_0、$\cdots$、θ_{p-1}。类似地，

$$\overline{\pi}^{-1}(\beta_r)\cap(\{0\}\times[-1,0])$$

由 q 个点组成。将它们在 $\mathbb{T}^2$ 中的像从上到下记为 ξ_0、$\cdots$、ξ_{q-1}。最后，将唯一的交点 $\beta_\infty\cap\beta_0$ 记为 ζ。

The indices 的指标按模 p 解释，而 ξ 的指标按模 q 解释 .

基点 z。基点 z 位于（ε，ε）处，其中 $\varepsilon>0$ 足够小，使得除 β_∞ 和 β_∞' 外，没有附着曲线与 $[-\varepsilon,\varepsilon]\times\{\varepsilon\}$ 相交。

定向弧 A_∞ 和 A_0。定向弧 A_∞ 为 $[-\varepsilon,\varepsilon]\times\{\varepsilon\}$，方向从右向左。定向弧 A_0 为 $\{\varepsilon\}\times[-\varepsilon,\varepsilon]$，方向从上向下。

3.2. 局部系统。固定互素正整数 p，q。本文将考虑附着曲线上的特定类型的局部系统。它们由两个序列确定：$u=(u_0,\ \cdots,\ u_{p-1})$，其中 $u_i\in\{1,U\}$；以及 $c=(c_0,\ \cdots,\ c_{p-1})$，其中 $c_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。$u$ 和 c 的指标按模 p 解释。

给定这样的 u 和 c，我们考虑以下局部系统。

(1) 在 β_0 上赋予 $(E_0,\ \phi_0,\ A_0)$，其中

$$E_0:=\bigoplus_{i=0}^{p-1}\bigoplus_{\ell=0}^{c_i-1}x_{i,\ell}\mathbb{F}[\![U]\!],\ \phi_0=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{\ell=0}^{c_i-1}x_{i,\ell+1}x_{i,\ell}^*:E_0\to E_0,$$

即 E_0 是一个自由的秩为 $\sum_{i=0}^{p-1}c_i$ $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 的模，并且 $\phi_0\colon\ x_{i,\ \ell}\mapsto x_{i,\ \ell+1}$。这里，$x$的指标属于定义 3.1 中的指标集。

(2) 在 β_r 上赋予平凡局部系统。**(3)** 在 β_∞ 上赋予 $(E_\infty^u,\ \phi_\infty^u,\ A_\infty)$，其中 E_∞^u 是一个自由的秩为 p $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 的模，$E_\infty^u:=\bigoplus_{i=0}^{p-1}y_i\mathbb{F}[\![U]\!]$，且单值化为

$$\phi_\infty^u=\sum_{i=0}^{p-1}u_iy_{i+1}y_i^*:E_\infty^u\to E_\infty^u.$$

这里，y 的指标按模 p 解释。

3.3. 定理陈述。设 p，$q\in\mathbb{Z}_{>0}$ 互素，$r=p/q$，并设 $k=0,\ \cdots,\ p-1$。

定义 3.2. 设 $s_0,\ \cdots,\ s_{p-1}$ 是取值为 $\lceil q/p\rceil$，$\lfloor q/p\rfloor$ 的唯一弱递减序列，使得 $\sum_{i=0}^{p-1}s_i=q$；也就是说，若对 $u,\ v\in\mathbb{Z},\ v\in\{0,\cdots,p-1\}$，令 $q=up+v$，则

$$s_0=\cdots=s_{v-1}=u+1,\ s_v=\cdots=s_{p-1}=u.$$

我们考虑第 3.2 小节中附着曲线上的局部系统，其中 u 和 c如下。关于此定义的动机，请参见第 5 节。回顾第 a 模 n、a^{-1} 模 $n\in\{0,\cdots,n-1\}$ 的定义，它们来自第 1.4 小节。

定义 3.3（定理 3.4 的局部系统）。定义序列 $u = (u_0, \cdots, u_{p-1})$ 和$c = (c_0, \cdots, c_{p-1})$ 如下:

$$u_{(-iq^{-1}-1) \bmod p} = \begin{cases} U & \text{if } i = 0, \cdots, k-1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}, \ c_i = s_{(i-k) \bmod p}. \tag{3.1}$$

令 $(E_0^k, \ \phi_0^k, \ A_0)$ 和 $(E_\infty^k, \ \phi_\infty^k, \ A_\infty)$ 分别是定义在 β_0 和 β_∞上的相应局部系统，其定义见第 3.2 小节。为简便起见，记号中省略 p 和 q。

以下是我们的主定理，我们将在第 4、5 和 6 节中证明该定理。关于循环 ψ_{0r}^k、$\psi_{r\infty}^k$、$\psi_{\infty 0}^k$ 以及方程 (3.2) 定义背后的动机，分别参见第 4 节和第 5 节。注意，s、y和 θ 的指标按模 p理解，v 和 ξ 的指标按模 q理解，而 u、w和 x 的指标属于指标集 I（定义 3.1）。

定理 3.4（主要局部计算）。设 p 和 q 为互素正整数。存在元素 $u_{i,\ell}$、v_j、$w_{i,\ell}$，属于 $\mathbb{F}[\![U]\!]$，其中 $i = 0$、$\cdots$、$p-1$、$\ell = 0$、$\cdots$、$s_i - 1$、$j = 0$、$\cdots$、$q-1$，使得

$$u_{i,\ell}, w_{i,\ell} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } \ell = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \mod U, \ v_j \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } j \equiv -1, -2, \cdots, -\min(p,q) \mod q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \mod U, \tag{3.2}$$

并且如果我们定义

$$\psi_{0r}^k = \sum_{i=0}^{p-k-1} \sum_{\ell=0}^{s_i-1} u_{i,\ell} x_{i+k,\ell}^* \theta_{i+k} + \sum_{p-k}^{p-1} \sum_{\ell=0}^{s_i-1} u_{i,\ell} x_{i+k,\ell+1}^* \theta_{i+k} \in \boldsymbol{CF}^-(\beta_0^{E_0^k}, \beta_r),$$

$$\psi_{r\infty}^k = \sum_{j=0}^{q-1} v_j y_{-((j+k) \bmod q) q^{-1} \bmod p} \xi_{(j+k) \bmod q} \in \boldsymbol{CF}^-(\beta_r, \beta_\infty^{E_\infty^k}),$$

$$\psi_{\infty 0}^k = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{\ell=0}^{s_i-1} w_{i,\ell} x_{i+k,\ell} y_{-(i+k)q^{-1} \bmod p}^* \zeta \in \boldsymbol{CF}^-(\beta_\infty^{E_\infty^k}, \beta_0^{E_0^k}),$$

那么以下结论成立:

(1) 元素 ψ_{0r}^k、$\psi_{r\infty}^k$ 和 $\psi_{\infty 0}^k$ 都是圈。(2) 三角形计数映射为零:

$$\mu_2(\psi_{\infty 0}^k \otimes \psi_{0r}^k) = 0, \ \mu_2(\psi_{0r}^k \otimes \psi_{r\infty}^k) = 0, \ \mu_2(\psi_{r\infty}^k \otimes \psi_{\infty 0}^k) = 0.$$

(3) 四边形计数映射模 U 等于“单位元”:

$$\mu_3(\psi_{0r}^k \otimes \psi_{r\infty}^k \otimes {\psi_{\infty 0}^k}') \equiv \mathrm{Id}_{E_0^k} \Theta_0^+ \mod U,$$
$$\mu_3(\psi_{r\infty}^k \otimes \psi_{\infty 0}^k \otimes {\psi_{0r}^k}') \equiv \Theta_r^+ \mod U,$$
$$\mu_3(\psi_{\infty 0}^k \otimes \psi_{0r}^k \otimes {\psi_{r\infty}^k}') \equiv \mathrm{Id}_{E_\infty^k} \Theta_\infty^+ \mod U.$$

这里，${\psi_{\infty 0}^k}' \in \boldsymbol{CF}^-(\beta_\infty^{E_\infty^k}, \ {\beta'_0}^{E_0^k})$、${\psi_{0r}^k}' \in \boldsymbol{CF}^-(\beta_0^{E_0^k}, \ \beta'_r)$分别为 ${\psi_{r\infty}^k}' \in \boldsymbol{CF}^-(\beta_r, {\beta'_\infty}^{E_\infty^k})$在最近点映射下的像（第2.3小节）。

此外，我们可以令任意一个

$$u_{i,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{if } \ell = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \ \forall i, \ell, \ \text{or} \ w_{i,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{if } \ell = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \ \forall i, \ell. \tag{3.3}$$

证明。(1) 对所有 u_i、ℓ、v_j、w_i、ℓ 均成立：事实上，$\mu_1 \equiv 0$，因为不存在能够对 μ_1 产生贡献的二维链。此外，我们可以直接验证，只要满足方程 (3.2)，(3) 就成立；我们将在小节 5.3 中证明这一点。最困难的部分是证明存在 u_i、ℓ、v_j、w_i、ℓ，使得 (2) 和方程 (3.2) 得以满足；我们将在第 6 节中证明这一点。我们还将在第 5 节中为帽版本给出一个较少依赖代数运算的证明。□

注记 3.5（情形 $p = 1$ 或 $q = 1$）。当然，对于任意满足 $u, v, w \equiv 1$ 模 U 的 $u, v, w \in \mathbb{F}[\![U]\!]$，如果定理 3.4 (1)、(2)、(3) 以及方程 (3.2) 对 $u_{i,\ell}$, v_j, $w_{i,\ell}$ 成立，那么它们对$uu_{i,\ell}$,vv_j, $ww_{i,\ell}$ 也成立。

对于特殊情形 $(p, q, k) = (p, 1, k)$，只有三个变量 $u_{0,0}, v_0$，以及 $w_{0,0}$，方程 (3.2) 表明它们全都同余于 1 模 U。因此，根据上述观察，我们可以令

$$u_{0,0} = v_0 = w_{0,0} = 1.$$

Also，[OS04b，第 9] 节说明，对于特殊情形 $(p, q, k) = (1, q, 0)$，我们可以 let

$$u_{0,\ell} = w_{0,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{if } \ell = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad v_j = \begin{cases} 1 & \text{if } j = q-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

注 3.6（情形 $(p, q) = (5, 3)$ 并不简单）。与情形 $p = 1$ 或 $q = 1$不同，元素$u_{i,\ell}, v_j, w_{i,\ell}$通常都必须较为复杂。例如，对于 $(p, q) = (5, 3)$，其中一些元素不能是 0 或 1（参见注 5.10）：我们在例 6.2 和 6.3 中证明，必须满足

$$u_{0,0}w_{0,0} = tc, \ u_{1,0}w_{1,0} = tb, \ u_{2,0}w_{2,0} = tc \tag{3.4}$$

对于某个单位 $t \in \mathbb{F}[\![U]\!]$，并且 $(u_0,0, u_1,0, u_2,0) = (1, 1, 1)$、$(v_0, v_1, v_2) = (b, a, a)$、$(w_0,0, w_1,0, w_2,0) = (c, b, c)$ 都成立，其中

$$a := \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{\frac{15m^2+27m+12}{2}}, \ b := \sum_{m\in\mathbb{Z}} (U^{\frac{15m^2+7m}{2}} + U^{\frac{15m^2+13m+2}{2}}), \ c := \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{\frac{15m^2+25m+10}{2}}. \tag{3.5}$$

更具体地说，例如对于 $k = 0$，以下情形成立：

$$\psi^0_{0r} = x^*_{0,0}\theta_0 + x^*_{1,0}\theta_1 + x^*_{2,0}\theta_2, \ \psi^0_{r\infty} = by_0\xi_0 + ay_3\xi_1 + ay_1\xi_2, \ \psi^0_{\infty 0} = cx_{0,0}y^*_0\zeta_0 + bx_{1,0}y^*_3\zeta_1 + cx_{2,0}y^*_1\zeta_2.$$

备注3.7（利用中山引理进行简化）。如果我们不关心识别正合三角（定理 1.1 和 1.3）中的三个映射，那么根据推论B.4，定理 3.4 的以下较弱版本就足够了：我们只需将定理3.4(2)中的三个 μ_2之一为零，另外两个模 U均为零。有趣的是，这并未显著简化我们对组合问题的解法：例如对于 $k = 0$，它将第 6.1.1和 6.1.2小节压缩为其中一个，但这两节本质上是相同的。

3.4. **推导定理 1.1 和 1.3**。如前所述，定理 1.1和 1.3可由定理 3.4 通过标准论证得出。在本小节中，我们解释其中一部分，重点说明 β_0、β_r、β_∞ 上的局部系统如何对应于手术正合三角的三个同调群。其余标准论证的回顾留待附录B。参见 [OS04b，第 9], [HHSZ20，第 12]。

为此，我们引入以下定义。

定义 3.8（亏格稳定化）。若存在一个亏格 $(g-1)$ Heegaard 图 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}_0, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, z)$，使得 (A) $\boldsymbol{\alpha}_0$、$\cdots$、$\boldsymbol{\alpha}_m$ 是两两标准平移，(B) $\underline{\Sigma} = \underline{\mathbb{T}^2 \# \Sigma}$ 是沿着分别靠近 z 和 z 的点对 $\mathbb{T}^2$ 和 Σ 作连通和得到的，并且 (C)对所有 i，$\boldsymbol{\alpha}_i = \alpha_i \cup \boldsymbol{\alpha}_i$，则亏格 g Heegaard 图 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}_0, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, z)$ 称为亏格 1 Heegaard 图 $(\mathbb{T}^2, \alpha_0, \cdots, \alpha_m, z)$ 的亏格稳定化。

将 $\mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_i} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_j}$ 在最高同调分次中的交点记为 Θ^+_{ij}。若 $x \in \alpha_i \cap \alpha_j$，则将其稳定化 $S(x) \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_i} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_j}$ 定义为由 x 和 Θ^+_{ij}给出的交点。

若附着曲线 α_i 配备了局部系统（E_i, ϕ_i, A_i），则为 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 配备相同的局部系统（E_i, ϕ_i, A_i）。令

$$S : \boldsymbol{CF}^-(\alpha_i^{E_i}, \alpha_j^{E_j}) \to \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}_i^{E_i}, \boldsymbol{\alpha}_j^{E_j})$$

是由上述稳定化映射诱导的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性映射。注意， S 通常不是链映射。

设 K 是闭合、定向 3-流形 Y 中的一个纽结，框架为 λ，并设 μ 为子午线。于是，如 [OS04b 的引理 92], 所示，我们可以找到一个弱可容许的、亏格为 g 的 Heegaard 图$(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_r, \boldsymbol{\beta}_\infty, z)$，使其满足以下条件：

(1) $(\Sigma, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_r, \boldsymbol{\beta}_\infty, z)$ 是 Heegaard 图 $(\mathbb{T}^2, \beta_0, \beta_r, \beta_\infty, z)$ 的亏格稳定化。(2) 考虑定向弧 $A_0 \subset \Sigma$。回忆一下， A_0 的起点是 z；令 $w_0 \in \Sigma$ 为 A_0的终点。于是， $\boldsymbol{\alpha}$ 与 A_0不相交，且双基点 Heegaard 图 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_0, w_0, z)$ 表示 (Y_λ, K_λ)，其中 $K_\lambda \subset Y_\lambda$ 是 K的对偶结。(3) Heegaard 图 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_r, z)$ 表示 $Y_{p\mu+q\lambda}(K)$。(4) 考虑定向弧 $A_\infty \subset \Sigma$。回忆一下， A_∞ 的起点是 z；令 $w \in \Sigma$为 A_∞的终点。于是， $\boldsymbol{\alpha}$与 A_∞不相交，且双基点 Heegaard 图 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_\infty, w, z)$ 表示 (Y, K)。

令 p和 q为互素正整数，并令 $k = 0, \cdots, p-1$. 如定义 3.8中所述，为 $\boldsymbol{\beta}_0$赋予局部系统 (E_0^k, ϕ_0^k, A_0)，并为 $\boldsymbol{\beta}_\infty$ 赋予局部系统 $(E_\infty^k, \phi_\infty^k, A_\infty)$。那么，由引理2.8，上述条件推出

$$\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_0^{E_0^k}) \simeq \bigoplus_{i=0}^{\min(p,q)-1} \underline{\boldsymbol{CF}^-}(Y_\lambda(K); \mathbb{F}[\mathbb{Z}/s_i\mathbb{Z}]),$$

$$\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_r) \simeq \boldsymbol{CF}^-(Y_{p\mu+q\lambda}(K)),$$

$$\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_\infty^{E_\infty^k}) \simeq \mathcal{CFK}^-(Y, K) \otimes_{\mathbb{F}[\![W,Z]\!]} E_\infty^k,$$

其中， $\boldsymbol{CF}^-(Y_\lambda(K); \mathbb{F}[\mathbb{Z}/s_i\mathbb{Z}])$ 的扭转由 K 的对偶结的同调类给出，并且我们将 E_∞^k 视为一个 $\mathbb{F}[\![W, Z]\!]$-模，其中 W作用为 ϕ_∞^k，而 Z作用为 $U(\phi_\infty^k)^{-1}$。

注 3.9（恢复 $\boldsymbol{HFK}_{p\ ,q,k}^-(Y, K)$）。事实上， $\mathcal{CFK}^-(Y, K) \otimes_{\mathbb{F}[\![W,Z]\!]} E_\infty^k \simeq \boldsymbol{CFK}_{p\ ,q,k}^-(Y, K)$, 因为 E_∞^k 作为 $\mathbb{F}[\![W, Z]\!]$-模同构于定义 1.12 中的 $E_{p,q,k}$： 令 $\Phi : E_\infty^k \to E_{p,q,k}$为由 $\Phi(y_i) = e_{qi+k-1}$给出的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-模同构。那么，我们可以验证

$$\Phi\phi_\infty^k\Phi^{-1} = \sum_{i=0}^{p-1} u_{q^{-1}(i-k+1)} e_{i+q} e_i^*, \text{ and } u_{q^{-1}(i-k+1)} = \begin{cases} U & \text{if } i+q \in \{0, \cdots, k-1\} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

我们将证明一个比定理1.1 和1.3更强一点的结论：此外，我们还将确定正合三角形中的映射。事实上，我们在附录B 中证明，ψ_{0r}^k、 $\psi_{r\infty}^k$、 $\psi_{\infty 0}^k$ 都是圈，且下述三角形是正合的：

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_0^{E_0^k}) & \xrightarrow{\mu_2(-\otimes S(\psi_{0r}^k))} & \boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_r) \\ \nwarrow^{\mu_2(-\otimes S(\psi_{\infty 0}^k))} & & \nearrow_{\mu_2(-\otimes S(\psi_{r\infty}^k))} \\ & \boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_\infty^{E_\infty^k}) & \end{array} \tag{3.6}$$

最后，我们记录以下引理，它在注1.15中用到。

引理 3.10 ($\boldsymbol{HFK}_{p\ ,q,k}^-$作为子模 $R \subset \mathbb{F}[\![U^{1/p}]\!]$ 上的 $2k/p$-修正纽结 Floer 同调，当 $(p, k) = 1$)。 设 p 和 q 为互素正整数，并设 $k = 0, \cdots, p-1$ 满足

p和 k互素。将 $\mathbb{F}[\![U^{1/p}]\!]$视为一个 $\mathbb{F}[\![W,Z]\!]$-模，其中 W的作用为 $U^{k/p}$， Z的作用为 $U^{1-(k/p)}$。那么，存在一个 $\mathbb{F}[\![W,Z]\!]$-子模 $R\subset\mathbb{F}[\![U^{1/p}]\!]$，它作为 $\mathbb{F}[\![W,Z]\!]$-模同构于 E_∞^k。

证明。定义一个序列 $\{m_i\}_{i\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$。首先，递归地定义 $\{m_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$，并证明 $m_{p+i}=m_i$。令 $m_0=0$，并令

$$m_{i+1}:=\begin{cases} m_i+\frac{k}{p} & \text{if } u_i=1\\ m_i+\frac{k}{p}-1 & \text{if } u_i=U\end{cases}.$$

那么，由于 u_0中恰有 k 个，$\cdots$，u_{p-1} 是 U，对所有 i都有 $m_{p+i}=m_i$。另请注意，由于 p和 k 互素， m_0，$\cdots$，m_{p-1} 模 1 两两不同。

令 m_n 为 m_0，$\cdots$，m_{p-1}中的最小值，并定义 $m_i'=m_i-m_n$。令 $R\subset\mathbb{F}[\![U^{1/p}]\!]$ 为以$U^{m_0'}$，$\cdots$，$U^{m_{p-1}'}$为基的自由秩 p $\mathbb{F}[\![U]\!]$子模：事实上，它们线性无关，因为各个 m_i'模 1 两两不同。令 f：$E_\infty^k\to R$ 是由 $y_i\mapsto U^{m_i'}$给出的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性同构。那么，容易验证 f 是 $\mathbb{F}[\![W,Z]\!]$-线性的。□

4. 局部系统与覆盖空间

我们的主定理，即定理 3.4，讨论的是多边形计数映射 μ_1， μ_2，以及μ_3 附着曲线 $\beta_0^{E_0}$、β_r、$\beta_\infty^{E_u}$及其配备了局部系统的标准平移$\mathbb{T}^2$。注意，圈 ψ_{0r}^k、$\psi_{r\infty}^k$、$\psi_{\infty 0}^k$只涉及链复形中的部分基元素 x_a^*、${}_b\theta_i$、 $y_c\xi_j$、 x_a、${}_by_c^*\zeta$；我们称这些特定的基元素为标准 （一般定义见定义 4.5 ）。

本节的主要目标是阐释标准基元素的定义，从而说明我们选择圈 ψ_{0r}^k、$\psi_{r\infty}^k$、$\psi_{\infty 0}^k$的原因。关键在于，如果我们只考虑标准基元素，那么多边形计数映射 μ_2 和 μ_3 就可以用覆盖空间上不带局部系统的附着曲线所对应的多边形计数映射来简洁地描述$\sim\mathbb{T}^2:=\mathbb{R}^2/(0,\ p)\mathbb{Z}$ 的 $\mathbb{T}^2$（命题 4.10 和 4.20）；比较 [OS03，第 3]节。

在本节中，我们固定序列 $u=(u_0,\ \cdots,\ u_{p-1})$ 以及 $c=(c_0,\ \cdots,\ c_{p-1})$，并在小节 3.2 的设定下进行讨论。

$\sim$4.1. **亏格为 1 的 Heegaard 图的覆盖空间**。我们考虑覆盖空间 $\pi:\ \mathbb{T}^2:=\sim\mathbb{R}^2/(0,\ p)\mathbb{Z}\to\mathbb{T}^2$。我们引入一些概念来描述 $\mathbb{T}^2$ 中的对象：一些示例见图 4.1 。

Rec所有这些都表明，当 $\varepsilon>0$ 足够小时，基点 $z\in\mathbb{T}^2$ 位于 $(\varepsilon,\ \varepsilon)$ 处。令第 a 列 为

$$]0,1[\times\mathbb{R}+(a+\varepsilon-1,0),$$

令第 b 行 $(b\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 为

$$\mathbb{R}\times]0,1[+(0,-b+\varepsilon-1),$$

并令 $(a,\ b)$ 正方形 为第 a 列与第 b 行的交集，即

$$]0,1[^2+(a+\varepsilon-1,-b+\varepsilon-1).$$

令 $\widetilde{\beta}_0^b$ 为 $\pi^{-1}(\beta_0)$ 中位于第 b 行的连通分支，令 $\widetilde{\beta}_r^i(i=0,\ \cdots,\ p-1)$ 为 $\pi^{-1}(\beta_r)$ 中与第 0 行的 $\pi^{-1}(\theta_i)$ 相交的连通分支之并，并令 $\widetilde{\beta}_\infty^a$ 为 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$ 中位于第 a 列的连通分支。

定义 $\widetilde{z(u)}\subset^{\widetilde{\mathbb{T}^2}\text{作为}}$

$$\begin{aligned}\widetilde{z(u)}:=&\{(a+\varepsilon,-b+\varepsilon-1):a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ u_b=1\}\\&\cup\{(a-\varepsilon,-b+\varepsilon-1):a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ u_b=U\}.\end{aligned}$$

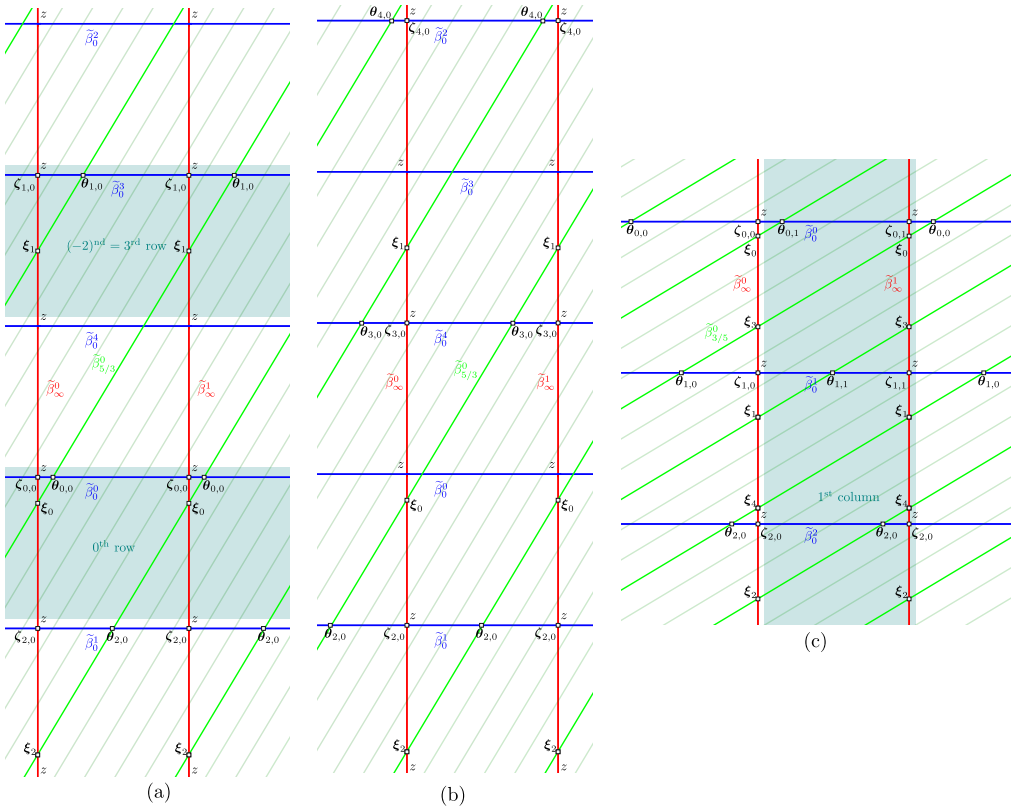


图 4.1. 亏格 1 Heegaard 图的覆盖空间 $\mathbb{T}^2$ 的一些例子。$\boldsymbol{\theta}_i$、ℓ、 $\boldsymbol{\xi}_j$ 和 $\boldsymbol{\zeta}_i$、ℓ 的含义见第 4.3 小节。标记为 $\boldsymbol{\zeta}_{0,0}$ 的交点是原点。在这三种情形中，标准基元的提升-均有标记，而集合 $z(u)$由图中的点 z 组成。(a)：$(p,q,k)=(5,3,0)$，$u=(1,1,1,1,1)$，$c=(1,1,1,0,0)$。(b)：$(p,q,k)=(5,3,2)$,$u=(1,1,U,1,U)$，$c=(0,0,1,1,1)$。(c)：$(p,q,k)=(3,5,0)$，$u=(1,1,1)$，$c=(2,2,1)$。

注意，若对所有 i 都有 $u_i=1$，则 $z(u)=\pi^{-1}(z)$。

4.2. **标准基元素的提升与三角形计数映射。** 我们希望陈述本小节的主要结果，即命题 4.10，它适用于 $\beta_0^{E_0}$、$\beta_r^{\mathbb{F}[\![U]\!]}$、$\beta_\infty^{E_\infty^u}$的每个循环置换。因此，为简化记号，令 $\gamma_0^{F_0}$、$\gamma_1^{F_1}$、$\gamma_2^{F_2}$为 $\beta_0^{E_0}$、$\beta_r^{\mathbb{F}[\![U]\!]}$、$\beta_\infty^{E_\infty^u}$的一个循环置换。本小节中，$\gamma$ 和 F 的指标均按模 3解释。

回忆一下，我们曾考虑过 E_0 的基 $\{x_{i,\ell}\}$，以及 E_∞^u 的基 $\{y_j\}$。这些基为 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(F_i,F_j)$ 诱导出一个基，进而为 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_i^{F_i},\gamma_j^{F_j})$ 诱导出一个基：更具体地说，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}=ea$，其中 e 是 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(F_i,F_j)$ 的某个基元素，且 $a\in\gamma_i\cap\gamma_j$，则称 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_i^{F_i},\gamma_j^{F_j})$ 的一个基元素。

我们定义基元素的提升，使得命题 4.4 成立。

定义 4.1（基元素的提升）。设 ea 是 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_i^{F_i},\gamma_j^{F_j})$ $(i\neq j)$ 的一个基元素，即 e 是 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(F_i,F_j)$ 的一个基元素，且 $a\in\gamma_i\cap\gamma_j$。下面定义点 $\tilde{a}\in\pi^{-1}(a)$ 是 ea 的一个提升 的含义。

(1) 设 $\theta \in \beta_0 \cap \beta_r$。若点 $\widetilde{\theta} \in \pi^{-1}(\theta)$ 位于第 (a,b) 个正方形中，则称其为 $x_{i,\ell}^*\theta$ 或 $x_{i,\ell}\theta$ 的提升。

$$a \equiv \ell \mod c_i,\ b \equiv -iq^{-1} \mod p.$$

(2) 设 $\xi \in \beta_r \cap \beta_\infty$。点 $\xi \in \widetilde{\pi^{-1}(\xi)}$ 是 $y_{i'}\xi$ 或 $y_{i'}^*\xi$ 的提升，若它位于第 b 行

$$b \equiv i' \mod p.$$

(3) 若点 $\widetilde{\zeta} \in \pi^{-1}(\zeta)$ 位于第 (a,b) 个正方形，则它是 $x_{i,\ell}y_{i'}^*\zeta$ 或 $y_{i'}x_{i,\ell}^*\zeta$ 的提升

$$a \equiv \ell \mod c_i,\ b \equiv i' \equiv -iq^{-1} \mod p.$$

特别地，若 $i' \not\equiv -iq^{-1}$ 模 p，则不存在 $x_{i,\ell}y_{i'}^*\zeta$ 或 $y_{i'}x_{i,\ell}^*\zeta$ 的提升。

回顾一下，μ_2 计数 Maslov 指数为 0 的全纯三角形。我们通过分别研究每个三角形 T（定义 4.2）的 μ_2 来研究贡献$\mathrm{Cont}(T)$。事实上，μ_2 是所有 Maslov 指数为 0 的三角形 T的 Cont(T) 之和。从现在起，三角形均指 Maslov 指数为 0 的三角形。

定义 4.2。若 T是一个顶点为 $c_t \in \gamma_t \cap \gamma_{t+1}\,(t=0,\ 1,\ 2)$ 的三角形，则定义 T 对 μ_2 的贡献为

$$\mathrm{Cont}(T) : \boldsymbol{CF}^-(\gamma_0^{F_0},\gamma_1^{F_1}) \otimes \boldsymbol{CF}^-(\gamma_1^{F_1},\gamma_2^{F_2}) \to \boldsymbol{CF}^-(\gamma_0^{F_0},\gamma_2^{F_2}) :$$
$$e_1a_1 \otimes e_2a_2 \mapsto \begin{cases} U^{n_z(T)}\rho(T)(e_1 \otimes e_2)c_3 & \text{if } (a_1,a_2) = (c_1,c_2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $e_1 \in \mathrm{Hom}(F_0,\ F_1)$、$e_2 \in \mathrm{Hom}(F_1,\ F_2)$、$a_1 \in \gamma_0 \cap \gamma_1$ 和 $a_2 \in \gamma_1 \cap \gamma_2$。

定义 4.3。设 T 是 $\mathbb{T}^2$ 中的一个三角形。$\widetilde{\mathbb{T}^2}$ 中的三角形 $\widetilde{T}$ 是 T 的提升，如果从拓扑上看，$\widetilde{\ }$它是三角形 T 在覆盖空间 π 中的提升：$\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$。设 $\boldsymbol{b}_t$ 是 $t=0,\ 1$ 时 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_t^{F_t},\ \gamma_{t+1}^{F_{t+1}})$ 的一个基元素，并设 $\boldsymbol{b}_2$ 是 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_0^{F_0},\ \gamma_2^{F_2})$ 的一个基元素。若提升 $\widetilde{T}$ 的三个顶点分别是 $\boldsymbol{b}_0$、$\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{b}_2$ 的提升，则称它是 T 的一个 $\{\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}$-提升。

命题 4.4。设 T 是 $\mathbb{T}^2$ 中的一个三角形，设 $\boldsymbol{b}_t$ 是 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_t^{F_t},\gamma_{t+1}^{F_{t+1}})$ 中$t=0$的一个基元素，1，并设 $\boldsymbol{b}_2$ 是 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_0^{F_0},\gamma_2^{F_2})$的一个基元素。若 T 有一个 $\{\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}$-提升，则

$$\mathrm{Cont}(T)(\boldsymbol{b}_0 \otimes \boldsymbol{b}_1) = U^{n_{\widetilde{z(u)}}(\widetilde{T})}\boldsymbol{b}_2.$$

证明。由定义直接得出。注意，在我们的 Heegaard 图中，每个 Maslov 指数为 0 的三角形都有唯一的全纯表示。□

现在，关键的观察是，如果我们只考虑 $\boldsymbol{b}_0$ 和 $\boldsymbol{b}_1$ 为标准（定义 4.5）的情形，那么我们可以将命题 4.4 提升为命题 4.10。

定义 4.5（标准基元素）。如下定义 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_i^{F_i},\gamma_j^{F_j})\ (i \neq j)$ 的标准基元素。

(1) 对于 $\theta \in \beta_0 \cap \beta_r$，若基元素 $x_{i,\ell}^*\theta$ 或 $x_{i,\ell}\theta$ 的所有提升都在 $\widetilde{\beta}_r^0$ 中，则该基元素为标准。(2) 对于 $\xi \in \beta_r \cap \beta_\infty$，若基元素 $y_{i'}\xi_j$ 或 $y_{i'}^*\xi_j$ 的所有提升都在 $\widetilde{\beta}_r^0$ 中，则该基元素为标准。(3) 若基元素 $x_{i,\ell}y_{i'}^*\zeta$ 或 $y_{i'}x_{i,\ell}^*\zeta$ 存在一个提升，则该基元素为标准。

注意，如果 $\boldsymbol{b}$ 是一个基元素，那么存在一个 $\boldsymbol{b}$ 的提升属于 $\widetilde{\beta}_r^0$，当且仅当 $\boldsymbol{b}$ 的每个提升都属于 $\widetilde{\beta}_r^0$；因为如果 $\widetilde{b}_0$ 和 $\widetilde{b}_1$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的提升，那么对于某个 $n \in \mathbb{Z}$，$\widetilde{b}_1 = \widetilde{b}_0 + (n,0)$，并且对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，$\widetilde{\beta}_r^0 = \widetilde{\beta}_r^0 + (n,0)$。

在证明命题4.10之前，我们先记录几个引理。

定义 4.6。若存在 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[U]}(F_i, F_j)$ 的某个基元素 e，使得 $\boldsymbol{b} = ea$，则称 $\boldsymbol{b}$ of $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_i^{F_i}, \gamma_j^{F_j})$ 的一个基元素 $\boldsymbol{b}$ 来自交点 $a \in \gamma_i \cap \gamma_j$。

引理 4.7。对于每个 $\theta_i \in \beta_0 \cap \beta_r$，存在一个来自 θ_i 的标准基元素，当且仅当 $c_i \neq 0$。若 $c_i \neq 0$，则来自 θ_i 的标准基元素为 x_i^*、$_\ell\theta_i$ 和 x_i、$_\ell\theta_i$。

证明。由于 $\beta_r^0 \cap \beta_0^0 = \pi^{-1}(\theta_0) \cap \beta_0^0$，因此对于所有 $b \in \mathbb{Z}$，我们有 $\beta_r^0 \cap \beta_0^b = \pi^{-1}(\theta_{-bq}) \cap \beta_0^b$。 □

引理 4.8。对于每个 $\xi_j \in \beta_r \cap \beta_\infty$，$i' \equiv -jq^{-1}$ 模 p 是唯一的 $i' = 0$、$\cdots$、$p-1$，使得 $y_{i'}\xi_j$（或 $y_{i'}^*\xi_j$）是标准的。

证明。设 $a \in \mathbb{Z}$、$b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，并设 $\widetilde{\theta} \in \pi^{-1}(\theta_i) \cap \widetilde{\beta}_0^0$ 位于第 a 列，设 $\widetilde{\xi} \in \pi^{-1}(\xi_j) \cap \widetilde{\beta}_\infty^0$ 位于第 b 行。那么，$\widetilde{\theta}$ 和 $\widetilde{\xi}$ 位于 $\pi^{-1}(\beta_r)$ 的同一个连通分支，当且仅当 $ap + i - p \equiv bq + j$ 模 pq。因此，$\widetilde{\xi}$是标准的，当且仅当 $bq + j \equiv 0$ 模 pq，这等价于 $b \equiv -jq^{-1}$ 模 p。□

引理 4.9。设 $\widetilde{T}$ 是 $\widetilde{\mathbb{T}^2}$ 中的一个三角形，其顶点为 $\widetilde{\theta} \in \pi^{-1}(\beta_0 \cap \beta_r)$、$\widetilde{\xi} \in \pi^{-1}(\beta_r \cap \beta_\infty)$ 和 $\widetilde{\zeta} \in \pi^{-1}(\beta_\infty \cap \beta_0)$。顶点 $\widetilde{\theta}$ 是一个标准基元素的提升，当且仅当 $\widetilde{\xi}$ 和 $\widetilde{\zeta}$ 都是标准基元素的提升。

证明。这由以下三个陈述推出。

(1) 点 $\widetilde{\theta} \in \pi^{-1}(\beta_0 \cap \beta_r)$ 是标准基元素的提升，当且仅当 $\widetilde{\theta} \in \widetilde{\beta}_r^0$，并且每当 $i \in \mathbb{Z}$ 满足 $\widetilde{\theta} \in \widetilde{\beta}^{(-iq^{-1} \text{ 模 } p)\,0}$ 时，我们有 $c_i \neq 0$。(2) 点 $\widetilde{\xi} \in \pi^{-1}(\beta_r \cap \beta_\infty)$ 是标准基元素的提升，当且仅当 $\widetilde{\xi} \in \widetilde{\beta}_r^0$。(3) 点 $\widetilde{\zeta} \in \pi^{-1}(\beta_\infty \cap \beta_0)$ 是标准基元素的提升，当且仅当每当 $i \in \mathbb{Z}$ 满足 $\widetilde{\zeta} \in \widetilde{\beta}^{(-iq^{-1} \text{ 模 } p)\,0}$ 时，我们有 $c_i \neq 0$。

□

命题 4.10（关于 μ_2 的主要命题）。设 T 是 $\mathbb{T}^2$中的一个三角形，且 $\boldsymbol{b}_t$ 是 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_t^{F_t}, \gamma_{t+1}^{F_{t+1}})$ 关于 $t = 0$的一个标准基元素，1。如果 T对于 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_0^{F_0}, \gamma_2^{F_2})$ 的任意标准基元素 $\boldsymbol{b}_2$都不承认 $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$-提升 $\widetilde{T}$，那么 $\mathrm{Cont}(T)(\boldsymbol{b}_0 \otimes \boldsymbol{b}_1) = 0$。否则，这样的 $\boldsymbol{b}_2$至多有一个，并且

$$\mathrm{Cont}(T)(\boldsymbol{b}_0 \otimes \boldsymbol{b}_1) = U^{n_{\widetilde{z(u)}}(\widetilde{T})}\boldsymbol{b}_2.$$

证明。根据命题 4.4，我们只需证明第二句话：假设 $\mathrm{Cont}(T)(\boldsymbol{b}_0 \otimes \boldsymbol{b}_1) \neq 0$，并找一个提升 $\widetilde{T}$，使得 $\widetilde{T}$ 存在某个标准基元素 $\boldsymbol{b}_2$，满足 $\widetilde{T}$是 $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$-提升 $\widetilde{T}$。

设 T 的顶点为 $\theta \in \beta_0 \cap \beta_r$、$\xi \in \beta_r \cap \beta_\infty$ 和 $\zeta \in \beta_\infty \cap \beta_0$。首先，由于 $\mathrm{Cont}(T)(\boldsymbol{b}_0 \otimes \boldsymbol{b}_1) \neq 0$、$\boldsymbol{b}_0$ 和 $\boldsymbol{b}_1$ 必须来自 θ、ξ 或 ζ。我们分别考虑这三种情形。

情形 $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = (\beta_0, \beta_r, \beta_\infty)$：令 $\boldsymbol{b}_0 = x_{i_0}^*$、$_{\ell_0}\theta$ 和 $\boldsymbol{b}_1 = y_{i_1}\xi$（注意，$\mathrm{Cont}(T)(\boldsymbol{b}_0 \otimes \boldsymbol{b}_1)$ 总是非零）。令 $\widetilde{T}$ 为 T 到 $\mathbb{T}^2$ 的任意一个提升，使其一个顶点是 $\boldsymbol{b}_0$ 的提升。设其顶点按顺时针顺序为 $\widetilde{v}_0$、$\widetilde{v}_1$ 和 $\widetilde{v}_2$，其中 $\widetilde{v}_0$ 是 $\boldsymbol{b}_0$ 的一个提升。由引理 4.9，$\widetilde{v}_1$ 和 $\widetilde{v}_2$ 是标准基元素的提升。由引理 4.8，恰有一个标准基元素来自 ξ，因此 $\widetilde{v}_1$ 是 $\boldsymbol{b}_1$ 的一个提升。

情形是 $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = (\beta_0, \beta_\infty, \beta_r)$；使得它的一个顶点是 $\boldsymbol{b}_1$的一个提升。设其顶点为 $\widetilde{v}_0$，$\widetilde{v}_1$和 $\widetilde{v}_2$，按顺时针顺序排列，其中 $\widetilde{v}_1$ 是 $\boldsymbol{b}_1$的一个提升。根据引理 4.9，我们只需证明 $\widetilde{v}_0$ 是 $\boldsymbol{b}_0$ 的一个提升。这是因为 $i_1' \equiv i_0 + \#(A_\infty \cap \partial_{\beta_\infty} T)$ 模 p，这等价于 $\mathrm{Cont}(T)(\boldsymbol{b}_0 \otimes \boldsymbol{b}_1) \neq 0$。

情形 $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = (\beta_\infty, \beta_0, \beta_r)$：令 $\boldsymbol{b}_0 = x_{i_0}$、$_{\ell_0}y_{i'}^*\zeta$ 和 $\boldsymbol{b}_1 = x_{i_1}^*$、$_{\ell_1}\theta$。令 $\widetilde{T}$ 是 T 的任意一个提升到 $\mathbb{T}^2$ 的提升，使得它的一个顶点是 $\boldsymbol{b}_0$ 的提升。设其顶点按顺时针方向依次为 $\widetilde{v}_0$、$\widetilde{v}_1$ 和 $\widetilde{v}_2$，

顺序，其中 $\widetilde{v}_0$ 是 $\boldsymbol{b}_0$的一个提升。根据引理 4.9，我们只需证明 $\widetilde{v}_1$ 是 $\boldsymbol{b}_1$的一个提升。这是因为 $(i_0, \ell_0 + \#(A_0 \cap \partial_{\beta_0} T)) = (i_1, \ell_1)$ 作为定义 I中指标集的元素 3.1，这等价于 $\mathrm{Cont}(T)(\boldsymbol{b}_0 \otimes \boldsymbol{b}_1) \neq 0$。 □

4.3. **三角形计数映射的显式公式。**

定义 4.11。 设 $n \in \mathbb{Z}$，并设 $i, \ell \in \mathbb{Z}$ 满足 $i = n$ 模 p 且 $n = \ell p + i$。令 $\widetilde{\theta}_n$ 为 $\pi^{-1}(\beta_0) \cap \widetilde{\beta}_r^0 \cap \pi^{-1}(\theta_i)$ 中位于第 ℓ 列的交点。令 $\widetilde{T}_n$ 为 $\mathbb{T}^2$ 中满足其两个顶点为 θ_n 和原点 (0,0) 的三角形。令 T_n 为 $\widetilde{T}_n$ 在覆盖映射 $\pi\colon \widetilde{\mathbb{T}^2} \to \mathbb{T}^2$ 下的像。令 $z_n := n_z(T_n) = n_{\pi^{-1}(z)}(\widetilde{T}_n)$。

约定 4.12。 有时我们将三角形 T_n 和 $T_n + (c_n m, 0)$ 视为相同，对所有 $m \in \mathbb{Z}$ 都如此，因为它们都是针对相同标准基元素 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 的 $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ 提升 T_n。

See 图 5.1和 5.2展示了一些 T_n的示例。下面记录如下引理 .

引理 4.13。 交点 $\widetilde{\theta}_n$ 位于第$(-nq^{-1}$ 模 $p)$行。

证明。 与引理 4.7的证明相同。 □

定义 4.14列出了所有标准基元素及其简写。见图4.1：对于每个标准基元素 $\boldsymbol{b}$，我们用 $\boldsymbol{b}$的简写标记了它的提升。

定义 4.14 （标准基元素的简写）。 记作

$$\boldsymbol{\theta}_{i,\ell} := x_{i,\ell}^* \theta_i,\ \boldsymbol{\xi}_j := y_{-jq^{-1} \bmod p} \xi_j,\ \boldsymbol{\zeta}_{i,\ell} := x_{i,\ell} y^*_{-iq^{-1} \bmod p} \zeta$$

对于 $i = 0, \cdots, p-1, j = 0, \cdots, q-1, \ell = 0, \cdots, c_i - 1$。滥用记号，另令

$$\boldsymbol{\theta}_{i,\ell} := x_{i,\ell} \theta_i,\ \boldsymbol{\xi}_j := y^*_{-jq^{-1} \bmod p} \xi_j,\ \boldsymbol{\zeta}_{i,\ell} := y_{-iq^{-1} \bmod p} x^*_{i,\ell} \zeta.$$

回顾一下， y 的指标按模 p解释，而 x 的指标属于指标集 I（定义 3.1）。 $\boldsymbol{\xi}$ 的指标按模 q解释，而 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}$ 的指标属于指标集 I。

注意，若 $n = \ell p + i, i \in \{0, \cdots, p-1\}$ 和 $c_i \neq 0$，则 θ_n 是 $\boldsymbol{\theta}_{i,\ \ell}$的一个提升。

命题 *4.15*（μ_2 的公式（定理 *3.4*（*2*）），情形 $k = 0$）。我们将情形专门化为 $k = 0$，即按照定义 *3.3*，为 β_0 赋予 E_0^0，并为 β_∞ 赋予 E_∞^0。给定 n，令 $\ell, i, j \in \mathbb{Z}$ 表示满足以下条件的整数： $i = n$ 模 $p \in \{0, \cdots, p-1\}$， $j = n$ 模 $q \in \{0, \cdots, q-1\}$，且 $n = \ell p + i$。令 $\psi_{0r}^0, \psi_{r\infty}^0, \psi_{\infty 0}^0$ 如定理 *3.4* 的陈述所述。于是，我们有

$$\mu_2(\psi_{0r}^0 \otimes \psi_{r\infty}^0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} U^{z_n} \sum_{d=0}^{s_i - 1} u_{i,d+\ell} v_{j-p} \boldsymbol{\zeta}_{i,d} \tag{4.1}$$

$$\mu_2(\psi_{r\infty}^0 \otimes \psi_{\infty 0}^0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} U^{z_n} \sum_{d=0}^{s_i - 1} v_{j-p} w_{i,d} \boldsymbol{\theta}_{i,d+\ell} \tag{4.2}$$

$$\mu_2(\psi_{\infty 0}^0 \otimes \psi_{0r}^0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} U^{z_n} \sum_{d=0}^{s_i - 1} u_{i,d+\ell} w_{i,d} \boldsymbol{\xi}_{j-p}. \tag{4.3}$$

证明。 T_n中的三角形 $\mathbb{T}^2$有顶点 ζ、 θ_i和 ξ_{j-p}。由引理 4.7，对于 $d \in \mathbb{Z}$ ，三角形 $\widetilde{T}_n + (d, 0)$是 T_n 在 $\mathbb{T}^2$ 中的提升，使得它的三个顶点都是标准基元素的提升。 $T_n + (d, 0)$的顶点是$\boldsymbol{\theta}_{i,\ d+\ell}, \boldsymbol{\xi}_{j-p}, \boldsymbol{\zeta}_{i,d}$。因此， T_n有一个 $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$-提升，其标准基元素为 $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ ，当且仅当

$$\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\} = \{\boldsymbol{\theta}_{i,d+\ell}, \boldsymbol{\xi}_{j-p}, \boldsymbol{\zeta}_{i,d}\}$$

对于某些 $d = 0, \cdots, c_i - 1$成立。因此，该命题得证。 □

4.4. **标准基元素的提升与四边形计数映射。** 本小节与第 4.2 小节类似，但这里我们采用第 γ_3 中的 γ_0 ，该内容出自第 3.1 节，并考虑马斯洛夫指数 -1四边形。

我们先描述所有马斯洛夫指数为 -1 的四边形。为此，我们发现采用万有覆盖空间 $\mathbb{R}^2$进行处理更为方便。令 $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为覆盖映射。对于 $\widetilde{\mathbb{T}^2}$中的每个三角形 $\widetilde{T}_n$ ，固定一个将 $\widetilde{T}_n$ 提升到 $\mathbb{R}^2$的提升 T_n 。

马斯洛夫指数为 -1 的四边形 Q 与三角形 T_n和点 $v \in \partial_{\pi^{-1}(\gamma_0)} T_n \cap \pi^{-1}(\Theta^+)$组成的有序对 (T_n, v) 一一对应，其中 $\widetilde{\Theta}^+ \in \gamma_0 \cap \gamma_3$是最高同调分次中的交点。给定 (T_n, v)，我们来描述对应的四边形Q。令 $v_i \in \pi^{-1}(\gamma_i) \cap \pi^{-1}(\gamma_{(i+1) \bmod 3})$ 对于 $i = 0$，1，2 为 T_n的顶点。然后，令 $Q \subset \mathbb{R}^2$为一个四边形，其边位于 $\pi^{-1}(\gamma_i)$ 中（对于 $i = 0$，1，2，3），顶点为 v_0, v_1, v_2', v，其中 $v_2' \in \pi^{-1}(\gamma_2) \cap \pi^{-1}(\gamma_3)$ 是距离 v_2最近的点。四边形 Q 是 Q在 π下的像。图 5.3 展示了当 $(p, q, k) = (5, 3, 0)$ 时若干四边形的提升。注意， Q和 T_n 仅在 γ_0 与 γ_3之间的小区域内不同；我们称 Q 是 T_n的小扰动。

定义 4.16 （标准基元素的更多提升）。 如果基元素 $\boldsymbol{b}$ 属于 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_0^{F_0}, \gamma_3^{F_0})$标准 且形式为 $ee^*\Theta^+$，其中 e 是 F_0 的基元素， $\Theta^+ \in \gamma_0 \cap \gamma_3$ 是最高同调分次中的交点，则称其为标准基元素。

(1) 若点 $\widetilde{\Theta} \in \pi^{-1}(\Theta_0^+)$ 位于第 (a, b) 个正方形中，则称其为 $x_{i,\ell} x_{i,\ell}^* \Theta_0^+$ 的提升 ，其中

$$a \equiv \ell \mod c_i, \ b \equiv -iq^{-1} \mod p.$$

(2) 每个点 $\widetilde{\Theta} \in \pi^{-1}(\Theta_r^+)$ 都是 Θ_r^+ 的提升 。

(3) 点 若 $\Theta \in \pi^{-1}(\Theta_\infty^+)$ 位于第 b 行，则称其为 $y_{i'} y_{i'}^* \Theta_\infty^+$ 的提升 ，其中

$$b \equiv i' \mod p.$$

与小节 4.2中一样，我们通过分别研究每个四边形Q 的 μ_3 来考察贡献$\mathrm{Cont}(Q)$ 。注意， μ_3 是所有 Maslov 指数为 -1 的四边形 $Q\mathrm{Cont}(Q)$ 之和。

定义 4.17。 若 Q 是一个顶点为 $c_t \in \gamma_t \cap \gamma_{(t+1) \bmod 4} (t = 0$，1，2，3) 的 Maslov 指数为 -1 的四边形，则定义 Q 对 μ_3 的贡献为

$$\mathrm{Cont}(Q) : \boldsymbol{CF}^-(\gamma_0^{F_0}, \gamma_1^{F_1}) \otimes \boldsymbol{CF}^-(\gamma_1^{F_1}, \gamma_2^{F_2}) \otimes \boldsymbol{CF}^-(\gamma_2^{F_2}, \gamma_3^{F_0}) \to \boldsymbol{CF}^-(\gamma_0^{F_0}, \gamma_3^{F_0}) :$$
$$e_1 a_1 \otimes e_2 a_2 \otimes e_3 a_3 \mapsto \begin{cases} U^{n_z(Q)} \rho(Q)(e_1 \otimes e_2 \otimes e_3) c_4 & \text{if } (a_1, a_2, a_3) = (c_1, c_2, c_3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

我们有如下命题 4.4 的类似结论。

定义 4.18。 设 Q是 $\mathbb{T}^2$中的一个 Maslov 指数为 -1 的四边形。设 $\boldsymbol{b}_t$ 是$\boldsymbol{CF}^-(\gamma_t^{F_t}, \gamma_{t+1}^{F_{t+1}})$ 的一个基元素，其中对应于 $t = 0$，1，2；设 $\boldsymbol{b}_3$是 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_0^{F_0}, \gamma_3^{F_0})$ 的一个标准基元素。 Q 到 $\mathbb{T}^2$ 的一个提升 $\widetilde{\ } \widetilde{\ } Q$，若其三个顶点分别是 $\boldsymbol{b}_0$、 $\boldsymbol{b}_1$、 $\boldsymbol{b}_2$ 和 $\boldsymbol{b}_3$的提升，则称为 Q 的一个 $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$-提升。

命题 4.19。 设 Q 是 $\mathbb{T}^2$中的一个 *Maslov* 指数为 -1 的四边形，设 $\boldsymbol{b}_t$ 是$\boldsymbol{CF}^-(\gamma_t^{F_t}, \gamma_{t+1}^{F_{t+1}})$ 对应于 $t = 0$ 的一个基元素，其中 1、2，并设 $\boldsymbol{b}_3$ 是 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_0^{F_0}, \gamma_3^{F_0})$的一个标准基元素。若 Q具有一个 $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$-提升，则

$$\mathrm{Cont}(Q)(\boldsymbol{b}_0 \otimes \boldsymbol{b}_1 \otimes \boldsymbol{b}_2) = U^{n_{\widetilde{z(u)}}(\widetilde{Q})} \boldsymbol{b}_3.$$

证明。 由定义可直接得出。注意，在我们的 Heegaard 图中，每个 Maslov 指数为 -1的四边形都有唯一的全纯代表。□

命题 4.20 是本小节的主要命题。某些四边形的提升见图 5.3 ，其中四边形对应于 $(p,\ q,\ k) = (5,\ 3,\ 0)$，以及相应的 $\boldsymbol{b}_0,\ \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}'_2,\ \boldsymbol{b}_3$。

命题 4.20（ μ_3的主要命题）。设 Q 是一个对应于(T_n, v)的 Maslov 指数为 -1 的四边形，设 $\boldsymbol{b}_t$ 是 $t = 0$的 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_t^{F_t}, \gamma^{F_{(t+1)}}$ 模 3 $(t+1)$ 模 3)的一个标准基元素，其中 1、2，且设 $\boldsymbol{b}'_2 \in \boldsymbol{CF}^-(\gamma_2^{F_2}, \gamma_3^{F_0})$是 $\boldsymbol{b}_2$ 在最近点映射（第 2.3 小节）下的像。若 T_n 不允许 $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$-提升，则 $\mathrm{Cont}(Q)(\boldsymbol{b}_0 \otimes \boldsymbol{b}_1 \otimes \boldsymbol{b}'_2) = 0$。否则，存在某个 $d \in \mathbb{Z}$，使得 $T_n + (d, 0)$是 T_n的一个 $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$-提升。设 $\boldsymbol{b}_3$ 是 $\boldsymbol{CF}^-(\gamma_0^{F_0}, \gamma_3^{F_0})$的标准基元素，满足若 $\widehat{\pi}\colon \mathbb{R}^2 \to \widetilde{\mathbb{T}^2}$ 是覆盖映射，则 $\widehat{\pi}(v + (d, 0))$是 $\boldsymbol{b}_3$ 的一个提升。那么，我们有

$$\mathrm{Cont}(Q)(\boldsymbol{b}_0 \otimes \boldsymbol{b}_1 \otimes \boldsymbol{b}'_2) = U^{n_{\widetilde{z(u)}}(\widetilde{T}_n)}\boldsymbol{b}_3.$$

证明。第二句话可通过常规的情形检验得出，这与命题 4.10 的证明类似。其余部分由命题 4.19 得出：令 Q 为定义 4.16 前面讨论中的 Q 的提升。若 $T_n + (d, 0)$ 是 $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ 的一个提升，则 $Q + (d, 0)$ 是 $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}'_2, \boldsymbol{b}_3\}$ 的一个提升。由于 $z(u) = z(u) + (d, 0)$，且 T_n 与 Q 仅在 $\pi^{-1}(\gamma_0)$ 和 $\pi^{-1}(\gamma_3)$ 之间的小区域中不同，因此我们有

$$n_{\widetilde{z(u)}}(\widetilde{Q} + (d, 0)) = n_{\widetilde{z(u)}}(\widetilde{Q}) = n_{\widetilde{z(u)}}(\widetilde{T}_n). \qquad \square$$

5. 帽版本

本节中，我们证明定理3.4 (3) 在满足方程 (3.2) 时成立（注意，方程 (3.2) 将循环 ψ_{0r}^k、$\psi_{r\infty}^k$、$\psi_{\infty 0}^k$ 模 U确定）。在此过程中，我们阐明局部系统 E_0^k 和 E_∞^k的定义，以及方程 (3.2)。

为完整起见，我们还证明，当方程 3.4(2) 在模 U 意义下成立时，3.2) 也成立，从而证明定理 3.4 的帽版本。定理 3.4 (2) 的负版本证明见第6 节，并不依赖于此。

回顾这些三角形 $\widetilde{T}_n$ 以及交点 $\widetilde{\theta}_n$ ，它们见定义 4.11。

5.1. **之字形** ZZ_0。 促成有理手术正合三角(定理 1.1 和 1.3) 的一个关键观察是，某些三角形的边界 T_n 彼此连接，形成之字形。在本小节中，我们定义与情形 之字形 $ZZ_0 \subset \mathbb{T}^2$ 相对应的 $k = 0$。这些图示于图 5.1 和 5.2最左侧的示意图中，分别对应于 $(p,\ q) = (5,\ 3)$、$(3,\ 5)$。

令β_0^b是 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 中回顾第 4.1 节的连通分支。考虑所有满足 $z_n := n_{\pi^{-1}(z)}(\widetilde{T}_n) = 0$的交点 $\widetilde{\theta}_n \in \widetilde{\beta}_0^b$。如果这样的交点 $\widetilde{\theta}_n$至少有两个，则称 $\widetilde{\beta}_0^b$ 0-特殊，并将其中最左侧的和最右侧的 θ_n称为 0-特殊。如果 θ_n 是 0-特殊的，则称三角形 T_n 0-特殊 （回顾一下， θ_n是 T_n的一个顶点）。我们有以下引理。

引理 5.1. 当且仅当 $n \in \{0, \cdots, p+q-1\}$ 时，有 $z_n = 0$。因此，对于 $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，如果 $b \equiv -iq^{-1}$ 模 p 的 i满足该条件，则存在 $s_i + 1$ 个（回顾定义 3.2）满足$z_n = 0$的 $\widetilde{\theta}_n \in \widetilde{\beta}_0^b$。于是，对于某个 $i = 0, 1, \cdots, \min(p, q)$，$\widetilde{\beta}_0^b$ 是 0-特殊的，当且仅当 $b \equiv -iq^{-1}$ 模 p，并且以下条件等价：

（1）交点 θ_n 是0-特殊的（2）三角形 T_n 是0-特殊的

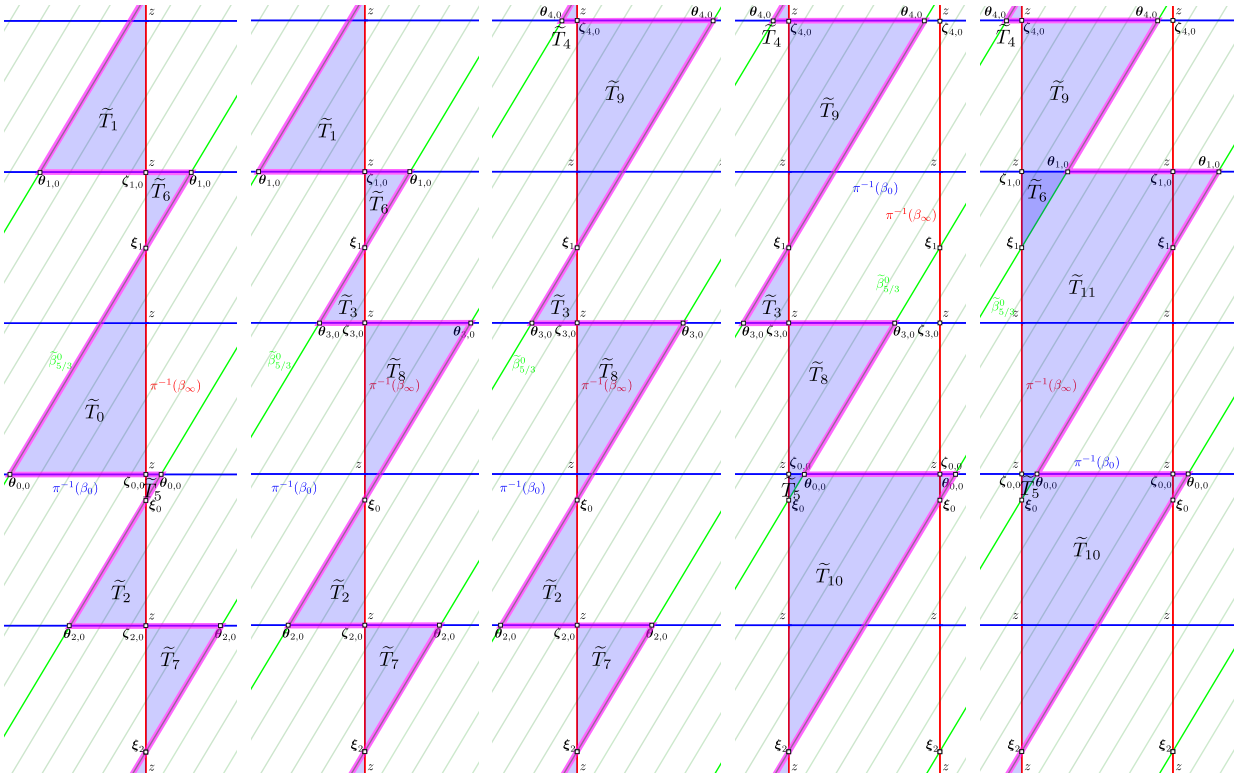


图 5.1。分别对应 $(p,\ q)=(5,\ 3)$、$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 的之字形和三角形。

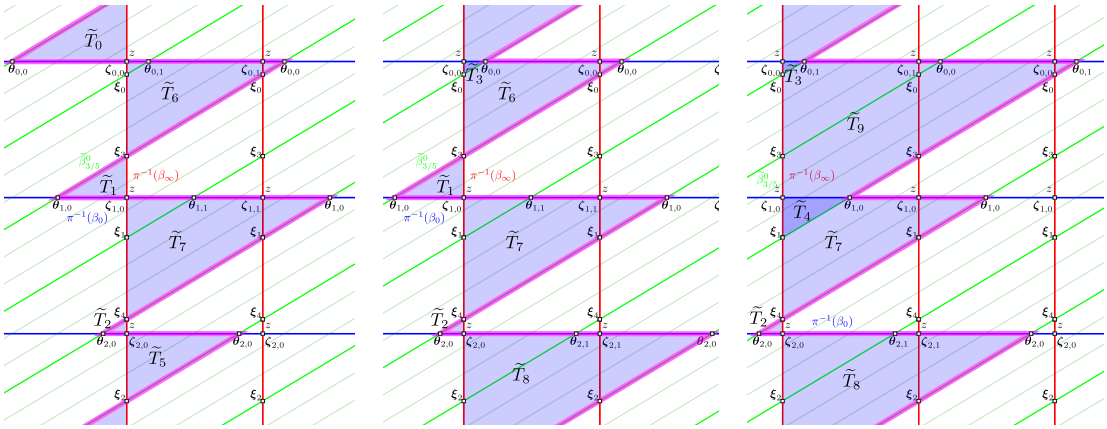


图 5.2。分别对应 $(p,\ q)=(3,\ 5)$、$k=0,\ 1,\ 2$ 的之字形和三角形。

(3) $n\in\{0,1,\cdots,\min(p,q)-1,\max(p,q),\max(p,q)+1,\cdots,p+q-1\}$.

证明。 第一句话可由考察亏格 1 Heegaard 图（第 3.1小节和图3.1）得出。第二句话由引理 4.13得出，第三句话则由定义和第二句话得出。 □

~我们将在引理 5.3 中证明，这些 0-特殊交点 θ_n 可以用某些线段连接起来 $H_i\subset\pi^{-1}(\beta_0)$，并且 $L_i\subset\widetilde{\beta}_r^0$，这些线段在端点处相连，形成之字形（见图 5.1 和 5.2）。称之为 之字形 $ZZ_0\subset\pi^{-1}(\beta_0)\cup\widetilde{\beta}_r^0\subset$

$\widetilde{\mathbb{T}^2}$，即 ZZ_0 是 H_i和 L_i的并集。此之字形与 y轴 $\widetilde{\beta}^0_\infty$ 共同围成0-特殊三角形。

定义 5.2 （线段 $H_i \subset \pi^{-1}(\beta_0)$ 和 $L_i \subset \widetilde{\beta}^0_r$）。设 $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 满足 $\widetilde{\beta}^b_0$ 是 0-特殊的，并设 $i = 0, \cdots, p-1$ 满足 $b \equiv -iq^{-1}$ 模 p。将 $H_i \subset \widetilde{\beta}^b_0$ 定义为 $\widetilde{\beta}^b_0$ 上两个 0-特殊交点 $\widetilde{\theta}_n$ 之间的水平线段。要定义线段 L_i，从 $\widetilde{\theta}_i$ 出发，沿 $\widetilde{\beta}^0_r$ 的 $+y$ 方向前进。继续前进，直到路径穿过 $\widetilde{\beta}^0_\infty \subset \widetilde{\mathbb{T}^2}$ 处的 y 轴，然后继续前进，直到路径到达某个 $\widetilde{\beta}^c_0$，此时停止。将这条路径定义为线段 $L_i \subset \widetilde{\beta}^0_r$。

引理 5.3. 设 $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 使得 $\widetilde{\beta}^b_0$ 是0-特殊的，设 $i = 0, \cdots, p-1$ 使得$b \equiv -iq^{-1}$ 模 p，并设 $t \in \mathbb{Z}$ 使得 $\widetilde{\theta}_i$ 和 $\widetilde{\theta}_t$ 是 $L_i \subset \widetilde{\beta}^0_r$的两个端点。那么，*(1)* $L_i \setminus \{\widetilde{\theta}_i, \widetilde{\theta}_t\}$ 不与任何其他0-特殊的 β^a_0相交；*(2)* $t \geq p$ 和 $\widetilde{\theta}_t$ 是0-特殊的。

证明。首先注意到，L_i 与 $\pi^{-1}(\beta_0)$的交点为 $\widetilde{\theta}_{i+mq}$，其中 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足 $i + mq \leq t$。特别地，$t \geq i + q$。

为证明(1)，假设 L_i 在某处与 $\widetilde{\beta}^a_0$ 相交。根据 L_i 的定义 $\theta_{i+mq} \in [-1, 0] \times (\mathbb{R}/p\mathbb{Z})$，因此 $i + mq \in \{0, \cdots, p-1\}$。故对于所有整数 $N \geq 1$，$i + mq - Np \leq -1$ 以及 $i + mq + Np \geq p + q$，因此 $z_{i+mq-Np}$，$z_{i+mq+Np} > 0$由引理5.1可得。

(2) 可由以下事实推出：令 $r := t$模 p，则 (a) $z_r = 0$，(b) $r < p \leq t$，(c)$z_t = 0$，且 (d) $z_{t+Np} > 0$ 对于所有整数 $N \geq 0$。(a) 根据引理 5.1成立。(b) 成立，因为$\theta_t \in [0, \infty) \times (\mathbb{R}/p\mathbb{Z})$。(c) 成立，因为 T_t 的支集包含于 $\mathbb{R} \times (-c - 1 + \varepsilon, -c]$。(d) 由引理 5.1 推出，因为 $t + Np \geq p + q$。□

5.2. 三角形计数映射。本小节旨在阐释 $u = (u_0, \cdots, u_{p-1})$ 和 $c = (c_0, \cdots, c_{p-1})$ 的定义，说明方程 (3.2) 的动机，从而为定理 3.4 的帽版本定义循环 $\widehat{\psi}^k_{0r} \in \widehat{CF}(\beta^{E^k_0}_0, \beta_r)$、$\widehat{\psi}^k_{r\infty} \in \widehat{CF}(\beta_r, \beta^{E^k_\infty}_\infty)$ 和 $\widehat{\psi}^k_{\infty 0} \in \widehat{CF}(\beta^{E^k_\infty}_\infty, \beta^{E^k_0}_0)$（参见引理 5.7），并证明三角形计数映射 $\mu_2(\widehat{\psi}^k_{0r} \otimes \widehat{\psi}^k_{r\infty})$、$\mu_2(\widehat{\psi}^k_{r\infty} \otimes \widehat{\psi}^k_{\infty 0})$ 和 $\mu_2(\widehat{\psi}^k_{\infty 0} \otimes \widehat{\psi}^k_{0r})$ 均为零。

对于 $k = 0$，使得 $\Phi_k(\theta_i) = \theta_{i+k}$ 将 $\widetilde{\mathbb{T}^2}$ 的之字形平移 $\subset \pi^{-1}(\beta_0) \cup \widetilde{\beta}^0_r$ 在 $\widetilde{\mathbb{T}^2}$ 中的定义为 $\Phi_k(ZZ_0)$。于是，$\widetilde{\theta}_i$ 是 ZZ_0 的一个顶点，当且仅当 $\widetilde{\theta}_{i+k}$ 是 ZZ_k的一个顶点。若 T_n 特殊，则称其为特殊的，如果它是以下对象之一

$$\widetilde{T}_k, \widetilde{T}_{k+1}, \cdots, \widetilde{T}_{k+\min(p,q)-1}, \widetilde{T}_{k+\max(p,q)}, \widetilde{T}_{k+\max(p,q)+1}, \cdots, \widetilde{T}_{k+p+q-1}. \tag{5.1}$$

给定 u和 c，从而局部系统也随之定义后，如果存在一个特殊三角形 T_n，使得 T_n 的某个顶点是 $\boldsymbol{b}$的提升，则称基元素 $\boldsymbol{b}$ 特殊。

5.2.1. 为……的定义提供动机：u 和 c。我们将定义 u和 c，使得如果 $\widehat{\psi}^k_{0r}$、$\widehat{\psi}^k_{r\infty}$以及$\widehat{\psi}^k_{\infty 0}$ 分别是相应特殊基元素之和，那么特殊三角形恰好就是对三角形计数映射（μ_2）有贡献的三角形，并且它们两两抵消。这将从定义 u和 c3.3中恢复……的定义。

对于 ZZ_k 中的第 i 个顶点 $\widetilde{\theta}_i$，$i = 0, \cdots, p-1$，考虑所有顶点 $\widetilde{\theta}_{n_0}$ 和 $\widetilde{\theta}_{n_1}$ 为这些 θ_n中最左和最右的一个，并令 $c_i = (n_1 - n_0)/p$。那么，根据引理5.1，确实有$c_i = s_{i-k}$。

我们在推论5.6 中证明了，对于 u 存在唯一的选择，使得特殊三角形不与 $z(u)$相交，并且该 u 由方程（3.1）给出。令 $\widetilde{z}_i := (\varepsilon, (iq^{-1} \bmod p) + \varepsilon) \in \mathbb{T}^2$以及 $\widetilde{w}_i := \widetilde{z}_i - (2\varepsilon, 0)$。

引理 5.4。设 $k = 0, 1, \cdots, p$，且令 $T(ZZ_k) \subset \mathbb{T}^2$ 为特殊三角形 (5.1) 的支集之并，即由 $\widetilde{\beta}^0_\infty$ 和 ZZ_k围成的区域。对于 $i = 0, \cdots, p-1$, $\widetilde{z}_i \in \widetilde{T}(ZZ_k)$ 当且仅当 $i \in \{0, \cdots, k-1\}$，而 $\widetilde{w}_i \in T(ZZ_k)$ 当且仅当 $i \in \{k, \cdots, p-1\}$。此外，对于 $n = k, k+1, \cdots, k+p+q-1$，三角形 T_n 包含于 $T(ZZ_k)$ 中。

证明。设

$$V(ZZ_k) := \{\widetilde{\theta}_k, \cdots, \widetilde{\theta}_{k+\min(p,q)-1}, \widetilde{\theta}_{k+\max(p,q)}, \cdots, \widetilde{\theta}_{k+p+q-1}\}$$

为 ZZ_k 的顶点集合，设 $V_k = \{\theta_k, \theta_{k+p}, \theta_{k+q}, \theta_{k+p+q}\}$，并设 P_k 为底边长度为 1、高为 1 且顶点为 V_k 的平行四边形。

为证明第二句话，我们对 k 进行归纳法。首先，情形 $k = 0$ 成立，因为 $\widetilde{w}_i$ 位于 T_i中，其中 $i = 0, \cdots, p-1$。对于归纳步骤，设 $k \in \{0, \cdots, p-1\}$，假设关于 k 的陈述成立，并证明它对 $k+1$ 也成立。我们有

$$V(ZZ_{k+1}) = (V(ZZ_k) \setminus V_k) \cup (V_k \setminus V(ZZ_k)),$$

因此（忽略边界），我们有（比较图5.1 和 5.2）

$$\widetilde{T}(ZZ_{k+1}) = \left(\widetilde{T}(ZZ_k) \setminus P_k\right) \cup \left(P_k \setminus \widetilde{T}(ZZ_k)\right).$$

该陈述对于 $k+1$，这是因为 $P_k \cap \{\widetilde{z}_0, \cdots, \widetilde{z}_{p-1}\} = \{\widetilde{z}_k\}$ 和 $P_k \cap \{\widetilde{w}_0, \cdots, \widetilde{w}_{p-1}\} = \{\widetilde{w}_k\}$.

最后一个结论成立，是因为对于 $t = p$ 和 $t = q$，若 n，$n + t \le p - 1$，三角形 T_{n+t} 包含于 T_i；若 n，$n + t \ge p$，则 T_n 包含于 T_{n+t}。□

推论 5.5。对于 $k = 0$，$\cdots$，$p-1$，$\widetilde{z}_k$ 包含于 T_{k+p+q}。

证明。根据引理 5.4，$\widetilde{z}_k \in T(ZZ_{k+1}) \setminus T(ZZ_k)$。由于 $n_{k+\min(p,q)} = 0$ 根据引理 5.1，$\widetilde{z}_k$ 不包含于 $T_{k+\min(p,q)}$。因此，$\widetilde{z}_k$ 必定包含于 T_{k+p+q}。□

推论 5.6 (u 是唯一的)。存在唯一的序列 $u = (u_0, \cdots, u_{p-1})$，$u_i \in \{1, U\}$，使得特殊三角形 (5.1) 不相交 $z(u)$，且该 u 由方程 (3.1) 给出。

证明。引理 5.4 表明方程 (3.1) 成立（或者参见引理 A.2），并且$\widetilde{z}_0, \cdots, \widetilde{z}_{k-1}$必须移到 y-轴 $\widetilde{\beta}^0_\infty \subset \widetilde{\mathbb{T}^2}$ 的左侧。由于三角形 $\widetilde{T}_k, \cdots, \widetilde{T}_{p-1}$ 包含于 $T(ZZ_k)$中，因此 $z(u)$应避开它们。由于对于 $i = 0, \cdots, p-1$，$\widetilde{w}_i$包含于 T_i中，我们不能将 $\widetilde{z}_k, \cdots, \widetilde{z}_{p-1}$ 移到 $\widetilde{\beta}^0_\infty$的左侧，因此 u 的唯一性得证。□

5.2.2. 三角形计数映射为零。现在，我们已经定义了 u和 c，因此也定义了局部系统。将 $\widehat{\psi}^k_{0r} \in \widehat{CF}(\beta^{E^k_0}_0, \beta_r)$、$\widehat{\psi}^k_{r\infty} \in \widehat{CF}(\beta_r, \beta^{E^k_\infty}_\infty)$和 $\widehat{\psi}^k_{\infty 0} \in \widehat{CF}(\beta^{E^k_\infty}_\infty, \beta^{E^k_0}_0)$定义为相应特殊基元素之和。下面记录一个引理。

引理 5.7。若u_i、ℓ、v_j、w_i、c满足方程（3.2），则循环 ψ^k_{0r}、$\psi^k_{r\infty}$、$\psi^k_{\infty 0}$ 分别模 U约化为 $\widehat{\psi}^k_{0r}$、$\widehat{\psi}^k_{r\infty}$、$\widehat{\psi}^k_{\infty 0}$。特别地，特殊基元素是标准的。

证明。由于（5.1）都是特殊三角形 T_n，因此可以直接读出所有特殊基元素。我们分为两种情形，并使用定义 4.14中的简写列出特殊基元素。如果 $p \ge q$，那么它们是

$$\boldsymbol{\theta}_{k,0}, \boldsymbol{\theta}_{k+1,0}, \cdots, \boldsymbol{\theta}_{k+q-1,0}, \ \boldsymbol{\xi}_0, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{q-1}, \ \boldsymbol{\zeta}_{k,0}, \boldsymbol{\zeta}_{k+1,0}, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_{k+q-1,0}.$$

若 $p<q$，则它们是

$$\{\boldsymbol{\theta}_{i,1}:i=0,\cdots,k-1\}\cup\{\boldsymbol{\theta}_{i,0}:i=k,\cdots,p-1\},\ \boldsymbol{\xi}_{k-p},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{k-1},\ \boldsymbol{\zeta}_{0,0},\boldsymbol{\zeta}_{1,0},\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{q-1,0}.\quad\square$$

命题 5.9是我们的主要观察结果。为了证明这一点，我们先证明引理 5.8；注意，我们在引理 A.2 中证明了一个更强的结论。

引理 5.8。 当且仅当 $n\in\{k,k+1,\cdots,k+p+q-1\}$ 时，我们有 $n_{\widetilde{z(u)}}(T_n)=0$。

证明。 ($\Leftarrow$)：这由引理 5.4 ($T(ZZ_k)$ 与 $z(u)$不相交）得出。

($\Rightarrow$)：我们分几种情形讨论。对于 $n<0$，点 $(-\varepsilon,\varepsilon)$、$(\varepsilon,\varepsilon)\in\mathbb{T}^2$ 包含于 T_n，因此 $n_{\widetilde{z(u)}}(T_n)\geq 1$。对于 $n=0,\cdots,k-1$，点 $\widetilde{z}_n-(2\varepsilon,0)$ 包含于 T_n，因此 $n_{\widetilde{z(u)}}(T_n)\geq 1$。对于 $n=k+p+q,\cdots,2p+q-1$，$\widetilde{z}_{n-p-q}$根据推论 5.5 包含于 T_n，因此 $n_{\widetilde{z(u)}}(\widetilde{T}_n)\geq 1$。对于 $n\geq 2p+q$，点 $(-\varepsilon,\varepsilon)$、$(\varepsilon,\varepsilon)\in\mathbb{T}^2$ 包含于 T_n，因此 $n_{\widetilde{z(u)}}(T_n)\geq 1$。$\square$

命题 5.9。 特殊三角形（*5.1*）在按照约定*4.12*进行的识别下，恰好是满足以下条件的 T 三角形：$\mathbb{T}^2$ 其中至少有两个顶点是 T 特殊基元素的提升，且 $n_{\widetilde{z(u)}}(T)=0$。事实上，每个特殊三角形的三个顶点都是特殊基元素的提升。

证明。 由于特殊基元素根据引理 5.7都是标准基元素，如果 T的至少两个顶点是特殊基元素的提升，那么根据引理 4.9，T 的三个顶点都是标准基元素的提升。因此，根据引理 4.7 （参见命题 4.15的证明），$T=T_n+(d,0)$ 对某个 $n,d\in\mathbb{Z}$成立。如果 $\ell,i,j\in\mathbb{Z}$ 表示满足以下条件的整数：$i=n$ 模 p、$j=n$ 模 q，并且$n=\ell p+i$，那么 T的三个顶点就是$\boldsymbol{\theta}_{i,d+\ell}$、$\boldsymbol{\xi}_{j-p}$和 $\boldsymbol{\zeta}_{i,d}$的提升。

首先，若T是一个特殊三角形，那么为了使$\boldsymbol{\theta}_{i,d+\ell}$ 和$\boldsymbol{\zeta}_{i,d}$ 中至少有一个是特殊的，必须有 $d\equiv 0$模 c_i。现在，根据引理 5.8，只需证明：对于任意满足 d 和$n\in\{k+\min(p,q),\cdots,k+\max(p,q)-1\}$的情形，$\boldsymbol{\theta}_{i,d+\ell}$, $\boldsymbol{\xi}_{j-p}$和$\boldsymbol{\zeta}_{i,d}$中至多只有一个是特殊的。我们分两种情形讨论：$p\geq q$ 和 $p<q$。若 $p\geq q$，则$\boldsymbol{\theta}_{i,d+\ell}$ 和$\boldsymbol{\zeta}_{i,d}$ 不是特殊的，因为 $i\notin\{k,\cdots,k+q-1\}$ 模 p。若 $p<q$，则 $\boldsymbol{\xi}_{j-p}$不是特殊的，因为 $j-p\notin\{k-p,\cdots,k-1\}$ 模 q。要使$\boldsymbol{\theta}_{i,d+\ell}$ 和$\boldsymbol{\zeta}_{i,d}$ 都特殊，必须有 $d\equiv 0$模 c_i，且 T_n 是一个特殊三角形。$\square$

根据命题 4.10 和 5.9，对于 $\mu_2(\widehat{\psi}^k_{0r}\otimes\widehat{\psi}^k_{r\infty})$、$\mu_2(\widehat{\psi}^k_{r\infty}\otimes\widehat{\psi}^k_{\infty 0})$ 和 $\mu_2(\widehat{\psi}^k_{\infty 0}\otimes\widehat{\psi}^k_{0r})$，$\widehat{CF}(\beta_0^{E_0^k},\beta_\infty^{E_\infty^k})$、$\beta_r(\beta_0^{E_0^k},\widehat{CF})$ 和 $\beta_r(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})$ 中每个基元素 $\boldsymbol{b}$ 的系数分别为：若 $\sim$ 不是特殊的，则系数为零；若 T_n 是特殊的，则系数等于满足以下条件的特殊三角形 T_n $\boldsymbol{b}$的数量： 的一个顶点是 的提升。

我们声称，对于每个特殊基元素 $\boldsymbol{b}$，恰好存在两个这样的三角形。令$H_i\subset\pi^{-1}(\beta_0)$ 和 $L_i\subset\widetilde{\beta}^0_r$ 分别为定义 5.2中的线段。对于 $i\in\mathbb{Z}$，令 X_i 为 $\pi^{-1}(\beta_0)$ 中包含于其中的 H_i 连通分支，并令 C_i 为 $\widetilde{\beta}^0_r$ 中包含于其中的 L_i 连通分支。

首先，如果 $\boldsymbol{b}$是 $\widehat{CF}(\beta_0^{E_0^k},\ \beta_\infty^{E_\infty^k})$ 或 $\widehat{CF}(\beta_r,\ \beta_0^{E_0^k})$ 的特殊基元素，那么取 $i\in\mathbb{Z}$ 使得 $\Phi_k(X_i)$ 包含 $\boldsymbol{b}$的一个提升。取 $t\in\mathbb{Z}$ 使得 H_i 的两个端点分别为 θ_i 和 θ_t。那么，$\Phi_k(H_i)$ 的两个端点分别为 θ_{i+k} 和 θ_{t+k}，所需的两个三角形为 T_{i+k} 和T_{t+k}。

其次，如果 $\boldsymbol{b}$ 是 $\widehat{CF}(\beta_\infty^{E_\infty^k}, \beta_r)$ 的特殊基元素，那么取 $i \in \mathbb{Z}$ 使得 $\Phi_k(C_i)\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$包含 $\boldsymbol{b}$的一个提升。取 $t \in \mathbb{Z}$ 使得 L_i 的两个端点分别为 θ_i 和 θ_t。那么，$\Phi_k(L_i)$ 的两个$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$端点分别为 θ_{i+k} 和 θ_{t+k}，所需的两个三角形为 T_{i+k} 和 T_{t+k}。

由此完成了证明：帽版本的三角形计数映射为零。

注 5.10（负版本）。一般而言，若 ψ_{0r}^k、$\psi_{r\infty}^k$、$\psi_{\infty 0}^k$ 只是特殊基元素之和，则 μ_2（定理 3.4 (2)）在负版本中并不为零。事实上，对于 $(p,q,k) = (5,3,0)$（参见注 3.6），这一点已经不成立：令（回忆定义 4.14中的记号）

$$\psi_{0r} := \boldsymbol{\theta}_{0,0} + \boldsymbol{\theta}_{1,0} + \boldsymbol{\theta}_{2,0},\ \psi_{r\infty} := \boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2,\ \psi_{\infty 0} := \boldsymbol{\zeta}_{0,0} + \boldsymbol{\zeta}_{1,0} + \boldsymbol{\zeta}_{2,0}$$

为特殊基元素之和。那么，我们有

$$\mu_2(\psi_{\infty 0} \otimes \psi_{0r}) \equiv U\boldsymbol{\xi}_1 + U\boldsymbol{\xi}_2 \mod U^2.$$

事实上，T_{-3}贡献了 $U\boldsymbol{\xi}_1$，而 T_{10}贡献了 $U\boldsymbol{\xi}_2$。

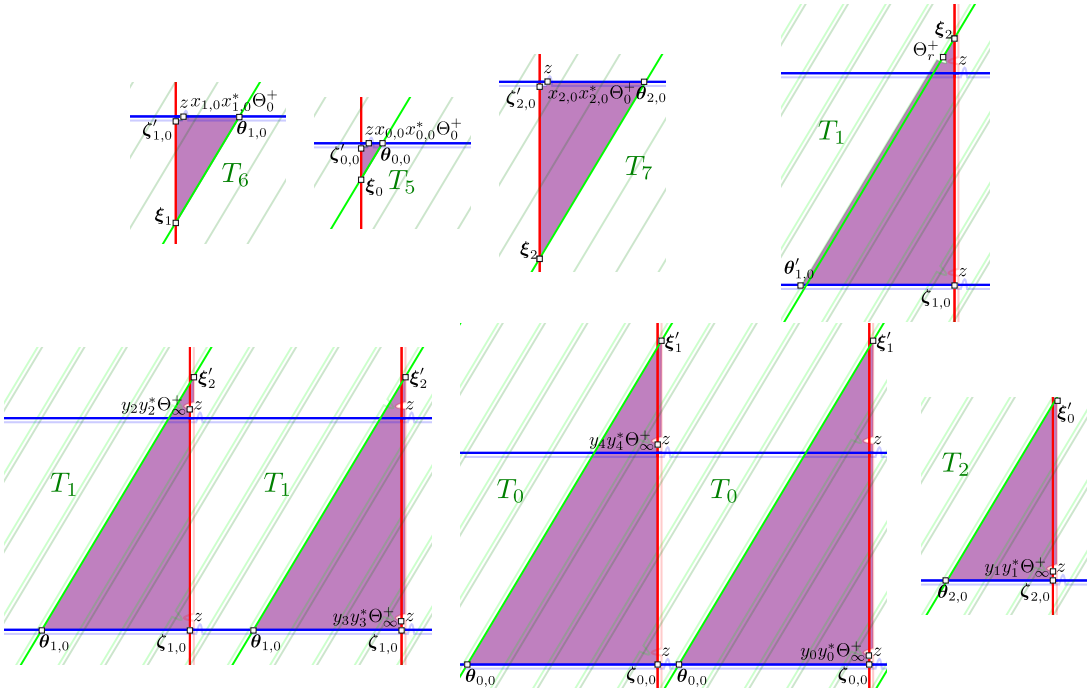


图 5.3。对（p、q、k）=（5、3、0）中贡献于 μ_3的四边形的提升。这些四边形是对三角形的小扰动；对应的三角形以绿色标出。前三个四边形对应μ_3（$\widehat{\psi}_{0r}^0 \otimes \widehat{\psi}_{r\infty}^0 \otimes \widehat{\psi}_{\infty 0}^0{}'$）；第四个四边形对应 μ_3（$\widehat{\psi}_{r\infty}^0 \otimes \widehat{\psi}_{\infty 0}^0 \otimes \widehat{\psi}_{0r}^0{}'$）；最后五个四边形对应 μ_3（$\widehat{\psi}_{\infty 0}^0 \otimes \widehat{\psi}_{0r}^0 \otimes \widehat{\psi}_{r\infty}^0{}'$）。

5.3. 四边形计数映射。在本小节中，我们证明 (5.2)

$\mu_3(\widehat{\psi}_{0r}^k \otimes \widehat{\psi}_{r\infty}^k \otimes \widehat{\psi}_{\infty 0}^k{}') = \mathrm{Id}_{E_0^k}\Theta_0^+$，$\mu_3(\widehat{\psi}_{r\infty}^k \otimes \widehat{\psi}_{\infty 0}^k \otimes \widehat{\psi}_{0r}^k{}') = \Theta_r^+$，$\mu_3(\widehat{\psi}_{\infty 0}^k \otimes \widehat{\psi}_{0r}^k \otimes \widehat{\psi}_{r\infty}^k{}') = \mathrm{Id}_{E_\infty^k}\Theta_\infty^+$.由引理 5.7可知，这表明定理 3.4 (3) 在 u_i、ℓ、v_j、$w_{i和\ell}$ 满足方程（3.2）时成立。

回顾第4.4小节，Maslov 指数为 -1 的四边形对应于一对 (T_n, v)。根据命题 5.9，特殊三角形 (5.1) 在约定 4.12 所给的识别下，$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$恰好是 $\mathbb{T}^2$ 中满足以下条件的三角形 T：其所有顶点都是特殊基元素的提升，且 $^{n}\widetilde{z\,u}(\,)(\widetilde{T}) = 0$。因此，根据命题 4.20，对于 $\boldsymbol{CF}^-(\beta_0^{E_0^k}, \beta_0'^{E_0^k})$ 中的每个基元素 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{CF}^-(\beta_r, \beta_r')$、以及 $\boldsymbol{CF}^-(\beta_\infty^{E_\infty^k}, \beta_\infty'^{E_\infty^k})$ 中的每个基元素，相应地，$\mu_3(\widehat{\psi}_{0r}^k \otimes \widehat{\psi}_{r\infty}^k \otimes \widehat{\psi}_{\infty 0}^k{}')$、$\mu_3(\widehat{\psi}_{r\infty}^k \otimes \widehat{\psi}_{\infty 0}^k \otimes \widehat{\psi}_{0r}^k{}')$、以及 $\mu_3(\widehat{\psi}_{\infty 0}^k \otimes \widehat{\psi}_{0r}^k \otimes \widehat{\psi}_{r\infty}^k{}')$ 中 $\boldsymbol{b}$ 的系数在 $\boldsymbol{b}$ 不是标准元素时为零；若 $\boldsymbol{b}$ 是标准元素，$\widetilde{\ }$则该系数等于满足 T_n 是特殊三角形且 $\widehat{\pi}(v)$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的提升的 (T_n, v) 的数量。$\bar{\ }$因此，方程（5.2）等价于存在奇数个这样的 (T_n, v)。图 5.3 展示了所有对 $(p, q, k) = (5, 3, 0)$ 时对 μ_3 有贡献的四边形的提升、相应的三角形 T_n以及标准基元素 $\boldsymbol{b}$。

为了证明这样的（T_n，v）个数为奇数，方便起见，我们将三角形的 $\pi^{-1}(\beta_0)$-、$\pi^{-1}(\beta_r)$-和 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$-边界视为取 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 系数的一维链 $\widetilde{T}_n$，即视为.....的元素

$$H_1(\pi^{-1}(\beta_0 \cup \beta_r \cup \beta_\infty), \pi^{-1}((\beta_0 \cap \beta_r) \cup (\beta_r \cap \beta_\infty) \cup (\beta_\infty \cap \beta_0)); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

令 ∂_0、∂_r、∂_∞ 分别为特殊三角形的 $\pi^{-1}(\beta_0)$-、$\pi^{-1}(\beta_r)$-和 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$-边界之和。于是，对于每个标准基元素 $\boldsymbol{b} = x_{i,\ell} x_{i,\ell}^* \Theta_0^+$，$\Theta_r^+$，以及 $y_i y_i^* \Theta_\infty^+$，若

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\boldsymbol{b}} \subset \mathbb{T}^2$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的提升集合，那么我们需要证明 $\boldsymbol{b} \cap \partial_0$、$\boldsymbol{b} \cap \partial_r$ 和 $\boldsymbol{b} \cap \partial_\infty$ 分别为奇数。我们分别考虑这三种情形。

情形 $\boldsymbol{b} = x_{i,\ell} x_{i,\ell}^* \Theta_0^+$。$x_{i,\ell} x_{i,\ell}^* \Theta_0^+$ 的提升集合与 $ZZ_k \cap \pi^{-1}(\beta_0)$ 相交一次。我们来证明 $\partial_0 = ZZ_k \cap \pi^{-1}(\beta_0)$。对于每个满足 $s_i \neq 0$ 的 i，若令 $t \in \mathbb{Z}$ 满足 $\Phi_k(H_i)$ 的两个端点为 $\widetilde{\theta}_{i+k}$ 和 $\widetilde{\theta}_{t+k}$，那么三角形 $\widetilde{T}_{i+k}$ 和 $\widetilde{T}_{t+k}$ 的 $\pi^{-1}(\beta_0)$- 边界之和为 $\Phi_k(H_i)$。

情形 $\boldsymbol{b} = \Theta_r^+$。我们先证明 $\partial_r = ZZ_k \cap \pi^{-1}(\beta_r)$：令 $i = 0, \cdots, p-1$ 满足$\sim$ $\sim s_i \neq 0$，并令 $t \in \mathbb{Z}$ 满足 $\Phi_k(L_i)$ 的两个端点为 θ_{i+k} 和 θ_{t+k}。那么，三角形 $\widetilde{T}_{i+k}$ 和 $\widetilde{T}_{t+k}$ 的 $\pi^{-1}(\beta_r)$-边界之和为 $\Phi_k(L_i)$。

现在，我们来证明 ZZ_k 在 $\mathbb{T}^2$ 中的像是一个 β_r。只需对 $k = 0$ 证明这一点，因为 ZZ_k 可由平移 ZZ_0得到。在这种情形下，将这些 L_i投影到 $\mathbb{R}^2/((p, 0)\mathbb{Z} \oplus (0, 1)\mathbb{Z})$：由于每条 H_i的端点都相互识别，投影所得的L_i的并恰好是 $\widetilde{\beta}_r^0$的投影，而它在 $\mathbb{T}^2$中投影为一个 β_r。因此，特别地，Θ_r^+的提升集合与 ZZ_k 恰好相交一次。

情形 $\boldsymbol{b} = y_i y_i^* \Theta_\infty^+$。$y_i y_i^* \Theta_\infty^+$ 的提升集合与 y轴恰好相交一次。我们来证明$\partial_\infty = \widetilde{\beta}_\infty^0$。设 i 满足 $s_i \neq 0$，并设 $t \in \mathbb{Z}$、b，$c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 满足 $\Phi_k(L_i)$的两个端点分别为 $\widetilde{\theta}_{i+k}$ 和 $\widetilde{\theta}_{t+k}$，且它们分别位于 $\widetilde{\beta}_0^b$ 和 $\widetilde{\beta}_0^c$上。设 $V_i \subset \widetilde{\beta}_\infty^0$ 为如下路径所给出的线段：从 $\widetilde{\beta}_0^c \cap \widetilde{\beta}_\infty^0$ 出发，沿 $-y$ 方向前进，直到 $\widetilde{\beta}_0^b \cap \widetilde{\beta}_\infty^0$。那么，三角形 $\widetilde{T}_{i+k}$ 和 $\widetilde{T}_{t+k}$ 的 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$边界之和为 V_i。

至此，方程（5.2）的证明完成。

6. 负号版本

在本节中，我们证明主要局部计算，即定理 3.4。更准确地说，我们证明存在 $u_{i,\ell}$、v_j、$w_{i,\ell} \in \mathbb{F}[\![U]\!]$，使得方程（3.2）和定理 3.4 （2）成立。回顾可知，定理 3.4 确实由此推出：定理 3.4 （1）成立，因为 $\mu_1 \equiv 0$；并且我们已在小节 5.3 中证明了定理3.4 （3）。

~ ~回顾定义 T_n 中的三角形和交点 θ_n，以及定义 4.11中的标准基元素 $\boldsymbol{\theta}_{i,\ell}$、$\boldsymbol{\xi}_j$、$\boldsymbol{\zeta}_{i,\ell}$。4.14。

6.1. $k=0$ 的三角形计数映射。在命题 4.15 中，我们写出了三个三角形计数映射的显式公式：方程 (4.1)、(4.2) 和 (4.3)。在小小节 6.1.1 中，我们证明，对于任意的 $(u_{i,\ell})$ 和 $(w_{i,\ell})$，都存在 (v_j)，使得方程 (3.2) 对 (v_j) 成立，且方程 (4.1) 和 (4.2) 均为零。在小小节 6.1.2 中，我们证明，存在 $(u_{i,\ell})$ 和 $(w_{i,\ell})$，使得方程 (3.2) 对 $(u_{i,\ell})$ 和 $(w_{i,\ell})$ 成立，且方程 (4.3) 为零。作为一个例子，我们在例 6.2 和 6.3 中对 $(p,q)=(5,3)$ 展开论证，并证明注 3.6。

在本小节中，ℓ，i，$j\in\mathbb{Z}$ 始终表示满足 $i=n$ 模 $p\in\{0,\cdots,p-1\}$、$j=n$ 模 $q\in\{0,\cdots,q-1\}$，且 $n=\ell p+i$ 的整数。

6.1.1. 三角形计数映射（4.1）和（4.2）。考虑 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性映射

$$F:=\sum_{n\in\mathbb{Z}}U^{z_n}f_{i,\ell}e^*_{j-p}:\bigoplus_{j=0}^{q-1}e_j\mathbb{F}[\![U]\!]\to\bigoplus_{i=0}^{p-1}\bigoplus_{\ell=0}^{s_i-1}f_{i,\ell}\mathbb{F}[\![U]\!].$$

这里，e 的指标按模 q 解释，f 的指标属于定义 3.1 中的指标集 I，并令 $f_{i,\ell}:=0$（若 $s_i=0$）。于是，方程（4.1），分别地，（4.2）可写为$F(\sum_{j=0}^{q-1}v_je_j)$，其中我们将 $f_{i,\ell}$ 与

$$\sum_{d=0}^{s_i-1}u_{i,d+\ell}\boldsymbol{\zeta}_{i,d},\ \text{resp.}\ \sum_{d=0}^{s_i-1}w_{i,d}\boldsymbol{\theta}_{i,d+\ell}.$$

下面证明 $\ker F\neq 0$。等价地，我们证明 $\operatorname{rank}_{\mathbb{F}[U]}\ker F\neq 0$。关键是利用一个对合来定义 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性子空间

$$A\leq\operatorname{dom}F,\ B\leq\operatorname{codom}F$$

使得 $F(A)\leq B$ 并且 秩$B<$ 秩A。虽然我们通过代数方法验证了所有内容（这部分推迟到附录A），但这个对合有一个令人满意的“图示解释”：参见小节 6.3.1。

考虑 $n\mapsto p+q-1-n$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的对合。该对合在 $p+q$ 为奇数时有一个不动点，在 $p+q$ 为偶数时没有不动点。如果 $p+q$ 为奇数，令 $\ell_0,i_0\in\mathbb{Z}$ 满足$(p+q-1)/2=\ell_0p+i_0$并且 $i_0\in\{0,\cdots,p-1\}$。那么，根据引理 A.1 和 A.3)，我们有

$$F=\sum_{n\geq\lfloor\frac{p+q-1}{2}\rfloor+1}U^{z_n}\left(f_{i,\ell}e^*_{j-p}+f_{q-i-1,-\ell}e^*_{-j-1}\right)+\begin{cases}U^{z_{(p+q-1)/2}}f_{i_0,\ell_0}e^*_{(-p+q-1)/2} & \text{if } p+q \text{ is odd}\\ 0 & \text{if } p+q \text{ is even}\end{cases}.$$

此外，如果 $p+q$ 为奇数，那么$U^{z_{(p+q-1)/2}}f_{i_0,\ell_0}e^*_{(-p+q-1)/2}\neq 0$ (即 $s_{i_0}\neq 0$) 当且仅当 $q>p$，由引理 A.5可知。

现在，我们定义 A 和 B，并计算它们的秩。

定义 A 并计算秩A。令

$$A:=\operatorname{span}\langle e_j+e_{-p-j-1}:j=0,\cdots,q-1\rangle\oplus\operatorname{span}\langle e_j:j\equiv -p-j-1 \mod q\rangle.$$

如果 $q=2q'+1$ 是奇数，那么 $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上的对合 $j\mapsto -(j+p+1)$ 有一个不动点。因此，秩 $A=q'+1$。

如果 $q=2q'$ **是偶数**，那么 p 是奇数（因为 p 和 q 互素），因此上述对合有两个不动点。因此，秩$A=q'+1$。

定义 B 并计算 秩B。 我们分成几种情形。首先，令

$$B' := \operatorname{span}\left\langle f_{i,\ell}+f_{q-i-1,-\ell} : i=0,\cdots,p-1,\ \ell=0,\cdots,s_i-1\right\rangle.$$

若 $p+q$ 为偶数，则令 $B=B'$。由于 p 和 q 互素，因此它们都是奇数。令$q=2q'+1$。于是， $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上的对合 $i\mapsto q-i-1$ 有一个不动点，即 q'。由引理 A.4 可知，$s_{q'}$ 为奇数，因此指标集 I 上的对合 $(i,\ell)\mapsto(q-i-1,-\ell)$ 有一个不动点。因此，$\operatorname{rank}B=(q-1)/2=q'$。

若 $p+q$ **为奇数**，令

$$B := B'\oplus \operatorname{span}\left\langle f_{i_0,\ell_0}\right\rangle.$$

回顾一下，$f_{i_0,\ \ell_0}\neq 0$ （即 $s_{i_0}\neq 0$）当且仅当 $p<q$ （引理 A.5）。我们进一步分成几种情形。

- p 为偶数， $q=2q'+1$ 为奇数： $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上的对合 $i\mapsto q-i-1$ 有两个不动点q' 和 i_0。由引理 A.4 和 A.5 可得：– 若 $p>q$，则 I上的对合 $(i,\ell)\mapsto(q-i-1,-\ell)$ 有一个不动点（其第一坐标为 q'）。因此，$\operatorname{rank}B=(q-1)/2=q'$。– 若 $p<q$，则上述对合在 I 上有三个不动点，其中一个是 (i_0,ℓ_0)：q' 贡献一个， i_0 贡献两个。因此，$\operatorname{rank}B=(q-3)/2+1=q'$。
- p 为奇数， $q=2q'$ 为偶数： $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上的对合 $i\mapsto q-i-1$ 有一个不动点 i_0。由引理 A.5 可得：– 若 $p>q$，则 I上的对合 $(i,\ell)\mapsto(q-i-1,-\ell)$ 没有不动点。因此，$\operatorname{rank}B=q/2=q'$。– 若 $p<q$，则上述对合在 I 上有两个不动点，其中一个是 (i_0,ℓ_0)。因此，$\operatorname{rank}B=(q-2)/2+1=q'$。

在所有情形下，我们都有

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B+1>\operatorname{rank}B \text{ and } F(A)\le B,$$

因此，$\ker F$ 的秩为 $\neq 0$。

现在，设 $\sum_{j=0}^{q-1}v_je_j\neq 0$是 $\ker F$中的任意非零元素。必要时除以某个 U^m，我们可以令 $\sum_{j=0}^{q-1}v_je_j\neq 0$ 模 U。下面证明方程 (3.2) 对 (v_j)成立。由于 $z_n=0$当且仅当 $n\in\{0,\cdots,p+q-1\}$，我们有

$$F\otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]}\mathbb{F}=\sum_{i=0}^{\min(p,q)-1}\sum_{\ell=0}^{s_i}f_{i,\ell}e^*_{(\ell-1)p+i}.$$

因此， $F(\sum_{j=0}^{q-1}v_je_j)\equiv 0$ 模 U 当且仅当对所有 $i=0,\ \cdots,\ \min(p,\ q)-1$，都有 $v_{-p+i}\equiv v_{(s_i-1)p+i}$ 模 U 并且对所有 $t=0,\ \cdots,\ s_i-2$，都有 $v_{tp+i}\equiv 0$ 模 U。由引理 A.6，我们有

$$\sum_{j=0}^{q-1}v_je_j\equiv\sum_{i=0}^{\min(p,q)-1}e_{-p+i}=e_{-1}+e_{-2}+\cdots+e_{-\min(p,q)} \bmod U.$$

因此，方程（3.2）对 (v_j) 成立。

注 6.1。 事实上，我们已经证明 $\ker(F\otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]}\mathbb{F})$ 是一维的，且由 $e_{-1}+e_{-2}+\cdots+e_{-\min(p,q)}$ 张成。由于

$$0<\operatorname{rank}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}\ker F\le\dim_{\mathbb{F}}\ker\left(F\otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]}\mathbb{F}\right)=1,$$

我们有秩$_{\mathbb{F}[\![U]\!]}$ 核$F=1$。

例 6.2. 让我们对 $(p,q)=(5,3)$ 进行本小节中的论证，并检验备注 (v_j) 中的 3.6 是否成立。相对于基 (e_0,e_1,e_2) 和 $(f_{0,0},f_{1,0},f_{2,0})$，线性映射 F 由矩阵给出

$$\begin{pmatrix} \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+5}} & \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m}} & \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+10}} \\ \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+11}} & \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+6}} & \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+1}} \\ \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+2}} & \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+12}} & \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+7}} \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

由引理 A.1，$z_n=z_{7-n}$. 因此，$\sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+r}}=\sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+7-r}}$ 且 $\sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+11}}=0$，于是令

$$a:=\sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+5}},\ b:=\sum_{m\in\mathbb{Z}}(U^{z_{15m}}+U^{z_{15m+10}}),$$

则有

$$F(e_0)=a(f_{0,0}+f_{2,0}),\ F(e_1+e_2)=b(f_{0,0}+f_{2,0}),$$

因此 $F(be_0+ae_1+ae_2)=0$。现在，利用 z_n 在引理 A.1证明中的描述，我们可以验证，对于 $m\geq 0$ 和 $r\in\{0,\cdots,14\}$，有

$$z_{15m+r+7}=\frac{15m^2+(2r+7)m}{2}+z_{r+7}, \tag{6.2}$$

其中 z_7、$\cdots$、z_{21} 分别为 0、1、1、1、2、2、3、4、4、5、6、7、8、9、10。因此，(3.5) 中 a、b的公式成立。

6.1.2. 三角形计数映射（*4.3*）。考虑伴随 F^* 的 F，即

$$F^*=\sum_{n\in\mathbb{Z}} U^{z_n} e^*_{j-p} f_{i,\ell} : \bigoplus_{i=0}^{p-1}\bigoplus_{\ell=0}^{s_i-1} f^*_{i,\ell}\mathbb{F}[\![U]\!] \to \bigoplus_{j=0}^{q-1} e^*_j\mathbb{F}[\![U]\!].$$

那么，方程（4.3）可写为

$$F^*\left(\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{\ell=0}^{s_i-1}\left(\sum_{d=0}^{s_i-1} u_{i,d+\ell}w_{i,d}\right) f^*_{i,\ell}\right),$$

其中我们将 e^*_j 与 $\boldsymbol{\xi}_j$等同。

由于 F^* 的定义域和陪域具有相同的秩，

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}\ker F^*=\operatorname{rank}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}\ker F=1.$$

因此，存在非零的$\sum_{i,\ell} t_{i,\ell} f^*_{i,\ell}\in\ker F^*$。现在，设 $(u_{i,\ell})$ 、 $(w_{i,\ell})$ 满足

$$\sum_{d=0}^{s_i-1} u_{i,d+\ell}w_{i,d}=t_{i,\ell}.$$

例如，可以令

$$u_{i,\ell}=\begin{cases}1 & \text{if } \ell=0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},\ w_{i,\ell}=t_{i,-\ell},\ \textbf{or}\ u_{i,\ell}=t_{i,\ell},\ w_{i,\ell}=\begin{cases}1 & \text{if } \ell=0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}. \tag{6.3}$$

这对应于方程（3.3）的两种情形。

现在，令 $\sum_{i,\ell} t_{i,\ell} f^*_{i,\ell}\neq 0$ 为 $\ker F^*$ 中任意一个非零元素。必要时除以某个 U^m，我们可以令 $\sum_{i,\ell} t_{i,\ell} f^*_{i,\ell}\neq 0 \bmod U$。下面说明，若令 $(u_{i,\ell})$ 和 $(w_{i,\ell})$ 为

方程 (6.3) 中的，则方程 (3.2) 对 $(u_{i,\ell})$ 和 $(w_{i,\ell})$ 成立。由于 $z_n = 0$ 当且仅当$n \in \{0, \cdots, p+q-1\}$, 因此我们有

$$F^* \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F} = \sum_{i=0}^{\min(p,q)-1} \sum_{\ell=0}^{s_i} e^*_{(\ell-1)p+i} f_{i,\ell}.$$

因此，$F^*(\sum_{i,\ell} t_{i,\ell} f^*_{i,\ell}) \equiv 0$ 模 U 当且仅当对所有 $i = 0, \cdots, \min(p, q) - 1$，都有 $t_{i,1} = \cdots = t_{i,s_i-1} = 0$，并且若 $i' \in \{0, \cdots, \min(p, q) - 1\}$ 满足 $i' \equiv s_i p + i$ 模 q（由引理 A.6可知其存在），则 $t_{i,0} = t_{i',0}$。由引理 A.6，可得

$$\sum_{i,\ell} t_{i,\ell} f^*_{i,\ell} \equiv \sum_{i=0}^{\min(p,q)-1} f^*_{i,0} \bmod U,$$

因此方程（3.2）对 $(u_{i,\ell})$ 和 $(w_{i,\ell})$ 成立。

例 6.3。我们来验证方程（3.4）必定成立，并且注 3.6 中的 $(u_{i,\ell})$ 和 $(w_{i,\ell})$ 可行。令 $(p, q) = (5, 3)$。那么，相对于基 $(f^*_0, 0, f^*_1, 0, f^*_2, 0)$ 和 (e^*_0, e^*_1, e^*_2)，线性映射 F^* 由矩阵（6.1）的转置给出。因此，

$$F^*(f^*_{0,0} + f^*_{2,0}) = b(e^*_1 + e^*_2), \quad F^*(f^*_{1,0}) = c(e^*_1 + e^*_2),$$

其中 $c := \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{z_{15m+6}}$。因此，$F^*(cf^*_{0,0} + bf^*_{1,0} + cf^*_{2,0}) = 0$ 而 c 在（3.5）中的公式由方程（6.2）得出。

6.2. **一般 k 的三角形计数映射。** 本小节中，我们考虑一般 $k = 0, \cdots, p-1$ 的三角形计数映射。关键在于，我们进行的计算与 $k = 0$ (命题 6.4) 中的计算完全相同。

命题 6.4. 为简化记号，设 $\gamma_0^{F_0^t}, \gamma_1^{F_1^t}, \gamma_2^{F_2^t}$ 是 $\beta_0^{E_0^t}, \beta_r^{\mathbb{F}[\![U]\!]}, \beta_\infty^{E_\infty^t}$ 关于 $t = 0, k$ 的一个循环置换。令

$$\boldsymbol{CF}^-_{\mathrm{std}}(\gamma_u^{F_u^t}, \gamma_v^{F_v^t}) \le \boldsymbol{CF}^-(\gamma_u^{F_u^t}, \gamma_v^{F_v^t})$$

为由标准基元素张成的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性子空间。定义

$$m : \boldsymbol{CF}^-_{\mathrm{std}}(\gamma_u^{F_u^0}, \gamma_v^{F_v^0}) \to \boldsymbol{CF}^-_{\mathrm{std}}(\gamma_u^{F_u^k}, \gamma_v^{F_v^k}) :$$
$$\boldsymbol{\theta}_{i,\ell} \mapsto \begin{cases} \boldsymbol{\theta}_{i+k,\ell} & \text{if } i \in \{0, \cdots, p-k-1\} \\ \boldsymbol{\theta}_{i+k,\ell+1} & \text{if } i \in \{p-k, \cdots, p-1\} \end{cases}, \ \boldsymbol{\xi}_j \mapsto \boldsymbol{\xi}_{j+k}, \ \boldsymbol{\zeta}_{i,\ell} \mapsto \boldsymbol{\zeta}_{i+k,\ell}.$$

于是，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{CF}^-_{\mathrm{std}}(\gamma_0^{F_0^0}, \gamma_1^{F_1^0}) \otimes \boldsymbol{CF}^-_{\mathrm{std}}(\gamma_1^{F_1^0}, \gamma_2^{F_2^0}) & \xrightarrow{\mu_2} & \boldsymbol{CF}^-_{\mathrm{std}}(\gamma_0^{F_0^0}, \gamma_2^{F_2^0}) \\ \downarrow m & & \downarrow m \\ \boldsymbol{CF}^-_{\mathrm{std}}(\gamma_0^{F_0^k}, \gamma_1^{F_1^k}) \otimes \boldsymbol{CF}^-_{\mathrm{std}}(\gamma_1^{F_1^k}, \gamma_2^{F_2^k}) & \xrightarrow{\mu_2} & \boldsymbol{CF}^-_{\mathrm{std}}(\gamma_0^{F_0^k}, \gamma_2^{F_2^k}) \end{array}$$

证明。设 $z(k)$ 为 $z(u) \subset \mathbb{T}^2$ 中对应于 4.1 小节所述单值化的集合 E^k_∞ (定义3.3)。那么，关键结论是

$$n_{\widetilde{z(k)}}(\widetilde{T}_{n+k}) = n_{\pi^{-1}(z)}(\widetilde{T}_n). \tag{6.4}$$

公式（6.4）可以通过代数方法验证；我们在引理A.2中写出代数证明。不过，我们认为有一种更令人满意的“图示证明”；我们在小节 6.3.2中给出该证明。

为了证明该命题可由公式（6.4）推出，我们使用命题 4.10。设ℓ、i、j、ℓ'、i'、$j' \in \mathbb{Z}$满足 $i := n$模 p、$j := n$模 q、$n = \ell p + i$、$i' := (n+k)$ 模 p、$j' := (n+k)$ 模 q，且 $n+k = \ell' p + i'$。那么，如同命题 4.15 的证明中那样，$\mathbb{T}^2$中的三角形T_n对 $t = 0$的标准基元素 $\boldsymbol{b}_0$、$\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$具有 $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$-提升，当且仅当

$$\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\} = \{\boldsymbol{\theta}_{i,d+\ell}, \boldsymbol{\xi}_{j-p}, \boldsymbol{\zeta}_{i,d}\}$$

对于某个 $d = 0, \cdots, s_i - 1$，T_{n+k} 对标准基元素 $\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ 存在一个 $\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$-提升，当且仅当 $t = k$

$$\{\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\} = \{\boldsymbol{\theta}_{i',d+\ell'}, \boldsymbol{\xi}_{j'-p}, \boldsymbol{\zeta}_{i',d}\}$$

对于某个 $d = 0, \cdots, s_i - 1$。因此，命题得证。 □

由于 $m(\psi^0_{0r}) = \psi^k_{0r}$，$m(\psi^0_{r\infty}) = \psi^k_{r\infty}$，且 $m(\psi^0_{\infty 0}) = \psi^k_{\infty 0}$，因此选取$u_{i,\ell}$，$v_j$，$w_{i,\ell}$ 第 6.1 小节中的这些元素，可使三角形计数映射对一般的 $k = 0, \cdots, p-1$ 同样为零。

6.3. 图示证明。

6.3.1. 对合。 我们在第 6.1.1 小节中考虑的对合有一种令我们颇为满意的几何解释。我们将稍微修改 Heegaard 图，然后~在 $\mathbb{T}^2$上展示一个对合。这尤其说明了 $z_n = z_{p+q-1-n}$ （引理 A.1）。

~ ~回忆定义 θ_t 中的交点4.11。令 M 为 θ_0 的一个中点，并且 θ_{p+q-1}（它在模$(0, p/2)$平移的意义下定义良好）。此外，回忆小节4.1 中的记号，y轴记作 $\widetilde{\beta}^0_\infty \subset \pi^{-1}(\beta_\infty) \subset \widetilde{\mathbb{T}^2}$。

首先，$\widetilde{\beta}^0_\infty$ 与 $\widetilde{\theta}_{p-1}$ 和 $\widetilde{\theta}_p$的中点相交。水平移动 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$，直到经过点 $\widetilde{\beta}^0_\infty$ M (见图6.1)。注意，若是偶数，则这等价于 $p+q$ $\widetilde{\beta}^0_\infty$~ ~经过 $\theta_{(p+q)/2-1}$ 和 $\theta_{(p+q)/2}$的中点；若 $p+q$ 是奇数，则这等价于$\widetilde{\beta}^0_\infty$ 经过 $\widetilde{\theta}_{(p+q-1)/2}$。另请注意，若 $p+q$ 是奇数，则存在一个退化三角形：~的三个顶点 $T_{(p+q-1)/2}$ 重合。

移动时 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$，按主张 6.5 中的方式移动基点 $\pi^{-1}(z)$ 。

主张 6.5。 移动 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$时，可以移动基点 $\pi^{-1}(z)$，使基点不穿过 $\pi^{-1}(\beta_0 \cup \beta_r \cup \beta_\infty)$，当且仅当 $\widetilde{\beta}^0_\infty$ 严格位于 $\widetilde{\theta}_{-1}$ 和 $\widetilde{\theta}_{p+q}$之间。

~证明。 首先，这种移动可行等价于以下条件：对于 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$的每个连通分支 β^i_∞以及由 $\pi^{-1}(\beta_0 \cup \beta_r)$和一点 $\tilde{z} \in \pi^{-1}(z) \cap P$围成的每个平行四边形 P，(1) 若点 $\tilde{z}$ 位于 $\widetilde{\beta}^i_\infty$右侧，则 $\widetilde{\beta}^i_\infty$ 不会经过该平行四边形 P最右端的点；(2) 若点 $\tilde{z}$ 位于 $\widetilde{\beta}^i_\infty$左侧，则 $\widetilde{\beta}^i_\infty$ 不会经过该平行四边形 P最左端的点。由于平移 $\mathbb{Z}^2$给出了一个对称性，只需检查一个顶点的 x坐标与 $\widetilde{\theta}_{p-1}$、$\widetilde{\theta}_p$、$\widetilde{\theta}_{p+q-1}$、$\widetilde{\theta}_{p+q}$相同的平行四边形即可。因此，该条件等价于 $\widetilde{\beta}^0_\infty$ 始终位于$\widetilde{\theta}_{p+q}$ 左侧，并且 $\widetilde{\beta}^1_\infty = \widetilde{\beta}^0_\infty + (1, 0)$位于 $\widetilde{\theta}_{p-1}$右侧。由此得证。□

现在，我们声称，经过上述操作后，可以将基点移动到由 $\pi^{-1}(\beta_0)$ 和 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$ 围成的正方形中心，而不穿过 $\pi^{-1}(\beta_0 \cup \beta_r \cup \beta_\infty)$（见图 6.1）。在移动 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$ 的过程中，假设 $\widetilde{\beta}^0_\infty$ 当前位于 $\widetilde{\theta}_{t-1}$ 和 $\widetilde{\theta}_t$ 之间。那么，$\pi^{-1}(\beta_r)$ 将由 $\pi^{-1}(\beta_0 \cup \beta_\infty)$ 围成的每个最小正方形划分为 $p+q+1$ 个区域。按照从右下角（第 0 个区域）到左上角（第 $p+q$ 个区域）的顺序排列它们：见图 6.2。于是，基点位于第 t 个区域。因此，如果 $p+q$ 是偶数，那么当 $\widetilde{\beta}^0_\infty$ ~ ~经过 $\theta_{(p+q)/2-1}$ 和 $\theta_{(p+q)/2}$ 的中点时，基点位于中间区域。

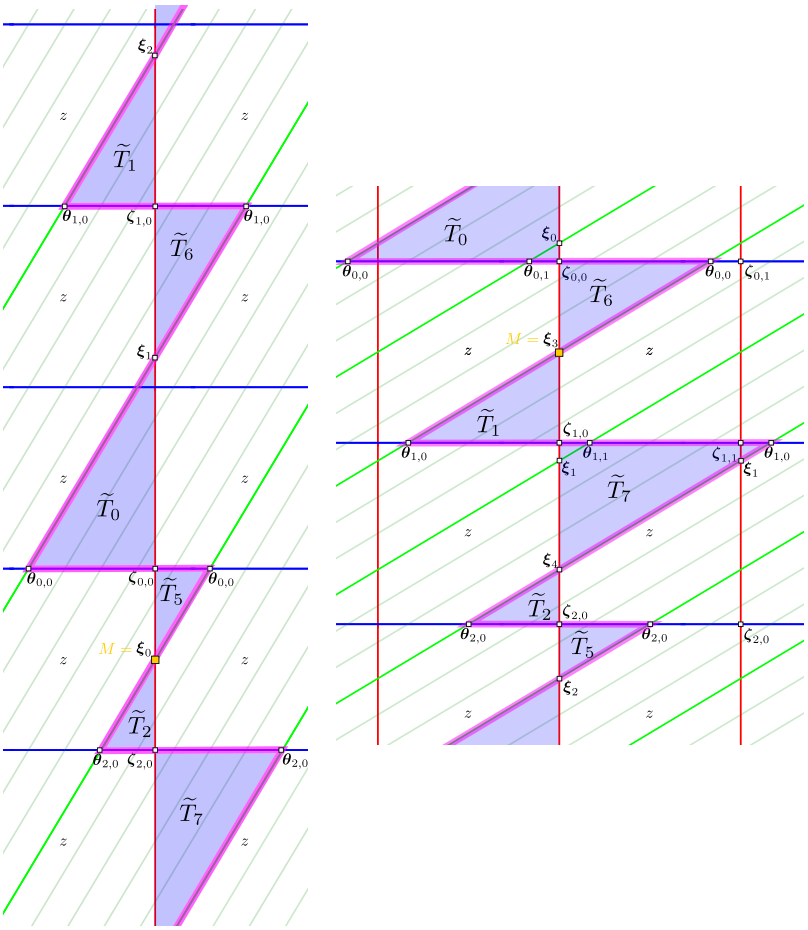


图 6.1. 对合的几何解释示意图，适用于 $(p,\ q) = (5,\ 3)$ 和 $(3,\ 5)$。绕 M 旋转 π 会诱导出该对合。

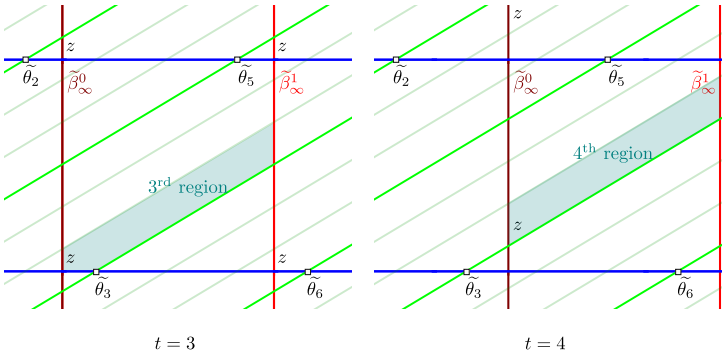


图 6.2. 左：当 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$ 位于 $\widetilde{\theta}_2$ 和 $\widetilde{\theta}_3$ 之间时，$(p,\ q) = (3,\ 5)$。右：当 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$ 位于 $\widetilde{\theta}_3$ 和 $\widetilde{\theta}_4$ 之间时，$(p,\ q) = (3,\ 5)$

如果 $p+q$ 是奇数，那么若 (A) $\widetilde{\beta}^0_\infty$ 位于 $\widetilde{\theta}_{(p+q-1)/2-1}$ 和 $\widetilde{\theta}_{(p+q-1)/2}$ 之间，则基点位于第 $(p+q-1)/2$ 个区域。若 (B) $\widetilde{\beta}^0_\infty$ 经过 $\widetilde{\theta}_{(p+q-1)/2}$，那么 $\pi^{-1}(\beta_r)$ 将由 $\pi^{-1}(\beta_0 \cup \beta_\infty)$ 围成的每个最小正方形划分为 $p+q$ 个区域。按照从右下角（第 0 个

区域）和左上方（第 $p+q-1$ 个区域），与之前一样。在将 $\widetilde{\beta}^0_\infty$ 向右移动、从 (A) 到 (B) 的过程中，第 $p+q$ 个区域消失。基点仍位于第 $p+q-1/2$ 个区域中，也就是中间区域。

现在，旋转 $R\colon \widetilde{\mathbb{T}^2} \to \widetilde{}$ 以点 M 为中心将 $\mathbb{T}^2$ 旋转 π，就是我们所需的对合。首先，R 固定 $\widetilde{\beta}^0_r$，因为它是旋转 π，并交换 $\widetilde{\theta}_0$ 和 $\widetilde{\theta}_{p+q-1}$，而它们都在 $\widetilde{\beta}^0_r$ 上。它固定 $\pi^{-1}(\beta_0)$ 和 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$，因为 $M \in \pi^{-1}(\beta_0 \cap \beta_\infty) + \frac{1}{2}\mathbb{Z}^2$。由于它交换 $\widetilde{\theta}_0$ 和 $\widetilde{\theta}_{p+q-1}$，因此应交换 $\widetilde{\theta}_n$ 和 $\widetilde{\theta}_{p+q-1-n}$，进而交换 T_n 和 $T_{p+q-1-n}$。这说明 $z_n = z_{p+q-n-1}$。$s_i = s_{q-i-1}$ 也可由此得出，因为我们本可以在移动 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$ 之后定义特殊基元素；而特殊基元素的提升所对应的交点集合在 R 下不变，因为其定义在 R 下不变。

6.3.2. 方程（6.4）。方程（6.4）也有一个令人满意的图示证明。我们沿用小节 6.3.1 中的记号，并采取类似的步骤：将 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$ 向左移动，使 $\widetilde{\beta}^0_\infty$ 与 x 轴相交于 $\widetilde{\theta}_{p-k-1}$ 和 $\widetilde{\theta}_{p-k}$ 之间，并将其记作 $\pi^{-1}(\beta_\infty)_k$（见图 6.3（b））。此外，移动基点 $\pi^{-1}(z)$，使其不与 $\pi^{-1}(\beta_0 \cup \beta_r \cup \beta_\infty)$ 相交；根据命题 6.5，这是可能的。令 $T_{n,k}$ 为此新图中的三角形 T_n。于是，我们有

$$n_{\pi^{-1}(z)}(\widetilde{T}_{n,k}) = n_{\pi^{-1}(z)}(\widetilde{T}_n). \tag{6.5}$$

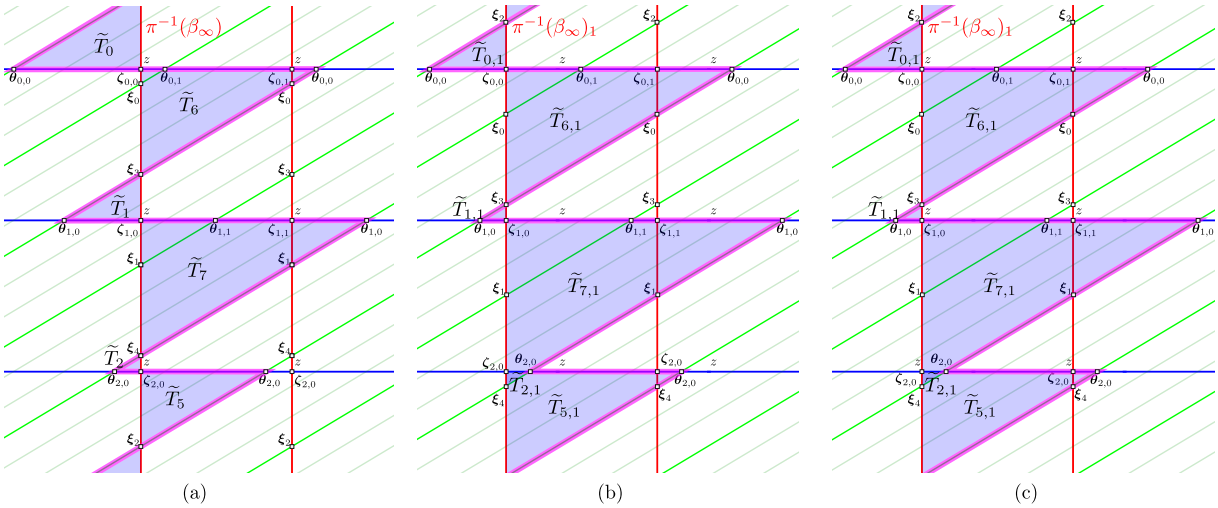


图 6.3. 命题 6.4的证明图示，其中 $(p,q) = (3,5)$。（a）：原始图示（$k=0$）；（b）：$k=1$，将 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$（c）：$k=1$，将 $\pi^{-1}(\beta_\infty)$ 和基点移动后（比较图 5.2的中间图）

根据子小节 6.3.1，基点位于由 $\pi^{-1}(\beta_0 \cup \beta_\infty)$ 界定的每个最小正方形的第 $(p-k)$ 个区域。由于 $p-k \le p$，可以在不穿过 $\pi^{-1}(\beta_0 \cup \beta_\infty) \cup \widetilde{\beta}^0_r$ 的情况下，将基点移动到第 0 个或第 p 个区域，因此可以将其移到 $\pi^{-1}(\beta_\infty)_k$ 的正右侧，或 $\pi^{-1}(\beta_\infty)_k$ 的正左侧（见图 6.3 (c)）。将这些新基点的集合记为 $\pi^{-1}(z)_k$。主要观察结果如下述断言所示：

断言 6.6。存在一个将 $\mathbb{T}^2$ 映射到

$$(\widetilde{\mathbb{T}^2}, \pi^{-1}(\beta_0), \widetilde{\beta}^0_r, \pi^{-1}(\beta_\infty)_k, \pi^{-1}(z)_k) \to (\widetilde{\mathbb{T}^2}, \pi^{-1}(\beta_0), \widetilde{\beta}^0_r, \pi^{-1}(\beta_\infty)_0, \widetilde{z(k)}). \tag{6.6}$$

此外，该映射将 $T_{n,\,k}$ 映射到 T_{n+k}。

证明。考虑平移 $\Phi_k:\ \mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$，它将 θ_0 映射到 θ_k。于是，$\Phi_k(\theta_i)=\theta_{i+k}$，并且显然，$\pi^{-1}(\beta_0)$ $\widetilde{\beta}^0_r$、$\pi^{-1}(\beta_\infty)_k$ 分别映射到 $\pi^{-1}(\beta_0)$ $\widetilde{\beta}^0_r$、$\pi^{-1}(\beta_\infty)_0$,。因此，Φ_k 将 $\widetilde{T}_n$、$_k$ 映射到 $\widetilde{T}_{n+k}$。我们只需验证 $\pi^{-1}(z)_k$ 映射到 $\widetilde{z\ k}(\ )$。由于 $\pi^{-1}(z)_k$和 $z(k)$在平移 $(1,0)\mathbb{Z}$下均保持不变，它们的位置（即对每一行而言，它们位于 $\pi^{-1}(\beta_\infty)_k$ 和 $\pi^{-1}(\beta_\infty)_0$的左侧还是右侧）由它们在第零列上的位置决定。因此，根据推论 5.6，它们的位置由以下条件确定：$\widetilde{T}_0$、$_k$、$\widetilde{T}_1$、$_k$、$\cdots$、$\widetilde{T}_{p+q-1}$、$_k$与 $\pi^{-1}(z)_k$不相交，且 $\widetilde{T}_k$、$\widetilde{T}_{k+1}$、$\cdots$、$\widetilde{T}_{k+p+q-1}$与 $\widetilde{z\ k}(\ )$不相交。由于 Φ_k 将 $\widetilde{T}_n$、$_k$ 映射到 $\widetilde{T}_{n+k}$，我们得到它将 $\pi^{-1}(z)_k$ 映射到 $\widetilde{z\ k}(\ )$。□

现在，我们有

$$n_{\widetilde{z(k)}}(\widetilde{T}_{n+k})=n_{\pi^{-1}(z)}(\widetilde{T}_{n,k})=n_{\pi^{-1}(z)}(\widetilde{T}_n).$$

其中第一个等号由以下事实得出：$T_{n,\ k}$ 在平移下映射为 T_{n+k}（6.6），第二个等号则是方程（6.5）。

7. Examples

本节中，我们针对1.3 证明定理 $(p,q)=(5,3)$ 以及 $k=0,1,2$，分别考虑平凡结 O 和右手三叶结 T 的塞弗特框架。这些情形可以通过涉及绝对 $\mathbb{Q}$分次的纯形式论证计算得出，如 [OS03第 8]节所示。

7.1. 情形 $k=0$。

首先，我们重述特殊情形下的定理 1.1，其中 $p\geq q$, $Y=S^3$，且框架 λ 为塞弗特框架。

推论 7.1（主定理：针对 $p\geq q$, $k=0$，以及 0-框架纽结于 S^3）。设 K 是S^3中的一个纽结。那么，对于所有互素正整数 $p\geq q$，存在一个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性正合三角

$$\begin{array}{ccc}\bigoplus_{j=0}^{q-1}\boldsymbol{HF}^-(S^3_0(K)) & \longrightarrow & \boldsymbol{HF}^-(S^3_{p/q}(K))\\ & \swarrow\quad\searrow & \\ & \bigoplus_{i=0}^{p-1}\mathbb{F}[\![U]\!] & \end{array}$$

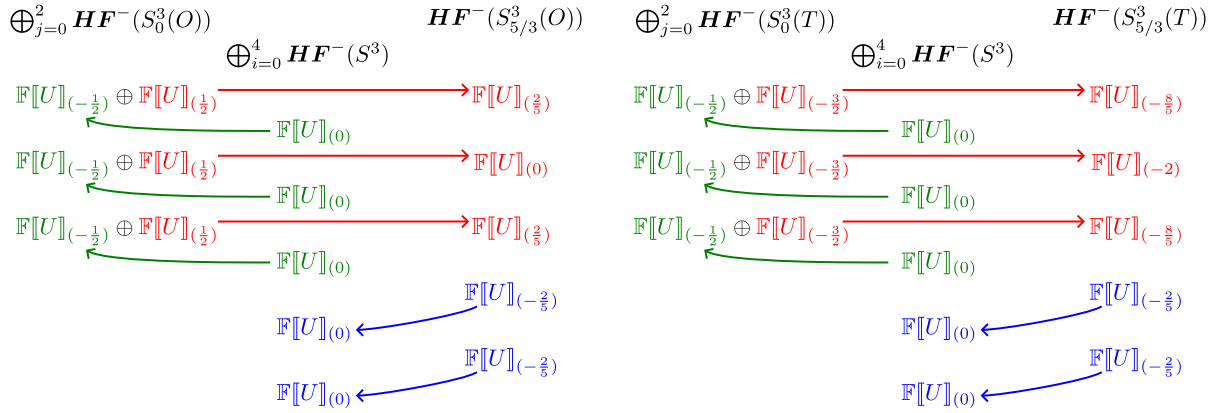


图 7.1。平凡结 $O\subset S^3$ 和右手三叶结 $T\subset S^3$的有理手术恰当三角，其中（p, q, k）=（5，3，0）。

情形 $(p,\ q,\ k)=(5,\ 3,\ 0)$如图 7.1 所示。这里，$\mathbb{F}[\![U]\!]_{(d)}$ 表示最高分次元素 $1\in\mathbb{F}[\![U]\!]$ 在分次 d 中有支撑。对于每种颜色（红色、蓝色、绿色），其中的箭头

颜色表示该颜色中的群之间的同构。注意，这些映射一般而言并非关于同调分次的齐次映射，而只是滤过的：它们是在 $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 中乘以一个单位元。注意，在图 7.1 左侧的每个箭头，在图 7.1 右侧都有一个对应箭头；它们的滤过次数相同。

注意，图 7.1 中的正合三角分解为五个正合三角；事实上，与[OS04b第 9], 节类似，我们可以纯粹通过组合方法证明，我们的有理手术正合三角分解为 p 多个正合三角，它们由 Spin^c-分解给出。

推论 *7.2*（推论 *7.1* 的 *Spin^c*-分解）。设 K 是 S^3中的一个纽结，且 $p \geq q$ 是互素正整数。那么，存在同一化 *Spin^c*$(S^3_0(K))$ $\cong \mathbb{Z}$ 和 *Spin^c*$(S^3_{p/q}(K))$ $\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，使得对每个 $i = 0$、$\cdots$、$p-1$，都有一个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性正合三角

$$\bigoplus_{-qt\in\{i,i+1,\cdots,i+q-1\} \bmod p} \boldsymbol{HF}^-(S^3_0(K);t) \longrightarrow \boldsymbol{HF}^-(S^3_{p/q}(K);i)$$
$$\mathbb{F}[\![U]\!]$$

7.2. 情形 $(p,q,k) = (5,3,1)$ 和 $(5,3,2)$。在这些情形下，方便的是，$\boldsymbol{HFK}^-_{p,q,k}(S^3,K)$ 同构于 $2k/p$-修正纽结 Floer 同调 $\frac{2k}{p}\boldsymbol{HFK}^-(S^3,K)$（定义 1.10）。事实上，若将 $\mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!]$ 视为一个 $\mathbb{F}[\![W,Z]\!]$-模，其中令 W作用为 $U^{k/p}$，令 Z作用为 $U^{1-(k/p)}$；并将 $E^k_\infty = \bigoplus_{i=0}^4 y_i\mathbb{F}[\![U]\!]$ 视为一个 $\mathbb{F}[\![W,Z]\!]$-模，其中令 W作用为 ϕ^k_∞，令 Z作用为$U(\phi^k_\infty)^{-1}$，那么这个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-模同构

$$E^k_\infty \to \mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!] : y_i \mapsto U^{ik/p}$$

is 一个 $\mathbb{F}[\![W,Z]\!]$-模同构，而此同构诱导出同构

$$\boldsymbol{HFK}^-_{5,3,1}(S^3,K) \cong \frac{2}{5}\boldsymbol{HFK}^-(S^3,K),\ \boldsymbol{HFK}^-_{5,3,2}(S^3,K) \cong \frac{4}{5}\boldsymbol{HFK}^-(S^3,K).$$

下面描述这些同调群上的绝对 $\mathbb{Q}$-分次。纽结 Floer 链复形 $\mathcal{CFK}^-(S^3,K)$ 带有两个同调（Maslov）分次 gr$_w$ 和 gr$_z$。将 $t\boldsymbol{CFK}^-(S^3,K)$ 上的绝对 $\mathbb{Q}$-分次定义为 $(t/2)\text{gr}_w + (1-t/2)$ gr$_z$。于是，U的分次为 -2，因为 $U = WZ$，而微分是分次为 -1的齐次映射。

对于情形 $(p,q,k) = (5,3,1),(5,3,2)$ 和 $K = O$，有 $\boldsymbol{HFK}^-_{5,3,k}(S^3,O) \cong \mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!]$，且元素 $1 \in \mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!]$ 的绝对 $\mathbb{Q}$- 分次为 0。我们将其视为 5 个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$的副本，其中最高分次元素分别支撑在绝对 $\mathbb{Q}$-分次 $0,-2/5,-4/5,-6/5,-8/5$ 上。

考虑右手三叶结 T。链复形 $\mathcal{CFK}^-(S^3,T)$ 由三个基元素自由生成，记为 a、b、c，其系数环为 $\mathbb{F}[\![W$、$Z]\!]$，微分由 $\partial a = Wb + Zc$ 给出。因此，对于情形 $(p,q,k) = (5,3,1)$，$\frac{2}{5}\boldsymbol{CFK}^-(S^3,T)$ 在 $\mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!]$ 上由 a、b、$\bar{c}$ 自由生成，它们的绝对 $\mathbb{Q}$-分次分别为 -1、$-8/5$、$-2/5$，微分由 $\partial a = U^{1/5}b + U^{4/5}c$ 给出。因此，其同调为 $\mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!] \oplus \mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!]/U^{1/5}$，其中 $\mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!]$ 个直和项由 c 生成，而 $\mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!]/U^{1/5}$ 个直和项由 $b + U^{3/5}c$ 生成，因此

$$\frac{2}{5}\boldsymbol{HFK}^-(S^3,T) \cong (\mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!])_{(-2/5)} \oplus (\mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!]/U^{1/5})_{(-8/5)}.$$

（这里，下标（d）表示最高分次元素支撑在绝对 $\mathbb{Q}$分次d上。）我们将其视为 $\mathbb{F}[\![U]\!]_{(-2/5)}$、$\mathbb{F}[\![U]\!]_{(-4/5)}$、$\mathbb{F}[\![U]\!]_{(-6/5)}$、$\mathbb{F}[\![U]\!]_{(-8/5)}\oplus$（$\mathbb{F}[\![U]\!]/U$）$_{(-8/5)}$和 $\mathbb{F}[\![U]\!]_{(-2)}$的直和。事实上，链复形 $\frac{2}{5}\boldsymbol{CFK}^-$（$S^3$，$T$）本身分解为定义在 $\mathbb{F}[\![U]\!]$上的五个链复形，其同调分别如上所述。

对于情形 $(p,\ q,\ k)\ =(5,\ 3,\ 2)$，$\frac{4}{5}\boldsymbol{CFK}^-(S^3,\ T)$ 在 $\mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!]$ 上由 $a,\ b,\ c$ 自由生成，其绝对 $\mathbb{Q}$ 分次分别为 $-1,\ -6/5,\ -4/5$，微分由 $\partial a = U^{2/5}b + U^{3/5}c$ 给出。其同调为

$$(\mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!])_{(-4/5)} \oplus (\mathbb{F}[\![U^{1/5}]\!]/U^{2/5})_{(-6/5)},$$

其中两个直和项分别由 c 和 $b + U^{1/5}c$ 生成。我们将其视为 $\mathbb{F}[\![U]\!]_{(-4/5)}$、$\mathbb{F}[\![U]\!]_{(-6/5)} \oplus (\mathbb{F}[\![U]\!]/U)_{(-6/5)}$、$\mathbb{F}[\![U]\!]_{(-8/5)} \oplus (\mathbb{F}[\![U]\!]/U)_{(-8/5)}$、$\mathbb{F}[\![U]\!]_{(-2)}$ 和 $\mathbb{F}[\![U]\!]_{(-12/5)}$ 的直和。事实上，链复形 $\frac{4}{5}\boldsymbol{CFK}^-(S^3,\ T)$ 本身可分解为 $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 上的五个链复形，其同调分别如上所述。

情形 $(p, q, k) = (5, 3, 1)$ 和 $(5, 3, 2)$ 的有理手术正合三角（定理 1.3）分别如图 7.2 和图 7.3 所示。它们采用了与图 7.1 类似的颜色编码。注意，这些正合三角也可分解为 5 个正合三角。类似于 [OS04b 第 9], 节，我们可以纯粹通过组合方法证明：对于 Y 为 S^3 且 λ 为塞弗特框架的情形，我们的有理手术正合三角可分解为 p 个正合三角。

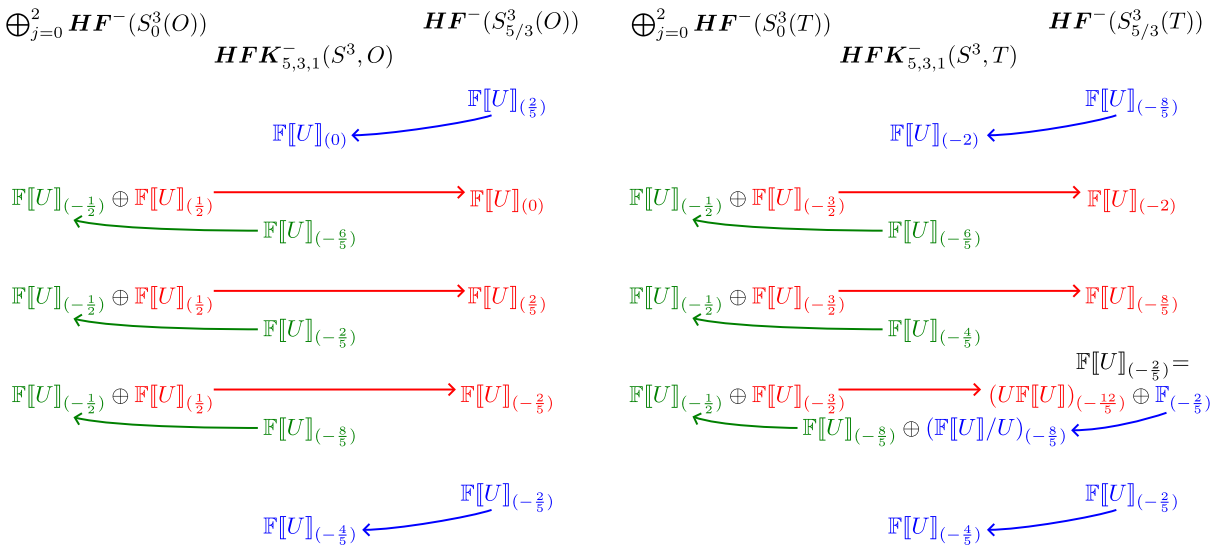


图 7.2。平凡结 $O \subset S^3$ 和右手三叶结 $T \subset S^3$ 的有理手术正合三角，其中 $(p,\ q,\ k)\ =(5,\ 3,\ 1)$。

附录 A. 第 6.1 节的计算

设 p 和 q 为互素正整数。如第 6.1 节所述，令 ℓ、i、$j \in \mathbb{Z}$ 始终表示满足以下条件的整数 $i :\ = n$ 模 p，$j :\ = n$ 模 q，且 $n = \ell p + i$。回忆定义 4.11，$z_n :\ = n_z(T_n)$ 表示 n-个三角形 T_n 中的基点数量。

引理 A.1. 我们有 $z_n = z_{p+q-1-n}$.

证明。首先，对于 $n = 0,\ \cdots,\ p+q-1$，由于对于这样的 n 有 $z_n = 0$，引理成立。对于 $n \notin \{0, \cdots, p+q-1\}$，我们将 z_n 表示为一个和。设 T_n 是 $\widetilde{T}_n$ 到万有覆盖 $\mathbb{R}^2$ 的一个提升，并设 $z \subset \mathbb{R}^2$ 是 $z \in \mathbb{T}^2$ 的逆像。设 $b_n \in \mathbb{Z}$ 满足：T_n 中与 x 轴平行的边包含于 $\mathbb{R} \times \{b_n\}$ 中。对于每个 $t \in \mathbb{Z}$，我们分别计算每一行 $\mathbb{R} \times \{b_n + t + \varepsilon\}$ 中的基点 $|T_n \cap z|$ 数量。

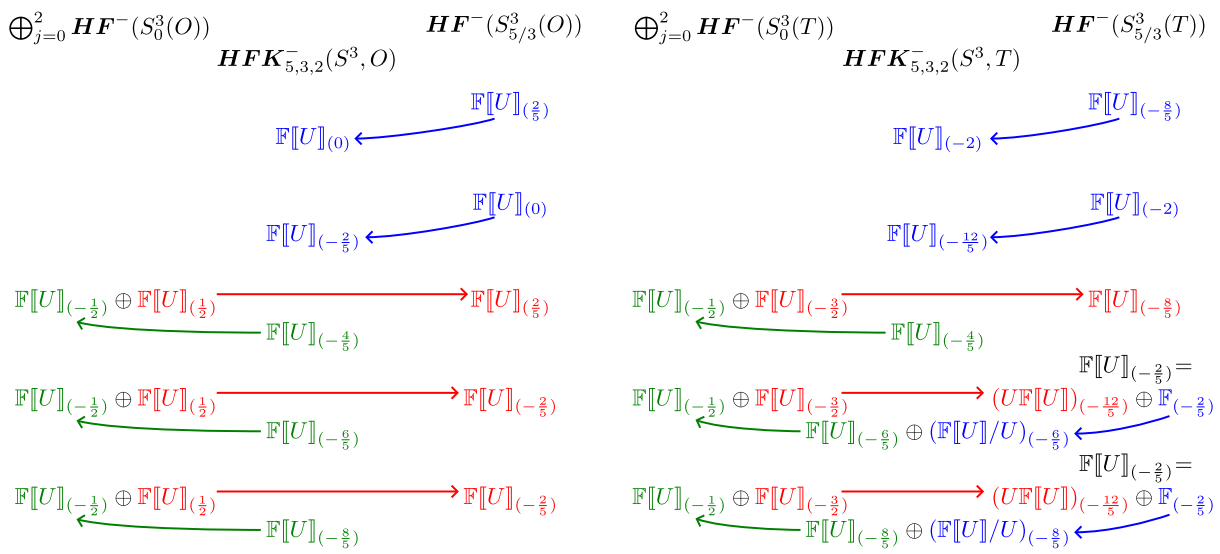


图 7.3。平凡结 $O \subset S^3$ 和右手三叶结 $T \subset S^3$ 的有理手术正合三角，其中 $(p, q, k) = (5, 3, 2)$。

对于 $n \geq 0$，我们有

$$|\overline{T}_{-n+p-1} \cap \overline{z} \cap (\mathbb{R} \times \{b_{-n+p-1} + t + \varepsilon\})| = \begin{cases} \max\left(\left\lfloor \frac{n-tq}{p} \right\rfloor, 0\right) & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}, \tag{A.1}$$

$$|\overline{T}_{n+p+q-1} \cap \overline{z} \cap (\mathbb{R} \times \{b_{n+p+q-1} - 1 - t + \varepsilon\})| = \begin{cases} \max\left(\left\lceil \frac{n-tq}{p} \right\rceil, 0\right) & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}. \tag{A.2}$$

由于 $\lfloor x/p \rfloor = \lceil (x-(p-1))/p \rceil$，对于 $n \geq p-1$，我们有 $z_{-n+p-1} = z_{(n-p+1)+p+q-1} = z_{n+q}$。 □

引理 A.2。设 $k = 0, \cdots, p-1$，并设 $z(k)$ 为集合 $z(u)$，$\subset \mathbb{T}^2$ 它来自小节 *4.1*，对应于 E_∞^k (定义*3.3*)。那么

$$n_{\widetilde{z(k)}}(\widetilde{T}_{n+k}) = z_n. \tag{A.3}$$

证明。这个代数证明是例行的，尽管相当复杂。注意，我们在小节 6.3.2 中给出了一个我们认为更令人满意的“图示证明”。

我们在 $\mathbb{R}^2$ 中进行与引理 A.1 的证明类似的论证。令 $z(k)$为$\overline{\sim z(k)} \subset \mathbb{T}^2$ 在 $\mathbb{R}^2$中的逆像。那么，我们有

$$\begin{aligned} \overline{z(k)} = &\{(a+\varepsilon, b+\varepsilon) : a, b \in \mathbb{Z},\ qb \in \{k, k+1, \cdots, p-1\} \mod p\} \\ &\cup \{(a-\varepsilon, b+\varepsilon) : a, b \in \mathbb{Z},\ qb \in \{0, 1, \cdots, k-1\} \mod p\}. \end{aligned}$$

另外，令 b_n 使得 $\partial_{\pi^{-1}(\beta_0)} T_n$ 包含于 $\overline{\mathbb{R}} \times \{b_n\}$。注意，$qb_n \equiv n$ 模 p。对于 $n \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned} &|\overline{T}_{-n+p-1} \cap \overline{z(k)} \cap (\mathbb{R} \times \{b_{-n+p-1} + t + \varepsilon\})| \\ &= \begin{cases} \max\left(\left\lfloor \frac{n-tq}{p} \right\rfloor, 0\right) & \text{if } t \geq 0 \text{ and } -n-1+tq \in \{k, k+1, \cdots, p-1\} \mod p \\ \max\left(1 + \left\lfloor \frac{n-tq}{p} \right\rfloor, 0\right) & \text{if } t \geq 0 \text{ and } -n-1+tq \in \{0, 1, \cdots, k-1\} \mod p \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

因此，对于 $n \geq k$，我们有 $n_{\widetilde{z(k)}}(T_{-n+p-1+k}) = z_{-n+p-1}$ 根据方程 (A.1)，因为

$$\left\lfloor \frac{n-tq}{p} \right\rfloor = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n-k-tq}{p} \right\rfloor & \text{if } n - tq \in \{k, k+1, \cdots, p-1\} \mod p \\ 1 + \left\lfloor \frac{n-k-tq}{p} \right\rfloor & \text{if } n - tq \in \{0, 1, \cdots, k-1\} \mod p \end{cases}$$

and

$$n - tq \in \{k, k+1, \cdots, p-1\} \text{ 模 } p \iff (k-1) - (n-tq) \in \{k, k+1, \cdots, p-1\} \text{ 模 } p.$$

这表明方程 (A.3) 对于 $n \leq p-k-1$。

类似地，对于 $n \geq 0$，我们也有

$$|\overline{T}_{n+p+q-1} \cap \overline{z(k)} \cap (\mathbb{R} \times \{b_{n+p+q-1} - 1 - t + \varepsilon\})| = \begin{cases} \max\left(\left\lceil \frac{n-tq}{p} \right\rceil, 0\right) & \text{if } t \geq 0 \text{ and } n-1-tq \in \{k, k+1, \cdots, p-1\} \mod p \\ \max\left(-1 + \left\lceil \frac{n-tq}{p} \right\rceil, 0\right) & \text{if } t \geq 0 \text{ and } n-1-tq \in \{0, 1, \cdots, k-1\} \mod p \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}.$$

注意，方程 (A.2) 实际上对所有 $n \geq -p-q+1$ 都成立，因为 $z_0 = \cdots = z_{p+q-1} = 0$。因此对于 $n \geq -k$，我们有 $n_{\widetilde{z(k)}}(T_{n+k+p+q-1}) = z_{n+p+q-1}$ 根据方程 (A.2)，因为

$$\left\lceil \frac{n-tq}{p} \right\rceil = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+k-tq}{p} \right\rceil & \text{if } n - tq \in \{1, \cdots, p-k\} \mod p \\ -1 + \left\lceil \frac{n+k-tq}{p} \right\rceil & \text{if } n - tq \in \{p-k+1, \cdots, p\} \mod p \end{cases}$$

and

$$n - tq \in \{1, \cdots, p-k\} \mod p \iff n + k - 1 - tq \in \{k, k+1, \cdots, p-1\} \mod p.$$

这表明方程 (A.3) 对于 $n \geq p+q-k-1$。

剩下要证明的是 $n_{\widetilde{z(k)}}(T_n) = 0$ 对于 $n = p+1, \cdots, p+q-2$。这是因为 T_n 与 $(\varepsilon, \varepsilon)$，$(-\varepsilon, \varepsilon) \in \mathbb{T}^2$ 不相交。□

令 u，$v \in \mathbb{Z}$ 满足 $q = up + v$ 和 $v \in \{0, \cdots, p-1\}$；于是有

$$s_0 = \cdots = s_{v-1} = u+1, \; s_v = \cdots = s_{p-1} = u. \tag{A.4}$$

引理 A.3。令 $n = \ell p + i$，$p+q-1-n = \ell p + \bar{i}$ 对于 $i, \bar{i}, \ell, \bar{\ell} \in \mathbb{Z}$，$i, \bar{i} \in \{0, \cdots, p-1\}$。则，

$$\bar{i} \equiv q - i - 1 \mod p, \; s_i = s_{\bar{i}}, \text{ and } \bar{\ell} \equiv -\ell \mod s_i.$$

证明。 $i \equiv \bar{q} - i - 1$ 模 p 显然。对于其余部分，注意到

$$p+q-1-n = \begin{cases} (v-1-i) + p(u+1-\ell) & \text{if } i \in \{0, \cdots, v-1\} \\ (p+v-1-i) + p(u-\ell) & \text{if } i \in \{v, \cdots, p-1\} \end{cases}. \tag{A.5}$$

因此，

$$\bar{i} = \begin{cases} v-1-i & \text{if } i \in \{0, \cdots, v-1\} \\ p+v-1-i & \text{if } i \in \{v, \cdots, p-1\} \end{cases}$$

因此，$i \in \{0, \cdots, v-1\}$ 当且仅当 $\bar{i} \in \{0, \cdots, v-1\}$。因此，$s_i = s_{\bar{i}}$ 根据方程（A.4）。此外，我们有 $\ell \equiv -\bar{\ell}$ 模 s_i 根据方程（A.4）和（A.5）。□

引理 A.4。假设 q 为奇数，令 $q = 2q' + 1$，并令 u'、$v' \in \mathbb{Z}$ 满足 $q' = u'p + v'$ 和 $v' \in \{0, \cdots, p-1\}$。则 $s_{q'} = s_{v'} = 2u' + 1$ 为奇数，因此特别地不为零。

证明。 为了使用方程（A.4），我们来比较 v' 与 v。我们分两种情形讨论：

$$2q'+1=\begin{cases}2u'p+(2v'+1) & \text{if } 2v'+1<p\\ (2u'+1)p+(2v'+1-p) & \text{if } 2v'+1\geq p\end{cases}. \tag{A.6}$$

若 $2v'+1<p$，则 $v=2v'+1>v'$；若 $2v'+1\geq p$，则 $v=2v'+1-p\leq v'$。现在，在这两种情形下，由方程（A.4）和（A.6），我们有 $s_{v'}=2u'+1$。□

引理 A.5. 假设 $p+q$ 是奇数，并设 ℓ_0、$i_0\in\mathbb{Z}$ 满足 $(p+q-1)/2=\ell_0 p+i_0$且 $i_0\in\{0,\cdots,p-1\}$。那么， $s_{(p+q-1)/2}=s_{i_0}=2\ell_0$ 是偶数。特别地， $p>q$ 当且仅当 $s_{(p+q-1)/2}=0$。

证明。 我们分为两种情形：

$$q=\begin{cases}(2\ell_0-1)p+(2i_0+1) & \text{if } 2i_0+1<p\\ 2\ell_0 p+(2i_0+1-p) & \text{if } 2i_0+1\geq p\end{cases}. \tag{A.7}$$

若 $2i_0+1<p$，则 $v=2i_0+1>i_0$，若 $2i_0+1\geq p$，则 $v=2i_0+1-p\leq i_0$。现在，在这两种情形下，我们都有 $s_{(p+q-1)/2}=s_{i_0}=2\ell_0$ 由方程（A.4）和（A.7）可得。□

引理 A.6。 设 $X=\{0,1,\cdots,\min(p,q)-1\}\subset\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$。那么，该映射

$$\mathcal{Z}:X\to X:j\mapsto s_j p+j,$$

其中 $j\in\{0,\cdots,\min(p,q)-1\}$，是一个定义良好的双射，且只有一个轨道。

证明。 我们分两种情形讨论。若 $p>q$，则 $X=\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 和 $\mathcal{Z}(j)=j+p$。由 p 和 q 互素可知，引理得证。

若 $p<q$，则 $X=\{0,1,\cdots,p-1\}$，且由于 $up\equiv -v$ 模 q，我们有

$$\mathcal{Z}(j)=\begin{cases}j+(u+1)p=j-v+p & \text{if } j<v\\ j+up=j-v & \text{if } j\geq v\end{cases},$$

这就是 $j-v$ 模 p 的余数。由于 q 和 p 互素， v 和 p 也互素。因此，引理得证。□

注记 A.7. 事实上，引理 A.6 也可由引理 5.3 推出：首先， X 是满足 $s_j\neq 0$ 的 j =0、$\cdots$、$q-1$ 的集合。设 H_j 和 $H_{j'}$（回顾定义 5.2）是相邻的，即沿着 $-y$ 方向从 H_j 到 $H_{j'}$ 时，中间没有其他 H_t。H_j 的两个端点是~ ~ ~ ~θ_j 和 $\theta_{s_j p+j}$，因此 $L_{j'}$ 连接着 $\theta_{s_j p+j}$ 和 $\theta_{j'}$。于是， $j'\equiv s_j p+j$ 模 q，因此 $\mathcal{Z}(j)=j'$。

Appendix B. Reduction of Theorem 1.3 to Theorem 3.4

定理 1.3 由定理3.4通过颈拉伸论证和三角形检测引理 [OS05引理 4。2]在本附录中，我们回顾这一论证。

B.1. 三角形检测引理。我们使用以下三角形检测引理来构造我们的恰三角。

引理 *B.1*（三角形检测引理 [*OS05*, 引理 *4.2*]）。设 (C_*,∂_*) 对于 $i=-2,-1,0,1,2,3$ 是链复形，设 $f_i:C_i\to C_{i+1}$ 对于 $i=-2,-1,0,1,2$ 是链映射，并设 $H_i:C_i\to C_{i+2}$ 对于 $i=-2,-1,0,1$ 是满足以下性质的映射：

(1) 对于 $i=-2,-1,0,1$，映射 $H_i:C_i\to C_{i+2}$ 是 $f_{i+1}\circ f_i$ 的零伦。(2) 对于 $i=-2,-1,0$，链映射

$$f_{i+2}\circ H_i+H_{i+1}\circ f_i:C_i\to C_{i+3}$$

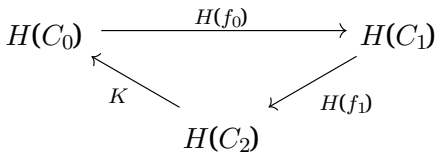
是一个拟同构。

那么，迭代映射锥 (M, ∂_M) 定义为

$$M := C_0 \oplus C_1 \oplus C_2,\ \partial_M := \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 & 0 \\ f_0 & \partial_1 & 0 \\ H_0 & f_1 & \partial_2 \end{pmatrix}$$

具有平凡同调，即 $H(M) = 0$。

注 B.2. 这意味着存在某个映射 $K: H(C_2) \to H(C_0)$，使得下列序列正合：



特别地，$H(C_0) \xrightarrow{H(f_0)} H(C_1) \xrightarrow{H(f_1)} H(C_2)$ 是正合的。

事实上，在我们的情形中，我们可以利用中山引理（引理 B.3）将引理 B.1 的假设弱化为推论 B.4：简而言之，我们只需对 $i = 0$完整满足条件（$\mathbb{F} = \mathbb{F}[\![U]\!]/U$，对 $i = -2, -1, 1$）。请注意，这并不会简化我们对组合问题的求解（见注释 3.7）。

引理 B.3（导出中山引理）。令 C为 $\mathbb{F}[\![U]\!]$上的有限自由链复形。若 $H(C \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}) = 0$，则 $H(C) = 0$。

令 $f: C \to C'$为有限自由链复形 C, C'之间的一个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性链映射，它们定义在$\mathbb{F}[\![U]\!]$上。若 $f \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}$ 是一个拟同构，则 f 也是一个拟同构。

证明。 例如，参见 [Nah25，引理 2。37]。 □

在下面的推论中，若 $f: C \to C'$ 是一个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性链映射，那么我们滥用记号，也将 $f \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}: C \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F} \to C' \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}$ 记作 f。

推论 B.4（三角形检测引理，加强版）。 设 (C_i, ∂_i) 是定义在 $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 上、对应于 $i = -2, -1, 0, 1, 2, 3$的有限自由链复形；设 $f_i: C_i \to C_{i+1}$是对应于 $i = -2, -1, 0, 1, 2$ 的链映射；再设 $H_0: C_0 \to C_1$和 $H_i: C_i \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F} \to C_{i+2} \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}$ 是对应于 $i = -2, -1, 1$ 的映射，并满足以下性质：

(1) </style}映射： $C_0 \to C_1$ 是 $f_1 \circ f_0$的零伦。(2) 对于 $i = -2$、-1，1，映射 H_i：$C_i \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F} \to C_{i+2} \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}$ 是 $f_{i+1} \circ f_i$的零伦。(3) 对于 $i = -2$、-1、0，链映射

$$f_{i+2} \circ H_i + H_{i+1} \circ f_i : C_i \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F} \to C_{i+3} \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}$$

是一个拟同构。

那么，由引理 *B.1* 定义的迭代映射锥 (M, ∂_M) 具有平凡同调。

证明。 条件（1）意味着 (M, ∂_M)是 $\mathbb{F}[\![U]\!]$上的有限自由链复形。将引理 B.1应用于链复形 $C_i \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}$ 可知， $M \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}$ 具有平凡同调，因此根据中山引理（引理 B.3）， M 也具有平凡同调。□

推论B.5 是我们将使用的三角形检测引理的形式。

推论 B.5（三角形检测引理， A_∞ 版本）。 设 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_{-2}, \boldsymbol{\beta}_{-1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_3, z)$ 是一个弱可容许海格图，在 $\boldsymbol{\alpha}$ 上赋予一个局部系统 (E, ϕ, A)，并在 $\boldsymbol{\beta}_i$ 上为 $i = -2, \cdots 3$赋予一个局部系统 (E_i, ϕ_i, A_i)。令 $\psi_i \in \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\beta}_i^{E_i}, \boldsymbol{\beta}_{i+1}^{E_{i+1}})$ 为满足以下性质的 $i = -2, -1$0、1、2 圈：

（1）对于 $i=-2,-1$、0，有

$$\mu_2(\psi_i\otimes\psi_{i+1})=0\in \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\beta}_0^{E_0},\boldsymbol{\beta}_2^{E_2}).$$

(2) 对于 $i=-2$，-1，0，上述条件（1）蕴含 $\mu_3(\psi_i\otimes\psi_{i+1}\otimes\psi_{i+2})\in \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\beta}_i^{E_i},\boldsymbol{\beta}_{i+3}^{E_{i+3}})$是一个圈。我们用相同的记号表示它在 $\widehat{CF}(\boldsymbol{\beta}_i^{E_i},\boldsymbol{\beta}_{i+3}^{E_{i+3}})$中的像。那么，链映射

$$\mu_2(-\otimes\mu_3(\psi_i\otimes\psi_{i+1}\otimes\psi_{i+2})):\widehat{CF}(\boldsymbol{\alpha}^E,\boldsymbol{\beta}_i^{E_i})\to\widehat{CF}(\boldsymbol{\alpha}^E,\boldsymbol{\beta}_{i+3}^{E_{i+3}})$$

是一个拟同构。

那么，迭代映射锥 (M,∂_M) 定义为

$$M:=\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^E,\boldsymbol{\beta}_0^{E_0})\oplus\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^E,\boldsymbol{\beta}_1^{E_1})\oplus\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^E,\boldsymbol{\beta}_2^{E_2}),$$

$$\partial_M:=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & 0\\ \mu_2(-\otimes\psi_0) & \mu_1 & 0\\ \mu_3(-\otimes\psi_0\otimes\psi_1) & \mu_2(-\otimes\psi_1) & \mu_1\end{pmatrix}$$

其同调平凡。因此，

$$\widehat{M}:=M\otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]}\mathbb{F}[\![U]\!]/U,\ M^+:=M\otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(U^{-1}\mathbb{F}[\![U]\!]/\mathbb{F}[\![U]\!]),\ M^\infty:=M\otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]}U^{-1}\mathbb{F}[\![U]\!]$$

也具有平凡同调。

证明。我们使用推论 B.4：令 $C_i=\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^E,\boldsymbol{\beta}_i^{E_i})$、$f_i=\mu_2(-\otimes\psi_i)$ 和 $H_i=\mu_3(-\otimes\psi_i\otimes\psi_{i+1})$。于是，$A_\infty$-关系表明推论 B.4 的条件得到满足。因此，$M$具有平凡同调。$\widehat{M}$、$M^+$、$M^\infty$具有平凡同调是这一结论的形式推论：例如，参见 [Nah25，引理 2.37]对于 $\widehat{M}$和 M^∞。$H(M^+)=0$则可由考察下面的链复形短正合列得到

$$0\to M\to M^\infty\to M^+\to 0.$$

□

B.2. **定理 1.3 在假设定理 3.4的情况下的证明。** 在本小节中，我们使用标准的颈拉伸论证来完成定理 1.3的证明。粗略地说，对于我们感兴趣的每个多边形，如果颈足够长，那么全纯曲线计数就会变成组合性的。现在有一个微妙之处：我们需要考虑的多边形有无穷多个，因此尚不清楚我们是否可以在一个固定的几乎复结构中进行处理。处理这一微妙之处有几种方法：这里，我们给出一个使用夹缩几乎复结构的证明 [HHSZ20，第 8]节；我们所使用的颈拉伸结果是 [HHSZ24，命题 6。5]（或 [HHSZ20，命题 10 的特殊情形2]）。另一种证明使用逐渐变长的颈和逼近论证：参见子小节 B.2.1。

回顾第 $(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\beta}_r,\boldsymbol{\beta}_\infty,z)$ 3.4 小节中的 Heegaard 图。为简化记号，记

$$\boldsymbol{\gamma}_0^{F_0}:=\boldsymbol{\beta}_0^{E_0^k},\ \boldsymbol{\gamma}_1^{F_1}:=\boldsymbol{\beta}_r^{\mathbb{F}[\![U]\!]},\ \boldsymbol{\gamma}_2^{F_2}:=\boldsymbol{\beta}_\infty^{E_\infty^k},\ \psi_0:=S(\psi_{0r}^k),\ \psi_1:=S(\psi_{r\infty}^k),\ \psi_2:=S(\psi_{\infty 0}^k),$$

并聚焦于负版本。注意，我们将使用推论 B.5，因此帽、加号和无穷版本（注 1.4）的陈述也同样成立。

在这一记号下，我们要证明正合的三角形（3.6）为

(B.1)
$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_0^{F_0}) & \xrightarrow{\quad\mu_2(-\otimes\psi_0)\quad} & \boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1^{F_1})\\ & {\scriptstyle\mu_2(-\otimes\psi_2)}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\mu_2(-\otimes\psi_1)} & \\ & \boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2^{F_2}) & \end{array}$$

我们的目标是证明 $\psi_i \in \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\gamma}_i^{F_i}, \boldsymbol{\gamma}^{F_{(i+1)\text{ 模 }3\,(i+1)\text{ 模 }3})$ 是 $i = 0$、1、2的圈，并且（B.1）是正合的。下面我们证明（B.1）在 $\boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}_1^{F_1})$处正合；在另外两个群处正合可由相同论证得出。

考虑 Heegaard 图 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}_{-2}, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_3, z)$，其中 $\boldsymbol{\gamma}_i$是 $i = -2, -1, 0, 1, 2$ 的 模 3 标准平移。令 $(F_i, \phi_i, A_i) := (F_{i\text{ 模 }3}, \phi_{i\text{ 模 }3}, A_{i\text{ 模 }3})$，其中 $i = -2, -1, 0, 1, 2$，并令 $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}_{i+1}^{F_{i+1}})$ 为

$$\psi_{i \bmod 3} \in \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\gamma}_{i \bmod 3}^{F_{i \bmod 3}}, \boldsymbol{\gamma}_{(i+1) \bmod 3}^{F_{(i+1) \bmod 3}})$$

在最近点映射（第 2.3 小节）下的像，其中 $i = -2, -1, 0, 1, 2$。注意，链 ψ_i 在改变几乎复结构所给出的链映射下保持不变，因为不存在非平凡的 Maslov 指数 0 二链。因此，只需证明这些元素ψ_i 在颈部足够长的几乎复结构下满足推论 B.5的条件。

首先，若令 $\Theta^+ \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\gamma}_i} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\gamma}_{i+3}}$ 为最高同调分次中的交点，那么我们就可以将属1 计算（定理3.4 (1) 和 (3)）推广为

$$\mu_1(\psi_i) = 0 \in \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\gamma}_i^{F_i}, \boldsymbol{\gamma}_{i+1}^{F_{i+1}}),\ \mu_3(\psi_i \otimes \psi_{i+1} \otimes \psi_{i+2}) = \mathrm{Id}_{F_i}\Theta^+ \in \widehat{CF}(\boldsymbol{\gamma}_i^{F_i}, \boldsymbol{\gamma}_{i+3}^{F_{i+3}})$$

对于任何具有足够长颈部的几乎复结构，这一点都成立，因为能够作出贡献的二维链只有有限多个。

现在，我们只需证明

$$\mu_2(\psi_i \otimes \psi_{i+1}) = 0 \in \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\gamma}_i^{F_i}, \boldsymbol{\gamma}_{i+2}^{F_{i+2}}). \tag{B.2}$$

根据 [HHSZ24，命题 6.5]（或特殊情形 [HHSZ20，命题 10.2]），我们可以将属1 计算（定理 3.4 (2)）推广为夹缩几乎复结构中的方程 (B.2)；将此夹缩几乎复结构对应的链复形记作 $\boldsymbol{CF}_p^-$。

现在，我们可以由夹缩复结构中的方程 (B.2) 正式推出（对于任意几乎复结构）。将几乎复结构从夹缩几乎复结构变为未夹缩结构，会诱导出映射

$$\mathcal{F}_1 : \boldsymbol{CF}_p^-(\boldsymbol{\gamma}_i^{F_i}, \boldsymbol{\gamma}_j^{F_j}) \to \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\gamma}_i^{F_i}, \boldsymbol{\gamma}_j^{F_j}),$$
$$\mathcal{F}_2 : \boldsymbol{CF}_p^-(\boldsymbol{\gamma}_i^{F_i}, \boldsymbol{\gamma}_{i+1}^{F_{i+1}}) \otimes \boldsymbol{CF}_p^-(\boldsymbol{\gamma}_{i+1}^{F_{i+1}}, \boldsymbol{\gamma}_{i+2}^{F_{i+2}}) \to \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\gamma}_i^{F_i}, \boldsymbol{\gamma}_{i+2}^{F_{i+2}}),$$

使得 $\mathcal{F}_1$ 是一个链映射，并且它们满足以下 A_∞-关系：

$$\mu_1(\mathcal{F}_2(\psi_i \otimes \psi_{i+1})) + \mu_2(\mathcal{F}_1(\psi_i) \otimes \mathcal{F}_1(\psi_{i+1})) + \mathcal{F}_1(\mu_2(\psi_i \otimes \psi_{i+1})) = 0. \tag{B.3}$$

正如我们已经观察到的，$\mathcal{F}_1(\psi_i) = \psi_i$，因为不存在非平凡的 Maslov 指数为 0 的二维链。此外，链复形 $\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\gamma}_i^{F_i}, \boldsymbol{\gamma}_{i+2}^{F_{i+2}})$ 在任意几乎复结构下都具有平凡微分（即 $\mu_1 \equiv 0$），因为我们可以在颈部足够长的几乎复结构下计算 $\boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\gamma}_i^{F_i}, \boldsymbol{\gamma}_{i+2}^{F_{i+2}})$，并证明它是一个自由 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-模，且

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}\boldsymbol{HF}^-(\boldsymbol{\gamma}_i^{F_i}, \boldsymbol{\gamma}_{i+2}^{F_{i+2}}) = \mathrm{rank}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\gamma}_i^{F_i}, \boldsymbol{\gamma}_{i+2}^{F_{i+2}}).$$

现在，方程（B.2）由 A_∞-关系（B.3）以及 $\mu_1 \equiv 0$和$\mathcal{F}_1(\psi_i) = \psi_i$推出，从而完成了定理 1.1 和 1.3的证明。

B.2.1. 一种逼近论证。 或者，我们可以使用一种逼近论证。更准确地说，考虑以下定义。

定义 B.6。若 C 是一个关于 $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 的链复形，则定义 $C_N := C \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}[\![U]\!]/U^N$。类似地，令 $HF_N(\boldsymbol{\alpha}^{E_\alpha}, \boldsymbol{\beta}^{E_\beta})$ 表示 $\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^{E_\alpha}, \boldsymbol{\beta}^{E_\beta}) \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}[\![U]\!]/U^N$ 的同调。

如果 C 和 D 是上的链复形 $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 和 $f\colon\ C \to D$ 是一个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性链映射，那么定义 $f_N := f \otimes_{\mathbb{F}[\![U]\!]} \mathbb{F}[\![U]\!]/U^N\colon\ C_N \to D_N$。

那么，根据引理 B.7，只需证明方程（B.1）对 HF_N（而非 $\boldsymbol{HF}^-$）在无穷多个 N上是正合的。现在，为了证明方程（B.1）对 HF_N是正合的，我们使用与上文相同的论证，但在具有足够长颈部的几乎复结构中进行，而不是在夹缩几乎复结构中进行。

引理 B.7（逼近）。设 $f\colon\ C \to D$、$g\colon\ D \to E$ 是有限链复形之间的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性链映射，且这些链复形定义在 $\mathbb{F}[\![U]\!]$上。那么，

$$H(C) \xrightarrow{H(f)} H(D) \xrightarrow{H(g)} H(E)$$

当且仅当

$$H(C_N) \xrightarrow{H(f_N)} H(D_N) \xrightarrow{H(g_N)} H(E_N) \tag{B.4}$$

对无穷多个 N 都正合。

证明。首先，我们来证明 $H(g) \circ H(f) = 0$。这等价于证明，对于 $c \in C$，$g(f(c)) \in \partial E$。(B.4) 正合意味着 $g(f(c)) \in \partial E + U^N E$。由于这对无穷多个 N 都成立，根据 Krull 交定理（引理 B.8），$g(f(c)) \in \partial E$。

现在，我们来证明 $\ker H(g) \le \mathrm{Im} H(f)$，也就是说，如果 $y \in D$ 满足 $H(g)([y]) = 0$，那么 $y \in f(C) + \partial D$。(B.4) 正合意味着 $y \in f(C) + \partial D + U^N D$。由于这对无穷多个 N 都成立，根据 Krull 交定理（引理 B.8），$y \in f(C) + \partial D$。□

我们回顾 Krull 交定理。

引理 B.8（Krull 交定理）。设 D 是 $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 上的有限生成模，且 $C \le D$ 是其子模。那么，递减交

$$\bigcap_{N \ge 1} (C + U^N D) = C.$$

证明。令 $\pi : D \to D/C$ 为商映射。于是，根据 Krull 交定理 [Sta18，Tag 00IP]，

$$\bigcap_{N \ge 1} (C + U^N D) = \pi^{-1}\left(\bigcap_{N \ge 1} U^N (D/C) \right) = C. \qquad \square$$

附录 C. 弱容许性与正性

在本节中，我们证明，本文中出现的配备局部系统的附着曲线构成一个 A_∞-范畴，且改变几乎复结构会诱导一个A_∞-函子（比较 [Zem23，附录 A 和 B]，[Nah25，第 2.3] 小节）。更准确地说，我们证明这些结论在 Heegaard 图和局部系统满足某些条件时成立；这些条件将在 C.1 小节中陈述。

正如我们在小节 2.2中提到的，微妙之处在于，我们考虑了这样的局部系统 $(E,\ \phi,\ A)$，使得 ϕ在 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E,\ E)$中不可逆，而仅在 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(U^{-1}E,\ U^{-1}E)$中可逆。我们将证明分为两部分：弱容许性和正性。粗略地说，弱容许性确保曲线计数有限，而正性确保我们不会得到 U 的负次幂。

更确切地说，设附着曲线 $\boldsymbol{\alpha}$ 配备了 $(E_{\boldsymbol{\alpha}},\ \phi_{\boldsymbol{\alpha}},\ A_{\boldsymbol{\alpha}})$，而 $\boldsymbol{\beta}$ 配备了 $(E_{\boldsymbol{\beta}},\ \phi_{\boldsymbol{\beta}},\ A_{\boldsymbol{\beta}})$。对于正性，我们将定义一个 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-子模（定义 C.10）

$$\boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}}) \leq \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}}),$$

我们称之为滤过链的子模，并证明 $(\boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}})\ \partial)$ 是一个链复形；更一般地，我们将证明以下命题。

命题 C.1（正性）。对于 $i = 0, \cdots, d$，设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是一条附着曲线，并配备(E_i, ϕ_i, A_i)。假设它们满足条件 C.4。令 $e_i \in \mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_{i-1}, E_i)$ 且 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_{i-1}} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_i}$，其中 $i = 1, \cdots, d$；并令 $\mathbf{y} \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_0} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_d}$。设 $\mathcal{D} \in D(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_d, \mathbf{y})$ 为一个非负二维链，并令

$$g := U^{n_z(\mathcal{D})}\rho(\mathcal{D})(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d).$$

若 $e_i\mathbf{x}_i \in \boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}_{i-1}^{E_{i-1}}, \boldsymbol{\alpha}_i^{E_i})$ 对于 $i = 1, \cdots, d$ 成立，则 $g\mathbf{y} \in \boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_0}, \boldsymbol{\alpha}_d^{E_d})$。

请注意，在大多数情形下，我们会有

$$\boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}}) = \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}}). \tag{C.1}$$

事实上，方程（C.1）成立，当且仅当 $(E_{\boldsymbol{\alpha}}, \phi_{\boldsymbol{\alpha}}, A_{\boldsymbol{\alpha}})$ 或 $(E_{\boldsymbol{\beta}}, \phi_{\boldsymbol{\beta}}, A_{\boldsymbol{\beta}})$ 是 U-标准（定义 C.3）。

注记 C.2（定义 A_∞-范畴时的微妙之处）。回想一下，在 Heegaard Floer 同调中，我们不定义 $\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}})$；因此，为了定义我们所研究的 A_∞-范畴，我们总是假定附着曲线上隐含地带有一个全序，并定义

$$\mathrm{Hom}(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}}) := \begin{cases} \boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}}) & \text{if } \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{C.2}$$

C.1. 条件。 首先，我们精确陈述 Heegaard 图和局部系统满足弱容许性与正性所需的条件。回想一下，我们假设局部系统 (E, ϕ, A) 的底层模 E 始终是有限自由 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-模。

定义 C.3。 若存在有限维$\mathbb{F}$-向量空间 $E_{\mathbb{F}}$ 以及一个 $\mathbb{F}$-线性同构 $\phi_{\mathbb{F}} : E_{\mathbb{F}} \to E_{\mathbb{F}}$，使得局部系统 (E, ϕ, A) 是 U-标准的，则称其为 U-标准的

$$E = E_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[\![U]\!],\ \phi = \phi_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[\![U]\!].$$

特别地，ϕ 作为 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E, E)$ 中的元素可逆。

注意，平凡局部系统以及来自小节 (E_0, ϕ_0, A_0) 的局部系统（见小节 3.2）是U-标准的。

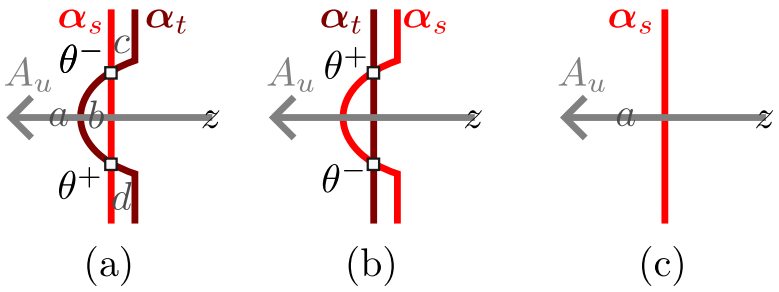


图 C.1. 定向弧 A_u 附近 Heegaard 图的局部图。在 (a) 中，标出了辅助点 a，b，c，d；在 (c) 中，标出了一个辅助点 a。

与小节 3.2中一样，对于 $u=(u_0,\ \cdots,\ u_{p-1})$ 满足 $u_i\in\{1,U\}$ 对每个 i的情形，定义

$$E_u:=\bigoplus_{i=0}^{p-1}y_i\mathbb{F}[\![U]\!],\ \phi_u:=\sum_{i=0}^{p-1}u_iy_{i+1}y_i^*\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u).$$

注意

$$U\phi_u^{-1}=\sum_{i=0}^{p-1}Uu_i^{-1}y_iy_{i+1}^*\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u).$$

条件 C.4 （弱容许性与正性的条件）。 我们假设我们的 Heegaard 图和局部系统满足以下条件。

（1）至多有两条附着曲线没有配备 U-标准局部系统，其余曲线均配备 U-标准局部系统；那两条曲线配备局部系统（E_u、ϕ_u、A_u），其中（A）存在某个 i 使得 $u_i\neq U$，且（B）A_u 是一条定向弧，其起点为基点z，并且 A_u 与所有配备 U-标准局部系统的附着曲线不相交。（2）若恰有两条附着曲线（记作 $\boldsymbol{\alpha}_s$、$\boldsymbol{\alpha}_t$，且满足 $\boldsymbol{\alpha}_s<\boldsymbol{\alpha}_t$）配备了（$E_u$、$\phi_u$、$A_u$），则假设 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_t$ 是标准平移。回忆第 2.3 小节，靠近定向弧 A_u处，Heegaard 图呈现为图 C.1（a）或（b）所示。（3）每个满足 $n_z(\mathcal{D})=0$ 的无角二链 $\mathcal{D}$ 都具有正、负局部重数（定义 2.7）。

本文中，我们只需考虑情形图 C.1 (a)，因此这里只写出该情形下正性的证明。注意，情形图 C.1 (b) 类似。

C.2. **弱容许性**。 弱容许性保证，配备局部系统的附着曲线构成 A_∞-范畴，其中 $\boldsymbol{CF}^\infty:=U^{-1}\boldsymbol{CF}^-$，即（C.2），但将 $\boldsymbol{CF}^-_{fil}$替换为 $\boldsymbol{CF}^\infty$；并且改变几乎复结构会诱导一个 A_∞-函子。这些结论由命题 C.7推出，该命题是本小节的主要命题。

为简 单起见，若 E是有限自由的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-模，则将局部化 $U^{-1}E$记为 E^∞ .

定义 C.5. 设 E是有限自由的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-模。 E的一组分次数据 是指 E在 $\mathbb{F}[\![U]\!]$ 上的一组基 $b_0,\ \cdots,\ b_{n-1}$，以及有理数 $v_0,\ \cdots,\ v_{n-1}\in\mathbb{Q}$。

给定 E 的分次数据 $b_0,\cdots,b_{n-1},v_0,\cdots,v_{n-1}$，非零元素 $e\in E^\infty$ 若存在某个 $d\in\mathbb{Q}$，使得 e 是 $\mathbb{F}$-线性组合，组合项为满足$d-v_i\in\mathbb{Z}$的 $U^{d-v_i}b_i$，则称其为齐次。此时记 $\mathrm{gr}_Ue=d$。

设 E_0 和 E_1 分别为具有分次数据 $b_0,\cdots,b_{n-1},v_0,\cdots,v_{n-1}$ 和 $c_0,\cdots,c_{m-1},w_0,\cdots,w_{m-1}$ 的有限自由 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-模。非零元素 $e\in\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0^\infty,E_1^\infty)$ 若存在某个 $d\in\mathbb{Q}$，使得 e 是 $\mathbb{F}$-线性组合，组合项为满足 $d-w_j+v_i\in\mathbb{Z}$ 的 $U^{d-w_j+v_i}c_jb_i^*$（i,j），则称其为齐次。此时记 $\mathrm{gr}_Ue=d$。

我们记录以下观察结果。

引理 C.6. 设 E_i 是一个有限自由的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-模，带有关于 $i=0$ 的分次数据，1，2。

(1) 设 $e\in E_0^\infty$ 或 $e\in Hom^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0^\infty,E_1^\infty)$。若 e 是齐次的且 $gr_Ue=d$，则对于任意 $N\in\mathbb{Z}$，U^Ne 也齐次，且 $gr_U(U^Ne)=N+d$。*(2)* 设 $e_i\in Hom^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_i^\infty,E_{i+1}^\infty)$ 关于 $i=0$ 齐次，*1*。若 $e_1e_0\in Hom^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0^\infty,E_2^\infty)$ 非零，则它是齐次的，且 $gr_U(e_1e_0)=gr_U(e_1)+gr_U(e_0)$。

证明。 显然。 □

我们为局部系统选取分次数据。对于 U-标准局部系统（E、 ϕ、 A），我们考虑满足 ϕ为齐次且 $\mathrm{gr}_U\phi = \mathrm{gr}_U\phi^{-1} = 0$ 的分次数据：事实上，识别$E = E_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[\![U]\!]$和 $\phi = \phi_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[\![U]\!]$。令 b_0、 $\cdots$、 b_{n-1}为 $E_{\mathbb{F}}$的一个 $\mathbb{F}$-基；也将其视为 E 的一个$\mathbb{F}[\![U]\!]$-基。于是， $v_0 = \cdots = v_{n-1} = 0$成立。

对于局部系统 $(E_u,\ \phi_u,\ A_u)$，令 $b_i := y_i$ 并按照引理 3.10 的证明中的方式递归定义 v_i 3.10：令 k为满足 i的 $u_i = U$的数量。那么， $k \in \{0, \cdots, p-1\}$因为存在某个 i 使得 $u_i \neq U$。令 $v_0 = 0$ 并且

$$v_{i+1} := \begin{cases} v_i + \frac{k}{p} & \text{if } u_i = 1 \\ v_i + \frac{k}{p} - 1 & \text{if } u_i = U \end{cases}.$$

那么， ϕ_u是齐次的，且 $\mathrm{gr}_U\phi_u = k/p \in [0,1)$。此外， ϕ_u在 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u^\infty,\ E_u^\infty)$中可逆，$\phi_u^{-1}$也为齐次，且 $\mathrm{gr}_U\phi_u^{-1} = -k/p = -\mathrm{gr}_U\phi_u$。

命题 C.7 (弱容许性)。 对于 $i = 0$、 $\cdots$、 d，令 $\boldsymbol{\alpha}_i$为一条配备了 $(E_i$、 ϕ_i、 $A_i)$的附着曲线。假设它们满足条件 *C.4*。令 $e_i \in \mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_{i-1}^\infty$、$E_i^\infty)$ 且$\mathbf{x}_i \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_{i-1}} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_i}$，其中 $i = 1$、 $\cdots$、 d；并令 $\mathbf{y} \in \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_0} \cap \mathbb{T}_{\boldsymbol{\alpha}_d}$。对于每个整数 N，满足以下条件的非负二维链 $\mathcal{D} \in D(\mathbf{x}_1,\ \cdots,\ \mathbf{x}_d,\ \mathbf{y})$ 只有有限多个:

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\rho(\mathcal{D})(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d) \notin U^N \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0, E_d),$$

其中，我们将 $\rho(\mathcal{D})(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)$ 视为 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0^\infty, E_d^\infty)$ 的元素，并将 $U^N\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0, E_d)$ 视为 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0^\infty, E_d^\infty)$ 的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-子模。

证明。 首先，由于每个 e_i 都是齐次元素的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性组合，我们只需证明 e_i 对所有 i 都是齐次时的情形。记作$g := U^{n_z(\mathcal{D})}\rho(\mathcal{D})(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d)$。

将弧 A_u 的终点记为 w。于是，我们有以下断言。

断言 C.8。 若 $g \neq 0$，则 g 是齐次的，并且

$$\mathrm{gr}_U g = (\mathrm{gr}_U\phi_u)n_w(\mathcal{D}) + (1 - \mathrm{gr}_U\phi_u)n_z(\mathcal{D}) + \sum_{i=1}^{d} \mathrm{gr}_U e_i. \tag{C.3}$$

命题的证明 *C.8*。 为简化记号，令 $N_i := \#(A_i \cap \partial_{\boldsymbol{\alpha}_i}(\mathcal{D}))$表示带符号交数。回忆

$$g = U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_d^{N_d} \circ e_d \circ \phi_{d-1}^{N_{d-1}} \circ e_{d-1} \circ \cdots \circ \phi_1^{N_1} \circ e_1 \circ \phi_0^{N_0}.$$

Since $\phi_0, \cdots, \phi_d, e_1, \cdots, e_d$根据引理 C.6, g是齐次的 d

$$\mathrm{gr}_U g = n_z(\mathcal{D}) + \sum_{i=0}^{d} N_i \mathrm{gr}_U\phi_i + \sum_{i=1}^{d} \mathrm{gr}_U e_i. \tag{C.4}$$

根据条件 C.4，若 $(E_i, \phi_i, A_i) \neq (E_u, \phi_u, A_u)$，则 $\mathrm{gr}_U\phi_i = 0$且 $A_u \cap \boldsymbol{\alpha}_i = \emptyset$。因此，

$$\sum_{i=0}^{d} N_i \mathrm{gr}_U\phi_i = \left(\sum_{i=0}^{d} \#(A_u \cap \partial_{\boldsymbol{\alpha}_i}(\mathcal{D}))\right) \mathrm{gr}_U\phi_u. \tag{C.5}$$

通过考察 $A_u \cap \mathcal{D}$ 的端点，我们得到

$$\sum_{i=0}^{d} \#(A_u \cap \partial_{\boldsymbol{\alpha}_i}(\mathcal{D})) = n_w(\mathcal{D}) - n_z(\mathcal{D}). \tag{C.6}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{gr}_U g &= n_z(\mathcal{D}) + \sum_{i=0}^{d} N_i \mathrm{gr}_U \phi_i + \sum_{i=1}^{d} \mathrm{gr}_U e_i && \text{(C.4)}\\
&= n_z(\mathcal{D}) + \left(\sum_{i=0}^{d} \#(A_u \cap \partial_{\boldsymbol{\alpha}_i}(\mathcal{D})) \right) \mathrm{gr}_U \phi_u + \sum_{i=1}^{d} \mathrm{gr}_U e_i && \text{(C.5)}\\
&= n_z(\mathcal{D}) + (n_w(\mathcal{D}) - n_z(\mathcal{D}))\mathrm{gr}_U \phi_u && \text{(C.6)}\\
&= (\mathrm{gr}_U \phi_u) n_w(\mathcal{D}) + (1 - \mathrm{gr}_U \phi_u) n_z(\mathcal{D}) + \sum_{i=1}^{d} \mathrm{gr}_U e_i. && \square
\end{aligned}$$

设 $b_{i,0}, \cdots, b_{i,n_i-1}, v_{i,0}, \cdots, v_{i,n_i-1}$ 为 E_i 的分次数据。若 $g \neq 0$，则根据断言 C.8， g 是齐次的。因此， g 是某些 $U^{\text{分次}_U g - v_{d,j} + v_{0,^k}} b_{d,j} b_{0,k}^*$ 的 $\mathbb{F}$-线性组合，其中 j, k，于是

$$g \in U^{\lfloor \mathrm{gr}_U g - \max(v_{d,0}, \cdots, v_{d,n_d-1}) + \min(v_{0,0}, \cdots, v_{0,n_0-1}) \rfloor} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0, E_d). \tag{C.7}$$

根据方程 (C.3) 和 (C.7)，并且由于 $0 \leq$分次$_U \phi_u < 1$和 $n_w(\mathcal{D}) \geq 0$，对于每个 N，都存在某个整数 M，使得若 $n_z(\mathcal{D}) > M$，则 $g \in U^N \mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0, E_d)$。OS04c 的引理 4.13] 的证明表明，满足 $n_z(\mathcal{D}) \leq M$ 的非负二维链$\mathcal{D} \in D(\mathrm{x}1, \cdots, \mathrm{x}_d, \mathrm{y})$ 只有有限多个。因此，引理得证。□

C.3. **正性**。在小节 C.2中，我们证明了，配备局部系统的附着曲线构成一个 A_∞-范畴，其中 $\boldsymbol{CF}^\infty$ 并且改变几乎复结构会诱导一个 A_∞-函子。在本小节中，我们定义 过滤链 的子模

$$\boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}}) \leq \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}}) \leq \boldsymbol{CF}^\infty(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}})$$

并证明命题 C.1，该命题特别指出，高阶乘法映射以及由改变几乎复结构所诱导的映射限制为

$$\boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_{\boldsymbol{\alpha}_0}}, \boldsymbol{\alpha}_1^{E_{\boldsymbol{\alpha}_1}}) \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}_{d-1}^{E_{\boldsymbol{\alpha}_{d-1}}}, \boldsymbol{\alpha}_d^{E_{\boldsymbol{\alpha}_d}}) \to \boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_{\boldsymbol{\alpha}_0}}, \boldsymbol{\alpha}_d^{E_{\boldsymbol{\alpha}_d}}),$$

因此，我们可以将关于 $\boldsymbol{CF}^\infty$ 的陈述推广到 $\boldsymbol{CF}^-_{fil}$。

定义 C.9 (过滤映射)。 将 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u, E_u)$ 视为 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(U^{-1}E_u, U^{-1}E_u)$ 的子模，并将 ϕ_u^{-1}视为 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(U^{-1}E_u, U^{-1}E_u)$ 的元素。如下定义 过滤映射 $\mathrm{Hom}^{fil}(E_u, E_u) \leq \mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u, E_u)$ 的空间：

（1）如果我们处于情形图 C.1 （a），令

$$\mathrm{Hom}_{fil}(E_u, E_u) := \left(\phi_u \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u, E_u) \phi_u^{-1}\right) \cap \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u, E_u).$$

（2）如果我们处于情形图 C.1 （b），令

$$\mathrm{Hom}_{fil}(E_u, E_u) := \left(\phi_u^{-1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u, E_u) \phi_u\right) \cap \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u, E_u).$$

定义 C.10 （过滤链）。 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 配备了（$E_{\boldsymbol{\alpha}}$， $\phi_{\boldsymbol{\alpha}}$， $A_{\boldsymbol{\alpha}}$），而 $\boldsymbol{\beta}$ 配备了（$E_{\boldsymbol{\beta}}$， $\phi_{\boldsymbol{\beta}}$， $A_{\boldsymbol{\beta}}$）。定义过滤链 $\boldsymbol{CF}^-_{fil}$（$\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}$， $\boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}}$）$\leq \boldsymbol{CF}^-$（$\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}$， $\boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}}$）的子模。

(1) 如果 $(E_{\boldsymbol{\alpha}}, \phi_{\boldsymbol{\alpha}}, A_{\boldsymbol{\alpha}})$ 或 $(E_{\boldsymbol{\beta}}, \phi_{\boldsymbol{\beta}}, A_{\boldsymbol{\beta}})$ 是 U-标准的，则令 $\boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}}) := \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^{E_{\boldsymbol{\alpha}}}, \boldsymbol{\beta}^{E_{\boldsymbol{\beta}}})$。(2) 否则，将 $\boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}^{E_u}, \boldsymbol{\beta}^{E_u}) \leq \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^{E_u}, \boldsymbol{\beta}^{E_u})$ 定义为由以下元素张成的 $\mathbb{F}[\![U]\!]$-线性子空间：(a) 对于 $e \in \mathrm{Hom}^{fil}(E_u, E_u)$ 中满足 $\theta^+ \in \mathrm{x}$ 的 x，取 $e\mathrm{x}$；以及 (b) 对于 $e \in \mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u, E_u)$ 中满足 $\theta^- \in \mathrm{x}$ 的 x，取 $e\mathrm{x}$。

注记 C.11。注意，$y_i y_i^* \in \mathrm{Hom}^{fil}(E_u,\ E_u)$。因此，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 配备了 $(E_u,\ \phi_u,\ A_u)$，则有 $y_i y_i^* \Theta^+ \in \boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}^{E_u},\ \boldsymbol{\beta}^{E_u})$。

引理 C.12. 我们有

$$U\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}^{E_u}, \boldsymbol{\beta}^{E_u}) \leq \boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}^{E_u}, \boldsymbol{\beta}^{E_u}).$$

证明. 我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u, E_u) \leq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u, E_u)\phi_u^{-1} \text{ and } U\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u, E_u) \leq \phi_u \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u, E_u). \quad \square$$

命题的证明 *C.1.* 为简化记号，令 $N_i := \#(A_i \cap \partial_{\boldsymbol{\alpha}_i}(\mathcal{D}))$ 为带符号交数。回忆

$$g = U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_d^{N_d} \circ e_d \circ \phi_{d-1}^{N_{d-1}} \circ e_{d-1} \circ \cdots \circ \phi_1^{N_1} \circ e_1 \circ \phi_0^{N_0}.$$

先从一个预备例子开始，其中至多有一个 i 使得 (E_i, ϕ_i, A_i) 不是 U-标准。首先，如果所有局部系统 (E_i, ϕ_i, A_i) 都是 U-标准的，那么对于所有 i，我们有 $\boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_0}, \boldsymbol{\alpha}_d^{E_d}) = \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_0}, \boldsymbol{\alpha}_d^{E_d})$，且 $\phi_i^{N_i} \in \mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_i, E_i)$。因此，$g \in \mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_0, E_d)$，于是$g\mathbf{y} \in \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_0}, \boldsymbol{\alpha}_d^{E_d})$。

考虑恰有一个 i（设为 $i = s$）使得 (E_i, ϕ_i, A_i) 不是 U-标准的情形。注意，Heegaard 图在 A_u 附近如图 C.1 (c) 所示。由于对于 $i \neq s$，我们同样有 $\boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_0}, \boldsymbol{\alpha}_d^{E_d}) = \boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_0}, \boldsymbol{\alpha}_d^{E_d})$，且 $\phi_i^{N_i} \in \mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_i, E_i)$，因此只需证明

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_s^{N_s} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u, E_u). \tag{C.8}$$

首先，若 $N_s \geq 0$，则方程（C.8）成立。若 $N_s < 0$，则

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_s^{N_s} = U^{n_z(\mathcal{D})+N_s}(U\phi_s^{-1})^{-N_s},$$

并且若令 a 为图 C.1 （c）所示 Heegaard 图上的点，则有

$$n_z(\mathcal{D}) + N_s = n_a(\mathcal{D}) \geq 0$$

通过考察 $A_u \cap \mathcal{D}$的端点，因此方程（C.8）成立。

现在，考虑主要情形：恰有 **两个** i （设为 $i = s$、t、$s < t$）使得 （E_i、ϕ_i、A_i）不是 U-标准。考虑 Heegaard 图在 C.1 （a）所示的 A_u附近的情形；另一种情形可类似处理。令 a、b、c、d为图 C.1 （a）所示 Heegaard 图上的点。

首先，通过考察 $A_u \cap \mathcal{D}$ 的端点，我们得到

$$N_s = n_b(\mathcal{D}) - n_z(\mathcal{D}),\ N_t = n_a(\mathcal{D}) - n_b(\mathcal{D}). \tag{C.9}$$

此外，令

$$n_{\pm,\mathrm{in}} := \begin{cases} 1 & \text{if } \exists i \text{ such that } \theta^{\pm} \in \mathbf{x}_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},\ n_{\pm,\mathrm{out}} := \begin{cases} 1 & \text{if } \theta^{\pm} \in \mathbf{y} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},\ n_{\pm} := n_{\pm,\mathrm{in}} - n_{\pm,\mathrm{out}}.$$

接着，通过观察图 C.1(a)，我们得到

$$n_a(\mathcal{D}) + n_z(\mathcal{D}) = n_b(\mathcal{D}) + n_d(\mathcal{D}) - n_+, \tag{C.10}$$

$$n_a(\mathcal{D}) + n_z(\mathcal{D}) = n_b(\mathcal{D}) + n_c(\mathcal{D}) + n_-. \tag{C.11}$$

我们还将用到以下情形，其中使用了方程（C.9）：

(C.12)
$$n_z(\mathcal{D})+\min(0,N_s)+\min(0,N_t)=\begin{cases} n_z(\mathcal{D}) & \text{if } N_s\geq 0,\ N_t\geq 0\\ n_b(\mathcal{D}) & \text{if } N_s\leq 0,\ N_t\geq 0\\ n_z(\mathcal{D})+n_a(\mathcal{D})-n_b(\mathcal{D}) & \text{if } N_s\geq 0,\ N_t\leq 0\\ n_a(\mathcal{D}) & \text{if } N_s\leq 0,\ N_t\leq 0 \end{cases},$$

(C.13)
$$n_z(\mathcal{D})+\min(0,N_s+1)+\min(0,N_t-1)=\begin{cases} n_z(\mathcal{D}) & \text{if } N_s\geq -1,\ N_t\geq 1\\ n_b(\mathcal{D})+1 & \text{if } N_s\leq -1,\ N_t\geq 1\\ n_z(\mathcal{D})+n_a(\mathcal{D})-n_b(\mathcal{D})-1 & \text{if } N_s\geq -1,\ N_t\leq 1\\ n_a(\mathcal{D}) & \text{if } N_s\leq -1,\ N_t\leq 1 \end{cases},$$

(C.14)
$$n_z(\mathcal{D})+\min(0,N_s-1)+\min(0,N_t+1)=\begin{cases} n_z(\mathcal{D}) & \text{if } N_s\geq 1,\ N_t\geq -1\\ n_b(\mathcal{D})-1 & \text{if } N_s\leq 1,\ N_t\geq -1\\ n_z(\mathcal{D})+n_a(\mathcal{D})-n_b(\mathcal{D})+1 & \text{if } N_s\geq 1,\ N_t\leq -1\\ n_a(\mathcal{D}) & \text{if } N_s\leq 1,\ N_t\leq -1 \end{cases}.$$

我们分几种情形讨论。

情形 $d\geq 2$：在这种情形下，要么 $n_+=0$ 要么 $n_-=0$，因此 $n_a(\mathcal{D})+n_z(\mathcal{D})\geq n_b(\mathcal{D})$ 由方程（C.10）和（C.11）可得。因此，

$$n_z(\mathcal{D})-\max(-N_s,0)-\max(-N_t,0)=n_z(\mathcal{D})+\min(0,N_s)+\min(0,N_t)\geq 0$$

由方程（C.12），因此我们有

(C.15)
$$\begin{aligned} &U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_u^{N_t}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{N_s}\\ &=U^{n_z(\mathcal{D})-\max(-N_s,0)-\max(-N_t,0)}(U^{\max(-N_t,0)}\phi_u^{N_t})\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)(U^{\max(-N_s,0)}\phi_u^{N_s})\\ &\leq \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u). \end{aligned}$$

因此，我们有 $g\in\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)$，因为 $\boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}_i^{E_i},\boldsymbol{\alpha}_{i+1}^{E_{i+1}})\leq\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}_i^{E_i},\boldsymbol{\alpha}_{i+1}^{E_{i+1}})$。

(1) 情形 $(s,t)\neq(0,d)$：$g\mathbf{y}$ 是滤过的，因为 $\boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_0},\boldsymbol{\alpha}_d^{E_d})=\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_0},\boldsymbol{\alpha}_d^{E_d})$。(2) 情形 $(s,t)=(0,d)$：我们进一步分成两种情形。(a) 若 $\theta^-\in\mathbf{y}$，则 $g\mathbf{y}$ 是滤过的，因为 $\boldsymbol{CF}^-_{fil}(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_0},\boldsymbol{\alpha}_d^{E_d})=\boldsymbol{CF}^-(\boldsymbol{\alpha}_0^{E_0},\boldsymbol{\alpha}_d^{E_d})$。(b) 若 $\theta^+\in\mathbf{y}$，则我们需要证明 $g\in\mathrm{Hom}^{fil}(E_u,E_u)$。由方程（C.10），我们有 $n_a(\mathcal{D})+n_z(\mathcal{D})\geq n_b(\mathcal{D})+1$，因此，仿照（C.15）的论证，但用方程（C.13）代替方程（C.12），可得

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_u^{N_t}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{N_s}\leq\phi_u\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{-1},$$

因此 $g\in\phi_u\mathrm{Hom}^{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{-1}$。于是，$g\in\mathrm{Hom}^{fil}(E_u,E_u)$。

情形 $d=1$，$(s,t)=(0,1)$：我们分为四种情形。

（1）情形 $\theta^+\in\mathbf{x}_1$，$\theta^+\in\mathbf{y}$：由方程 $n_a(\mathcal{D})+n_z(\mathcal{D})\geq n_b(\mathcal{D})$ 可得。我们要证明

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_u^{N_t}\mathrm{Hom}_{fil}(E_u,E_u)\phi_u^{N_s}\leq\mathrm{Hom}_{fil}(E_u,E_u).$$

这可由以下结论推出（它们彼此等价），而这些结论是方程（C.12）的推论。

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_u^{N_t}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{N_s}\le \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u),$$
$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_u^{N_t+1}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{N_s-1}\le \phi_u\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{-1}.$$

(2) 情形 $\theta^+\in\mathbf{x}_1$，$\theta^-\in\mathbf{y}$：我们有 $n_a(\mathcal{D})+n_z(\mathcal{D})\ge n_b(\mathcal{D})-1$ 根据方程 (C.10)。我们想要证明

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_u^{N_t}\mathrm{Hom}_{fil}(E_u,E_u)\phi_u^{N_s}\le \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u).$$

若 $n_z(\mathcal{D})+n_a(\mathcal{D})\ge n_b(\mathcal{D})$，则

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_u^{N_t}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{N_s}\le \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)$$

根据方程 (C.12)。因此，假设 $n_z(\mathcal{D})+n_a(\mathcal{D})-n_b(\mathcal{D})<0$；特别地$n_b(\mathcal{D})\ge 1$。那么，方程 (C.14) 推出

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_u^{N_t+1}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{N_s-1}\le \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u).$$

(3) 情形 $\theta^-\in\mathbf{x}_1$，$\theta^+\in\mathbf{y}$：我们有 $n_a(\mathcal{D})+n_z(\mathcal{D})\ge n_b(\mathcal{D})+1$ 根据方程 (C.10)。我们想要证明

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_u^{N_t}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{N_s}\le \mathrm{Hom}_{fil}(E_u,E_u).$$

这是成立的，因为方程 (C.12) 和 (C.13) 分别推出

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_u^{N_t}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{N_s}\le \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u),$$
$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_u^{N_t}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{N_s}\le \phi_u\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{-1}.$$

(4) 情形 $\theta^-\in\mathbf{x}_1$，$\theta^-\in\mathbf{y}$：我们有 $n_a(\mathcal{D})+n_z(\mathcal{D})\ge n_b(\mathcal{D})$ 根据方程 (C.10)。我们要证明

$$U^{n_z(\mathcal{D})}\phi_u^{N_t}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u)\phi_u^{N_s}\le \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}[\![U]\!]}(E_u,E_u);$$

这可由方程 (C.12) 得出。 □

参考文献

[Bha23] Deeparaj Bhat。《瞬子理论中的手术正合三角》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2311.04242*，2023。[Flo88] Andreas Floer。《三维流形的一个瞬子不变量》。《数学物理通讯》，118：215–240，1988。[HHSZ20] Kristen Hendricks、Jennifer Hom、Matthew Stoffregen 和 Ian Zemke。《对合 Heegaard Floer 同调中的手术正合三角》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2011.00113*，2020。[HHSZ24] Kristen Hendricks、Jennifer Hom、Matthew Stoffregen 和 Ian Zemke。《对合 Heegaard Floer 同调中的自然性与函子性》。《量子拓扑》，2024。[KMOS07] P. Kronheimer、T. Mrowka、P. Ozsváth 和 Z. Szabó。《单极子与透镜空间手术》。*Ann. of Math. (2)*，165(2)：457–546，2007。[Man07] Ciprian Manolescu。《结 Floer 同调中的一个无定向 skein 恰当三角》。*Math. Res. Lett.*，14(5)：839–852，2007。[Nah25] Gheehyun Nahm。《无定向链环 Floer 同调中的一个无定向 skein 恰当三角》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2501.01047*，2025。[OS03] Peter Ozsváth 和 Zoltán Szabó。《带边界四维流形的绝对分次 Floer 同调与交形式》。*Adv. Math.*，173(2)：179–261，2003。[OS04a] Peter Ozsváth 和 Zoltán Szabó。《全纯圆盘与结不变量》。*Adv. Math.*，186 116，2004 1 58( ): – .[OS04b] Peter Ozsváth 和 Zoltán Szabó。《全纯圆盘与三维流形不变量：性质与应用》。*Ann. of Math. (2)*，159(3)：1159–1245，2004。[OS04c] Peter Ozsváth 和 Zoltán Szabó。《全纯圆盘与闭三维流形的拓扑不变量》。*Ann. of Math. (2)*，159(3)：1027–1158，2004。

[OS05] Peter Ozsváth 和 Zoltán Szabó。《分支双重覆盖的 Heegaard Floer 同调》。Adv. Math.，194(1)：1–33，2005。[OS08] Peter Ozsváth 和 Zoltán Szabó。《全纯圆盘、链环不变量与多变量 Alexander 多项式》。Algebr. Geom. Topol.，8(2)：615–692，2008。[OSS17a] Peter S. Ozsváth、András I. Stipsicz 和 Zoltán Szabó。《由结 Floer 同调导出的同痕同态》。Adv. Math.，315：366–426，2017。[OSS17b] Peter S. Ozsváth、András I. Stipsicz 和 Zoltán Szabó。《无向结 Floer 同调与无向四维球亏格》。Int. Math. Res. Not. IMRN，(17)：5137–5181，2017。[Ras03] Jacob Andrew Rasmussen。《Floer 同调与结补空间》。ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，2003。博士论文——哈佛大学。[Sta18] Stacks Project 作者。《Stacks Project》。https://stacks.math.columbia.edu，2018。[Zem23] Ian Zemke。《一个一般的 Heegaard Floer 手术公式》。arXiv 预印本 arXiv:2308.15658，2023。

美国新泽西州普林斯顿 08544，普林斯顿大学数学系电子邮件地址：gn4470@math.princeton.edu