arXiv:2601.06660v1 [math.RA] 10 Jan 2026

扩展流形上由移动标架导出的相对不变量

LEONID BEDRATYUK

摘要。本文提出了对移动标架方法的一种构造性改进，用于构造正则李群作用的相对不变量。设权为 ω 的相对不变量I 按如下规则变换

$$I(g\cdot \boldsymbol{x}) = \mu(g,\boldsymbol{x})^{\omega} I(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\mu\colon\ G\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{\times}$ 是一个标量乘子（1-余循环）。本文证明， μ 的余循环性质等价于扩展流形$\frown\!\!\!\!\mathcal{M} = \mathcal{M}\times\mathbb{R}^{\times}$上扭曲群作用的良定义性，并且 $\mathcal{M}$ 上的相对不变量与该作用在 $\mathcal{M}$ 上的$\widehat{\ }$绝对不变量一一对应。

主要结果是，给定一个移动标架，乘子的不变量化是权为 -1的典范相对不变量。这使得任意权都能以构造方式实现，并得到任意相对不变量关于基本绝对不变量和不变量化乘子的显式公式。文中还给出了示例，展示所提出方法在射影群 $PGL(3,\ \mathbb{R})$中的应用。

关键词： 移动标架算法；相对不变量；乘子；1-余循环；扭曲作用；群上同调；不变量化。

1. 引言

设 G 维李群 r在 n维流形 $\mathcal{M}$上光滑作用。该作用在 $\mathcal{M}$上的有理函数域 G ($\mathcal{F}$)上诱导出$\mathcal{M}$的作用。若函数$f\in\mathcal{F}(\mathcal{M})$满足相对不变量，并具有光滑乘子 $\mu\colon\ G\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{\times}$，则称其为

$$f(g\cdot\boldsymbol{x}) = \mu(g,\boldsymbol{x})\, f(\boldsymbol{x}), \qquad \forall\, g\in G,\ \boldsymbol{x}\in\mathcal{M}. \tag{1}$$

更一般地，可以引入有理权 $\omega\in\mathbb{Q}$，并将 μ替换为带权乘子，即

$$f(g\cdot\boldsymbol{x}) = \mu(g,\boldsymbol{x})^{\omega}\, f(\boldsymbol{x}).$$

In 按照这一术语，权为 0 的相对不变量是绝对不变量。

变换群作用的相对不变量分类问题贯穿现代数学及其应用。在仿射变换和射影变换的背景下，相对不变量自然出现；例如，面积或体积不再保持不变，而是按变换矩阵的行列式缩放。对相对不变量作一般性描述，使得我们能够将广泛的不变结构视为在诱导群作用下保持不变的向量丛截面。相对不变量在微分几何（不变向量场、微分形式、体积元） [1–4],、不变微分算子理论 [5], 、不变度量与联络的研究 [6], 、数论（自守形式与模形式、Epstein ζ函数） [7, 8],、经典力学（Cartan 型相对积分不变量与辛几何） [9, 10], 以及计算机视觉等应用问题中 [11–13], 均发挥着基础作用；它们也出现在特殊函数理论中（特别是梅林–巴恩斯型积分表示、矩阵变量函数和惠特克函数） [14, 15], ，以及量子力学中（规范不变性，以及将波函数视为相对不变量时的变换性质） [16]。

尽管应用广泛，相对不变量的系统理论远不如绝对不变量理论发展成熟。正则李群作用的绝对不变量分类是弗罗贝尼乌斯定理的直接推论，而相对不变量的类似一般理论直到近年才得以建立。具体而言， [1, 17]彻底解决了连通李群作用的正则乘子表示的相对不变量一般分类问题，给出了函数独立的相对不变量确切数量的显式公式，并确立了它们的结构。通过详细讨论若干重要的几何构造，展示了该理论广泛的适用性；这些构造是向量丛作用（尤其是张量丛作用）的相对不变量，包括不变向量场和微分形式、此类场存在的纯几何条件，以及对不变联络应用的深入探讨（包括非齐次乘子表示）。

然而，在具有实际重要性的问题中，一个核心问题仍然是：如何在适于计算的函数类中构造性地提取生成相对不变量；本文聚焦于这一算法层面。我们的目标是运用移动标架方法，建立一套构造相对不变量的通用方法——这是一种有效的构造性技术，源自 Cartan 的几何思想，并由 Fels 和 Olver 以现代形式加以发展 [18, 19]。移动标架方法已成为构造正则李群作用的绝对不变量和微分不变量的标准工具。与此同时，文献尚未充分发掘其在系统处理相对不变量方面的潜力。

所提出的方法建立在两个关键思想之上，可将问题转化为明确的构造性算法。首先，我们转向扩展空间 $\mathcal{M} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^{\times}$，并引入一种扭曲作用 G，其中乘子 μ作为控制附加坐标变换的因子出现。这样，便可将 $\mathcal{M}$ 上的相对不变量构造问题，转化为在 $\mathcal{M}$上构造扩展作用的绝对不变量。其次，假设已构造出作用于 M 的移动标架，我们证明，对乘子进行不变量化可得到一个权为 -1的典范相对不变量。由此，相对不变量成为移动标架方法这一统一几何范式中绝对不变量的自然延伸。

我们的结果还推广并系统化了具体实例中出现的观察，尤其是对于射影群而言，乘子不变量化与射影不变构造中自然出现的、依赖于标架的量相一致 [20, 21]。不过，本文的重点并非分类或整体性问题，而是构造性过程：给定一个移动标架，如何高效地构造相对不变量。

我们还通过一种上同调解释，对可容许乘子给出了完整描述。乘子可自然地视为群作用的乘法巴复形中取系数于 $\mathcal{F}(M)^{\times}$ 的一个 1-余循环，而余循环条件等价于乘子的函数余循环恒等式。利用这一情形下第一上同调群的平凡性，我们证明每个 1-余循环都是一个 1-余边界。因此，上同调方法不仅阐明了乘子作为“规范变换”的几何意义，也给出了所有乘子的闭式分类。

在更广泛的几何背景下，会遇到一个非平凡的可实现性问题：给定的 1-余循环能否成为某个相对不变量的乘子，尤其是在涉及不变除子和等变线丛时；参见 [22]。对于属于 $C^{\infty}(M)$ 类的正则光滑作用，Fels 和 Olver [1], 取得了一些局部结果；而在一般情形下，尚无普适的判据。本文仍在构造性正则情形以及有理函数这一类中讨论，此时移动标架的存在意味着第一上同调平凡，因而该 1-余循环可实现。

本文安排如下。第 1 节简要回顾正则李群作用的移动标架方法，并引入乘子；特别地，我们将乘子解释为 1-余循环的上同调解释，并证明，在本文所讨论的构造性类中，所有这类余循环都是余边界。第 2 节提出一种针对相对不变量的移动标架方法的改进$\widehat{\ }$：我们构造带有扭曲作用的扩展 $\mathcal{M} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^{\times}$，建立 $\mathcal{M}$ 上的相对不变量与扩展作用的绝对不变量之间的对应关系，并证明移动标架对乘子进行不变量化会产生规范的权 -1 相对不变量，并为任意相对不变量导出显式标准形。第 3 节将一般结果应用于 $PGL(3, \mathbb{R})$ 在构形空间上的对角射影作用：我们构造移动标架，推导基本联合绝对不变量及显式的不变量化雅可比矩阵，继而构造一族新的图像联合积分射影不变量，它们在定义域的射影变形下保持不变。

本文稍微宽泛地使用记号，将流形上的一个点与所选图中定义于该点某个邻域内的局部坐标等同起来。

2. 移动标架方法与乘子

移动标架方法的现代形式是在 [18], [19], 中发展起来的，尽管其起源可追溯到 19 世纪末的研究。下文将简要介绍该方法的要旨，并以上同调的术语描述乘子。

2.1. 移动标架方法。 设李群 G 在流形 $\mathcal{M}$. 上光滑作用。A（右）移动标架 是一个光滑的 G-等变映射 $\rho : \mathcal{M} \to G$，满足

$$\rho(g \cdot \boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x}) g^{-1},$$

对于所有 $g \in G$ 以及所有 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$。

The 移动标架存在的条件由以下定理给出 :

定理 1 ([19])。 若 G 作用于 $\mathcal{M}$, 则在点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$ 的某个邻域内存在移动标架，当且仅当 G 在 $\boldsymbol{x}$附近自由且正则地作用。

正则性条件意味着， $\mathcal{M}$中的每个点都具有任意小的邻域，且该邻域与每个轨道的交集都是其中的连通子集。特别地，正则性意味着 $\mathcal{M}$ 的所有群轨道都是维数相同的子流形，其维数与群 G的维数一致。若 G 的作用满足：对每个点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$, 其稳定子

$$G_{\boldsymbol{x}} = \{g \in G \mid g \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}$$

是平凡的。

G 在 $\mathcal{M}$ 上的作用按照以下规则诱导出在有理函数域 $\mathcal{F}(\mathcal{M})$上的作用

$$g \cdot F(\boldsymbol{x}) = F(g^{-1}\boldsymbol{x}).$$

由此得到（绝对）不变量域:

$$\mathcal{F}(\mathcal{M})^G = \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) \mid g \cdot F = F, \quad \forall g \in G\}.$$

移动标架的存在通常有助于为域 $\mathcal{F}(\mathcal{M})^G$ 构造一个最小的不变量生成集，这是利用移动标架将轨道上的所有点映射到同一个点这一事实实现的。事实上，设 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{M}$ 位于同一轨道上，因此对于某个 $g \in G$，有 $\boldsymbol{y} = g \cdot \boldsymbol{x}$。那么，由等变性可得:

$$\rho(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{y} = \rho(g \cdot \boldsymbol{x}) \cdot (g \cdot \boldsymbol{x}) = \left(\rho(\boldsymbol{x})\, g^{-1}\right) \cdot (g \cdot \boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}.$$

这个不动点 $\boldsymbol{x}^* = \rho(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}$ 称为轨道点 $\boldsymbol{x}$ 的规范化。规范化后点的局部坐标

$$\boldsymbol{x}^* = (I_1(\boldsymbol{x}), I_2(\boldsymbol{x}), \dots, I_m(\boldsymbol{x})), \quad m = \dim \mathcal{M},$$

不依赖于轨道代表元的选择，并构成一个完备的不变量系统，其中 $m-r$ 不变量构成不变域 $\mathcal{F}(\mathcal{M})$的最小生成集^G [19,定理 4.5]。

为了实际计算不变量，引入函数的不变量化操作。相对于移动标架 ρ，函数 $F\in\mathcal{F}(\mathcal{M})$ 的不变量化是由下式定义的函数 $\iota(F)\in\mathcal{F}(\mathcal{M})$:

$$\iota(F)(\boldsymbol{x}) = F(\rho(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}).$$

容易看出 $\iota^2=\iota$，因此得到一个投影算子

$$\iota : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathcal{F}(\mathcal{M})^G.$$

因此，不变量化实现了将任意函数典范投影到其 G-不变的规范化形式上。从这个意义上说，不变量化算子类似于有限群的 Reynolds 算子：它并非对群进行离散平均，而是采用几何规范化。

要构造移动标架，必须确定定义元素$\rho(\boldsymbol{x})$的群参数，使其成为点 $\boldsymbol{x}$的局部坐标的函数。为此，通过方程 r 选定一个截面$\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} = \{\, x_1 = c_1,\ \dots,\ x_r = c_r \,\} \subset \mathcal{M},$$

其中 $r=$维G且 c_1，…， c_r是适当选取的常数。这些方程确定了规范化点的 r 个坐标。相关的右移动标架 $\rho(\boldsymbol{x})\in G$ 可通过求解规范化方程得到

$$\big(g\cdot\boldsymbol{x}\big)_j = c_j, \qquad j=1,\dots,r.$$

这是一个关于 r 个未知数——群参数——的 r 方程组，通常是多项式方程组。定理 1 保证该方程组存在唯一的局部解，从而得到移动标架 $\rho(\boldsymbol{x})$。因此，对于任意点 $\boldsymbol{x}$，规范化点的坐标，也就是坐标函数的不变量化结果，具有如下形式

$$\boldsymbol{x}^* = \big(c_1,\dots,c_r,\ I_1(\boldsymbol{x}),\dots,I_{m-r}(\boldsymbol{x})\big).$$

因此， $m-r$ 个不变量 $I_1(\boldsymbol{x})$，…， $I_{m-r}(\boldsymbol{x})$ 构成不变量域的最小生成集：它们函数独立，而且 $\mathcal{F}(\mathcal{M})^G$ 中的任何不变量都是$I_1(\boldsymbol{x})$，…， $I_{m-r}(\boldsymbol{x})$的函数。

我们注意到，尽管移动标架是在局部定义的，但通过不变量化得到的不变量是全局的，因为它们仅取决于轨道，而不取决于轨道上代表点的选择。

最后，我们指出，在大多数实际相关的情形中，规范化方程关于群参数是线性的。特别是，特殊射影群 $PSL(n,\ \mathbb{R})$、仿射群 $A(n,\ \mathbb{R})$ 及其子群都具有这一特点，如 [23] 所示。这样便可以显式求解规范化系统，其中移动标架参数表示为坐标 $\boldsymbol{x}$ 的有理函数。因此，基于此构造的所有对象——从绝对不变量到不变量化乘子——都属于 $\mathcal{M}$ 上的有理函数类。

另一方面，对于二元形式经典不变量的构造等问题，规范化方程是高次多项式方程，即使对于二元二次型，显式确定其解也会复杂得多；见 [24]。鉴于此，本文将注意力限制在 $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ 为有理函数域的实际情形。

2.2. 乘子。 哪些函数 $\mu\colon G\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}$可以作为乘子？根据恒等式$g\cdot(h\cdot F)=(gh)\cdot F$，展开两边并令其相等，可得乘子必须满足恒等式

$$\mu(gh,\boldsymbol{x})=\mu(g,h\boldsymbol{x})\,\mu(h,\boldsymbol{x}),\qquad \mu(e,\boldsymbol{x})=1. \tag{2}$$

在经典框架中 [1], ，乘子自然来源于函数空间上的一种所谓规范变换。具体而言，取任意处处非零函数（规范因子）$\eta\colon\ \mathcal{M}\to\mathbb{R}^{\times}$ ，并通过乘以 η来修改函数上的标准作用，即考虑变换 $F\mapsto\eta F$。于是，变换后的作用会带有因子

$$\frac{\eta(g\cdot\boldsymbol{x})}{\eta(\boldsymbol{x})},$$

不难验证，这确实是一个乘子。本小节将运用同调代数的方法，证明这种构造实际上能给出所有可能的乘子。

我们先回顾必要的概念。设

$$\mathcal{F}(\mathcal{M})^{\times}=\{\,f\in\mathcal{F}(\mathcal{M})\mid f(\boldsymbol{x})\neq 0\ \ \forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}\,\}$$

为 $\mathcal{M}$上处处非零函数构成的乘法阿贝尔群。考虑与群作用相关的标准非齐次乘法巴尔复形:

$$C^n=\operatorname{Map}(G^n\times\mathcal{M},\mathbb{R}^{\times}),\qquad (C^{\bullet},d^{\bullet})\colon\quad C^0\xrightarrow{d^0}C^1\xrightarrow{d^1}C^2\xrightarrow{d^2}\cdots,$$

其中 $C^0=\mathcal{F}(\mathcal{M})^{\times}$。余边界算子由以下公式给出（见 [25]）：

$$(d^0c)(g,\boldsymbol{x})=\frac{c(g\cdot\boldsymbol{x})}{c(\boldsymbol{x})},\qquad c\in C^0,$$

$$(d^1c)(g_1,g_2,\boldsymbol{x})=\frac{c(g_1,g_2\cdot\boldsymbol{x})\,c(g_2,\boldsymbol{x})}{c(g_1g_2,\boldsymbol{x})},\qquad c\in C^1,$$

对于 $n\geq 1$ 和 $c\in C^n$ ，我们有标准表达式

$$\begin{aligned}(d^nc)(g_1,\dots,g_{n+1};\boldsymbol{x})=c(g_2,\dots,g_{n+1};\boldsymbol{x})\prod_{i=1}^{n}c(g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_{n+1};\boldsymbol{x})^{(-1)^i}\\ \cdot\,c(g_1,\dots,g_n;\ g_{n+1}\cdot\boldsymbol{x})^{(-1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

这些算子满足恒等式 $d^{n+1}\circ d^n=1$ （恒等元，在加法记号中对应于 0），因此余循环群和余边界群定义良好:

$$Z^n(G,\mathcal{F}(\mathcal{M})^{\times})=\ker d^n,\qquad B^n(G,\mathcal{F}(\mathcal{M})^{\times})=\operatorname{Im}d^{n-1},\qquad H^n=Z^n/B^n.$$

In p特别地，1-余循环条件 $(d^1c)(g_1,\ g_2,\ \boldsymbol{x})=1$，明确写成

$$\frac{c(g_1,g_2\cdot\boldsymbol{x})\,c(g_2,\boldsymbol{x})}{c(g_1g_2,\boldsymbol{x})}=1,$$

与乘子恒等式 (2) 相同。

下面的定理利用高阶上同调群 $H^n(G,\ \mathcal{F}(\mathcal{M})^\times)$ 对于 $n \geq 1$ 的平凡性，对所有乘子进行分类；这一平凡性是存在移动标架 $[20,\ \text{Section}\ 5]$ 的直接结果。

定理 2。 假设 G 在点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$的某个邻域内的作用是自由且正则的，并且存在一个右移动标架 $\rho\colon\ \mathcal{M} \to G$ 定义在该邻域内。则有以下结论：

（i）对于任意 $f \in \mathcal{F}（\mathcal{M}）^\times$，函数

$$\mu(g, \boldsymbol{x}) = \frac{f(g\cdot\boldsymbol{x})}{f(\boldsymbol{x})}$$

是一个乘子，即一个1–余循环： $d^1\mu = 1$。

（ii）对于每个乘子 μ，存在 $f \in \mathcal{F}（\mathcal{M}）^\times$，使得

$$\mu(g, \boldsymbol{x}) = \frac{f(g\cdot\boldsymbol{x})}{f(\boldsymbol{x})}.$$

证明。 (*i*) 取 $\mu = d^0 f$。于是，根据 d^0 和 d^1的定义，

$$(d^1\mu)(g_1, g_2, \boldsymbol{x}) = \frac{\mu(g_1, g_2\cdot\boldsymbol{x})\,\mu(g_2, \boldsymbol{x})}{\mu(g_1g_2, \boldsymbol{x})} = \frac{\dfrac{f(g_1g_2\cdot\boldsymbol{x})}{f(g_2\cdot\boldsymbol{x})}\cdot\dfrac{f(g_2\cdot\boldsymbol{x})}{f(\boldsymbol{x})}}{\dfrac{f(g_1g_2\cdot\boldsymbol{x})}{f(\boldsymbol{x})}} = 1.$$

因此， μ 是一个1-余循环，即一个乘子。

(ii) 设 μ 为任意乘子。这等价于条件 $d^1\mu = 1$，即$\mu \in \ker d^1 = Z^1$。由于第一上同调群是平凡的， $H^1(C^\bullet) = 1$，因此我们有 $Z^1 = B^1 = \operatorname{Im} d^0$，所以每个1-余循环都是1-余边界。因此存在 $f \in C^0 = \mathcal{F}(\mathcal{M})^\times$，使得 $\mu = d^0 f$，这正是公式

$$\mu(g, \boldsymbol{x}) = \frac{f(g\cdot\boldsymbol{x})}{f(\boldsymbol{x})}.$$

□

因此，我们已经完整刻画了有理函数类中方程(2)的解：其所有解都由流形 $\mathcal{M}$上的处处非零函数参数化。

3. 相对不变量的移动标架方法的修正

标准形式的移动标架方法描述了给定群在流形上的作用所对应的绝对不变量域。为了系统地纳入具有固定乘子 $\mu(g,\ \boldsymbol{x})$ 的相对不变量，我们通过添加一个附加坐标来扩展基流形，并使用 μ 在扩展流形上定义良好的扭曲群作用。在这个扩展空间上，相对不变量可自然地解释为绝对不变量，因此我们可以直接采用标准步骤：选取一个截面、构造移动标架并进行不变量化。此外，我们还得到一个显式的权生成元，它补充了基流形的基本绝对不变量。

3.1. 为何不能留在 $\mathcal{M}$ 内? 能否强行让移动标架方法——其本质是构造绝对不变量——在保持于 $\mathcal{M}$ 内的同时自动生成相对不变量? 我们或许会想定义一种新的函数上的群作用，使得该新作用的绝对不变量与标准作用 (1) 下的相对不变量一致。确实可以做到，例如，可如下定义扭曲作用 $\circ$:

$$g \circ F(\boldsymbol{x}) = \mu(g^{-1}, \boldsymbol{x})^{-1} F(g^{-1}\boldsymbol{x}), \qquad g \in G, \quad F \in \mathcal{F}(\mathcal{M}).$$

那么，绝对不变性的条件 $g \circ F = F$ 等价于

$$\mu(g^{-1}, \boldsymbol{x})^{-1} F(g^{-1}\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}),$$

或者，替换 $g \mapsto g^{-1}$ 后,

$$F(g\boldsymbol{x}) = \mu(g, \boldsymbol{x})\, F(\boldsymbol{x}), \qquad \forall\, g \in G,\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{M}.$$

因此，关于 $\circ$ 作用的绝对不变量 F，恰好是乘子为 μ 的相对不变量。

然而，这个 $\circ$ 作用只定义在函数空间 $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ 上，无法下降为流形 $\mathcal{M}$ 本身上的作用。原因很简单：流形 $\mathcal{M}$ 上的任何群作用都会在函数域 $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ 上诱导一个保持乘法单位元和乘积的自同构。但对于 $\circ$ 作用，我们有

$$(g \circ 1)(\boldsymbol{x}) = \mu(g^{-1}, \boldsymbol{x})^{-1} \neq 1, \quad \text{and in general,} \quad g \circ (FG) \neq (g \circ F)(g \circ G).$$

因此，这种仅在函数层面对作用进行扭转的做法，并未在 $\mathcal{M}$ 上定义几何群作用，所以无法直接在 $\mathcal{M}$ 上应用移动标架方法，以此计算相对不变量。

尽管如此，为了使用移动标架方法，我们将在下一小节中通过添加一个额外的“权”坐标，引入该作用到扩展流形上的正确几何提升，在这个坐标上，乘子 μ可实现为标准群作用。

3.2. 扩展流形上的移动标架 $\mathcal{M}$。处理乘子表示的一种完全几何化的方法，是从基流形 $\mathcal{M}$ 转到一个扩展流形，使乘子成为普通群作用的一部分。这一思想已见于 [17]: 给定一个乘子，考虑扩展空间 $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^{\times}$ 以及扩展作用

$$g : (\boldsymbol{x}, u) \longmapsto \big(g \cdot \boldsymbol{x},\ \mu(g, \boldsymbol{x})\, u\big),$$

它是一个真正的（局部）群作用 当且仅当 μ 满足余循环恒等式（2).

接下来，我们将这一构造再推进一步：我们证明，在扩展空间中选取合适的截面后，无需修改即可应用标准移动标架算法，从而为 μ-相对不变量域 $\mathcal{F}(\mathcal{M})^{G}_{\mu}$构造出一个显式生成集。特别地， $\mathcal{M}$ 上的相对不变量可由扩展作用的绝对不变量以及一个通过对新增坐标进行不变量化而得到的单个权生成元恢复。

固定一个光滑乘子

$$\mu : G \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{\times}, \qquad \mu(gh, x) = \mu\big(g, h \cdot x\big)\, \mu(h, x), \quad \mu(e, x) = 1.$$

令 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)$ 为点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$ 的局部坐标表示。考虑由 $\mathcal{M}$ 和去心实直线的笛卡尔积定义的新流形:

$$\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^{\times}, \qquad \text{where } \mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

在 $\mathcal{M}$ 上的局部坐标系 $(x_1,\dots,x_m)$ 中，添加一个新的坐标函数 $x_{m+1}\in\!\frown\mathbb{R}^{\times}$。定义 G 对点 $\hat{}\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}$ 的作用为

$$g\cdot\hat{\boldsymbol{x}} \;=\; \big(g\cdot\boldsymbol{x},\; x_{m+1}\cdot\mu(g,\boldsymbol{x})\big),\quad \hat{\boldsymbol{x}}=(x_1,\dots,x_m,x_{m+1})\in\widehat{\mathcal{M}}. \tag{3}$$

$\widehat{\ }$典范投影 $\pi\colon\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 由 $\pi(\hat{}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ 给出。

定理 3。以下陈述成立：

$\widehat{\ }$ (i) 映射 (3) 定义了 G 在 $\mathcal{M}$ 上的光滑作用。(ii) 投影 π 是一个 G-等变映射。(iii) 如果 G 在 $\mathcal{M}$ 上的作用在点 $\boldsymbol{x}$ 附近是自由且正则的，那么 G 在 $\widehat{\mathcal{M}}$ 上诱导的作用在 $\pi^{-1}(\boldsymbol{x})$ 中的任意点附近也同样是自由且正则的。

证明。 (i) 对于恒等式 $e\in G$，我们计算：

$$e\cdot\hat{\boldsymbol{x}}=(e\cdot\boldsymbol{x},\; x_{m+1}\mu(e,\boldsymbol{x}))=(\boldsymbol{x},\; x_{m+1})=\hat{\boldsymbol{x}},$$

因为 $\mu(e,\ \boldsymbol{x})=1$。

对于任意 $g,\ h\in G$，利用 μ 的余循环恒等式，可得

$$\begin{aligned} g\cdot(h\cdot\hat{\boldsymbol{x}}) &= g\cdot\big(h\cdot\boldsymbol{x},\; x_{m+1}\mu(h,\boldsymbol{x})\big)\\ &= \big(gh\cdot\boldsymbol{x},\; x_{m+1}\mu(h,\boldsymbol{x})\,\mu(g,h\cdot\boldsymbol{x})\big)\\ &= \big(gh\cdot\boldsymbol{x},\; x_{m+1}\mu(gh,\boldsymbol{x})\big)=(gh)\cdot\hat{\boldsymbol{x}}. \end{aligned}$$

光滑性源于作用在 $\mathcal{M}$上的光滑性以及函数 μ 的光滑性。

(ii) 验证 π 的等变性：

$$\pi(g\cdot\hat{\boldsymbol{x}})=\pi(g\cdot\boldsymbol{x},\; x_{m+1}\mu(g,\boldsymbol{x}))=g\cdot\boldsymbol{x}=g\cdot\pi(\hat{\boldsymbol{x}}).$$

(iii) 自由性：若稳定子 $G_{\boldsymbol{x}}=\{g\in G\mid g\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\}$ 是平凡的，则其本身也

$$G_{\hat{\boldsymbol{x}}}=\{g\in G\mid g\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\text{ and }x_{m+1}\mu(g,\boldsymbol{x})=x_{m+1}\}=\{g\in G_{\boldsymbol{x}}\mid\mu(g,\boldsymbol{x})=1\}=\{e\}.$$

$\widehat{\ }$半正则性：点 $\hat{}\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}$ 的轨道具有如下形式

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}}}(\hat{\boldsymbol{x}})=\{(g\cdot\boldsymbol{x},\; x_{m+1}\mu(g,\boldsymbol{x}))\mid g\in G\}.$$

由于 π 是 G-等变的，它将轨道映射到轨道，而其限制

$$\pi:\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}}}(\hat{\boldsymbol{x}})\to\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})$$

是双射。事实上，对每个 $\boldsymbol{y}\in\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})$，都存在唯一的 $g_{\boldsymbol{y}}\in G$ 使得 $\boldsymbol{y}=g_{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{x}$；然后，利用 μ 的余循环恒等式以及 π的等变性，$\pi|_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}}}(\hat{}\boldsymbol{x})}$ 的逆映射可表示为

$$\boldsymbol{y}\mapsto\big(\boldsymbol{y},\; x_{m+1}\mu(g_{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{x})\big).$$

此外，这个逆 映射是光滑的，因此 π 将轨道微分同胚地映到轨道之间，并且 d

$$\dim\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}}}(\hat{\boldsymbol{x}})=\dim\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x}),$$

所以半正则性得以保留。

正则性：设 G 的作用在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $U\subset\mathcal{M}$ 内自由且正则，因此交集 $U\cap\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})$ 是连通的。选取 $\varepsilon>0$，使得区间 $(x_{m+1}-\varepsilon,\; x_{m+1}+\varepsilon)\subset\mathbb{R}^{\times}$，并令

$$\widehat{U}=U\times(x_{m+1}-\varepsilon,\; x_{m+1}+\varepsilon)\subset\widehat{\mathcal{M}}.$$

于是 π 将 $U\cap\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}}}(\hat{\boldsymbol{x}})$ 映 onto $U\cap\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})$。由于作用是自由的，对于每个 $\boldsymbol{y}\in U\cap\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})$，都存在唯一的 $g_{\boldsymbol{y}}\in G$ 使得 $\boldsymbol{y}=g_{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{x}$。由于轨道映射$G\to\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})$ 的正则性，映射 $\boldsymbol{y}\mapsto g_{\boldsymbol{y}}$ 可以局部光滑地选取。定义映射

$$\Psi: U\cap\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})\longrightarrow\widehat{U}\cap\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}}}(\hat{\boldsymbol{x}}),\qquad \Psi(\boldsymbol{y})=\big(\boldsymbol{y},\ x_{m+1}\mu(g_{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{x})\big).$$

T该映射定义良好且光滑，其逆映射由 π 给出，因为

$$\pi(\Psi(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{y},\qquad \Psi(\pi(\hat{\boldsymbol{y}}))=\hat{\boldsymbol{y}}$$

对所有 $\hat{\boldsymbol{y}}\in U\cap\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}}}(\hat{\boldsymbol{x}})$ 都成立。因此， Ψ 是一个微分同胚。

因此，$U\cap\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{M}}}(\hat{\boldsymbol{x}})$ 与一个连通子集微分同胚，并且群作用在 $\mathcal{M}$ 上于 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 附近是正则的，正如所声称的那样。□

我们已经证明，在 $\mathcal{M}$ 上存在局部移动标架意味着在扩展流形 $\mathcal{M}$上也存在局部移动标架。现在我们证明，事实上，这些移动标架对应于同一个群元素。

定理 4. 假设 G 在 $\mathcal{M}$ 上的作用在点 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}$ 的某个邻域内是自由且正则的，并设 $\rho\colon\mathcal{M}\to G$ 是相应的右移动标架。那么，在点 $\hat{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{x},x_{m+1})\in\mathcal{M}$ 的某个邻域 $\widehat{\mathcal{M}}$ 内，存在一个右移动标架 $\widehat{\rho}\colon\mathcal{M}\to G$，使得

$$\widehat{\rho}(\hat{\boldsymbol{x}})=\rho(\boldsymbol{x}).$$

此外，局部地有 $\widehat{\rho}=\rho\circ\pi$。

证明。由于 G 在 $\mathcal{M}$ 上的作用在 $\boldsymbol{x}$ 的某个邻域内是自由且正则的，因此存在一个局部横截面 $\mathcal{K}\subset\mathcal{M}$ 以及一个（局部）唯一的右移动标架 $\rho:\ \mathcal{M}\to G$，其参数由 $\boldsymbol{x}$ 附近的规范化方程 $\rho(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}\in\mathcal{K}$ 确定。

考虑扩展流形中的提升截面，

$$\widehat{\mathcal{K}}=\mathcal{K}\cap\{\,x_{m+1}=1\,\}\subset\widehat{\mathcal{M}}.$$

根据定理 3， G 在 $\mathcal{M}$ 上的作用仍然是自由且正则的，因此存在唯一的移动标架 $\widehat{\rho}(\hat{\boldsymbol{x}})\in G$，使得

$$\widehat{\rho}(\hat{\boldsymbol{x}})\cdot\hat{\boldsymbol{x}}=\Big(\widehat{\rho}(\hat{\boldsymbol{x}})\cdot\boldsymbol{x},\ x_{m+1}\,\mu\big(\widehat{\rho}(\hat{\boldsymbol{x}}),\boldsymbol{x}\big)\Big)\in\widehat{\mathcal{K}}.$$

属于 $\mathcal{K}$ 等价于以下方程组

$$\widehat{\rho}(\hat{\boldsymbol{x}})\cdot\boldsymbol{x}\in\mathcal{K},\qquad x_{m+1}\,\mu\big(\widehat{\rho}(\hat{\boldsymbol{x}}),\boldsymbol{x}\big)=1.$$

第二个方程仅仅是针对坐标 x_{m+1} 在纤维中确定一个唯一代表元，并不影响在 $\mathcal{M}$上求解规范化方程。第一个方程通过基坐标唯一确定群元素，并且与定义 $\rho(\boldsymbol{x})$的规范化方程一致。由唯一性可得

$$\widehat{\rho}(\hat{\boldsymbol{x}})=\rho(\boldsymbol{x}).$$

根据投影 π的定义，我们有

$$\widehat{\rho}(\hat{\boldsymbol{x}})=\rho(\boldsymbol{x})=(\rho\circ\pi)(\hat{\boldsymbol{x}}).$$

由于 $\widehat{\rho}=\rho\circ\pi$ 和 π 是 G-等变的，因此

$$\widehat{\rho}(g\cdot\hat{\boldsymbol{x}})=\rho(\pi(g\cdot\hat{\boldsymbol{x}}))=\rho(g\cdot\boldsymbol{x})=\rho(\boldsymbol{x})\,g^{-1}=\widehat{\rho}(\hat{\boldsymbol{x}})\,g^{-1},$$

因此右等变性成立。

最后，我们验证点的像仍位于截面 $\widehat{\mathcal{K}}$ 中。令 $\hat{}\boldsymbol{x}' = g\cdot\hat{}\boldsymbol{x} = (g\cdot\boldsymbol{x},\ x_{m+1}\,\mu(g,\boldsymbol{x}))$. 那么 $\widehat{\rho}(\hat{}\boldsymbol{x}') = \rho(g\cdot\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})\,g^{-1}$，并根据 μ 的余循环恒等式，

$$\mu\big(\rho(g\cdot\boldsymbol{x}),\, g\cdot\boldsymbol{x}\big) = \mu\big(\rho(\boldsymbol{x})g^{-1},\, g\cdot\boldsymbol{x}\big) = \frac{\mu(\rho(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})}{\mu(g,\boldsymbol{x})}.$$

因此，

$$x'_{m+1}\,\mu\big(\widehat{\rho}(\hat{\boldsymbol{x}}'),\pi(\hat{\boldsymbol{x}}')\big) = x_{m+1}\,\mu(\rho(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}) = 1,$$

所以规范条件得以保持。 □

现在我们证明，乘子的不变量化会产生一个权为–1的相对不变量，并且对其重复进行不变量化会得到平凡的绝对不变量。

定理 5。 设 G 在 $\mathcal{M}$上光滑作用，并设 $\mu:\ G\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{\times}$ 为一个乘子。假设在 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}$的某个邻域内存在右移动标架 $\rho(\boldsymbol{x})\in G$ 。则：

(i) 不变量化乘子

$$\mu\big(\rho(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)$$

是权为 -1 、乘子为 μ的相对不变量，即

$$\mu\big(\rho(g\cdot\boldsymbol{x}),\, g\cdot\boldsymbol{x}\big) = \mu(g,\boldsymbol{x})^{-1}\,\mu\big(\rho(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big),\qquad \forall\, g\in G.$$

(ii) 乘子的重复不变量化等于 1，即

$$\iota\Big(\mu\big(\rho(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)\Big) = 1.$$

证明。 (i) 固定 $g\in G$ 和 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}$。利用移动标架的等变性，

$$\rho(g\cdot\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})\,g^{-1},$$

and 将 $h=g^{-1}$ 和 $g=\rho(\boldsymbol{x})$ 代入余循环恒等式 **(2)**，得到

$$\mu\big(\rho(\boldsymbol{x})g^{-1},\, g\cdot\boldsymbol{x}\big) = \frac{\mu(\rho(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})}{\mu(g,\boldsymbol{x})}.$$

因此

$$\mu\big(\rho(g\cdot\boldsymbol{x}),\, g\cdot\boldsymbol{x}\big) = \mu(g,\boldsymbol{x})^{-1}\,\mu\big(\rho(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big),$$

这就证明了该结论。

(*ii***)** 根据不变量化的定义，

$$\iota\Big(\mu\big(\rho(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)\Big) = \mu\Big(\rho(\rho(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}),\, \rho(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}\Big).$$

对 $g=\rho(\boldsymbol{x})$ 应用等变性，得到

$$\rho(\rho(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})\,\rho(\boldsymbol{x})^{-1} = e,$$

因此

$$\iota\Big(\mu\big(\rho(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\big)\Big) = \mu\big(e,\, \rho(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}\big) = 1,$$

因为 $\mu(e,\ \cdot\ ) = 1$。 □

W现在我们来确立绝对不变量与相对不变量之间的关系。

定理 6. 设 G 通过乘子 $\mu:\ G\times\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{\times}$在 $\mathcal{M}$ 上光滑作用，并以 $\widehat{\ }$扭曲方式作用于 $\mathcal{M}=\mathcal{M}\times\mathbb{R}^{\times}$。假设在一般点的某个邻域内存在右移动标架 $\rho(\boldsymbol{x})\in G$ 。则：

(i) 不变域相同:

$$\mathcal{F}(\mathcal{M})^G_\mu = \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{M}})^G.$$

(ii) 如果 $\mathcal{F}(\mathcal{M})^G$ 由基本不变量 $I_1(\boldsymbol{x}) \dots, I_{m-r}(\boldsymbol{x})$ 生成，那么 $\mathcal{F}(\mathcal{M})^G_\mu$ 则由 $I_1(\boldsymbol{x}) \dots, I_{m-r}(\boldsymbol{x})$ 以及唯一的权为 -1 的相对不变量 $\mu(\rho(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{x})$ 生成。特别地，任意权为 ω 的相对不变量都具有如下形式

$$A(\boldsymbol{x}) = \mu(\rho(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x})^{-\omega}\, F\big(I_1(\boldsymbol{x}), \dots, I_{m-r}(\boldsymbol{x})\big),$$

其中 F 是某个有理函数。

$\widehat{\ }$证明。 根据定理 4 以及截面 $\mathcal{K}$ 的选择，点 $\hat{\ }\boldsymbol{x}$ 的坐标的不变量化具有如下形式

$$\hat{\imath}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \widehat{\rho}(\hat{\boldsymbol{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = (\iota(\boldsymbol{x}),\ \widehat{\imath}(x_{m+1})) = (\iota(\boldsymbol{x}),\ x_{m+1} \cdot \mu(\rho(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}))\,.$$

如上所示， 不变量化乘子 $\mu(\rho(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{x})$ 是权为 $-$ 的相对不变量 1.

为证明包含关系 $\mathcal{F}(\mathcal{M})^G_\mu \subseteq \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{M}})^G$，设 $A \in \mathcal{F}(\mathcal{M})^G_\mu$是一个权为$\omega$的相对不变量:

$$A(g \cdot \boldsymbol{x}) = \mu(g, \boldsymbol{x})^\omega\, A(\boldsymbol{x}).$$

$\widehat{\ }$在 $\mathcal{M}$ 上定义一个函数如下:

$$\widehat{A}(\boldsymbol{x}, x_{m+1}) = x_{m+1}^{-\omega} A(\boldsymbol{x}).$$

Then

$$\widehat{A}(g \cdot \boldsymbol{x},\ x_{m+1}\mu(g, \boldsymbol{x})) = (x_{m+1}\mu(g, \boldsymbol{x}))^{-\omega} A(g \cdot \boldsymbol{x}) = x_{m+1}^{-\omega}\mu(g, \boldsymbol{x})^{-\omega}\mu(g, \boldsymbol{x})^{\omega} A(\boldsymbol{x}) = \widehat{A}(\boldsymbol{x}, x_{m+1}),$$

so $\widehat{A} \in \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{M}})^G$.

为证明包含关系 $\mathcal{F}(\widehat{\mathcal{M}})^G \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{M})^G_\mu$，设 $F \in \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{M}})^G$。由于坐标的不变量化生成了所有不变量， F 可以表示为不变量化坐标的函数:

$$F(\boldsymbol{x}, x_{m+1}) = \Phi\big(\hat{\imath}(\hat{\boldsymbol{x}})\big) = \Phi\big(\iota(\boldsymbol{x}),\ \mu(\rho(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x})\big),$$

对于某个函数 Φ。由于 $\rho(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}$ 在规范化坐标中仅取决于基本$\widetilde{\ }$绝对不变量 $I_1(\boldsymbol{x}) \dots, I_{m-r}(\boldsymbol{x})$, 因此存在一个函数 Φ 使得

$$F(\boldsymbol{x}, x_{m+1}) = \widetilde{\Phi}\big(I_1(\boldsymbol{x}), \dots, I_{m-r}(\boldsymbol{x}),\ \mu(\rho(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x})\big).$$

由于 $I_J(\boldsymbol{x})$ 是绝对不变量，而 $\mu(\rho(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{x})$ 是相对不变量，因此可得$F \in \mathcal{F}(\mathcal{M})^G_\mu$。

由这两个包含关系可知，不变域相同:

$$\mathcal{F}(\mathcal{M})^G_\mu = \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{M}})^G,$$

由此证明了 (i) 部分。

$\widehat{\ }$由前面的步骤可知， $\mathcal{M}$上的任意不变量——因此， $\mathcal{M}$上的任意相对不变量——都是基本绝对不变量 $I_1(\boldsymbol{x}) \dots, I_{m-r}(\boldsymbol{x})$ 和相对不变量 $\mu(\rho(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{x})$ 的有理函数。设 A 是一个权为 ω的相对不变量。那么，乘积$A \cdot \mu(\rho(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{x})^\omega$是一个绝对不变量，记作 $F(I_1(\boldsymbol{x}) \dots, I_{m-r}(\boldsymbol{x}))$, 其中 F是 $m-r$个变量的某个函数。因此,

$$A = \mu(\rho(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x})^{-\omega}\, F(I_1(\boldsymbol{x}), \dots, I_{m-r}(\boldsymbol{x})),$$

这就证明了第（ii）部分。 □

所提出的构造不会改变标准移动标架算法：这种新方法与经典理论完全兼容，同时提供了一种算法化过程，使得能够完全在原有移动标架框架内构造相对不变量。

标量相对不变量结构的一般描述已隐含在经典理论中。具体而言，文献 [17]（其中标量乘子称为权函数）证明，一旦固定了一个给定权的非零相对不变量 R_0，任何其他同权相对不变量都可通过将 R_0 乘以一个绝对不变量得到。定理 6 在我们的框架下细化了这一陈述，并给出了这种特殊生成元的规范选择：即由移动标架生成的不变量化乘子 $\mu(\rho(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})$。

有趣的是，任意非零函数 $F\in\mathcal{F}(\mathcal{M})$ 都是乘子为 d^0F 的群作用下的相对不变量。特别是，这一观察直接关联到 1-余循环的可实现性问题。具体而言，如果存在一个非零函数 $F\in\mathcal{F}(\mathcal{M})^\times$ 使得 $\mu=d^0F$，那么余循环 $\mu\in Z^1(G,\mathcal{F}(\mathcal{M})^\times)$ 就称为可实现的（作为乘子）。我们的说明表明，任何这样的 F 都会自动给出一个乘子为 d^0F 的相对不变量；反过来，μ 可实现当且仅当它以这种方式产生。因此，在本文所考虑的框架下（存在移动标架的正则作用以及有理函数类），第一上同调的平凡性意味着每个乘子 1-余循环都可实现，因而可纳入相对不变量的移动标架构造中。

4. 平面射影群的相对不变量与积分不变量

我们来考虑一种实际应用：在图像分析任务中构造相对不变量的算法。

Let $F\in\mathcal{F}(\mathcal{M})$。假设对于某个邻域 $U\subset\mathcal{M}$，积分

$$\int_U F(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},\quad \text{where}\quad d\boldsymbol{x}=dx_1\cdots dx_n,$$

有定义。若对于任意 $g\in G$，在变量替换 $\boldsymbol{x}\mapsto g\cdot\boldsymbol{x}$ 下其值保持不变，即，我们称该积分为积分 G-不变量：

$$\int_{g\cdot U} F(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\;=\;\int_U F(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

将变量替换公式应用于左侧，可得条件：

$$\int_U F(g\cdot\boldsymbol{x})\,J(g,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\;=\;\int_U F(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},$$

其中 $J(g,\boldsymbol{x})=\det\frac{\partial(g\cdot\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}$ 是该变换的雅可比行列式。

因此，积分不变量成立的一个充分条件是被积函数 $F(\boldsymbol{x})$ 不变。这等价于以下要求：

$$F(g\cdot\boldsymbol{x})\,J(g,\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{x})\quad\Longleftrightarrow\quad F(g\cdot\boldsymbol{x})=J(g,\boldsymbol{x})^{-1}F(\boldsymbol{x}).$$

因此，当被积函数 $F(\boldsymbol{x})$ 是相对于雅可比乘子 $J(g,\boldsymbol{x})$、权为 $\omega=-1$ 的相对不变量时，自然会出现积分不变量。

所提出的构造深深植根于齐性空间上不变Haar测度的理论，因为条件 $F(g\cdot\boldsymbol{x})=|J(g,\boldsymbol{x})|^{-1}F(\boldsymbol{x})$ 实际上定义了一个密度$F(\boldsymbol{x})$，将标准勒贝格测度 $d\boldsymbol{x}$ 转化为一个 G-不变测度 $d\lambda=$

$F(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ 在流形 $\mathcal{M}$ 上。该框架确保能够一致地定义几何特征，使其不受坐标系或相机视角的影响。

请注意，积分不变量在图像分析中发挥着关键作用。灰度图像在数学上被建模为定义在紧区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上的分段连续实值正函数 $u(x,\ y)$，满足

$$\int_{\Omega} u(x,y)\,dx\,dy < \infty.$$

函数 $u(x,\ y)$ 的值被解释为相应坐标处像素的亮度（强度）。

平面仿射群及其子群的积分不变量，更一般地说，矩不变量，是图像的全局特征，广泛应用于模式识别任务中（参见 [26]）。然而，从仿射群转向平面射影群时，情况会变得复杂得多。迄今为止，所有通过定义矩的射影类比并据此构造不变表达式来扩展仿射理论的尝试均未成功。事实上，在一般射影变换下完整刻画图像的射影不变量这一问题仍未解决（参见 [13]）。

在下一小节中，我们将完整描述相对联合射影不变量域，并利用它们构造一族新的图像联合射影不变量。

4.1. 图像联合射影不变量。令 $G = PGL(3,\mathbb{R})$ 通过射影变换作用于 $\mathbb{R}^2$

$$g:(x,y) \longmapsto \left(\frac{a_1x+a_2y+a_3}{c_1x+c_2y+c_3},\ \frac{b_1x+b_2y+b_3}{c_1x+c_2y+c_3}\right), \qquad g=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix} \in GL(3,\mathbb{R}), \quad (4)$$

其中矩阵视为相差一个非零标量倍数的等价类。

考虑 G 在构型空间 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^2)^n$ 上诱导的对角作用：

$$g:\ (x_i,y_i) \longmapsto g\cdot(x_i,y_i), \qquad i=1,\dots,n.$$

对于单个点 $(x_i,\ y_i)$，平面射影变换 (4) 的雅可比行列式为

$$J_i(g,(x_i,y_i)) = \frac{\det(g)}{\big(c_1x_i+c_2y_i+c_3\big)^3}, \qquad \det(g)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

因此，对于 $\mathcal{M}$ 上的对角作用，总雅可比乘子 为以下乘积

$$J(g,\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} J_i\big(g,(x_i,y_i)\big), \qquad \boldsymbol{x}=(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)\in\mathcal{M}.$$

接着，我们为 $\mathcal{M}$ 上的射影作用构造移动标架 $\rho(\boldsymbol{x})$（在一般位置的一个开子集上），然后将雅可比乘子 $J(g,\ \boldsymbol{x})$ 不变量化。这得到一个权为 -1 的相对不变量，即不变量化雅可比矩阵 $\iota(J)(g,\ \boldsymbol{x}) = J(\rho(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{x})$，它可以与绝对不变量结合，形成图像数据的射影积分不变量。

4.2. 移动标架的构造。平面射影群 $PGL(3,\ \mathbb{R})$ 是一个 8 参数李群。由于射影平面中的每个点都提供两个坐标，一般位置下由 n 个点构成的构型形成一个 $2n$ 维流形。为确保群作用是局部自由的，该构型空间的维数必须满足 $2n \geq 8$。因此，我们考虑情形 $n=4$，它提供了足够多的方程，可以唯一确定所有群参数。

我们固定参数 $c_3=1$ 的值，并选择流形 $\mathcal{M}$ 的以下截面：

$$\mathcal{K}=\{x_1=0,\ y_1=-1,\ x_2=1,\ y_2=1,\ x_3=1,\ y_3=0,\ x_4=0,\ y_4=0\}$$

解出规范化方程后，可得移动标架参数的以下取值：

$$a_1=\frac{(y_1-y_4)\delta_{123}\delta_{234}}{\Delta},\quad a_2=-\frac{(x_1-x_4)\delta_{234}\delta_{123}}{\Delta},\quad a_3=\frac{\delta_{123}\delta_{234}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_4 & y_4\end{vmatrix}}{\Delta},$$
$$b_1=-\frac{(y_3-y_4)\delta_{123}\delta_{124}}{\Delta},\quad b_2=\frac{(x_3-x_4)\delta_{123}\delta_{124}}{\Delta},\quad b_3=-\frac{\delta_{123}\delta_{124}\begin{vmatrix}x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{vmatrix}}{\Delta},$$
$$c_1=\frac{(y_1-y_4)\delta_{123}\delta_{234}+(y_2-y_3)\delta_{124}\delta_{134}}{\Delta},\quad c_2=-\frac{(x_1-x_4)\delta_{123}\delta_{234}+(x_2-x_3)\delta_{124}\delta_{134}}{\Delta}.$$

其中

$$\delta_{ijk}=\begin{vmatrix}x_i & x_j & x_k\\ y_i & y_j & y_k\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix},\quad \Delta=\delta_{123}\delta_{234}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_4 & y_4\end{vmatrix}+\delta_{134}\delta_{124}\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}.$$

现在，我们对未参与规范化的坐标函数 x_i，y_i（$i=5$，……，n）进行不变式化，得到

$$\iota(x_i)=\frac{\delta_{234}\delta_{123}\delta_{14i}}{\delta_{234}\delta_{123}\delta_{14i}+\delta_{134}\delta_{124}\delta_{23i}},$$
$$\iota(y_i)=-\frac{\delta_{124}\delta_{123}\delta_{34i}}{\delta_{234}\delta_{123}\delta_{14i}+\delta_{134}\delta_{124}\delta_{23i}}.$$

这些函数生成绝对不变量域。不过，我们尝试寻找一组更简单的生成元。我们计算：

$$\iota(x_i)^{-1}=\frac{\delta_{234}\delta_{123}\delta_{14i}+\delta_{134}\delta_{124}\delta_{23i}}{\delta_{234}\delta_{123}\delta_{14i}}=1+\frac{\delta_{134}\delta_{124}\delta_{23i}}{\delta_{234}\delta_{123}\delta_{14i}},$$
$$\frac{\iota(x_i)}{\iota(y_i)}=-\frac{\delta_{234}\delta_{14i}}{\delta_{124}\delta_{34i}}.$$

因此，平面射影群的联合绝对不变量域由以下 $2(n-4)$ 个不变量生成：

$$I_i^{(1)}(\boldsymbol{x})=\frac{\delta_{134}\delta_{124}\delta_{23i}}{\delta_{234}\delta_{123}\delta_{14i}},\qquad I_i^{(2)}(\boldsymbol{x})=\frac{\delta_{234}\delta_{14i}}{\delta_{124}\delta_{34i}},\qquad i=5,\dots,n.$$

对于 $n=4$，不存在绝对不变量。

现在考虑乘子，它是射影变换的雅可比行列式：

$$\mu(g,\boldsymbol{x})=J_n(g,\boldsymbol{x})=\frac{\det(g)^n}{\prod_{i=1}^n s_i^3}=\prod_{i=1}^n\frac{\det(g)}{s_i^3},\quad s_i=c_1x_i+c_2y_i+1.$$

根据定理 5，其不变量化 $J(g\cdot\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ 是权为 -1 的相对不变量。将移动标架参数代入乘子的表达式，得到不变量化雅可比矩阵：

$$\iota\left(\frac{\det(g)}{s_1^3}\right)=-\frac{\delta_{234}^2}{\delta_{123}\delta_{124}\delta_{134}},\iota\left(\frac{\det(g)}{s_2^3}\right)=\frac{\delta_{134}^2}{\delta_{123}\delta_{124}\delta_{234}},$$
$$\iota\left(\frac{\det(g)}{s_3^3}\right)=\frac{\delta_{124}^2}{\delta_{123}\delta_{234}\delta_{134}},\iota\left(\frac{\det(g)}{s_4^3}\right)=-\frac{\delta_{123}^2}{\delta_{124}\delta_{134}\delta_{234}},$$

而对于 $i>4$:

$$\iota\left(\frac{\det(g)}{s_i^3}\right)=-\frac{(\delta_{123}\delta_{124}\delta_{134}\delta_{234})^2}{(\delta_{123}\delta_{234}\delta_{14i}+\delta_{124}\delta_{134}\delta_{23i})^3}.$$

因此，不变量化雅可比矩阵（经化简并忽略整体符号后）具有如下形式

$$J\big(g\cdot\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\big)=\big(\delta_{123}\delta_{124}\delta_{134}\delta_{234}\big)^{2n-1}\prod_{i=5}^{n}\frac{1}{\big(\delta_{123}\delta_{234}\delta_{14i}+\delta_{124}\delta_{134}\delta_{23i}\big)^3},\qquad n>4,\tag{5}$$

而对于 $n=4$:

$$J\big(g\cdot\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\big)=\big(\delta_{123}\delta_{124}\delta_{134}\delta_{234}\big)^{-1}.$$

尽管不变量化雅可比矩阵的相对不变性由移动标架的存在本身所保证，但明确考察雅可比乘子产生的机制颇有启发。具体而言，一切都归结为这样一个事实：每个行列式δ_{ijk}本身都是相对不变量；在 $g\in PGL(3,\ \mathbb{R})$ 的作用下，它按照以下规则变换

$$\delta_{ijk}\ \longmapsto\ \frac{\det(g)}{s_is_js_k}\,\delta_{ijk}.\tag{6}$$

由此可知，在基本绝对不变量 $I_i^{(1)}(\boldsymbol{x})$ 和$I_i^{(2)}(\boldsymbol{x})$ 的显式公式中，所有这类因子都会两两抵消，这也解释了它们的不变性。当然，也可以不借助移动标架方法得到这些不变量；然而，移动标架方法能够立即保证它们的函数完备性，并确保不存在其他独立生成元。

对于相对不变量，情况类似，但现在必须追踪能够还原雅可比行列式的 -1 次幂的总乘子。这里的关键在于混合组合的变换

$$\delta_{123}\delta_{234}\delta_{14i}+\delta_{124}\delta_{134}\delta_{23i}\ \longmapsto\ \frac{\det(g)^3}{s_1^2s_2^2s_3^2s_4^2s_i}\big(\delta_{123}\delta_{234}\delta_{14i}+\delta_{124}\delta_{134}\delta_{23i}\big),\tag{7}$$

这表明该和式表现为具有确定乘子的相对不变量。正是由于 (6)–(7)，右侧 (5) 中由群作用产生的所有因子最终都合并为整体雅可比乘子的 -1 次幂。

因此，带有雅可比乘子的联合相对射影不变量域由 $2n-8$ 个绝对不变量与不变量化雅可比矩阵共同生成:

$$\mathcal{F}(\mathcal{M})_{J\ \boldsymbol{x}}^{PGL(3,\mathbb{R})}{}_{(g,)}=\mathbb{R}\big(I_5^{(1)}(\boldsymbol{x}),\ I_5^{(2)}(\boldsymbol{x})\ldots,I_n^{(1)}(\boldsymbol{x}),\ I_n^{(2)}(\boldsymbol{x})\ J(g\cdot\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x})\big),\qquad \mathcal{M}=2n\geq 8.\text{的维数}$$

对于 $n=4$，不存在绝对不变量，相对不变量域仅由不变量化雅可比矩阵生成。

值得注意的是，对于 $n=3$ $PGL(3,\mathbb{R})$ 在 $(\mathbb{R}^2)^3$ 上的对角射影作用并非局部自由，因为

$$\dim(\mathbb{R}^2)^3=6<\dim PGL(3,\mathbb{R})=8,$$

因此，标准意义上的移动标架并不存在。尽管如此，行列式

$$\delta_{123}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

是权为 $-\frac{1}{3}$ 的相对不变量。这个例子凸显了这样一个事实：即使在局部自由性或正则性的缺失妨碍移动标架存在的情形下，相对不变量仍可能存在。

4.3. 图像射影不变量。 借助雅可比乘子得到的相对不变量域的描述，使我们能够完整描述图像的积分射影不变量。

设 $u(x,y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 中某个紧区域上的图像函数。考虑该图像的 n 个副本，

$$u_i(x_i,y_i)=u(x_i,y_i),\qquad i=1,\dots,n.$$

我们假设射影群在这些副本上的作用是平凡的：

$$g\cdot u_i \;=\; u_i,$$

这只是对这样一个事实的形式化表述：在区域发生射影变形时，图像的像素强度值保持不变。因此，每个 u_i 都是在扩展空间 $(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R})^n$ 上诱导的作用下的绝对不变量。

对于 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{Z}^n,\ n>4$，定义如下积分不变量族：

$$\mathcal{I}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \;=\; \int_{\mathbb{R}^{2n}} J\big(g\cdot\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\big)\prod_{i=1}^{n}\Big(I_i^{(1)}(\boldsymbol{x})\Big)^{\alpha_i}\Big(I_i^{(2)}(\boldsymbol{x})\Big)^{\beta_i}u(x_i,y_i)\,dx_1\,dy_1\cdots dx_n\,dy_n.$$

为统一记号，我们令 $I_i^{(1)}(\boldsymbol{x})=I_i^{(2)}(\boldsymbol{x})=1$，其中 $i\le 4.$

所有函数 u_i 都是绝对不变量，因此我们可以将它们纳入被积函数。这确保积分不变量依赖于图像，并作为一种全局特征汇总整个图像中的信息。

构造出的不变量主要具有理论意义：它们是高维积分，若不采用启发式技术，直接在真实图像上计算的计算成本会很高。此类积分射影联合不变量最早在 [27], 中得到研究，其中针对 $n=3,4$ 的情形得到了相对不变量，并提出了适用于任意 n 的一般构造方案，但并未讨论如何描述所有相对不变量。

5. 结论

本文提出了对移动标架法的一种构造性改进，使其适用于在光滑李群作用下构造相对不变量。该理论框架证明了从在基底$\widehat{\ }$流形 $\mathcal{M}$ 上寻找相对不变量的问题，转化为在扩展空间 $\mathcal{M}=\frown\mathcal{M}\times\mathbb{R}^{\times}$ 上构造绝对不变量的问题是合理的。文中证明，通过 1- 余循环（乘子）定义在 $\mathcal{M}$上的扭曲群作用，保留了原作用的自由性和正则性。

经典移动标架 ρ 在 $\mathcal{M}$ 上的理论与相对不变量的结构之间建立了基本联系。结果表明，乘子$J(\boldsymbol{x})\;=\;\mu(\rho(\boldsymbol{x})\;\boldsymbol{x})$的不变量化是一个权为 -1 的典范生成元，用于刻画相对性。这使得

任何相对不变量都可写成通用标准形：该生成元的适当次幂与基本绝对不变量的函数之积。

所提出的方法应用于构造图像射影不变量这一相关问题。对于射影平面群 $PGL(3, \mathbb{R})$ 的对角作用，推导出了不变量化雅可比矩阵和基本联合不变量的显式形式。基于此，构造了一类新的积分射影不变量（图像联合射影不变量），能够以在定义域的射影变形下保持不变的方式汇聚图像强度信息。这一构造为开发能够抵御透视畸变的新型图像识别算法奠定了理论基础。

未来的研究方向包括将这一方法扩展到高阶射影群，以及开发用于计算所得不变量的高效算法。

参考文献

[1] Fels, M. 和 Olver, P. J.（1997）。论相对不变量。《数学年鉴》，308（4），701–730。[2] Bott, R.（2010）。微分几何中的不变量理论若干方面。载于 E. Vesentini（编），《流形上的微分算子》（第 70 卷，第 49–145 页）。施普林格。[3] Graustein, W. C.（1930）。经典微分几何中的不变方法。《美国数学会通报》，36（8），489–521。[4] Olver, P. J.（2007）。生成微分不变量。《数学分析与应用杂志》，333（1），450–471。[5] Helgason, S.（2022）。《群与几何分析：积分几何、不变微分算子与球函数》（第 83 卷）。美国数学会。[6] Kobayashi, S. 和 Nomizu, K.（1963–1969）。《微分几何基础》（第 1–2 卷）。威利。[7] Miyake, T.（2006）。《模形式》。施普林格自然。[8] Jacquet, H. 和 Langlands, R. P.（2006）。《GL(2) 上的自守形式：第 1 部分》（第 114 卷）。施普林格。[9] Abraham, R. 和 Marsden, J. E.（1978）。《力学基础》（第 2 版）。Benjamin/Cummings 出版公司。[10] Arnold, V. I.（1989）。《经典力学的数学方法》（第 2 版）。施普林格出版社。[11] Olver, P. J.（2023）。图像的射影不变量。《欧洲应用数学杂志》，34（5），936–946。[12] Wang, Y. B.、Wang, X. W.、Zhang, B. 和 Wang, Y.（2015）。二维灰度图像 D-矩的射影不变量。《数学成像与视觉杂志》，51（2），248–259。[13] Li, E.、Mo, H.、Xu, D. 和 Li, H.（2019）。图像射影不变量。《IEEE模式分析与机器智能汇刊》，41（5），1144–1157。[14] Miller, W., Jr.（1968）。《李理论与特殊函数》。学术出版社。[15] Vilenkin, N. J. 和 Klimyk, A. U.（1991–1993）。《李群表示与特殊函数》（第 1–3 卷）。克吕维尔学术出版社。[16] Weyl, H.（1950）。《群与量子力学理论》。Courier公司。[17] Olver, P. J.（1995）。《等价、不变量与对称性》。剑桥大学出版社。[18] Fels, M. 和 Olver, P. J.（1998）。移动余标架：I. 一种实用算法。《应用数学学报》，51（2），161–213。[19] Fels, M. 和 Olver, P. J.（1999）。移动余标架：II. 正则化与理论基础。《应用数学学报》，55（2），127–208。[20] Bedratyuk, L.（2025）。通过移动标架研究点配置一阶射流空间上的联合射影不变量。arXiv 预印本 arXiv:2511.18575。[21] Bedratyuk, L.（2025）。一阶联合微分射影不变量。《代数通讯》，1–20。https://doi.org/10.1080/00927872.2025.2569449[22] Kruglikov, B. 和 Schneider, E.（2025）。不变除子与等变线丛。《数学论坛：Sigma》，13，e68。[23] Olver, P. J.（2001）。联合不变量特征。《计算数学基础》，1（1），3–68。[24] Olver, P. J.（1999）。《经典不变量理论》（第 44 卷）。剑桥大学出版社。[25] Brown, K. S.（1982）。《群上同调》（第 87 卷）。施普林格出版社。[26] Flusser, J.、Suk, T. 和 Zitova, B.（2017）。《基于矩的二维和三维图像分析》。约翰·威利父子公司。[27] Suk, T. 和 Flusser, J.（2000）。基于点的射影不变量。《模式识别》，33（2），251–261。

乌克兰赫梅利尼茨基国立大学电子邮箱:
leonidbedratyuk@khmnu.edu.ua