arXiv:2601.06696v1 [math.RT] 10 Jan 2026

量子群的 De Concini-Kac 形式

IVAN LOSEV、ALEXANDER TSYMBALIUK 和 Trung Vu

Abstract. 半单李代数的量子群在单位根处存在若干种不同的形式。其中包括 De Concini-Kac 形式，它最容易定义，却或许最难研究。本文提出对 De Concini-Kac 形式作一种恰当的修正，即 *even part algebra*，它具有一些引人注目的性质。值得注意的是，它对单位根的阶表现一致，并且带有 Lusztig 形式的伴随作用。我们重新审视了 De Concini-Kac-Procesi 和 Tanisaki 关于偶部代数的若干结果。具体而言，我们给出 Frobenius 中心和 Harish-Chandra 中心的概念性定义，并用这两个子代数描述整个中心，从而得到正特征下万有包络代数中心的 Veldkamp 定理的完整量子类比。我们研究了偶部代数在其中心上的阿祖马亚位点。我们还证明，在 Lusztig 形式的伴随作用下，偶部代数的局部有限部分同构于反射方程代数；后者是乘积经 R-矩阵扭曲的量子化坐标代数。我们还重新审视并以更一般的形式证明了关于单位根处 Lusztig 形式的一些结果，包括 Kempf 消失定理以及量子化坐标代数上的良好滤过。

Contents

1. 引言 2 1.1. 量子群 2 1.2. 单位根情形 3 1.3. 主要结果 4 1.4. 概要 6 1.5. 致谢 6 2. 设置 6 2.1. Drinfeld-Jimbo 量子群 U($\mathfrak{g}$) 7 2.2. Lusztig 形式 8 2.3. De Concini-Kac 形式 10 3. 扭曲余乘法与整形式 10 3.1. 扭曲 11 3.2. U($\mathfrak{g}$) 上的扭曲 Hopf 代数结构 11 3.3. Φ $12^{\cdot}$ 的特殊选择 3.4. （扭曲的）Lusztig 形式 $U_q(\mathfrak{g})$ 13 3.5. 偶部代数 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ $14^{\cdot}$3.6. U($\mathfrak{g}$, $P/2$) $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ $U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})$ 的三角分解与 PBW 基 $14^{\cdot}$3.7. $U_q(\mathfrak{g})$ 在 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 上的伴随作用 18 4. Hopf 配对与不变配对 20 4.1. $\mathfrak{h}^*$ 20 的两个端同态 4.2. 扭曲 Hopf 配对 21 4.3. 扭曲不变配对 27 5. 扭量子 Frobenius 同态 29 1

5.1. 量子 Frobenius 同态的定义域 5.2. 量子 Frobenius 同态的陪域 29
5.3. Kostant 形式 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$5.4. 完备形式 $U_\epsilon(\mathfrak{g},P)$ U_ϵ^* 30
$(\mathfrak{g},P^*)$ $U_\epsilon^*(\mathfrak{g},Q^*)$ 5.5. 量子 Frobenius 同态 5.6. 与 Lusztig 的量子 34
Frobenius 映射的比较 5.7. R-矩阵 6. Frobenius 中心 Z_{Fr}6.1. 幂等化版 35
本的配对 6.2. Frobenius 中心 Z_{Fr}。 6.3. 当 $R=\mathbb{F}$ 为代数闭域时 Z_{Fr} 37
的局部有限部分 7. $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 和 $U_q(\mathfrak{g})$ 的有理表示 7.1. Weyl 模与对偶 41
Weyl 模 7.2. 一些同调性质 7.3. Kempf 消失 7.4. 良好滤过 7.5. 量子化坐 45
标代数7.6. 单位根处 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的有理表示$\hat{}$7.7. $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g},P)$ 的有理表示$\dot{}$7.8. U_q 45
$(\mathfrak{g})$ 的有理表示 8. 反射方程代数 8.1. 反射方程代数 $O_q[G]$8.2. 当 $R=\mathbb{F}$ 46
为域时的情形 8.3. 当 $\mathbb{F}=\mathbb{Q}(v^{1/\mathsf{N}})$ 且 $q=v$ 时的情形 9. REA 与局部有限 46
部分之间的同构 9.1. Ad 不变双线性形式与诱导嵌入 9.2. 局部有限部分 51
U_q^{fin}9.3. 当 $R=\mathbb{F}$ 为域且 q 不是单位根时的 $O_\epsilon[G]\cong U_\epsilon^{fin}$ 9.4. 当 51
$R=\mathbb{F}$ 为域且 $q=\epsilon$ 是单位根时的 $O_q[G]\cong U_q^{fin}$ 9.5. 命题 9.13 的证明 53
9.6. 诺特 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}}$-代数 R 的 $O_q[G]\cong U_q^{fin}$ 9.7. Harish-Chandra 中心 10. 54
$U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 在 $\mathbb{C}$ 上的中心 Z 的 Poisson 几何 10.1. Z 和 Z_{Fr} 上的 57
Poisson 括号 10.2. $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 的退化 10.3. $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 的有限维表示 10.4. gr 58
U_ϵ^{ev} 的次数 10.5. $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 的中心 Z 10.6. $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 在 Spec$Z$ 上的阿祖马亚 61
位点 附录 A. 等变模 A.1. H-不变量 A.2. H-等变 A-模 参考文献 63

1. Introduction 69

1.1. **量子群**。 70

Drinfeld 和 Jimbo 于20世纪80年代引入的量子群 [Dr, Ji] form，或许可以说，是迄今研究的最重要的一类霍普夫代数。它们在数学和物理学的多个领域中发挥着关键作用。下面我们在一个略为简化的情形下，简要说明其定义的主要特征。设 R 是一个域， q 是 R的一个非零元素。设 G是 R上的一个单代数群， $\mathfrak{g}$ 是其李代数， $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个Cartan子代数。量子群 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ 是由元素 E_i 、 F_i 、 K^μ 生成的 R- 代数，其中 i 遍历单根的指标集，而 μ 遍历 $\mathfrak{h}^*$ 中一个适当的格 X 的元素。格 X 最常见的两种选择是 $\mathfrak{g}$的权格和根格。元素E_i、 F_i、 K^μ 应满足某些关系（包括关于 E_i和 F_i的量子Serre关系），这些关系将在第 2.1 节中回顾。众所周知，$\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$具有霍普夫代数结构；事实上，这一结构取决于若干种选择，而这些选择彼此之间可通过“Cartan 扭曲”相互转换。

尽管$\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$的经典表示形式非常优雅，但它存在一些结构性缺陷，下面将对此进行列举。在本节中，我们将限于讨论 q 不是单位根的（较为简单的）情形。

我们遇到的第一个缺陷可以描述如下：

（I） $2^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}$-覆盖现象。

例如，尽管 $\mathfrak{g}$ 只有一个一维表示，但与根格相关的量子群却有 $2^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}$ 个这样的表示。这给$\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$的中心描述带来了一些令人不快的技术性问题。当格 X 为权格 P时，这一描述会更加简单。在此情形下，中心与 $\mathrm{Span}_R(K^\mu \mid \mu \in 2P)^W$之间存在量子Harish-Chandra同构，其中 W是 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群，而 W在 $2P$ 的群代数上的作用经过了适当的扭曲。

此外，还存在以下问题：

（II）缺乏非退化特征：$\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$的正部分，即由元素 E_i生成的子代数，不存在到 R 的同态，使得该同态在所有 E_i上均非零。

通常万有包络代数的正子代数存在此类同态$U(\mathfrak{g})$，并且正如 $\mathfrak{g}$和 G中早已体现的那样，它们在 [Ko2]的表示论诸多方面都发挥着极其重要的作用。

上述问题（II）由 Sevostyanov [S1]解决。为此，他将生成元E_i 替换为其扭曲版本 $E_i = E_i K^{\nu_i}$ ，其中元素 ν_i的选择需满足适当条件；一般而言，这些元素仅属于$\frac{1}{2}P$，因此 $\tilde{E}_i$ 并非上述所讨论的量子群版本中的元素。

1.2. **单位根情形**。

前文的讨论主要针对较简单的情形，即 q 不是 1 的单位根；现在我们假设 q 是阶数不太小的单位根。我们还假设量子群的基域为 $\mathbb{C}$，因为在正特征下某些方面会变得更加复杂。

仍可按照与之前相同的生成元与关系定义 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$，由此得到所谓的*De Concini-Kac* 形式。该代数的结构已在以下文献中得到广泛研究： [DCK、DCKP1、DCKP2]。

我们还可以考虑 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ 的不同形式：将基域 R 替换为有理函数域 $R(v)$，令 $q := v$，取 $\mathbf{U}_v(\mathfrak{g})$ 的一个 $R[v^{\pm 1}]$-子代数，然后模掉理想 $(v-q)$。其中尤其值得关注的是 Lusztig 形式，即具有 E_i, F_i 除幂的形式；定义见第 2.2 节。[L1]–[L5] 也对其进行了广泛研究。

Lusztig 的一个重要洞见是，Lusztig 形式的行为大致应类似于分布代数 $\mathrm{Dist}_1(G_{\mathbb{F}})$，即定义在 $G_{\mathbb{F}}$ 正特征域上的 $\mathbb{F}$，参见 [L2]。依照同样的逻辑，通常的 De Concini-Kac 形式应表现为 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 的一种部分乘法版本。

记住这一类比，让我们列举一些研究 $G_{\mathbb{F}}$ 和 $\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$ 得出的结果与构造；我们希望量子群也能有与之对应的结果：

(1) $\mathrm{Dist}_1(G_{\mathbb{F}})$ 在 $U(\mathfrak{g})$ 及其正则函数代数$\mathbb{F}[G]$上有伴随作用。(2) 存在一个自然的伴随不变配对 $\mathrm{Dist}_1(G_{\mathbb{F}})\times\mathbb{F}[G]\to\mathbb{F}$，它对第二个变量非退化，即诱导映射 $\mathbb{F}[G]\to\mathrm{Dist}_1(G_{\mathbb{F}})^*$ 是一个嵌入。(3) 存在一个 Frobenius 满射 $\mathrm{Dist}_1(G_{\mathbb{F}})\to\mathrm{Dist}_1(G_{\mathbb{F}}^{(1)})$，它由 $G_{\mathbb{F}}$ 的 Frobenius 满射诱导。这里，上标 (1) 表示 Frobenius 扭曲。(4) $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 的中心 Z可用其两个子代数 Z_{HC} 和 Z_{Fr}来描述：- Harish-Chandra 中心 $Z_{HC}:=U(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})^{G_{\mathbb{F}}}$ 的描述方式与 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的中心相同，除非 $\mathbb{F}$ 的特征过小；- Frobenius 中心 Z_{Fr}，又称 p-中心，可自然地识别为对称代数 $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}^{(1)})$。根据 Veldkamp 定理 [V], ，整个中心 Z 可识别为这两个中心子代数在其交集 $Z_{HC}\cap Z_{Fr}\simeq S(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}^{(1)})^{G_{\mathbb{F}}^{(1)}}$ 上的张量积。(5) 代数 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 是 Z_{Fr} 上的自由秩为 $p^{\dim\mathfrak{g}}$ 的模，因此也是 Z 上的有限生成模。由此可以考察 $\mathrm{Spec}(Z)$ 中 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 的 Azumaya 位点，即模 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 为射影模且纤维为矩阵代数的位点。正如 [Pr], 中证明的 Kac-Weisfeiler 猜想所示，该位点包含投影 $\mathrm{Spec}(Z)\to\mathrm{Spec}(Z_{Fr})=\mathfrak{g}^{(1),*}_{\mathbb{F}}$ 下正则元素位点的原像。

项目 (3)–(5) 的基础性较弱，而它们在量子情形下的类似物受到更多关注，因此我们从它们开始。Lusztig 构造了 Frobenius 满射的量子类似物，参见 [L3]和 [L5, §35]。这里有两个有趣的特点。首先，目标几乎就是经典分布代数。其次，如果 q 的阶能被 4 整除，那么该分布代数对应的是 Langlands 对偶群 [L5, §35]。

(4) 和 (5) 由 De Concini、Kac 和 Procesi 在 [DCKP1、DCKP2] 中进行了研究，所考虑的情形是 q 的阶为奇数（对于 G_2，还要求与 3 互素）。他们定义了 Z_{HC} 和Z_{Fr}的类似物，后者的定义在某种程度上是临时拟定的 [DCKP1, §3, §6.2]。他们对 Harish-Chandra 中心的定义旨在使得 Z_{HC} 与 q 不是单位根时的情形相同。代数 Z_{Fr}结果证明是 G^0中 $2^{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}}$重覆盖上的正则函数代数，其中 G^0是 G中的开 Bruhat 胞腔。在 [DCKP1, §6.4]中，作者证明整个中心仍然是 Z_{HC} 和 Z_{Fr} 在其交上的张量积，这是 Veldkamp 定理的一种类似结果。而在 [DCKP2 的定理 5.1], 中，他们建立了 (5) 的直接类似结果。

对于偶数次单位根的情形，已知存在与 (4) 类似的结果，参见 [T2，定理 5。4], 但其复杂程度和技术性都高得多。据我们所知，文献中尚未出现 (5)。

现在我们来讨论更基础的问题 (1) 和 (2)。我们仍然有 $\mathbf{U}_v(\mathfrak{g})$ 在自身上的伴随作用，以及一个非退化的伴随配对 $\mathbf{U}_v(\mathfrak{g})\times\mathbf{U}_v(\mathfrak{g})\to\mathbb{C}(v^{1/2})$ [J1, §6]。当 q 的序为奇数时（对于 G_2，还要求与 3 互素），该作用可下降为 Lusztig 形式在 De Concini-Kac 形式上的伴随作用，而该配对则下降为 Lusztig 形式与 De Concini-Kac 形式之间的配对。然而，可以验证，对于偶数次 1 的根，情况不再如此。这是通常的量子群定义的又一缺陷。

1.3. **主要结果**。

我们建议对 $\mathbf{U}^q(\mathfrak{g})$ 进行修改。首先，我们用 E_i、F_i 替换通常的生成元˜ ˜Sevostyanov 生成元 E_i、F_i并且只取 K^μ 满足 $\mu\in 2P$、P为 $\mathfrak{g}$的权格（从某种意义上说，这是在处理第1.1节中的问题 (I) 和 (II)）。我们称之为偶部代数

并记作 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 。注意， $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 在通常的余乘法下并不封闭，因此我们也使用 Cartan 型扭曲对余乘法进行扭曲，详情见第 3.2 节。

一个简单但需计算的论证表明，对于我们所考虑的所有 q ，（1）和（2）的类似结论均成立（请记住，我们排除了阶数非常小的单位根）。Lusztig 构造的量子 Frobenius 在稍作修改后仍适用于我们的情形。现在我们来说明第 1.2 节中（4）和（5）的类似结论在我们这里的版本。

设 R 为任意域。首先，对于所有 q ，我们可以将 Harish-Chandra 中心定义为（扭曲的）Lusztig 形式在 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 上作用所得的不变量子代数，这与 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{F}})$ 的定义相对应。我们在第 9.7 节证明，它具有通常的同构，即同构于 $\mathrm{Span}_R(K^\mu \mid \mu \in 2P)$ 中的 W-不变量。

更有意思的是我们对 Frobenius 中心的描述 Z_{Fr} （这里 q 是单位根）。回顾一下，Lusztig 形式与 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 之间存在伴随不变配对。我们将 $Z_{Fr} \subset U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 定义为量子 Frobenius 同态的核的正交补，容易看出它是一个中心子代数。设 G^d 是单连通单代数群，使得量子 Frobenius 同态的目标为 $\mathrm{Dist}_1(G^d)$，并设 G_0^d 是 G^d 中的开 Bruhat 胞腔。我们构造了 Z_{Fr} 与 $R[G_0^d]$ 之间的识别，该识别在 $\mathrm{Dist}_1(G^d)$ 的作用下是等变的。

在讨论我们对 (4) 和 (5) 的版本之前，我们想先强调一种重要的构造。它没有经典类比，而且非常有用，例如在计算 Harish-Chandra 中心时便是如此。正则函数代数 $R[G]$有两种众所周知的 q-变形。一种更直接的变形是量子化坐标代数：它带有两份 Lusztig 形式的有理作用（分别对应经典群在自身上的左作用和右作用），但对于这两种作用中的任一种，或对于伴随作用，它都不是有理表示范畴中的代数对象。不过，我们可以利用通用R-矩阵扭曲量子化坐标代数上的乘积，从而得到另一种代数，称为反射方程代数（REA），记作 $O_q[G]$; 参见 [KS] 及其中的参考文献。若 q 不是单位根，则该代数可嵌入 $U_q(\mathfrak{g})$，且其像与 $U_q(\mathfrak{g})$ 的局部有限部分重合，也就是说，与伴随作用下所有属于有限维子表示的元素构成的子空间重合 [KS，命题 2.8]。我们在当前情形下实施这一构造，并证明对所有 q， $O_q[G]$ 都与局部有限部分同构。我们这一设定的一个优点是， $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 实际上成为 $O_q[G]$ 的局部化；而在通常的设定中，还需要转而考虑覆盖。

注 1.1. 我们想说明我们为何关注代数 $O_q[G]$ 及其与 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 的关系。量子群的 Harish-Chandra 双模范畴可以定义为 $O_q[G]$上的右模范畴，并配备 Lusztig 形式作用所赋予的（弱）等变结构，使模成为有理表示（这是有意义的，因为 $O_q[G]$ 是有理表示范畴中的代数），参见 [GJV、§1.4]、 [BBJ、 §6.2]。本文中的许多结果，包括 $O_q[G]$与$U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 之间的联系，都将由第三位作者在一篇即将发表的论文中用于研究这一范畴。

现在陈述我们关于 (4) 的版本，但我们仅在 $R = 0$ 的情形下得到该结果（正特征情形稍显复杂，但我们相信结论仍然成立）。令T^d 为群 G^d中的极大环面。回忆一下， G^d 的伴随商可识别为商空间 T^d/W，从而得到映射 $G_0^d \hookrightarrow G^d \twoheadrightarrow T^d/W$。我们将 $U_q^{ev}(\mathfrak{g}$的中心识别为纤维积上的正则函数代数 $G_0^d \times_{T^d/W} T/W$，由此得到 Veldkamp 定理的直接类比。最后，我们完全类比 [DCKP2定理 51]，导出 Azumaya 位点的描述。

1.4. **提纲**。

在第2节中，我们回顾量子群及其 De Concini-Kac 形式和 Lusztig 形式的基本事实。在第3节中，我们引入偶部代数 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$，并赋予其 Lusztig 形式 $U_q(\mathfrak{g})$ 的伴随作用。在第4节中，我们构造 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 与 $U_q(\mathfrak{g})$ 之间的伴随不变配对，这是本文研究 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 的主要工具。在第 5 节中，我们将 Lusztig 的量子弗罗贝尼乌斯同态调整到修改后的设定中。在第 6 节中，我们研究单位根情形下偶部代数的 Frobenius 中心 Z_{Fr}。在第 7 节中，我们重新考察 Lusztig 形式的有理表示，并以更一般的形式证明一些已有结果，同时将其调整到当前设定中。在第8节中，我们回顾反射方程代数 $O_q[G]$ 的构造。在第 9 节中，我们将 $O_q[G]$ 识别为 U_q^{fin}，即在 $U_q(\mathfrak{g})$ 的伴随作用下，$U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 的局部有限部分。在第 10 节中，我们研究偶部代数 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 的中心及其 Azumaya 位点，与 [DCKP1、DCKP2] 有密切的类比。在附录 A 中，我们回顾 Hopf 代数上等变模的基本事实。

1.5. **致谢**。

我们非常感谢 P. Etingof 和 D. Jordan 就该主题进行的许多有益讨论。I. Losev 和 T. Vu 的工作得到了美国国家科学基金会（NSF）拨款 DMS-2001139 的资助，A. Tsymbaliuk 的工作得到了美国国家科学基金会（NSF）拨款 DMS-2302661 的资助。

2. Setting

本节中，我们建立记号，并回顾有关 Drinfeld-Jimbo 量子群及其 Lusztig 形式和 De Concini-Kac 形式的事实。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个半单李代数，其简单正根为 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$，基本权为 $\omega_1,\dots,\omega_r$。令 $P:=\bigoplus_{i=1}^r\mathbb{Z}\omega_i$ 为权格，$Q:=\bigoplus_{i=1}^r\mathbb{Z}\alpha_i$ 为根格。令 $P_+:=\bigoplus_{i=1}^r\mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$ 为 P 中所有支配权组成的集合，并令 $Q_+:=\bigoplus_{i=1}^r\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$。我们在 Cartan子代数 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ 上固定一个非退化不变双线性形式 $(\,,\,)$，并利用 $(\,,\,)$ 将 $\mathfrak{h}^*$ 与 $\mathfrak{h}$ 视为同一对象。设 $\mathsf{d}_i:=(\alpha_i,\alpha_i)/2$。我们选择 $(\,,\,)$ 使得对于短根 α_i，$\mathsf{d}_i=1$；特别地，对于任意 i，$\mathsf{d}_i\in\{1,2,3\}$。定义 $\omega_i^\vee:=\omega_i/\mathsf{d}_i$ 以及 $\alpha_i^\vee:=\alpha_i/\mathsf{d}_i$，从而 $(\alpha_i,\omega_j^\vee)=(\omega_i,\alpha_j^\vee)=\delta_{i,j}$。因此，我们将 $\mathfrak{g}$ 的余权格和余根格分别视为 $P^\vee:=\bigoplus_{i=1}^r\mathbb{Z}\omega_i^\vee$ 和 $Q^\vee:=\bigoplus_{i=1}^r\mathbb{Z}\alpha_i^\vee$。令 $(a_{ij})_{i,j=1}^r$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵：

$$a_{ij}=(\alpha_i^\vee,\alpha_j)=2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_i,\alpha_i)\,.$$

我们还考虑如下定义的对称化 Cartan 矩阵 $B=(b_{ij})_{i,j=1}^r$

$$b_{ij}:=\mathsf{d}_ia_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)\,. \tag{2.1}$$

令 v 为形式变量，并考虑在 $\{v^{2k}-1\}_{1\leq k\leq\max\{\mathsf{d}_i\}_{i=1}^r}$ 处局部化的 $\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$：

$$\mathcal{A}=\mathbb{Z}[v,v^{-1}]\left[\left\{\tfrac{1}{v^{2k}-1}\right\}_{1\leq k\leq\max\{\mathsf{d}_i\}}\right],$$[1]

其商域为 $\mathbb{Q}(v)$。给定 $m\in\mathbb{Z}$, $s\in\mathbb{N}$，定义 $[s]_v$，$[s]_v!$ $\begin{bmatrix}m\\s\end{bmatrix}_v\in\mathbb{Z}[v,v^{-1}]\subset\mathcal{A}$ 如下：

$$[s]_v:=\frac{v^s-v^{-s}}{v-v^{-1}}\,,\quad [s]_v!:=\prod_{c=1}^s[c]_v=[1]_v\cdots[s]_v\,,\quad \begin{bmatrix}m\\s\end{bmatrix}_v:=\prod_{c=1}^s\frac{v^{m-c+1}-v^{-m+c-1}}{v^c-v^{-c}}\,.$$

[1]注意，[L3、L5] 更常使用 $\mathcal{A}$ 表示 $\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$，而 [DCK、DCKP1] 使用 $\mathcal{A}$ 表示 $\mathbb{C}[v,v^{-1}]$。

注意，$[0]_v! = 1$。若 $m \geq s \geq 0$，则 v-二项式系数等于 $\begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_v = \frac{[m]_v! \,!\cdot [m-s]_v!}{[s]_v}$。对于 $1 \leq i \leq r$，令 $v_i := v^{\mathrm{d}_i}$，并相应地定义 $[s]_{v_i}$，$[s]_{v_i}!$ $\begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_{v_i}$。

设 q 是诺特环 R 中的一个可逆元，且对所有 $1 \leq k \leq \max\{\mathrm{d}_i\}_{i=1}^r$，元素 $q^{2k}-1 \in R$ 均可逆。定义一个代数同态：

$$\sigma\colon \mathcal{A} \to R \quad \text{via} \quad v \mapsto q \tag{2.2}$$

对于 $m \in \mathbb{Z}$，$s \in \mathbb{N}$，令 $[s]_q$，$[s]_q!$ $\begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_q \in R$ 为 $[s]_v$，$[s]_v!$ $\begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_v \in \mathcal{A}$ 在（2.2）下的像。

2.1. **Drinfeld-Jimbo 量子群 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$。**

令表示定义在 $\mathbb{Q}(v)$上的 $\mathfrak{g}$ 的 Drinfeld-Jimbo 量子群，也就是说，它是一个结合含幺 $\mathbb{Q}(v)$-代数，由 $\{E_i, F_i, K^\mu\}_{1\leq i\leq r}^{\mu\in Q}$ 生成，并满足以下定义关系：

$$K^\mu K^{\mu'} = K^{\mu+\mu'}, \qquad K^0 = 1, \tag{2.3}$$

$$K^\mu E_i K^{-\mu} = v^{(\alpha_i,\mu)} E_i, \qquad K^\mu F_i K^{-\mu} = v^{-(\alpha_i,\mu)} F_i, \tag{2.4}$$

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{v_i - v_i^{-1}}, \tag{2.5}$$

$$\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{v_i} E_i^{1-a_{ij}-m} E_j E_i^m = 0 \quad (i \neq j), \tag{2.6}$$

$$\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{v_i} F_i^{1-a_{ij}-m} F_j F_i^m = 0 \quad (i \neq j), \tag{2.7}$$

采用标准记号 $K_i := K^{\alpha_i}$。

令 $\mathbf{U}^<$、$\mathbf{U}^>$和$\mathbf{U}^0$ 分别表示由 $\mathbb{Q}(v)$ 在 $\mathbf{U}(\mathfrak{g}$中生成的子代数。以下是标准结果（参见 $\{F_i\}_{i=1}^r$、$\{E_i\}_{i=1}^r$和$\{K^\mu\}_{\mu\in Q}$；定理 4）。[J1，定理 4。21]:

引理 2.1。 ***(a)*** *(*$\mathbf{U}(\mathfrak{g})$的三角分解*)* 乘法映射

$$\mathrm{m}\colon \mathbf{U}^< \otimes_{\mathbb{Q}(v)} \mathbf{U}^0 \otimes_{\mathbb{Q}(v)} \mathbf{U}^> \longrightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \tag{2.8}$$

是 $\mathbb{Q}(v)$-向量空间的同构。

(b) 子代数 $\mathbf{U}^<$、$\mathbf{U}^>$和$\mathbf{U}^0$ 分别同构于由 $\{F_i\}_{i=1}^r$、$\{E_i\}_{i=1}^r$和 $\{K^\mu\}_{\mu\in Q}$生成的代数，其定义关系为（2.7）、（2.6）和（2.3）。

代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 通过以下方式按 Q 分级：

$$\deg(E_i) = \alpha_i, \qquad \deg(F_i) = -\alpha_i, \qquad \deg(K^\mu) = 0. \tag{2.9}$$

遵循 $\mathfrak{g}$ [J1，命题 4。11], 我们还赋予 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 标准的 Hopf 代数结构：

$$\begin{aligned} &\text{余乘法}\ \Delta\colon && E_i \mapsto E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, && F_i \mapsto F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, && K^\mu \mapsto K^\mu \otimes K^\mu, \\ &\text{反粒子}\ S\colon && E_i \mapsto -K_i^{-1} E_i, && F_i \mapsto -F_i K_i, && K^\mu \mapsto K^{-\mu}, \\ &\text{余单位}\ \varepsilon\colon && E_i \mapsto 0, && F_i \mapsto 0, && K^\mu \mapsto 1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

注2.2. 我们常常需要 U(g) 的一个更一般的版本：通过扩充 U(g) 的 Cartan 部分 U^0，得到一个定义在 $\mathbb{Q}(v^{1/\mathbf{N}})$ 上的代数，其中 N 为适当的正整数。设 X 是 $\mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 中包含根格 Q 的 $\mathbb{Z}$-格。设 N 为满足 $(X,Q) \in {}^1\mathbf{N}\mathbb{Z}$ 的正整数；那么对任意 $\mu \in X$ 和 $\lambda \in Q$，我们定义 $v^{(\mu,\lambda)} := (v^{1/\mathbf{N}})^{\mathbf{N}(\mu,\lambda)}$。令 $\mathrm{U}(\mathfrak{g},X)$ 为由 $\{E_i, F_i, K^\mu\}_{1\le i\le r}^{\mu\in X}$ 生成的结合 $\mathbb{Q}(v^{1/\mathbf{N}})$-代数，其定义关系类似于定义关系 (2.3)–(2.7)。我们还赋予 $\mathrm{U}(\mathfrak{g},X)$ 如 (2.10) 所示的 Hopf 代数结构，以及如 (2.9) 所示的 Q-分次。

回顾 $\mathbb{Q}$-代数反对合 $\tau\colon \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}(\mathfrak{g})$，其定义如下

$$\tau(E_i) = F_i\,,\quad \tau(F_i) = E_i\,,\quad \tau(K^\lambda) = K^{-\lambda}\,,\quad \tau(v) = v^{-1} \qquad \forall\, 1\le i\le r, \lambda\in Q\,. \tag{2.11}$$

在 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 上有 Lusztig 的辫群作用，其定义为（参见 [L3，定理 3。1], [L5，第 VI 部分],参见 [J1，§8.14–8。15]）：

$$\begin{aligned} T_i(K^\mu) &= K^{s_i\mu}\,, \qquad T_i(E_i) = -F_iK^{\alpha_i}\,, \qquad T_i(F_i) = -K^{-\alpha_i}E_i\,,\\ T_i(E_j) &= \sum_{k=0}^{-a_{ij}} (-1)^k \frac{v_i^{-k}}{[-a_{ij}-k]_{v_i}![k]_{v_i}!} E_i^{-a_{ij}-k}E_jE_i^k\,,\\ T_i(F_j) &= \sum_{k=0}^{-a_{ij}} (-1)^k \frac{v_i^{k}}{[-a_{ij}-k]_{v_i}![k]_{v_i}!} F_i^{k}F_jF_i^{-a_{ij}-k}\,, \end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $s_i = s_{\alpha_i}$ 是单反射。容易看出，算子 T_i 与 (2.11) 中的映射 τ 可交换。借助这一辫群作用，Lusztig 定义了 U(g) 的 PBW 基，下面我们将对此作回顾（参见 [L5，第 VI 部分], 参见 [J1，§8]）。选取魏尔群 W（它属于 $\mathfrak{g}$）中最长元$w_0 = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_N}$的一个约化分解（其中 N是正根系 Δ_+的基数）。于是，根集 $\beta_k = s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}\alpha_{i_k} (1\le k\le N)$ 为 $\mathfrak{g}$的所有正根 Δ_+ 提供了标记；利用 Lusztig 的辫群作用，我们定义根向量

$$E_{\beta_k} = T_{i_1}\cdots T_{i_{k-1}}E_{i_k}\,, \qquad F_{\beta_k} = T_{i_1}\cdots T_{i_{k-1}}F_{i_k} = \tau(E_{\beta_k}) \qquad \forall\, 1\le k\le N\,. \tag{2.13}$$

对于 $\vec{k} = (k_1,\dots,k_N) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N$，考虑有序单项式：

$$F^{\vec{k}} := F_{\beta_1}^{k_1}\dots F_{\beta_N}^{k_N}\,,\quad E^{\vec{k}} := E_{\beta_1}^{k_1}\dots E_{\beta_N}^{k_N}\,,\quad F^{k} := F_{\beta_N}^{k_N}\dots F_{\beta_1}^{k_1}\,,\quad E^{k} := E_{\beta_N}^{k_N}\dots E_{\beta_1}^{k_1}\,.$$

The 下述结果由 [J1, §8.24] 以及引理2 的三角分解得出。 1:

引理 2.3. *(a)* 集合 $\{E^k\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^N}$,$\{E^k\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^N}$ 是 (v)-基，其中 $\mathbb{Q}$ 的基为 $\mathbf{U}^>$。

(b) 集合 $\{F^k\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^N}$, $\{F^k\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^N}$ 是 (v)-基，其中 $\mathbb{Q}$ 的基为 $\mathbf{U}^<$。*(c)* 集合 $\{K^\mu\}_{\mu\in Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ (v)-基，其中 $\mathbf{U}^0$。*(d)* 集合 $\{F^{\vec{k}}K^\mu E^{\vec{r}}\}, \{F^kK^\mu E^{\vec{r}}\}, \{F^{\vec{k}}K^\mu E^{r}\}, \{F^kK^\mu E^{r}\}$，连同 $\vec{k},\vec{r}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^N$ 和 $\mu\in Q$，构成 (v)- 基，属于 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$。

2.2. **Lusztig 形式**。

对于 $1\le i\le r$ 和 $s\in\mathbb{N}$，定义**除幂** $E_i^{[s]}, F_i^{[s]} \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$如下：[2]

$$E_i^{[s]} := \frac{E_i^s}{[s]_{v_i}!}\,, \qquad F_i^{[s]} := \frac{F_i^s}{[s]_{v_i}!}\,.$$

[2]Our 上标 $[s]$ 与（s）不同，后者用于 [L3，L5], 我们在第 3.4 节将后者用于一个修改版本 .

对于 $1 \le i \le r$, $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$，定义 v-二项式系数 $\begin{bmatrix} K_i; a \\ n \end{bmatrix} \in \mathbf{U}(\mathfrak{g})$如下：

$$\begin{bmatrix} K_i; a \\ n \end{bmatrix} := \prod_{c=1}^{n} \frac{K_i v_i^{a-c+1} - K_i^{-1} v_i^{-a+c-1}}{v_i^c - v_i^{-c}} .$$

根据 [L3, §1.3], , 将 **Lusztig 形式** $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 定义为由 $\{E_i^{[s]}, F_i^{[s]}, K^{\mu}\}^{s\in\mathbb{N}, 1\le i\le r}_{\mu\in Q}$ 生成的 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 的 $\mathcal{A}$-子代数。注意，由于递归关系，所有元素 $\begin{bmatrix} K_i; d \\ n \end{bmatrix}$ 都属于 $\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$

$$\begin{bmatrix} K_i; a \\ n \end{bmatrix} - v_i^{-n} \begin{bmatrix} K_i; a+1 \\ n \end{bmatrix} = -v_i^{-a-1} K_i^{-1} \begin{bmatrix} K_i; a \\ n-1 \end{bmatrix} ,$$

结合下面这个重要等式（参见 [L1, §4.3]）：

$$E_i^{[p]} F_i^{[s]} = \sum_{c=0}^{\min(p,s)} F_i^{[s-c]} \begin{bmatrix} K_i; 2c-p-s \\ c \end{bmatrix} E_i^{[p-c]} . \tag{2.14}$$

我们还注意到 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 显然在映射 τ （2.11）下保持不变。

借助 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 上标准的霍普夫代数结构（2.10），我们得到（参见 [J1, §4.9]）：

$$\Delta(E_i^{[s]}) = \sum_{c=0}^{s} v_i^{c(s-c)} E_i^{[s-c]} K_i^c \otimes E_i^{[c]} , \qquad S(E_i^{[s]}) = (-1)^s v_i^{s(s-1)} K_i^{-s} E_i^{[s]} ,$$

$$\Delta(F_i^{[s]}) = \sum_{c=0}^{s} v_i^{-c(s-c)} F_i^{[c]} \otimes K_i^{-c} F_i^{[s-c]} , \qquad S(F_i^{[s]}) = (-1)^s v_i^{-s(s-1)} F_i^{[s]} K_i^s ,$$

因此，$\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 实际上是$\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 的一个霍普夫 $\mathcal{A}$-子代数。

令 $\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{<}$、$\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{>}$、$\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{0}$ 分别表示由 $\mathcal{A}$-子代数 $\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 生成的子代数；$\{F_i^{[s]}\}$、$\{E_i^{[s]}\}$、$\left\{ \begin{bmatrix} K_i; \\ s \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ \end{matrix} \right\}$、$K^{\mu}$依次如此。借助根向量的构造（2.13），我们定义

$$F_{\beta_k}^{[s]} := \frac{F_{\beta_k}^s}{[s]_{v_{i_k}}!} , \qquad E_{\beta_k}^{[s]} := \frac{E_{\beta_k}^s}{[s]_{v_{i_k}}!} \qquad \forall\, 1 \le k \le N,\ s \in \mathbb{N} . \tag{2.15}$$

根据 [L3，定理 6。7], 我们有：

引理 2.4。 *(a)* 两个子代数 $\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{>}$ 和 $\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{<}$ 均通过（ Q分次，且各自的次数分量都是有限秩自由 $\mathcal{A}$-模。

(b)（的三角分解 $\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$）乘法映射

$$\mathrm{m} \colon \dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{<} \otimes_{\mathcal{A}} \dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{0} \otimes_{\mathcal{A}} \dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{>} \longrightarrow \dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g}) \tag{2.16}$$

是自由 $\mathcal{A}$-模之间的同构。

(c) 元素

$$\left\{ \prod_{i=1}^{r} \left(K_i^{\delta_i} \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ t_i \end{bmatrix} \right) \,\middle|\, t_i \ge 0, \delta_i \in \{0,1\} \right\}$$

构成 $\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{0}$ 的一个 $\mathcal{A}$-基。

(d) 所有 $\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N$ 满足条件时，元素 $E^{[\vec{k}]} := E_{\beta_1}^{[k_1]} \dots E_{\beta_N}^{[k_N]}$ 构成 $\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{>}$ 的一个 $\mathcal{A}$-基。类似地，所有 $\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N$ 满足条件时，元素 $E^{[k]} := E_{\beta_N}^{[k_N]} \dots E_{[\beta_1]}^{[k_1]}$ 构成 $\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{>}$ 的一个 $\mathcal{A}$-基。

(e) 所有 $\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N$ 的元素 $F^{[\vec{k}]} := F_{\beta_1}^{[k_1]} \dots F_{\beta_N}^{[k_N]}$ 构成 $\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{<}$ 的一个 $\mathcal{A}$-基。类似地，所有 $\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N$ 的元素 $F^{[k]} := F_{\beta_N}^{[k_N]} \dots F_{\beta_1}^{[k_1]}$ 构成 $\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{<}$ 的一个 $\mathcal{A}$-基。

注 2.5。 虽然 [L3] 只讨论了 (d) 中的第一个基和 (e) 中的第二个基，但我们可以分别对 (e) 和 (d) 应用 $\mathbb{Q}$-代数反对合 τ （2.11），从而得到另外两个基。

如 $q \in R$ 上一段（2.2）所述，我们将**Lusztig 形式** $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$ 定义为关于 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g}$的基变换，其中 $\sigma\colon\ \mathcal{A} \to R$ （2.2）中的

$$\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}) := \dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{A}} R\,. \tag{2.17}$$

2.3. **德·孔奇尼-卡茨形式**。

按照 [DCK，§1.5]，定义**De Concini-Kac 形式** $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 为 $\mathcal{A}$的子代数，它是$\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 中由 $\{E_i, F_i, K^{\mu}\}_{1\le i\le r}^{\mu\in Q}$生成的。注意， $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 显然是一个霍普夫 $\mathcal{A}$子代数，且包含于$\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 中。显然， $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 在 τ （2.11）中的映射作用下保持不变。

令 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^{<},\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^{>},\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^{0}$ 分别表示由 $\{F_i\}_{i=1}^{r},\{E_i\}_{i=1}^{r}$ 和$\{K^{\mu}\}_{\mu\in Q}$生成的 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 的 $\mathcal{A}$-子代数。由于对于任意 $1 \le k \le \mathsf{d}_i$ 和任意 i， $\mathcal{A}$ 都包含 $(v^{2k}-1)^{-1}$，根据 (2.12)，辫群作用保持 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 不变。因此，(2.13) 中的元素 $\{E_{\beta_k}, F_{\beta_k}\}_{k=1}^{N}$ 属于 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$。以下结果是引理 2.1 的一个标准推论：

引理 2.6。 *(a)* 两个子代数 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^{>}$ 和 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^{<}$ 都是 Q-分次的，分次通过 (2.9)，且它们的每个次数分量都是有限秩自由 $\mathcal{A}$-模。
(b) （$\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$的三角分解$\mathfrak{g}$） 乘法映射

$$\mathrm{m}\colon \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^{<} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^{0} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^{>} \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g}) \tag{2.18}$$

是自由 $\mathcal{A}$-模的一个同构。
（*c*） 元素 K^{μ} （其中 $\mu \in Q$ ） 构成 $\mathcal{A}$的一个基。
（*d*） 集合 $\{E^{\vec{k}}\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^{N}}$、 $\{E^{\vec{k}}\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^{N}}$ 构成 $\mathcal{A}$的基。 (*e*) 集合 $\{F^{\vec{k}}\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^{N}}$、 $\{F^{\vec{k}}\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^{N}}$ 构成 $\mathcal{A}$的基。

证明。我们来证明（d）部分中的第二个集合是 $\mathcal{A}$的一组基。只需证明包含 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^{>} \supseteq \bigoplus_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^{N}} \mathcal{A}\cdot E^{\vec{k}}$ 实际上是等式。为此，任取 $x \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^{>}$。利用 [J1, §6.12], 的霍普夫配对 $(\cdot,\ \cdot)$，参见下文命题 4.2，我们注意到 $(\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{<},\ x) \in \mathcal{A}$，其中 $\dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^{<}$ 在上面的第2.2节中定义。另一方面，将 x 写成 Lusztig PBW基中的 $x = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} E^{\vec{k}}$，并利用 Lusztig 基关于配对 $(\cdot,\ \cdot)$ 的“对偶性”，参见 [J1, §8.29–8.30] 及下文（4.18），我们得出，对于所有 i，所有 $c_{\vec{k}} \in \mathcal{A}$ 均为 $\frac{1}{v_i - v_i^{-1}} \in \mathcal{A}$。证明（e）部分中的第二个集合是 $\mathcal{A}$的一组基的过程类似。

（τ2.11）中的反对合诱导出反同构 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^{>} \to \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^{<}$。此外， $\tau(E^{\vec{k}}) = \pm F^{\vec{k}}$， $\tau(F^{\vec{k}}) = E^{\vec{k}}$。因此，(d) 和 (e) 部分中的第一组分别是 (e) 和 (d) 部分中第二组的 τ 像，故构成 $\mathcal{A}$-基。(c) 部分由引理 2.1(b) 得出。结合引理 2.6 ，即可得出引理 2.1 的其余结论。□

给定 $q \in R$ （2.2）前一段中所述的**De Concini-Kac 形式**$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}$，将其定义为 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 关于 σ的基变换： $\mathcal{A} \to R$ （2.2）中的：

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) := \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{A}} R\,. \tag{2.19}$$

3. Twisted coproduct and integral forms

对于一个 Hopf 代数（A， Δ， S， ε），其自身的**左伴随作用**ad： $A \curvearrowright A$ 由 A 给出：

$$(\operatorname{ad} a)(b) := a_{(1)} \cdot b \cdot S(a_{(2)}) \qquad \forall\, a, b \in A\,. \tag{3.1}$$

Here 我们使用余乘法的 Sweedler记号（省略求和符号） :

$$\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)} \qquad \forall\, a \in A\,. \tag{3.2}$$

我们记录伴随作用的以下基本性质（见 [JL1，引理 2.2(ii)]）：

$$(\operatorname{ad} a)(b \cdot c) = (\operatorname{ad} a_{(1)})(b) \cdot (\operatorname{ad} a_{(2)})(c) \qquad \forall\, a, b, c \in A\,. \tag{3.3}$$

因此，我们有伴随作用 $\mathbf{U}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \mathbf{U}(\mathfrak{g})$。然而，该作用并不限制为 Lusztig 形式 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 在德·孔奇尼-卡茨形式 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 上的作用。为了解决这一问题，并出于其他目的，我们将通过扭曲构造修改 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 的余乘法。随后我们引入**（扭曲的）Lusztig 形式** $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$和**偶部** 子代数 $U^{ev}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$。后者是德·孔奇尼-卡茨形式的一种合适替代方案（基于对生成元进行某种"Cartan 扭曲"），从而我们得到伴随作用 $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g}) \curvearrowright U^{ev}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$，这对于本文其余部分至关重要。

3.1. **扭曲**。

为实现上述目标，我们回顾标准的扭曲构造（参见 [R，定理 1]）：

命题 3.1。 ***(a)*** 对于一个（拓扑）*Hopf* 代数 $(A, m, \Delta, S, \varepsilon)$ 以及满足下式的 $\mathsf{F} \in A \otimes A$ （或在适当的完备化 $A\widehat{\otimes}A$中）

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})(\mathsf{F}) = \mathsf{F}_{13}\mathsf{F}_{23}\,,\ (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(\mathsf{F}) = \mathsf{F}_{13}\mathsf{F}_{12}\,,\ \mathsf{F}_{12}\mathsf{F}_{13}\mathsf{F}_{23} = \mathsf{F}_{23}\mathsf{F}_{13}\mathsf{F}_{12}\,,\ \mathsf{F}_{12}\mathsf{F}_{21} = 1\,, \tag{3.4}$$

公式

$$\Delta^{(\mathsf{F})}(a) = \mathsf{F}\Delta(a)\mathsf{F}^{-1}\,, \quad S^{(\mathsf{F})}(a) = uS(a)u^{-1}\,, \quad \varepsilon^{(\mathsf{F})}(a) = \varepsilon(a) \tag{3.5}$$

其中 $u := m(\mathrm{Id} \otimes S)(\mathsf{F})$，赋予 A 一个新的 *Hopf* 代数结构：$(A, m, \Delta^{(\mathsf{F})}, S^{(\mathsf{F})}, \varepsilon^{(\mathsf{F})})$。 ***(b)*** 若 $(A, m, \Delta, S, \varepsilon)$ 是一个具有普适 R-矩阵 $R \in A \otimes A$ （或在适当的完备化 $A\widehat{\otimes}A$中）的拟三角*Hopf*代数，则 $(A, m, \Delta^{(\mathsf{F})}, S^{(\mathsf{F})}, \varepsilon^{(\mathsf{F})})$ 也是一个具有普适 R-矩阵的拟三角*Hopf*代数

$$R^{(\mathsf{F})} = \mathsf{F}^{-1}R\mathsf{F}^{-1}\,. \tag{3.6}$$

霍普夫代数 $(A, m, \Delta^{(\mathsf{F})}, S^{(\mathsf{F})}, \varepsilon^{(\mathsf{F})})$ 称为由 F 扭曲得到的 $(A, m, \Delta, S, \varepsilon)$ 的**扭曲** 。

注 3.2。 (a) u 的逆元可明确写为 $u^{-1} = m(S \otimes \mathrm{Id})(\mathsf{F}_{21})$。
(b) 仅就命题 3.1(a) 而言，条件 (3.4) 可以放宽（参见 [CP，命题 4.2。13]）：

$$\mathsf{F}_{12}(\Delta \otimes \mathrm{Id})(\mathsf{F}) = \mathsf{F}_{23}(\mathrm{Id} \otimes \Delta)(\mathsf{F})\,, \quad (\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(\mathsf{F}) = 1 = (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(\mathsf{F})\,, \quad \mathsf{F} \text{ is invertible}\,.$$

3.2. $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ 上的扭曲霍普夫代数结构。

沿用 [R，§2]，我们将命题 3.1 应用于 $A = \mathbf{U}(\mathfrak{g})$，其赋有 $(A, \Delta, S, \varepsilon)$ 的标准霍普夫代数结构，该结构见 (2.10)，并取一个 Cartan 型元素 F:

$$\mathsf{F} = v^{\sum_{i,j=1}^{r} \phi_{ij}\omega_i^\vee \otimes \omega_j^\vee}\,. \tag{3.7}$$

这样的 F 满足条件 (3.4) 当且仅当矩阵 $\Phi = (\phi_{ij})_{i,j=1}^{r} \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{Q})$ 是反对称的。

为简化记号，以下我们将相应的扭曲余乘法$\Delta^{(\mathsf{F})}$、反粒子 $S^{(\mathsf{F})}$和余单位 $\varepsilon^{(\mathsf{F})}$ （3.5）分别记为 Δ'， S' 和 ε'。

注3.3。 我们注意到， $\sum_{j=1}^{r} \phi_{ij}\omega_j^\vee$不包含在 Q中。因此，实际上，我们将在包含所有 $\mathbb{Z}Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的 $\mathbb{Z}$-格 X 上，对一个霍普夫 $\mathbb{Q}(v^{1/\mathsf{N}})$-代数$\mathbf{U}(\mathfrak{g}, X)$进行扭曲

$\{\sum_{j=1}^r \phi_{ij}\omega_j^\vee\}_{1\le i\le r}$，见注 2.2。具体而言，扭曲的霍普夫代数结构如下 :

$$\begin{aligned}
&\Delta'(K^\mu) = K^\mu \otimes K^\mu\,,\\
&\Delta'(E_i) = E_i \otimes K^{\sum_{j=1}^r \phi_{ij}\omega_j^\vee} + K^{\alpha_i - \sum_{j=1}^r \phi_{ij}\omega_j^\vee} \otimes E_i\,,\\
&\Delta'(F_i) = F_i \otimes K^{-\alpha_i - \sum_{j=1}^r \phi_{ij}\omega_j^\vee} + K^{\sum_{j=1}^r \phi_{ij}\omega_j^\vee} \otimes F_i\,,\\
&S'(K^\mu) = K^{-\mu}\,, \qquad S'(E_i) = -K^{-\alpha_i}E_i\,, \qquad S'(F_i) = -F_iK^{\alpha_i}\,,\\
&\varepsilon'(K^\mu) = 1\,, \qquad \varepsilon'(E_i) = \varepsilon'(F_i) = 0\,,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

对于 $\mu \in X$，$1 \le i \le r$。

3.3. Φ的特殊选取。

本节将详细说明 Φ 的一种特殊选取，本文其余部分的各种构造中都将用到它。令 Dyn(𝔤) 表示由 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图将所有多重边替换为单边后得到的图，例如 $\mathrm{Dyn}(\mathfrak{sp}_{2r}) = \mathrm{Dyn}(\mathfrak{so}_{2r+1}) = \mathrm{Dyn}(\mathfrak{sl}_{r+1}) = A_r$。给定图 Dyn(𝔤)的一个定向 Or，通过以下方式定义关联矩阵 $(\epsilon_{ij})_{i,\,j=1}^r$：

$$\epsilon_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{if } a_{ij} \ge 0\\ 1 & \text{if } a_{ij} < 0 \text{ and Or contains an oriented edge } i \to j\\ -1 & \text{if } a_{ij} < 0 \text{ and Or contains an oriented edge } i \leftarrow j \end{cases}. \tag{3.9}$$

然后，我们考虑 $\Phi = (\phi_{ij})_{i,\,j=1}^r$，其中

$$\phi_{ij} = \epsilon_{ij}\frac{b_{ij}}{2}\,, \tag{3.10}$$

其中 $b_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$ 如 (2.1) 所示。采用这一选择后，对所有 $1 \le i \le r$，我们都有 $\sum_{j=1}^r \phi_{ij}\omega_j^\vee \in P/2$。因此，根据注3.3，我们将考虑定义在 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$ 上的霍普夫代数 U(𝔤, $P/2$)，其霍普夫代数结构如 (3.8) 所示。新的 Lusztig 形式 $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 和偶部代数 $U_{\mathcal{A}}^{ev}$ 将是 U(𝔤, $P/2$) 的霍普夫 $\mathcal{A}$-子代数。为引入它们，我们先定义 U(𝔤, $P/2$) 的修正元素~ ~$\{E_i, F_i\}_{i=1}^r$。

对于任意 $1 \le i \le r$，令

$$\nu_i^> := -\alpha_i + \sum_{j=1}^r \phi_{ij}\omega_j^\vee\,, \qquad \nu_i^< := \sum_{j=1}^r \phi_{ij}\omega_j^\vee = \alpha_i + \nu_i^>\,, \tag{3.11}$$

并考虑

$$\tilde{E}_i := E_iK^{\nu_i^>}\,, \qquad \tilde{F}_i := K^{-\nu_i^<}F_i\,. \tag{3.12}$$

我们还需要 $\mathfrak{h}^*$ 的以下元素:

$$\zeta_i^> := \alpha_i - 2\sum_{j=1}^r \phi_{ij}\omega_j^\vee = -\nu_i^> - \nu_i^<\,, \qquad \zeta_i^< := -\alpha_i - 2\sum_{j=1}^r \phi_{ij}\omega_j^\vee\,. \tag{3.13}$$

可以证明， $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g}, P/2)$ 由 $\{\tilde{E}_i, \tilde{F}_i, K^\mu\}_{1\le i\le r}^{\mu\in P/2}$ 生成，并满足以下关系：

$$
\begin{aligned}
&K^\mu K^{\mu'} = K^{\mu+\mu'}\,, \qquad K^0 = 1\,,\\
&K^\mu \tilde{E}_i K^{-\mu} = v^{(\alpha_i,\mu)}\tilde{E}_i\,, \qquad K^\mu \tilde{F}_i K^{-\mu} = v^{-(\alpha_i,\mu)}\tilde{F}_i\,,\\
&\tilde{E}_i\tilde{F}_j = v^{(\alpha_i,-\zeta_j^<)}\tilde{F}_j\tilde{E}_i \quad (i\neq j)\,, \qquad \tilde{E}_i\tilde{F}_i - v_i^2\tilde{F}_i\tilde{E}_i = v_i\frac{1-K_i^{-2}}{1-v_i^{-2}}\,,\\
&\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m v^{m\epsilon_{ij}b_{ij}} \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{v_i} \tilde{E}_i^{1-a_{ij}-m}\tilde{E}_j\tilde{E}_i^m = 0 \quad (i\neq j)\,,\\
&\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m v^{m\epsilon_{ij}b_{ij}} \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix}_{v_i} \tilde{F}_i^{1-a_{ij}-m}\tilde{F}_j\tilde{F}_i^m = 0 \quad (i\neq j)\,,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

wi采用标准记号 $K_i := K^{\alpha_i}$。代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g}, P/2)$ 通过（参见（2.9） Q）进行 Q-分次 ）：

$$
\deg(\tilde{E}_i) = \alpha_i\,, \qquad \deg(\tilde{F}_i) = -\alpha_i\,, \qquad \deg(K^\mu) = 0\,.
\tag{3.15}
$$

此外，我们有

$$
\begin{aligned}
&\Delta'(K^\mu) = K^\mu\otimes K^\mu\,, \quad \Delta'(\tilde{E}_i) = 1\otimes\tilde{E}_i + \tilde{E}_i\otimes K^{-\zeta_i^>}\,, \quad \Delta'(\tilde{F}_i) = 1\otimes\tilde{F}_i + \tilde{F}_i\otimes K^{\zeta_i^<}\,,\\
&S'(K^\mu) = K^{-\mu}\,, \qquad S'(\tilde{E}_i) = -\tilde{E}_iK^{\zeta_i^>}\,, \qquad S'(\tilde{F}_i) = -\tilde{F}_iK^{-\zeta_i^<}\,.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Let

$$
2P := \left\{\mu\in\mathfrak{h}^* \,\middle|\, \mu/2\in P\right\} = \left\{\mu\in P^\vee \,\middle|\, \tfrac{(\alpha_i,\mu)}{2\mathrm{d}_i}\in\mathbb{Z} \text{ for all } 1\le i\le r\right\}.
\tag{3.17}
$$

引理 3.4。元素 $\{\zeta_i^>\}_{i=1}^r$ 和 $\{\zeta_i^<\}_{i=1}^r$ 包含于 $2P$中。

证明。我们有 $(\alpha_j,\ \zeta_i^>)\ 2\mathrm{d}_j = (\alpha_j,\ \alpha_i - 2\sum_{k=1}^r \phi_{ik}\omega_k^\vee) = (\alpha_j,\ \alpha_i) - 2\phi_{ij} = (1-\epsilon_{ij})(\alpha_i,\ \alpha_j)$。因此 $(\alpha_j,\ \zeta_i^>)\ 2\mathrm{d}_j = 2a_{ji}$。如果 $i=j$，则 $(\alpha_j,\ \zeta_i^>)\ 2\mathrm{d}_j = 1$。如果 $i\neq j$，则 $(\alpha_j,\ \zeta_i^>)\ 2\mathrm{d}_j \in \{0, a_{ji}\}$。这意味着 $\zeta_i^>\in 2P$。$\zeta_i^<$的结果由 $\zeta_i^< = \zeta_i^> - 2\alpha_i$得出。□

注 3.5. 元素 $\tilde{E}_i$，$\tilde{F}_i$ 出现在 [S1], 中，其动机如下。设$\mathbf{U}_\Phi^<$、$\mathbf{U}_\Phi^>$分别为 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-子代数，它们是由 $\mathbf{U}(\mathfrak{g},\ P/2)$ 中的 $\{\tilde{F}_i\}$、$\{\tilde{E}_i\}$分别生成的。那么，赋值 $\tilde{E}_i\mapsto 1$, $\tilde{F}_i\mapsto 1$ 给出了代数同态：

$$
\chi^<\colon \mathbf{U}_\Phi^< \longrightarrow \mathbb{Q}(v^{1/2})\,, \qquad \chi^>\colon \mathbf{U}_\Phi^> \longrightarrow \mathbb{Q}(v^{1/2})\,,
$$

参见 [S1、命题 2、定理 4]。下文中我们不会用到这一事实。

3.4. **（扭曲的）Lusztig 形式** $U_q(\mathfrak{g})$。

Let

$$
(n)_v = \frac{1-v^{-2n}}{1-v^{-2}}, \quad (n)_v! = (1)_v\dots(n)_v, \quad \binom{m}{s}_v := \prod_{c=1}^{s}\frac{1-v^{2(-m+c-1)}}{1-v^{-2c}}.
$$

我们注意到 $[n]_v = v^{n-1}(n)_v$。接下来考虑以下元素：

$$
\binom{K_i;a}{n} = \frac{\prod_{s=1}^n(1-K_i^{-2}v_i^{2(s-a-1)})}{\prod_{s=1}^n(1-v_i^{-2s})}\,, \qquad \tilde{E}_i^{(n)} = \frac{\tilde{E}_i^n}{(n)_{v_i}!}\,, \qquad \tilde{F}_i^{(n)} = \frac{\tilde{F}_i^n}{(n)_{v_i}!}\,.
$$

我们将（扭曲）**Lusztig 形式** $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 定义为 $\mathcal{A}$-子代数，它是$\mathbf{U}(\mathfrak{g},\ P/2)$ 由以下元素生成：$\{\tilde{E}_i^{(s)},\tilde{F}_i^{(s)},K^{\mu}\}^{s\in\mathbb{N},\ \mu\in 2P}_{1\le i\le r}$。后文中，在没有歧义时，我们常将 $\dot{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 称为 Lusztig 形式。根据（2.14），我们有

$$\begin{aligned}\tilde{E}_i^{(p)}\tilde{F}_j^{(s)} &= v^{ps(\alpha_i,-\zeta_j^<)}\tilde{F}_j^{(s)}\tilde{E}_i^{(p)} \qquad \text{for } i\neq j\,,\\ \tilde{E}_i^{(p)}\tilde{F}_i^{(s)} &= \sum_{c=0}^{\min(p,s)} v_i^{2ps-c^2}\tilde{F}_i^{(s-c)}\binom{K_i;\,2c-p-s}{c}\tilde{E}_i^{(p-c)}\,.\end{aligned} \tag{3.18}$$

（3.14）中的最后两个关系可改写如下：

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{1-a_{ij}}(-1)^m v_i^{ma_{ij}(\epsilon_{ij}-1)-m(m-1)}\tilde{E}_i^{(1-a_{ij}-m)}\tilde{E}_j\tilde{E}_i^{(m)}=0 \qquad (i\neq j)\,,\\ &\sum_{m=0}^{1-a_{ij}}(-1)^m v_i^{ma_{ij}(\epsilon_{ij}-1)-m(m-1)}\tilde{F}_i^{(1-a_{ij}-m)}\tilde{F}_j\tilde{F}_i^{(m)}=0 \qquad (i\neq j)\,.\end{aligned} \tag{3.19}$$

利用（3.8）和（3.16）中的扭曲 Hopf 代数结构，我们有

$$\begin{aligned}&\Delta'(\tilde{E}_i^{(s)})=\sum_{c=0}^{s}\tilde{E}_i^{(s-c)}\otimes\tilde{E}_i^{(c)}K^{-(s-c)\zeta_i^>}\,,\qquad S'(\tilde{E}_i^{(s)})=(-1)^s v_i^{s(s-1)}\tilde{E}_i^{(s)}K^{s\zeta_i^>}\,,\\ &\Delta'(\tilde{F}_i^{(s)})=\sum_{c=0}^{s}v_i^{2c(s-c)}\tilde{F}_i^{(c)}\otimes\tilde{F}_i^{(s-c)}K^{c\zeta_i^<}\,,\qquad S'(\tilde{F}_i^{(s)})=(-1)^s v_i^{-s(s-1)}\tilde{F}_i^{(s)}K^{-s\zeta_i^<}\,.\end{aligned} \tag{3.20}$$

结合这些公式与引理 3.4，我们推得 $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 是一个 Hopf $\mathcal{A}$-子代数，其属于$\mathbf{U}(\mathfrak{g},P/2)$，并具有（3.8）和（3.16）中的扭曲霍普夫结构。

给定 $q\in R$ 如（2.2）前一段所述，我们将（扭曲）**Lusztig 形式** $U_q(\mathfrak{g})$ 定义为相对于 $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 对 σ 的基变换：$\mathcal{A}\to R$（2.2）中的

$$\dot{U}_q(\mathfrak{g}):=\dot{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{A}}R\,. \tag{3.21}$$

我们用相同的符号表示 $\tilde{E}_i^{(s)}$、$\tilde{F}_i^{(s)}$、K^{μ}, $\binom{K_i;}{n}{}^{a}$ 在 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$ 中的像。

我们常常会关注 Lusztig 形式的幂等元化版本，见第 5.1.1 节。在此背景下，“Cartan 扭曲”消失，我们得到与 [L5] 相同的代数，但余乘法不同。

3.5. $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 的偶部代数。

我们定义偶部 代数 $U_{\mathcal{A}}^{ev}$为由元素 $\mathcal{A}$生成的 $\mathbf{U}(\mathfrak{g},P/2)$ 的子代数。根据（3.16）和引理 3.4，可知 $U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})$ 关于（3.8）和（3.16）中的扭曲霍普夫结构，是 $\mathcal{A}$- 子代数，并且是一个霍普夫$\mathbf{U}(\mathfrak{g},P/2)$ 的。

设 $q\in R$ 如前一段（2.2）中所述，我们将**偶部**代数 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 定义为 $U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g}$关于 σ的基变换：$\mathcal{A}\to R$（2.2）中的

$$U_q^{ev}(\mathfrak{g}):=U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{A}}R\,. \tag{3.22}$$

我们用相同的符号表示 E_i、F_i、K^{μ} 在 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 中的像。

3.6. $\mathbf{U}(\mathfrak{g},P/2)$ $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ $U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})$ 的三角分解和 PBW 基。

令 $\mathbf{U}$-由$\mathbf{U}(\mathfrak{g},P/2)$生成的子代数，分别由 $\{E_i\}_{i=1}^r,\{F_i\}_{i=1}^r,\{K^{\mu}\}_{\mu\in P/2}$生成。令$\mathbf{U}_{\Phi}^{\geq},\mathbf{U}_{\Phi}^{\leq},\mathbf{U}_{\Phi}^{0}$ 为 $\mathbf{U}(\mathfrak{g},P/2)$的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-子代数，由

分别由 $\{\tilde{E}_i\}_{i=1}^r, \{\tilde{F}_i\}_{i=1}^r, \{K^\mu\}_{\mu\in P/2}$生成。注意，$\mathbf{U}^0_{P/2} = \mathbf{U}^0_\Phi$。同样，由$\mathbf{U}^>_{P/2}$、$\mathbf{U}^0_{P/2}$和$\mathbf{U}^\geqslant_\Phi$、$\mathbf{U}^0_\Phi$生成的子代数（分别为$\mathbf{U}^<_{P/2}$、$\mathbf{U}^0_{P/2}$和$\mathbf{U}^\leqslant_\Phi$、$\mathbf{U}^0_\Phi$）相同，记作$\mathbf{U}^\geqslant$（分别记作$\mathbf{U}^\leqslant$）。我们还注意到，所有这些子代数都通过(3.15)具有 Q-分次结构。

Lem第 3.6 节。 以下乘法映射是 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-向量空间的同构 :

$$\mathrm{m}\colon \mathbf{U}^<_{P/2} \otimes_{\mathbb{Q}(v^{1/2})} \mathbf{U}^0_{P/2} \otimes_{\mathbb{Q}(v^{1/2})} \mathbf{U}^>_{P/2} \longrightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g}, P/2)\,, \tag{3.23}$$

$$\mathrm{m}\colon \mathbf{U}^\leqslant_\Phi \otimes_{\mathbb{Q}(v^{1/2})} \mathbf{U}^0_\Phi \otimes_{\mathbb{Q}(v^{1/2})} \mathbf{U}^\geqslant_\Phi \longrightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{g}, P/2)\,. \tag{3.24}$$

证明。（3.23）的证明与引理 2.1的证明相同，而（3.24）由（3.23）推出。 □

（$\mathbb{Q}$-代数反对合 τ （2.11）可以扩展为 $\mathbb{Q}$-代数反对合 τ，其作用于 $\mathbf{U}$（$\mathfrak{g}$， $P/2$）如下:

$$\tau(E_i) = F_i\,, \qquad \tau(F_i) = E_i\,, \qquad \tau(K^\mu) = K^{-\mu}\,, \qquad \tau(v^{1/2}) = v^{-1/2}\,, \tag{3.25}$$

对于 $1 \leq i \leq r$， $\mu \in P/2$。

由于格 $P/2$ 在魏尔群 W 的作用下保持不变，公式 (2.12) 仍然定义了 $\mathbf{U}(\mathfrak{g}, P/2)$ 上的辫群作用。因此，我们仍可像在 (2.13) 中那样定义根向量 E_{β_k}, F_{β_k}。然而，这个辫群作用以及 (3.25) 中的映射 τ 都不保持 $\dot{U}_\mathcal{A}(\mathfrak{g})$ $U^{ev}_\mathcal{A}(\mathfrak{g})$。我们还注意到，元素 E_{β_k}, F_{β_k} 分别不属于 $\mathbf{U}^\geqslant_\Phi$、$\mathbf{U}^\leqslant_\Phi$。为了构造 $\mathbf{U}^\geqslant_\Phi$、$\mathbf{U}^\leqslant_\Phi$ 的基，我们将首先引入修正元素 $\tilde{E}_{\beta_k}, \tilde{F}_{\beta_k}$。为此，对于任意 $\beta = \sum_{i=1}^r a_i\alpha_i \in Q_+$，定义如下（参见 (3.11)）：

$$\nu^>_\beta = \sum_{i=1}^r a_i\nu^>_i\,, \qquad \nu^\leqslant_\beta = \sum_{i=1}^r a_i\nu^\leqslant_i\,. \tag{3.26}$$

引理 3.7。 对于任意 $\alpha, \beta \in Q_+$，我们有$(\nu^>_\alpha, \beta) \pm (\alpha, \nu^\leqslant_\beta) \in \mathbb{Z}$。

证明。我们有 $(\nu^>_i, \alpha_j) - (\alpha_i, \nu^<_j) = (\epsilon_{ij} - 1)(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathbb{Z}$, $(\nu^>_i, \alpha_j) + (\alpha_i, \nu^<_j) = -(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathbb{Z}$。现在，$\alpha, \beta \in Q_+$ 的一般情形立即可得。□

对于 $\mathfrak{g}$ 的正根 $\beta_k = \sum_{i=1}^r a_i\alpha_i$， 令

$$b^>_{\beta_k} = \sum_{i<j} a_ia_j(\nu^>_i, \alpha_j)\,, \qquad b^\leqslant_{\beta_k} = -\sum_{i<j} a_ia_j(\nu^\leqslant_j, \alpha_i)\,, \tag{3.27}$$

并定义

$$\tilde{E}_{\beta_k} := v^{b^>_{\beta_k}} E_{\beta_k} K^{\nu^>_{\beta_k}}\,, \quad \tilde{F}_{\beta_k} := v^{b^\leqslant_{\beta_k}} K^{-\nu^\leqslant_{\beta_k}} F_{\beta_k}\,, \qquad \tilde{E}^{(s)}_{\beta_k} := \frac{\tilde{E}^s_{\beta_k}}{(s)_{v_{i_k}}!}\,, \quad \tilde{F}^{(s)}_{\beta_k} := \frac{\tilde{F}^s_{\beta_k}}{(s)_{v_{i_k}}!}\,. \tag{3.28}$$

对于任意 $\vec{k} \in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ （其中 $N = |\Delta_+|$ 同前），我们定义有序单项式: $\tilde{E}^{\vec{k}} := \tilde{E}^{k_1}_{\beta_1} \dots \tilde{E}^{k_N}_{\beta_N}$, $\tilde{F}^{\vec{k}} := \tilde{F}^{k_1}_{\beta_1} \dots \tilde{F}^{k_N}_{\beta_N}$, $\tilde{E}^k := \tilde{E}^{k_N}_{\beta_N} \dots \tilde{E}^{k_1}_{\beta_1}$, $\tilde{F}^k := \tilde{F}^{k_N}_{\beta_N} \dots \tilde{F}^{k_1}_{\beta_1}$, $\tilde{E}^{(\vec{k})} := \tilde{E}^{(k_1)}_{\beta_1} \dots \tilde{E}^{(k_N)}_{\beta_N}$, $\tilde{F}^{(\vec{k})} := \tilde{F}^{(k_1)}_{\beta_1} \dots \tilde{F}^{(k_N)}_{\beta_N}$, $\tilde{E}^{(k)} := \tilde{E}^{(k_N)}_{\beta_N} \dots \tilde{E}^{(k_1)}_{\beta_1}$, $\tilde{F}^{(k)} := \tilde{F}^{(k_N)}_{\beta_N} \dots \tilde{F}^{(k_1)}_{\beta_1}$。令 $\dot{U}^>_\mathcal{A}, \dot{U}^\leqslant_\mathcal{A}, \dot{U}^0_\mathcal{A}$ 分别表示由 $\{\tilde{F}^{(s)}_i\}, \{\tilde{E}^{(s)}_i\}, \{(K_i; s)_{\alpha^\vee_i}, K^\mu\}$ 生成的 $\mathcal{A}$-子代数，它们是 $\dot{U}_\mathcal{A}(\mathfrak{g})$ 的子代数。令 $U^{ev<}_\mathcal{A}$, $U^{ev>}_\mathcal{A}, U^{ev\,0}_\mathcal{A}$ 分别表示由 $\{\tilde{F}_i\}, \{\tilde{E}_i\}$ 和 $\{K^\mu\}$ 生成的 $\mathcal{A}$-子代数，它们是 $U^{ev}_\mathcal{A}(\mathfrak{g})$ 的子代数。

引理 3.8。 对于所有的 $\vec{k} \in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$，我们有:

$$\tilde{E}^{\vec{k}}, \tilde{E}^k \in U^{ev>}_\mathcal{A}\,; \quad \tilde{F}^{\vec{k}}, \tilde{F}^k \in U^{ev<}_\mathcal{A}\,; \quad \tilde{E}^{(\vec{k})}, \tilde{E}^{(k)} \in \dot{U}^>_\mathcal{A}\,; \quad \tilde{F}^{(\vec{k})}, \tilde{F}^{(k)} \in \dot{U}^<_\mathcal{A}\,.$$

证明。证明 $\tilde{E}^{\vec{k}} \in U_{\mathcal{A}}^{ev>}$：令 $\mathcal{I}_{\beta_k}$ 表示由所有满足$1 \leq i_1$、……、$i_m \leq r$ 且满足 $\sum_{p=1}^m \alpha_{i_p} = \beta_k$ 的元组 $I = (i_1, \dots, i_m)$构成的集合。$\mathcal{I}_{\beta_k}$ 中的任意元组 I，都可由以下元组I_0 通过置换指标得到：$I_0 = (1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, r \dots, r)$，其中指标 j 重复 a_j次。对于任意 $I \in \mathcal{I}_{\beta_k}$，令 $c_I = -\sum_{p=1}^{m-1} (\nu_{i_p}^>, \alpha_{i_{p+1}} + \dots + \alpha_{i_m})$。特别地，$b_{\beta_k}^> + c_{I_0} = \sum_{i=1}^r \mathfrak{d}_i a_i(a_i - 1) \in \mathbb{Z}$。现在证明，对于任意 $I \in \mathcal{I}_{\beta_k}$，都有 $c_I - c_{I_0} \in \mathbb{Z}$。由于 I可由 I_0 通过置换指标得到，因此只需证明：对于两个通过置换一对相邻指标而互相得到的元组 I_1、$I_2 \in \mathcal{I}_{\beta_k}$，有 $c_{I_1} - c_{I_2} \in \mathbb{Z}$。为此，假设 I_2 是通过置换指标 i_p 和 i_{p+1}由 I_1 得到的。于是 $c_{I_1} - c_{I_2} = (\nu_{i_{p+1}}^>, \alpha_{i_p}) - (\nu_{i_p}^>, \alpha_{i_{p+1}}) = 2\phi_{i_{p+1}, i_p} \in \mathbb{Z}$。由此可得，对于 $\mathcal{I}_{\beta_k}$中的任意元组 I，都有 $b_{\beta_k}^> + c_I \in \mathbb{Z}$。

对于任意 $I = (i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{I}_{\beta_k}$，令 $E_I = E_{i_1} \dots E_{i_m}$，$\tilde{E}_I = \tilde{E}_{i_1} \dots \tilde{E}_{i_m}$。由于 E_{β_k}包含于 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^>$ 中且次数为 β_k，我们有 $E_{\beta_k} = \sum_{I \in \mathcal{I}_{\beta_k}} p_I(v) E_I$，其中 $p_I(v) \in \mathcal{A}$，因此

$$\tilde{E}_{\beta_k} = v^{b_{\beta_k}^>} E_{\beta_k} K^{\nu_{\beta_k}^>} = \sum_{I \in \mathcal{I}_{\beta_k}} v^{b_{\beta_k}^> + c_I} p_I(v) \tilde{E}_I.$$

由于 $b_{\beta_k}^> + c_I \in \mathbb{Z}$，可得 $\tilde{E}_{\beta_k} \in U_{\mathcal{A}}^{ev>}$，因此对于任意 $\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$，有 $\tilde{E}^{\vec{k}} \in U_{\mathcal{A}}^{ev>}$。

证明 $\tilde{E}^{(\vec{k})} \in \dot{U}_{\mathcal{A}}^>$：只需证明对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\tilde{E}_{\beta_k}^{(n)} \in \dot{U}_{\mathcal{A}}^>$成立。我们有

$$\tilde{E}_{\beta_k}^{(n)} = v^{(\nu_{\beta_k}^>, \beta_k)(n-1)n/2} v^{nb_{\beta_k}^>} E_{\beta_k}^{(n)} K^{n\nu_{\beta_k}^>}, \quad \text{in which} \quad (\nu_{\beta_k}^>, \beta_k) \in \mathbb{Z}.$$

Now

$$E_{\beta_k}^{(n)} = \sum_{\mathbf{a}=(a_1, \dots a_l)} p_{\mathbf{a}}(v) E_{i_1}^{(a_1)} \dots E_{i_l}^{(a_l)},$$

对于满足 $\sum_{j=1}^l a_j \alpha_{i_j} = n\beta_k$ and $p_{\mathbf{a}}(v) \in \mathcal{A}$ 的某个元组 $\mathbf{a} = (a_1, \dots a_l)$。然后，仿照 $\tilde{E}_{\beta_k}$的情形进行论证，可得 $v^{n\beta_k^>} E_{\beta_k}^{(n)} K^{n\nu_{\beta_k}^>} \in \dot{U}_{\mathcal{A}}^>$，因此 $\tilde{E}_{\beta_k}^{(n)} \in \dot{U}_{\mathcal{A}}^>$。

其他结论的证明类似。 □

现在我们可以建立$\dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{g}, P/2)$ $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ $U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g}$的 PBW基。我们从$\dot{\mathbf{U}}(\mathfrak{g}, P/2$开始。我们还回顾引理 2.3之前引入的有序单项式，F^k，E^k。

引理 3.9. *(a1) 集合 $\{E^{\vec{k}}\}_{\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$ 是 $U_{P/2}^>$ 的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-基。(a2) 集合 $\{F^{\vec{k}}\}_{\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$、$\{F^k\}_{\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$ 是 $U_{P/2}^<$ 的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-基。(a3) 集合 $\{K^\mu\}_{\mu \in P/2}$ 是 $U_{P/2}^0$ 的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-基。(a4) 集合 $\{F^{\vec{k}} K^\mu E^{\vec{r}}\}$、$\{F^k K^\mu E^{\vec{r}}\}$、$\{F^{\vec{k}} K^\mu E^r\}$、$\{F^k K^\mu E^r\}$，其中 $\vec{k}$、$\vec{r} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$和 $\mu \in P/2$，构成 $U(\mathfrak{g}, P/2)$ 的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-基。(b1) 集合 $\{\tilde{E}^{\vec{k}}\}_{\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$、$\{\tilde{E}^k\}_{\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$ 是 $U_\Phi^>$ 的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-基。(b2) 集合 $\{\tilde{F}^{\vec{k}}\}_{\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$、$\{\tilde{F}^k\}_{\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$ 是 $U_\Phi^<$ 的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-基。(b3) 集合 $\{K^\mu\}_{\mu \in P/2}$ 是 U_Φ^0 的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-基。(b4) 集合 $\{\tilde{F}^{\vec{k}} K^\mu \tilde{E}^{\vec{r}}\}$、$\{\tilde{F}^k K^\mu \tilde{E}^{\vec{r}}\}$、$\{\tilde{F}^{\vec{k}} K^\mu \tilde{E}^r\}$、$\{\tilde{F}^k K^\mu \tilde{E}^r\}$，其中 $\vec{k}$、$\vec{r} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$和 $\mu \in P/2$，构成 $U(\mathfrak{g}, P/2)$ 的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-基。*

证明。（a1）–（a4）由引理 2.3 得出，而（b1）–（b4）则由（a1）–（a4）得出。 □

在陈述下一个结果之前，先记录一些 Cartan 元素之间的关系会很有帮助（参见 [L4，§2。3]）：

$$\binom{t+t'}{t}_i\binom{K_i;0}{t+t'}=\binom{K_i;0}{t}\sum_{k=0}^{t'}(-1)^k v_i^{2t'(t+k)-k(k+1)}\binom{t+k-1}{k}_i\binom{K_i;0}{t'-k}, \tag{3.29}$$

$$\binom{K_i;-c}{t}=\sum_{0\le k\le t}(-1)^k v_i^{2t(c+k)-k(k+1)}\binom{c+k-1}{k}_i\binom{K_i;0}{t-k}\ (c\ge 1), \tag{3.30}$$

$$\binom{K_i;c}{t}=\sum_{0\le k\le t}v_i^{2k(t-k)}\binom{c}{k}_i K_i^{-2k}\binom{K_i;0}{t-k}\ (c\ge 0), \tag{3.31}$$

对所有 $t,\ t'\ge 0$。

引理 3.10。 *(a1)* 子代数 $\dot U_{\mathcal A}^{\le}$，$\dot U_{\mathcal A}^{\ge}$，$U_{\mathcal A}^{ev<}$，$U_{\mathcal A}^{ev>}$是 Q-分次的，分次方式由 (3.15)给出，且它们的每个次数分量都是有限秩自由 $\mathcal A$-模。
(a2) 乘法映射

$$\mathrm{m}\colon \dot U_{\mathcal A}^{<}\otimes_{\mathcal A}\dot U_{\mathcal A}^{0}\otimes_{\mathcal A}\dot U_{\mathcal A}^{>}\longrightarrow \dot U_{\mathcal A}(\mathfrak g),$$
$$\mathrm{m}\colon U_{\mathcal A}^{ev<}\otimes_{\mathcal A}U_{\mathcal A}^{ev\,0}\otimes_{\mathcal A}U_{\mathcal A}^{ev>}\longrightarrow U_{\mathcal A}^{ev}(\mathfrak g)$$

是自由 $\mathcal A$-模的同构。
(b1) 集合 $\{\tilde E^{\vec k}\}_{\vec k\in\mathbb Z_{\ge 0}^N},\{\tilde E^{k}\}_{\vec k\in\mathbb Z_{\ge 0}^N}$ 是 $\mathcal A$-基，属于 $U_{\mathcal A}^{ev>}$。
(b2) 集合 $\{\tilde F^{\vec k}\}_{\vec k\in\mathbb Z_{\ge 0}^N},\{\tilde F^{k}\}_{\vec k\in\mathbb Z_{\ge 0}^N}$ 是 $\mathcal A$-基，属于 $U_{\mathcal A}^{ev<}$。
(b3) 集合 $\{K^\mu\}_{\mu\in 2P}$是 $\mathcal A$-基，属于 $U_{\mathcal A}^{ev\,0}$。*(c1)* 集合 $\{\tilde E^{(\vec k)}\}_{\vec k\in\mathbb Z_{\ge 0}^N},\{\tilde E^{(k)}\}_{\vec k\in\mathbb Z_{\ge 0}^N}$ 是 $\mathcal A$-基，属于 $\dot U_{\mathcal A}^{>}$。*(c2)* 集合 $\{\tilde F^{(\vec k)}\}_{\vec k\in\mathbb Z_{\ge 0}^N},\{\tilde F^{(k)}\}_{\vec k\in\mathbb Z_{\ge 0}^N}$ 是 $\mathcal A$-基，属于 $\dot U_{\mathcal A}^{<}$。*(c3)* 子代数 $\dot U_{\mathcal A}^{0}$ 具有以下 $\mathcal A$-基：

$$\left\{K^{2\varsigma_j}\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(K_i^{2\left\lfloor\frac{t_i}{2}\right\rfloor}\binom{K_i;0}{t_i}\right)\ \middle|\ t_i\ge 0, 1\le j\le k\right\}, \tag{3.32}$$

其中 $\varsigma_1,\dots,\varsigma_k\in P$ 是左陪集 P/Q 的一组代表元。

证明。 我们将在引理4.8之后给出 (b1)、(b2)、(c1)、(c2) 的证明。(b3) 部分很容易由引理3.9 的 (b3) 部分推出，而后者不依赖于本引理。

我们来简述 (3.32) 的证明。元素线性生成的 $\widetilde{\dot U_{\mathcal A}^{0}}$ 的 $\mathcal A$-子模。不难看出，(3.32) 中的元素构成了由 $\{K^\mu\}^{\mu\in 2P}$ 生成的 $\mathbf U(\mathfrak g,P/2)$ 的子代数 $\mathbf U^0(2P)$ 的 $\mathbb Q(v^{1/2})$-基。因此，$\dot U_{\mathcal A}^{0}$ 是一个自由 $\mathcal A$-模，其 $\mathcal A$-基为 (3.32)。

步骤 *1:* 我们将证明 $K_i^{2k}\binom{K_i;0}{m}$ 对于 $m\in\mathbb N,k\in\mathbb Z$ 是 $\mathcal A$的线性组合$K_i^{2\left\lfloor\frac{t_i}{2}\right\rfloor}\binom{K_i;0}{t_i}$。因此 $K^\mu\binom{K_i;a}{m}$ 包含于 $\widetilde{\dot U_{\mathcal A}^{0}}$对所有 $\mu\in 2P,a\in\mathbb Z,m\in\mathbb N$ 利用（3.30）–（3.31）。

我们将证明偶数 $2m$ 的结论，奇数 $2m+1$ 的证明相同。该结论对 $K_i^{2m}\binom{K_i;0}{2m}$ 成立。考虑

$$(1-v_i^{-4m})K^{2m}\binom{K_i;0}{2m+1}=K^{2m}\binom{K_i;0}{m}-v_i^{2m}K_i^{2m-2}\binom{K_i;0}{2m},$$

因此，该结论对 $K_i^{2m-2}\binom{K_i;0}{2m}$ 成立。考虑

$$\prod_{i=0}^{1}(1-v_i^{-4m-i})K_i^{2m+2}\binom{K_i;0}{2m+2}=K_i^{2m+2}\binom{K_i;0}{2m}-(v_i^{4m}+v_i^{4m+2})K_i^{2m}\binom{K_i;0}{2m}+v_i^{8m+2}K_i^{2m-2}\binom{K_i;0}{2m},$$

因此，该陈述对 $K_i^{2m+2}\binom{K_i;0}{2m}$ 成立。重复这一过程，我们可以证明该陈述对所有 $k\in\mathbb{Z}$ 的 $K_i^{2k}\binom{K_i;0}{2m}$ 都成立。

步骤 2. 我们将证明 $\dot{U}^0_{\mathcal{A}}$ 在 $K_i^{2k}\binom{K_i;0}{m}$ 的左乘下保持稳定。由 (3.30) – (3.31)，只需证明 $\dot{U}^0_{\mathcal{A}}$ 在 $K_i^{2k}\binom{K_i;0}{m}$ 的左乘下保持稳定。另一方面，(3.29)（由归纳法）推出，$\binom{K_i;0}{t}\binom{K_i;0}{t'}$ 是 $\mathcal{A}$-线性组合，由 $\binom{K_i;0}{t''}$ 构成。因此，将 $\dot{U}^0_{\mathcal{A}}$ 中的任意元素乘以 $K_i^{2k}\binom{K_i;0}{m}$ 后，可得到 $\mathcal{A}$-线性组合，由某个 $k_i\in\mathbb{Z}$ 对应的 $\prod_{i=1}^r K_i^{2k_i}\binom{K_i;0}{t_i}$ 构成。根据步骤 1，后一个 $\mathcal{A}$-线性组合属于 $\dot{U}^0_{\mathcal{A}}$。

因此，我们有 $\dot{U}^0_{\mathcal{A}}=\dot{U}^0_{\mathcal{A}}$ 并且 (c3) 部分得证。

(a1) 部分由 (b1)、(b2)、(c1) 和 (c2) 得出。下面证明 (a2) 部分中的第一个同构。可以证明 $\dot{U}^{\leq}_{\mathcal{A}}\dot{U}^0_{\mathcal{A}}\dot{U}^{\geq}_{\mathcal{A}}=\dot{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$。事实上，$1\in\dot{U}^{\leq}_{\mathcal{A}}\dot{U}^0_{\mathcal{A}}\dot{U}^{\geq}_{\mathcal{A}}$，而 $\dot{U}^{\leq}_{\mathcal{A}}\dot{U}^0_{\mathcal{A}}\dot{U}^{\geq}_{\mathcal{A}}$ 在 $\dot{}$ 下对 $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 的左乘封闭，这可由利用 $\tilde{E}_i^{(n)}$、$\tilde{F}_i^{(n)}$、K^{μ}、$\binom{K_i;0}{m}$ 之间的交换关系看出。

令 $\mathbf{U}(\mathfrak{g},\ 2P)$ 表示由 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$ 生成的 $\mathbf{U}(\mathfrak{g},\ P/2)$ 子代数。由引理 3.9 及 (c3) 的证明，代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g},\ 2P)$ 有如下 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-基：

$$\tilde{F}^{\vec{k}}K^{2\varsigma_j}\prod_{i=1}^{r}\left(K_i^{2\left\lfloor\frac{t_i}{2}\right\rfloor}\binom{K_i;0}{t_i}\right)\tilde{E}^{\vec{r}}, \tag{3.33}$$

取上述适当的指标。将此与 (c1)–(c3) 结合，我们可知 $\dot{U}^{\leq}_{\mathcal{A}}\dot{U}^0_{\mathcal{A}}\dot{U}^{\geq}_{\mathcal{A}}$是一个自由 $\mathcal{A}$-模，其 $\mathcal{A}$-基为 (3.33)，因此 (a) 部分的第一个同构得证。第二个同构的证明类似。□

3.7. $U_q(\mathfrak{g})$ 在 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$上的伴随作用。

对于 (3.8) 中的扭曲 Hopf 代数结构，我们有 $'$ 所定义的$\mathbf{U}(\mathfrak{g},P/2)$ 在自身上的左伴随作用 ad。显式地，对于任意 $1\leq i\leq r$, $\mu\in P/2$, $x\in\mathbf{U}(\mathfrak{g},P/2)$，有：

$$\mathrm{ad}'(K^{\mu})(x)=K^{\mu}xK^{-\mu},\quad \mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)(x)=[\tilde{E}_i,x]K^{\zeta_i^{>}},\quad \mathrm{ad}'(\tilde{F}_i)(x)=[\tilde{F}_i,x]K^{-\zeta_i^{<}}, \tag{3.34}$$

[3]

由 (3.16) 可知。事实证明，此作用限制为作用 $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})\curvearrowright U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})$：

命题 3.11。伴随作用 ad' 由 $\dot{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})\subset\mathbf{U}(\mathfrak{g},P/2)$ 保持偶部$U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})\subset\mathbf{U}(\mathfrak{g},P/2)$不变，从而得到

$$\mathrm{ad}'\colon\dot{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})\curvearrowright U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g}). \tag{3.35}$$

如 $q\in R$ 在（2.2）之前的段落中所述，我们得到

$$\textbf{(left) adjoint action }\mathrm{ad}'\colon\dot{U}_q(\mathfrak{g})\curvearrowright U_q^{ev}(\mathfrak{g}) \tag{3.36}$$

对 σ应用基变换，将（2.2）中的3.35）变为。

[3]相比之下，尽管 $\mathrm{ad}(F_i)(x)=[F_i,x]K_i$，但不存在将 $\mathrm{ad}(E_i)(x)$ 与 $[E_i,x]$ 联系起来的类似公式。

命题3.11的证明。根据性质（3.3）以及（3.16）和（3.20）中的显式余乘积公式，只需验证 $U_{\mathcal{A}}$(g的生成元作用于$U_{\mathcal{A}}^{ev}$(g的生成元时的断言。为此，我们首先注意到 $U_{\mathcal{A}}^{ev}$(g显然在 $\{\mathrm{ad}'(K^\beta)\,|\,\beta\in 2P\}$下保持稳定。

接下来，我们考虑 $\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})$。首先，我们应用 $\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})$ 于 $\{K^\beta\}_{\beta\in 2P}$。为此，回忆：

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)(x)=[\tilde{E}_i,x]K^{\zeta_i^>}$$

由引理 3.4 得到 $\zeta_i^>\in 2P$。将此与 $[\tilde{E}_i,\tilde{E}_i^sK^\beta]=(1-v^{(\beta,\alpha_i)})\,\tilde{E}_i^{s+1}K^\beta$ 结合，我们得到：$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)(\tilde{E}_i^sK^\beta)=(1-v^{(\beta,\alpha_i)})\,\tilde{E}_i^{s+1}K^{\beta+\zeta_i^>}$。由于 $(\zeta_i^>,\alpha_i)=(\alpha_i,\alpha_i)=2\mathsf{d}_i$，最终得到：

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^m)(K^\beta)=\prod_{s=0}^{m-1}\left(1-v^{(\beta,\alpha_i)+2s\mathsf{d}_i}\right)\cdot\tilde{E}_i^mK^{\beta+m\zeta_i^>}\,. \tag{3.37}$$

注意，对于 $\beta\in 2P$，$(\beta,\alpha_i)\in 2\mathsf{d}_i\mathbb{Z}$，因此：

$$\frac{\prod_{s=0}^{m-1}(1-v^{(\beta,\alpha_i)+2s\mathsf{d}_i})}{(m)_{v_i}!}\in\mathcal{A}\,. \tag{3.38}$$

因此，我们在U(g)中得到以下等式：

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})(K^\beta)=\frac{\prod_{s=0}^{m-1}(1-v^{(\beta,\alpha_i)+2s\mathsf{d}_i})}{(m)_{v_i}!}\cdot\tilde{E}_i^mK^{\beta+m\zeta_i^>}\,, \tag{3.39}$$

其右端属于 $U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})$，这是由（3.38）所致。

接下来，我们对 $\tilde{E}_jK^\beta$ 应用 $\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)$，其中 $\beta\in 2P$取适当的值：

- 对于 $j=i$，根据以下内容，我们有 $\mathrm{ad}'(\tilde{E}_{(m)\,i})(\tilde{E}_i)\in U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})$：

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)(\tilde{E}_i)=[\tilde{E}_i,\tilde{E}_i]K^{\zeta_i^>}=0\implies\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})(\tilde{E}_i)=0\text{ for }m\geq 1\,.$$

- 对于 $j\neq i$，令 $\beta=\zeta_j^>\in 2P$。利用（3.20），从而得到：

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{1-a_{ij}})(\tilde{E}_jK^\beta)=\left(\sum_{m=0}^{1-a_{ij}}(-1)^mv^{m\epsilon_{ij}b_{ij}}\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ m\end{bmatrix}_{v_i}\tilde{E}_i^{1-a_{ij}-m}\tilde{E}_j\tilde{E}_i^m\right)K^{\beta+(1-a_{ij})\zeta_i^>}=0\,,$$

最后一个等式由（3.14）得到。因此，我们有：

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})(\tilde{E}_jK^\beta)=0\in U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})\quad\text{for}\quad m>-a_{ij}\,.$$

我们还有：

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})(\tilde{E}_jK^\beta)=\frac{1}{(m)_{v_i}!}\,\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^m)(\tilde{E}_jK^\beta)\in U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})\quad\text{for}\quad 1\leq m\leq -a_{ij}\,,$$

作为 $1/(m)_{v_i}!\in\mathcal{A}$（这里，我们利用了若 $a_{ij}<0$，则 $a_{ij}=-1$ 或 $a_{ji}=-1$）。

结合上文对所有$'(\tilde{E}_i^{(m)})(\tilde{E}_jK^\beta)\in U_{\mathcal{A}}^{ev}$(g建立的包含映射 ad，以及公式（3.3，3.20），还有包含映射 $\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})(K^{-\beta})\in U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})$（也已在上文验证），我们得出 $\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})(\tilde{E}_j)$ 确实是 $U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})$ 的一个元素，对任意 $m\geq 1$。

最后，我们将 $\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})$ 应用于 $\tilde{F}_jK^\beta$，其中 $\beta:=-\zeta_j^<\in 2P$：

- 对于 $j\neq i$，我们有

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)(\tilde{F}_jK^\beta)=\left(\tilde{E}_i\tilde{F}_j-v^{(\alpha_i,-\zeta_j^<)}\tilde{F}_j\tilde{E}_i\right)K^{\beta+\zeta_i^>}=0\,,$$

最后一个等式由（3.14）的第三行得出。因此，对于任意′，有 $\tilde{E}_i^{(m)})(\tilde{F}_jK^\beta)=0$。将此结果与上文验证的包含关系 $m\geq 1$及公式（′，$\tilde{E}_i^{(m)}$）（$K^{-\beta}$）结合起来 $\in U_{\mathcal{A}}^{ev}$（g），便得到所需包含关系 3.3、3.20），对于任意′（$\tilde{E}_i^{(m)}$）（$\tilde{F}_j$）$\in U_{\mathcal{A}}^{ev}$（g）。$m\geq 1$。

• 对于 $j=i$，我们有

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)(\tilde{F}_iK^\beta)=[\tilde{E}_i,\tilde{F}_iK^{-\zeta_i^<}]K^{\zeta_i^>}=(\tilde{E}_i\tilde{F}_i-v_i^2\tilde{F}_i\tilde{E}_i)K^{\zeta_i^>-\zeta_i^<}$$
$$=v_i\frac{1-K^{-2\alpha_i}}{1-v_i^2}K^{2\alpha_i}=\frac{v_i}{1-v_i^{-2}}(K^{2\alpha_i}-1)\in U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})\,,$$

由于（3.14）的第三行。结合（3.37），我们得到 $m\geq 2$:

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^m)(\tilde{F}_iK^\beta)=\frac{v_i}{1-v_i^{-2}}\prod_{s=0}^{m-2}(1-v^{4\mathrm{d}_i+2s\mathrm{d}_i})\tilde{E}_i^{m-1}K^{2\alpha_i+(m-1)\zeta_i^>}\,.$$

因此，我们有:

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})(\tilde{F}_iK^\beta)\in U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})\qquad\text{for}\quad m\geq 1\,, \tag{3.40}$$

由于显然的包含关系

$$\frac{v_i\prod_{s=0}^{m-2}(1-v^{4\mathrm{d}_i+2s\mathrm{d}_i})}{(1-v_i^{-2})(m)_{v_i}!}\in\mathcal{A}\qquad\text{for}\quad m\geq 2\,.$$

结合（3.40）、公式（3.3、3.20），以及上面已验证的包含关系 $\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})(K^{-\beta})\in U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})$ 可知，$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})(\tilde{F}_i)$ 确实是 $U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})$ 中的元素，对任意 $m\geq 1$。

$\mathrm{ad}'(\tilde{F}_i^{(m)})$ 的情形可用类似的方法处理；细节留给感兴趣的读者。 □

4. Hopf and invariant pairings

令 $\mathrm{U}^\geqslant$、$\mathrm{U}^\leqslant$ 分别表示 $\mathrm{U}(\mathfrak{g},P/2)$ 中由 $\{E_i,K^\mu\}_{1\leq i\leq r}^{\mu\in P/2}$ 和$\{F_i,K^\mu\}_{1\leq i\leq r}^{\mu\in P/2}$ 生成的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-子代数。注意，$\mathrm{U}^\geqslant$ 和 $\mathrm{U}^\leqslant$ 都是 $\mathrm{U}(\mathfrak{g},P/2)$ 的 Hopf $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-子代数，它们分别赋有 (2.10) 中的标准 Hopf 代数结构（Δ,S,ε）或 (3.8) 中的扭曲结构（Δ',S',ε'）。令 $U_{\mathcal{A}}^{ev\,\geqslant}$和 $U_{\mathcal{A}}^{ev\,\leqslant}$（分别为 $\dot{U}_{\mathcal{A}}^{\geqslant}$ 和 $\dot{U}_{\mathcal{A}}^{\leqslant}$）表示 $U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})$（分别为 $\dot{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$）中由 $U_{\mathcal{A}}^{ev\,>},U_{\mathcal{A}}^{ev\,0}$和 $U_{\mathcal{A}}^{ev\,<},U_{\mathcal{A}}^{ev\,0}$（分别由 $\dot{U}_{\mathcal{A}}^{>},\dot{U}_{\mathcal{A}}^{0}$和 $\dot{U}_{\mathcal{A}}^{<},\dot{U}_{\mathcal{A}}^{0}$）生成的 $\mathcal{A}$-子代数。同样，定义 R-代数 $U_q^{ev\,\geqslant},U_q^{ev\,\leqslant},\dot{U}_q^{\geqslant},\dot{U}_q^{\leqslant}$。

本节旨在将 [J1, §6.12] 中的霍普夫配对以及 [J1, §6.20][4] 中的不变配对推广到我们的扭曲设置中，并据此构造类似的配对（现在同时涉及修正的 Lusztig 形式和偶部代数）：

$$(\ ,\ )':\dot{U}_q^{\leqslant}\times U_q^{ev\,\geqslant}\longrightarrow R\,,\qquad(\ ,\ )':U_q^{ev\,\leqslant}\times\dot{U}_q^{\geqslant}\longrightarrow R\,,$$
$$\langle\ ,\ \rangle':U_q^{ev}(\mathfrak{g})\times\dot{U}_q(\mathfrak{g})\longrightarrow R\,.$$

4.1. $\mathfrak{h}^*$ 的两个端同态。

回顾一下第 $\Phi=(\phi_{ij})_{i,j=1}^r$ 3.3 节中的反对称矩阵。它导出两个端同态 $\kappa,\gamma\in\mathrm{End}(\mathfrak{h}^*)$，它们在基 $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ 下定义如下:

$$\kappa(\alpha_i):=\alpha_i+\sum_{j=1}^r 2\phi_{ij}\omega_j^\vee=-\zeta_i^<\qquad\text{and}\qquad\gamma(\alpha_i):=\alpha_i-\sum_{j=1}^r 2\phi_{ij}\omega_j^\vee=\zeta_i^>\,, \tag{4.1}$$

这里使用记号 (3.13。这两个端同态互为伴随:

$$(\kappa(\alpha),\beta)=(\alpha,\gamma(\beta))\qquad\text{for any}\quad\alpha,\beta\in\mathfrak{h}^*\,, \tag{4.2}$$

相对于 $\mathfrak{h}^*$ 上的配对 $(\ ,\ )$，该配对由 $\mathfrak{h}$ 上的配对自然诱导而来 .

引理 4.1。有 $\kappa(Q)=\gamma(Q)=2P$。特别地，κ 和 γ 可逆。

[4]如 [J1 中所述，§6。18],这个配对与 [L5，§3.1.7-8]中的略有不同。

证明。 由于 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图没有环，我们可以重新排列 $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ (分别$\{\omega_i\}_{i=1}^r$)，使得 $\epsilon_{ij} = -1$ 对于 $i > j$，其中 $(\alpha_i,\ \alpha_j) \neq 0$。然后，利用 (B 的对称化 Cartan 矩阵2.1)，得到:

$$\begin{pmatrix}\kappa(\alpha_1)\\ \vdots \\ \kappa(\alpha_r)\end{pmatrix} = (B+2\Phi)\cdot\begin{pmatrix}\omega_1^\vee\\ \vdots \\ \omega_r^\vee\end{pmatrix} = K\cdot \mathrm{diag}(2\mathsf{d}_1,\cdots,2\mathsf{d}_r)\cdot\begin{pmatrix}\omega_1^\vee\\ \vdots \\ \omega_r^\vee\end{pmatrix} = K\cdot\begin{pmatrix}2\omega_1\\ \vdots \\ 2\omega_r\end{pmatrix}.$$

这里，$K = (k_{ij})_{i,\ j=1}^r$ 是一个上三角矩阵，其中 $k_{ii} = 1$ 且 $k_{ij} = a_{ij},\quad i < j$，因此它将格 $2P = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\cdot 2\omega_i$ 双射到自身。由此完成了 $\kappa(Q) = 2P$的证明。 $\gamma(Q) = 2P$ 的证明完全类似。□

4.2. **扭曲 Hopf 配对**。

取 $\mathsf{N} \in \mathbb{N}$使得 $_{12}(P/2,\ P/2) \dashv\ {}^1{}_{\mathsf{N}}\mathbb{Z}$ 且 $(\kappa^{-1}(P/2)\ P/2) \in\ {}^1{}_{\mathsf{N}}\mathbb{Z}$。下面的结果只是对 [J1，§6.12]的推广:

命题 4.2. 存在唯一的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-双线性配对

$$(\ ,\ ): \mathbf{U}^{\leqslant}\times\mathbf{U}^{\geqslant}\longrightarrow\mathbb{Q}(v^{1/\mathsf{N}}) \tag{4.3}$$

使得

$$(y, xx') = (\Delta(y), x'\otimes x)\,,\qquad (yy', x) = (y\otimes y', \Delta(x))\,, \tag{4.4}$$

$$(F_i, E_j) = -\frac{\delta_{i,j}}{v_i - v_i^{-1}}\,,\quad (K^\mu, K^{\mu'}) = v^{-(\mu,\mu')}\,,\quad (F_i, K^{\mu'}) = (K^\mu, E_i) = 0\,, \tag{4.5}$$

对于任意 $1\le i,j\le r,\ \mu,\mu'\in P/2,\ x,x'\in\mathbf{U}^{\geqslant}$，以及 $y,y'\in\mathbf{U}^{\leqslant}$。

配对 (4.3) 涉及 $\mathbf{U}(\mathfrak{g}, P/2)$ 上的标准 Hopf 结构。以下结果将上述命题适当地推广到我们的扭曲设定中:

命题 4.3。 存在唯一的 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-双线性配对

$$(\ ,\ )': \mathbf{U}^{\leqslant}\times\mathbf{U}^{\geqslant}\longrightarrow\mathbb{Q}(v^{1/\mathsf{N}}) \tag{4.6}$$

使得

$$(y, xx')' = (\Delta'(y), x'\otimes x)'\,,\qquad (yy', x)' = (y\otimes y', \Delta'(x))'\,, \tag{4.7}$$

$$(\tilde{F}_i, \tilde{E}_j)' = -\frac{\delta_{i,j}}{v_i - v_i^{-1}}\,,\quad (K^\mu, K^{\mu'})' = v^{-(\kappa^{-1}(\mu),\mu')}\,,\quad (\tilde{F}_i, K^{\mu'})' = (K^\mu, \tilde{E}_i)' = 0\,, \tag{4.8}$$

对于任意 $1\le i,j\le r,\ \mu,\mu'\in P/2,\ x,x'\in\mathbf{U}^{\geqslant}$，以及 $y,y'\in\mathbf{U}^{\leqslant}$。

证明。 通过采用逐行推理即可得出，如 [J1, §6.8–6.12]。 □

注 4.4. 我们有以下等式:

$$(\mathbf{U}^{\leqslant}_{-\nu}, \mathbf{U}^{\geqslant}_{\mu}) = 0\,,\quad \left(\mathbf{U}^{\leqslant}_{-\nu}, \mathbf{U}^{\geqslant}_{\mu}\right)' = 0\qquad \text{for}\ \ \nu\neq\mu\,, \tag{4.9}$$

$$(yK^\lambda, xK^{\lambda'}) = (y,x)v^{-(\lambda,\lambda')}\quad \text{for } y\in\mathbf{U}^{<}_{P/2}, x\in\mathbf{U}^{>}_{P/2},\ \lambda,\lambda'\in P/2\,, \tag{4.10}$$

$$(\widetilde{y}K^\lambda, \widetilde{x}K^{\lambda'})' = (\widetilde{y},\widetilde{x})'v^{(\lambda,\deg(\tilde{x}))-(\kappa^{-1}(\lambda),\lambda')}\quad \text{for } \widetilde{y}\in\mathbf{U}^{<}_{\Phi}, \widetilde{x}\in\mathbf{U}^{>}_{\Phi},\ \lambda,\lambda'\in P/2\,, \tag{4.11}$$

其中，我们用 $\deg(\tilde{x})$ 表示 $\tilde{x}$ 的权。

推论 4.5。 对于任意 $1 \leq i \leq r$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们有：

$$(\tilde{F}_i^n, \tilde{E}_i^n)' = (-1)^n v_i^{-n} \frac{(n)_{v_i}!}{(1-v_i^{-2})^n}.$$

证明。 由（4.7）和（3.20），可得：

$$(\tilde{F}_i^n, \tilde{E}_i^n)' = (\tilde{F}_i^{n-1} \otimes \tilde{F}_i, \Delta'(\tilde{E}_i^n))' = (n)_{v_i} \cdot (\tilde{F}_i^{n-1}, \tilde{E}_i^{n-1})'(\tilde{F}_i, \tilde{E}_i K^{-(n-1)\zeta_i^>})' = \frac{-(n)_{v_i}}{v_i - v_i^{-1}} (\tilde{F}_i^{n-1}, \tilde{E}_i^{n-1})'.$$

现在对 n 使用归纳法即可得到该结果。 □

下一个命题将配对（4.3）和（4.6）联系起来。考虑线性自同态$\varpi^\leqslant$ 从$\mathbf{U}^\leqslant$ 以及 $\varpi^\geqslant$ 从$\mathbf{U}^\geqslant$ 定义如下：

$$\varpi^\leqslant \colon F_{i_1} \cdots F_{i_n} K^\mu \mapsto K^{-\nu_{i_1}^< - \ldots - \nu_{i_n}^<} F_{i_1} \cdots F_{i_n} K^{\kappa(\mu)}, \tag{4.12}$$

$$\varpi^\geqslant \colon E_{j_n} \cdots E_{j_1} K^\nu \mapsto E_{j_n} \cdots E_{j_1} K^{\nu - \nu_{j_n}^< - \ldots - \nu_{j_1}^<}, \tag{4.13}$$

对任意 $n \geq 0$， $1 \leq i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_n \leq r$， μ， $\nu \in P/2$，其中 $\nu_j^< = \sum_{p=1}^r \phi_{jp} \omega_p^\vee$属于（3.11），$\kappa \in$属于 $\mathrm{End}(\mathfrak{h}^*)$（见（4.1））。这些映射是良定义的，因为它们保持了 v-Serre 关系（2.6，2.7）。

命题 4.6. 对于任意 $y \in \mathbf{U}^\leqslant$ 和 $x \in \mathbf{U}^\geqslant$，有：

$$(y, x) = \left(\varpi^\leqslant(y), \varpi^\geqslant(x)\right)'.$$

证明。 我们先计算任意 y， x) 的配对 $y = F_{i_1} \cdots F_{i_n} \in \mathbf{U}^<_{P/2}$和 $x = E_{j_n} \cdots E_{j_1} \in \mathbf{U}^>_{P/2^\circ}$ 应用 $n-1$ 次等式 (4.4) 的第一式，可得：

$$(y, x) = (F_{i_1} \cdots F_{i_n}, E_{j_n} \cdots E_{j_1}) = (\Delta^{(n-1)}(F_{i_1}) \cdots \Delta^{(n-1)}(F_{i_n}), E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_n}).$$

这里，$(n-1)$ 重余乘法 $\Delta^{(n-1)}(F_i) \in \mathbf{U}^{\leqslant \otimes n}$ 的显式表达式为：

$$\Delta^{(n-1)}(F_i) = \sum_{a=1}^{n} \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{a-1 \text{ times}} \otimes F_i \otimes \underbrace{K^{-\alpha_i} \otimes \cdots \otimes K^{-\alpha_i}}_{n-a \text{ times}}.$$

因此，有：

$$\Delta^{(n-1)}(F_{i_1}) \cdots \Delta^{(n-1)}(F_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \overrightarrow{\bigotimes_{1 \leq l \leq n}} \prod_{m<l}^{\sigma(m)<\sigma(l)} K^{-\alpha_{i_{\sigma(m)}}} \cdot F_{i_{\sigma(l)}} \cdot \prod_{m<l}^{\sigma(m)>\sigma(l)} K^{-\alpha_{i_{\sigma(m)}}} + (\cdots)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \overrightarrow{\bigotimes_{1 \leq l \leq n}} v^{\sum_{1 \leq m < l}^{\sigma(m)<\sigma(l)} (\alpha_{i_{\sigma(m)}}, \alpha_{i_{\sigma(l)}})} \cdot F_{i_{\sigma(l)}} \cdot \prod_{m<l} K^{-\alpha_{i_{\sigma(m)}}} + (\cdots).$$

$\overrightarrow{\bigotimes}$ $\overrightarrow{\bigotimes}_{1 \leq l \leq n}$这里，$\bigotimes$ 表示有序张量积（即 $\bigotimes x_i = x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n$），而$1 \leq l \leq n(\cdots)$ 表示至少有一个张量因子的次数为零的所有其他项，因此根据（，）与 $E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_n}$的配对由式（4.9）可知是平凡的。由于（$F_i K^\mu$， E_j） $= (F_i$， $E_j)$，因此得到：

$$(F_{i_1} \cdots F_{i_n}, E_{j_n} \cdots E_{j_1}) = \sum_{\sigma \in S_n} v^{\sum_{1 \leq m < l \leq n}^{\sigma(m)<\sigma(l)} (\alpha_{i_{\sigma(m)}}, \alpha_{i_{\sigma(l)}})} \cdot (F_{i_{\sigma(1)}}, E_{j_1}) \cdots (F_{i_{\sigma(n)}}, E_{j_n}). \tag{4.14}$$

现在，我们同样计算扭曲霍普夫配对 $(\varpi^{\leqslant}(y)\ \varpi^{\geqslant}(x))'$，其中 x 和 y 同上。将式（4.12）改写为 $\varpi^{\leqslant}(F_{i_1}\cdots F_{i_n}) = v^{\sum_{1\le m<l\le n}\phi_{i_l i_m}}\tilde{F}_{i_1}\cdots\tilde{F}_{i_n}$，可得：

$$(\varpi^{\leqslant}(y),\varpi^{\geqslant}(x))' = v^{\sum_{1\le m<l\le n}\phi_{i_l i_m}}(\Delta'^{(n)}(\tilde{F}_{i_1})\cdots\Delta'^{(n)}(\tilde{F}_{i_n}), K^{-\nu^{<}_{j_1}-\ldots-\nu^{<}_{j_n}}\otimes E_{j_1}\otimes\cdots\otimes E_{j_n})'\,.$$

这里，n 重余乘法 $\Delta'^{(n)}(\tilde{F}_i)\in\mathbf{U}^{\leqslant\otimes(n+1)}$ 明确表示为：

$$\begin{aligned}\Delta'^{(n)}(\tilde{F}_i) &= \sum_{a=1}^{n+1}\underbrace{1\otimes\cdots\otimes 1}_{a-1\text{ times}}\otimes\tilde{F}_i\otimes\underbrace{K^{\zeta_i^{<}}\otimes\cdots\otimes K^{\zeta_i^{<}}}_{n+1-a\text{ times}}\\ &= \sum_{a=1}^{n+1}\underbrace{1\otimes\cdots\otimes 1}_{a-1\text{ times}}\otimes\tilde{F}_i\otimes\underbrace{K^{-\kappa(\alpha_i)}\otimes\cdots\otimes K^{-\kappa(\alpha_i)}}_{n+1-a\text{ times}}\,.\end{aligned}$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned}&\Delta'^{(n)}(\tilde{F}_{i_1})\cdots\Delta'^{(n)}(\tilde{F}_{i_n})\\ &\quad= 1\otimes\sum_{\sigma\in S_n}\overrightarrow{\bigotimes_{1\le l\le n}}\prod_{m<l}^{\sigma(m)<\sigma(l)}K^{-\kappa(\alpha_{i_{\sigma(m)}})}\cdot\tilde{F}_{i_{\sigma(l)}}\cdot\prod_{m<l}^{\sigma(m)>\sigma(l)}K^{-\kappa(\alpha_{i_{\sigma(m)}})}+(\cdots)\\ &\quad= 1\otimes\sum_{\sigma\in S_n}\overrightarrow{\bigotimes_{1\le l\le n}}v^{\sum_{m<l}^{\sigma(m)<\sigma(l)}(\kappa(\alpha_{i_{\sigma(m)}}),\alpha_{i_{\sigma(l)}})}\cdot\tilde{F}_{i_{\sigma(l)}}\cdot\prod_{m<l}K^{-\kappa(\alpha_{i_{\sigma(m)}})}+(\cdots)\,,\end{aligned}$$

其中（$\cdots$）表示所有其他项。由于次数的原因（4.9），这些项与 $K^{-\nu^{<}_{j_1}-\ldots-\nu^{<}_{j_n}}\otimes E_{j_1}\otimes\cdots\otimes E_{j_n}$ 通过（，）′的配对为零。由（4.7）的第二个等式，我们还有：

$$(\tilde{F}_iK^{-\kappa(\mu)},E_j)' = (\tilde{F}_i\otimes K^{-\kappa(\mu)},E_j\otimes K^{\sum_{p=1}^r\phi_{jp}\omega_p^\vee})' = v^{\sum_{p=1}^r\phi_{jp}(\mu,\omega_p^\vee)}(\tilde{F}_i,E_j)'\,.$$

综合以上各式，我们得到：

$$\begin{aligned}&(\varpi^{\leqslant}(F_{i_1}\cdots F_{i_n}),\varpi^{\geqslant}(E_{j_n}\cdots E_{j_1}))' =\\ &\quad\sum_{\sigma\in S_n}\Big(v^{\sum_{1\le m<l\le n}^{\sigma(m)<\sigma(l)}(\alpha_{i_{\sigma(m)}},\alpha_{i_{\sigma(l)}})}\cdot(\tilde{F}_{i_{\sigma(1)}},E_{j_1})'\cdots(\tilde{F}_{i_{\sigma(n)}},E_{j_n})'\times\\ &\qquad v^{\sum_{m<l}\phi_{i_l i_m}+\sum_{m<l}\phi_{i_{\sigma(l)}i_{\sigma(m)}}+\sum_{m<l}^{\sigma(m)<\sigma(l)}2\phi_{i_{\sigma(m)}i_{\sigma(l)}}}\Big)\,.\end{aligned}$$

但是，由于 $\phi_{ab}=-\phi_{ba}$，上面最后一行中 v 的指数为零，因此：

$$\begin{aligned}&(\varpi^{\leqslant}(F_{i_1}\cdots F_{i_n}),\varpi^{\geqslant}(E_{j_n}\cdots E_{j_1}))' =\\ &\quad\sum_{\sigma\in S_n}v^{\sum_{1\le m<l\le n}^{\sigma(m)<\sigma(l)}(\alpha_{i_{\sigma(m)}},\alpha_{i_{\sigma(l)}})}\cdot(\tilde{F}_{i_{\sigma(1)}},E_{j_1})'\cdots(\tilde{F}_{i_{\sigma(n)}},E_{j_n})'\,.\end{aligned}\tag{4.15}$$

比较（4.14、4.15），利用（4.9）以及 $(F_i,\ E_j)=-\ \frac{\delta_{i,\ j}}{v_i-v_i^{-1}}\ (\tilde{F}_i,\ E_j)'$，我们得到：

$$(y,x) = (\varpi^{\leqslant}(y),\varpi^{\geqslant}(x))'\qquad\text{for any}\quad y\in\mathbf{U}^{<}_{P/2},\,x\in\mathbf{U}^{>}_{P/2}\,.$$

现在只需纳入 Cartan 部分。对于任意齐次的 $y\in\mathbf{U}^{<}_{P/2}$，$x\in\mathbf{U}^{>}_{P/2}$：

$$(yK^\mu,xK^\nu) = v^{-(\mu,\nu)}\cdot(y,x)\,,$$

按照（4.10）。我们还注意到 $\hat{y} := \varpi^{\leqslant}(y) = \varpi^{\leqslant}(yK^{\mu})\ K^{-\kappa(\mu)}$ 属于$\mathbf{U}_{\Phi}^{\leqslant}$，而 $\hat{x} := \varpi^{\geqslant}(x)\ K^{-\gamma(\deg(x))} = \varpi^{\geqslant}(xK^{\nu})\ K^{-\gamma(\deg(x))-\nu}$ 属于$\mathbf{U}_{\Phi}^{\geqslant}$，因此由（4.11）可得：

$$(\varpi^{\leqslant}(yK^{\mu})\ \varpi^{\geqslant}(xK^{\nu}))' = v^{-(\mu,\nu)}\cdot(\hat{y},\hat{x})' = v^{-(\mu,\nu)}\cdot(\hat{y},\hat{x}K^{\gamma(\deg(x))})' = v^{-(\mu,\nu)}\cdot(\varpi^{\leqslant}(y)\ \varpi^{\geqslant}(x))'.$$

将上述两个等式与证明前面的部分结合起来，我们得到

$$(\varpi^{\leqslant}(yK^{\mu}),\varpi^{\geqslant}(xK^{\nu}))' = v^{-(\mu,\nu)}\cdot(\varpi^{\leqslant}(y),\varpi^{\geqslant}(x))' = v^{-(\mu,\nu)}\cdot(y,x) = (yK^{\mu},xK^{\nu}).$$

这就完成了命题 4.6的证明。 □

回忆一下 ($\{\tilde{E}_{\beta_k},\tilde{F}_{\beta_k}\}_{k=1}^{N}$ 3.28) 中的元素以及 ($\{b_{\beta_k}^{>},b_{\beta_k}^{<}\}_{k=1}^{N}$ 3.27) 中的常数 .

推论 4.7. 对于任意 $\vec{k}=(k_1,\dots,k_N)$ $\vec{r}=(r_1,\dots,r_N)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{N}$，我们有

$$(\tilde{F}^{k},\tilde{E}^{r})' = \delta_{\vec{k},\vec{r}}\ v^{A_{\vec{k}}}\prod_{p=1}^{N} v_{i_p}^{\frac{k_p(k_p-1)}{2}}\frac{[k_p]_{v_{i_p}}!}{(v_{i_p}^{-1}-v_{i_p})^{k_p}},$$

其中 $A_{\vec{k}}$ 的具体表达式为

$$A_{\vec{k}} = \sum_{i=1}^{N} k_i(b_{\beta_i}^{>}+b_{\beta_i}^{<}) + \sum_{i=1}^{N}\frac{k_i(k_i-1)}{2}\big((\nu_{\beta_i}^{>},\beta_i)-(\nu_{\beta_i}^{<},\beta_i)\big) + \sum_{i<j} k_ik_j\big((\nu_{\beta_j}^{>},\beta_i)-(\nu_{\beta_i}^{<},\beta_j)\big).$$

证明。 首先，注意到 $A_{\vec{k}}\in\mathbb{Z}$，这是由引理 3.7得到的。回忆一下， $\tilde{F}_{\beta_k} = v^{b_{\beta_k}^{<}}K^{-\nu_{\beta_k}^{<}}F_{\beta_k}$ 并且$\tilde{E}_{\beta_k} = v^{b_{\beta_k}^{>}}E_{\beta_k}K^{\nu_{\beta_k}^{>}}$。因此

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{k} &= \overleftarrow{\prod_{1\leq i\leq N}}(v^{b_{\beta_i}^{<}}K^{-\nu_{\beta_i}^{<}}F_{\beta_i})^{k_i} = \overleftarrow{\prod_{1\leq i\leq N}}\Big(v^{k_ib_{\beta_i}^{<}}v^{-(\nu_{\beta_i}^{<},\beta_i)\frac{k_i(k_i-1)}{2}}K^{-k_i\nu_{\beta_i}^{<}}F_{\beta_i}^{k_i}\Big)\\ &= v^{\sum_i k_ib_{\beta_i}^{<}}v^{-\sum_i(\nu_{\beta_i}^{<},\beta_i)\frac{k_i(k_i-1)}{2}}v^{-\sum_{i<j}k_ik_j(\nu_{\beta_i}^{<},\beta_j)}\cdot K^{-\sum_i k_i\nu_{\beta_i}^{<}}F^{k}\\ &= v^{\sum_i k_ib_{\beta_i}^{<}}v^{-\sum_i(\nu_{\beta_i}^{<},\beta_i)\frac{k_i(k_i-1)}{2}}v^{-\sum_{i<j}k_ik_j(\nu_{\beta_i}^{<},\beta_j)}\cdot\varpi^{\leqslant}(F^{k})\end{aligned}\tag{4.16}$$

and

$$\begin{aligned}\tilde{E}^{r} &= \overleftarrow{\prod_{1\leq i\leq N}}(v^{b_{\beta_i}^{>}}E_{\beta_i}K^{\nu_{\beta_i}^{>}})^{r_i} = \overleftarrow{\prod_{1\leq i\leq N}}\Big(v^{r_ib_{\beta_i}^{>}}v^{(\nu_{\beta_i}^{>},\beta_i)\frac{r_i(r_i-1)}{2}}E_{\beta_i}^{r_i}K^{r_i\nu_{\beta_i}^{>}}\Big)\\ &= v^{\sum_i r_ib_{\beta_i}^{>}}v^{\sum_i(\nu_{\beta_i}^{>},\beta_i)\frac{r_i(r_i-1)}{2}}v^{\sum_{i<j}r_ir_j(\nu_{\beta_j}^{>},\beta_i)}\cdot E^{r}K^{\sum_i r_i\nu_{\beta_i}^{>}}\\ &= v^{\sum_i r_ib_{\beta_i}^{>}}v^{\sum_i(\nu_{\beta_i}^{>},\beta_i)\frac{r_i(r_i-1)}{2}}v^{\sum_{i<j}r_ir_j(\nu_{\beta_j}^{>},\beta_i)}\cdot\varpi^{\geqslant}(E^{r})K^{\sum_i r_i(\nu_{\beta_i}^{>}+\nu_{\beta_i}^{<})}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

由于 $\varpi^{\leqslant}(F^{k})\in\mathbf{U}_{\Phi}^{\leqslant}$ 根据（4.16），我们得到

$$(\tilde{F}^{k},\tilde{E}^{r})' = \delta_{\vec{k},\vec{r}}v^{A_{\vec{k}}}\Big(\varpi^{\leqslant}(F^{k}),\varpi^{\geqslant}(E^{k})K^{\sum_i k_i(\nu_{\beta_i}^{>}+\nu_{\beta_i}^{<})}\Big)' = \delta_{\vec{k},\vec{r}}v^{A_{\vec{k}}}\Big(\varpi^{\leqslant}(F^{k}),\varpi^{\geqslant}(E^{k})\Big)',$$

根据（4.16、4.17）和（4.11）。由命题 4.6，因此得到：

$$(\tilde{F}^{k},\tilde{E}^{r})' = \delta_{\vec{k},\vec{r}}v^{A_{\vec{k}}}(F^{k},E^{k}).$$

但根据 [J1，§8.29–8.30], 我们有

$$(F^{k},E^{k}) = \prod_{p=1}^{N} v_{i_p}^{\frac{k_p(k_p-1)}{2}}\frac{[k_p]_{v_{i_p}}!}{(v_{i_p}^{-1}-v_{i_p})^{k_p}}.\tag{4.18}$$

这意味着该推论中的等式成立。 □

令 u 现在考察配对（4.6）关于 $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 和 $U_{\mathcal{A}}^{ev}(\mathfrak{g})$ 的性质：

引理 4.8。 将 (4.6) 限制到 $\mathcal{A}$值配对:

$$(\ ,\ )' \colon \dot{U}_{\mathcal{A}}^{\leqslant} \times U_{\mathcal{A}}^{ev\,\geqslant} \longrightarrow \mathcal{A}\,, \tag{4.19}$$

$$(\ ,\ )' \colon U_{\mathcal{A}}^{ev\,\leqslant} \times \dot{U}_{\mathcal{A}}^{\geqslant} \longrightarrow \mathcal{A}\,. \tag{4.20}$$

两者 (*4.19*、*4.20*) 均由性质 (*4.7*、*4.8*) 唯一确定。

证明。为证明 $(y,\ x)' \in \mathcal{A}$对任意 $y \in \dot{U}_{\mathcal{A}}^{\leqslant}$和 $x \in U_{\mathcal{A}}^{ev\,\geqslant}$均成立，我们先应用公式 (4.7)，将问题化简为 $x \in \{\tilde{E}_i, K^{\nu}\}_{1\leq i\leq r}^{\nu\in 2P}$且 $y \in \{\tilde{F}_j^{(s)}, K^{\mu}, \binom{K_j;\ a}{n}\}^{a\in\mathbb{Z},\ 1\leq j\leq r}_{n\in\mathbb{N},\ \mu\in 2P}$。因此，只需应用以下显式公式（可由 (4.7) 和 (4.8) 容易推得）：

$$\begin{aligned}
&(\tilde{F}_j^{(s)}, \tilde{E}_i)' = -\frac{\delta_{i,j}\delta_{s,1}}{v_i - v_i^{-1}}\,,\\
&(\tilde{F}_j^{(s)}, K^{\nu})' = 0\,, \qquad (K^{\mu}, \tilde{E}_i)' = \left(\binom{K_j;\ a}{n}, \tilde{E}_i\right)' = 0\,,\\
&(K^{\mu}, K^{\nu})' = v^{-(\kappa^{-1}(\mu),\nu)}\,, \qquad \left(\binom{K_j;\ a}{n}, K^{\nu}\right)' = \binom{a - (\kappa^{-1}(\alpha_j^{\vee}),\nu)}{n}_{v_j}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

注意，$(\kappa^{-1}(\mu)\ \nu)\ \in \mathbb{Z}$以及$(\kappa^{-1}(\alpha_j^{\vee})\ \nu)\ = (\alpha_j^{\vee},\ \gamma^{-1}(\nu)) \in \mathbb{Z}$对任意 $\mu,\ \nu \in 2P$由 (4.2) 和引理 4.1。因此，确有 $(y,\ x)' \in \mathcal{A}$。

对任意 $y \in U^{ev\,\leqslant}$ 和 $x \in \dot{U}_{\mathcal{A}}^{\geqslant}$ 验证 $(y, x)' \in \mathcal{A}$ 同样基于:

$$\begin{aligned}
&(\tilde{F}_j, \tilde{E}_i^{(s)})' = -\frac{\delta_{i,j}\delta_{s,1}}{v_i - v_i^{-1}}\,,\\
&(\tilde{F}_j, K^{\mu})' = \left(\tilde{F}_j, \binom{K_i;\ a}{n}\right)' = 0\,, \qquad (K^{\nu}, \tilde{E}_i^{(s)})' = 0\,,\\
&(K^{\nu}, K^{\mu})' = v^{-(\kappa^{-1}(\nu),\mu)}\,, \qquad \left(K^{\nu}, \binom{K_i;\ a}{n}\right)' = \binom{a - (\kappa^{-1}(\nu),\alpha_i^{\vee})}{n}_{v_i}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

最后，引理 4.8 的唯一性部分显然。 □

现在我们可以完成引理 3.10的证明:

引理 3.10 中 (b1)、(b2)、(c1)、(c2) 的证明。首先，我们来证明 (b1) 中的第二个集合构成 $U_{\mathcal{A}}^{ev\,>}$的 $\mathcal{A}$-基。根据引理 3.8–3.9，我们有一个包含 $U_{\mathcal{A}}^{ev\,>} \supseteq \bigoplus_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N} \mathcal{A}\cdot\tilde{E}^k$。对于任意 $x \in U_{\mathcal{A}}^{ev\,>}$，由引理 4.8 可得 $(\tilde{F}^{(k)}, x)' \in \mathcal{A}$。另一方面，利用引理 3.9 将 $x = \sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N} c_{\vec{k}}\tilde{E}^k$ 写成 $c_{\vec{k}} \in \mathbb{Q}(v^{1/2})$，并应用推论 4.7，可得 $(\tilde{F}^{(k)}, x)' = f_{\vec{k}}(v)c_{\vec{k}}$。这里，$f_{\vec{k}}(v)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个可逆元，因此 $c_{\vec{k}} \in \mathcal{A}$。由此可得 $U_{\mathcal{A}}^{ev\,>} = \bigoplus_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N} \mathcal{A}\cdot\tilde{E}^k$。证明 (b2)、(c1)、(c2) 中的第二个集合分别构成相应代数的 $\mathcal{A}$-基，方法完全类似。

现在证明 (b1) 中的第一组是 $\mathcal{A}$ 的一个基，其中 $U_{\mathcal{A}}^{ev\,>}$。回顾式 $(\tau$（3.25）中的映射。由于 $\tau(F_{\beta_k}) = E_{\beta_k}$且 $\tau(E_{\beta_k}) = F_{\beta_k}$，我们有:

$$\tau(\tilde{F}_i) = \tilde{E}_i K^{\alpha_i}\,, \qquad \tau(\tilde{F}_{\beta_k}) = v^{-b_{\beta_k}^{<} - b_{\beta_k}^{>}}\tilde{E}_{\beta_k}K^{\beta_k} \qquad \forall\, 1\leq i\leq r\,, 1\leq k\leq N\,,$$

其中 $-b_{\beta_k}^{<} - b_{\beta_k}^{>} \in \mathbb{Z}$ 根据定义 (3.27) 和引理 3.7，并且我们使用了 $\nu_{\beta_k}^{<} - \nu_{\beta_k}^{>} = \beta_k$。令$\mathscr{U}_{\mathcal{A}}^{ev\,>}$为由 $\mathcal{A}$-子代数 $\mathbf{U}(\mathfrak{g},\ P/2)$ 生成的 $\tilde{E}_i K^{\alpha_i}$，其中 $1 \leq i \leq r$。则映射

τ: $U_{\mathcal{A}}^{ev<} \to \mathscr{U}_{\mathcal{A}}^{ev>}$是一个 $\mathbb{Z}$-代数反同构。因此， $\mathscr{U}_{\mathcal{A}}^{ev>}$具有一个由元素 $\overrightarrow{\prod}_{1\le j\le N}(\tilde{E}_{\beta_j}K^{\beta_j})^{k_j}$ 组成的 $\mathcal{A}$-基。另一方面，我们有 Q_+-分次:

$$U_{\mathcal{A}}^{ev>} = \bigoplus_{\mu\in Q_+} U_{\mu}^{ev>}, \qquad \mathscr{U}_{\mathcal{A}}^{ev>} = \bigoplus_{\mu\in Q_+} \mathscr{U}_{\mu}^{ev>},$$

因此，对所有 $\mu \in Q_+$，都有 $U_{\mu}^{ev>} = \mathscr{U}_{\mu}^{ev>}K^{-\mu}$。所以，元素 $\tilde{E}^{\vec{k}}$ 构成了 $U_{\mathcal{A}}^{ev>}$ 的一个 $\mathcal{A}$-基。证明 (b2)、(c1)、(c2) 中的第一组元素分别构成相应代数的 $\mathcal{A}$-基，方法类似。□

相对于 σ 进行基变换后，我们得到 $\mathcal{A} \to R$ （2.2）：

推论 4.9。 存在唯一的 R-值霍普夫配对

$$(\ ,\ )' \colon \dot{U}_q^{\leqslant} \times U_q^{ev\geqslant} \longrightarrow R, \tag{4.23}$$

$$(\ ,\ )' \colon U_q^{ev\leqslant} \times \dot{U}_q^{\geqslant} \longrightarrow R, \tag{4.24}$$

分别满足（*4.21*）和（*4.22*），其中 $v = q$。

对于 $\lambda \in P$，定义特征 $\hat{}\chi_\lambda \colon \dot{U}_q^0 \to R$ 如下:

$$\hat{\chi}_\lambda: \quad K^\mu \mapsto q^{(\mu,\lambda)}, \quad \binom{K_j;a}{n} \mapsto \binom{a+(\alpha_j^\vee,\lambda)}{n}_{q_j} \qquad \forall\ \mu\in 2P, n\in\mathbb{N}. \tag{4.25}$$

引理 4.10. *(a)* 特征 $\{\hat{}\chi_\lambda\}_{\lambda\in P}$ 两两不同。*(b)* *S*

假设 $\sum a_\lambda\hat{\chi}_\lambda = 0$ *for finitely* 很多 $a_\lambda \neq 0 \in R$ *then* $a_\lambda = 0$ 对所有 λ。

我们需要以下引理:

引理 4.11。 设 $q \in R$ 可逆。若 $m \in \mathbb{Z}$ 使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $q^{2m} = 1$ 和 $\binom{m}{n}_q = 0$，则 $m = 0$。

证明。 如果 q 不是单位根，则由 $q^{2m} = 1$ 可推出 $m = 0$。因此，我们可以假设 q 是 R 中的单位根。令 $\mathfrak{m}$ 为 R 的一个极大理想，并令 $\mathbb{F} = R/\mathfrak{m}$。令 $\bar{q}$ 为 q 在 $\mathbb{F}^\times$ 中的像。令 ℓ 为 $\bar{q}^2$ 在 $\mathbb{F}$ 中的序。在域 $\mathbb{F}$ 中，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，有 $\bar{q}^{2m} = 1$ 和 $\binom{m}{n}_{\bar{q}} = 0$。由于 $\bar{q}^{2m} = 1$，对于某个 $a \in \mathbb{Z}$，有 $m = \ell a$。我们分两种情况讨论:

- 若 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$，则 $a = \binom{m}{\ell}_q = 0$ 在 $\mathbb{F}$ 中，由引理 5.1(a) 可知，这意味着 $a = 0$，因此 $m = 0$;
- 若 $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p$，则 $\binom{a}{p^n} = \binom{m}{p^n\ell}_q = 0$ 在 $\mathbb{F}$ 中对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立，见下文引理 5.1(a)。由于 $p \nmid \binom{a}{p^n}$ 当 $p^n \le a < p^{n+1}$ 或 $p^n - p^{n+1} \le a < 0$时成立，因此 $a = 0$，所以 $m = 0$ 在此情形下成立。

证明到此结束。 □

引理 4.10 的证明。(a) 现在假设 $\hat{}\chi_\lambda = \hat{}\chi_\mu$ 对于 $\lambda, \mu \in P$ 成立。我们要证明 $\lambda = \mu$。由 $\hat{}\chi_\lambda(K^{2\alpha_i}) = \hat{}\chi_\mu(K^{2\alpha_i})$，我们得到 $q^{2(\lambda-\mu,\alpha_i^\vee)}{}_i = 1$。由 $\hat{}\chi_\lambda(x) = \hat{}\chi_\mu(x)$，其中 $x = \binom{K_i;(\mu}{n}, \alpha_i^\vee)$，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\binom{(\lambda-\mu,\alpha_i^\vee)}{n}_{q_i} = 0$。因此，由引理 4.11 可知，对所有 $1 \le i \le r$，$(\lambda-\mu,\alpha_i^\vee) = 0$。因此，$\lambda - \mu = 0$。

(b) 假设我们有 $\sum_{i=1}^k a_i\hat{}\chi_i = 0$，其中所有的 $a_i \neq 0$ 和 $k > 0$。我们有

$$0 = \sum_{i=1}^k a_i\hat{\chi}_i(y_1y) - \hat{\chi}_1(y_1)\sum_{i=1}^k a_i\hat{\chi}_i(y) = \sum_{i=2}^k a_i(\hat{\chi}_i(y_1) - \hat{\chi}_1(y_1))\hat{\chi}_i(y)$$

对所有 $y,\ y_1 \in \dot{U}_q^0$ 都成立。重复这一过程，我们得到 $a_k \prod_{i=1}^{k-1}(\hat{\chi}_k(y_i) - \hat{\chi}_i(y_i)) = 0$，对所有$y_1, \ldots\ldots, y_{k-1} \in \dot{U}_q^0$ 都成立。令 I 为 R 中 a_k 的湮灭子，则 $\prod_{i=1}^{k-1}(\hat{\chi}_k(y_i) - \hat{\chi}_i(y_i)) \in I$，对所有 $y_1, \ldots\ldots, y_{k-1} \in R$ 都成立。

由于 $a_k \neq 0$，存在一个包含 I 的 R 的极大理想 $\mathfrak{m}$。令 $\mathbb{F} = R/\mathfrak{m}$。考虑诱导特征 $\chi_i : \dot{U}_{\mathbb{F}}^0 \to \mathbb{F}$ of $\hat{\chi}_i$。由于根据 (a) 部分，特征 $\{\chi_i\}_{i=1}^{k-1}$ 两两不同，因此存在 $\bar{y}_1$、……、$\bar{y}_{k-1} \in \dot{U}_{\mathbb{F}}^0$，使得 $\prod_{i=1}^{k-1}(\chi_k(\bar{y}_i) - \chi_i(\bar{y}_i)) \neq 0$。因此，存在 y_1、……、$y_{k-1} \in \dot{U}_q^0$，使得 $\prod_{i=1}^{k-1}(\hat{\chi}_k(y_i) - \hat{\chi}_i(y_i)) \notin \mathfrak{m}$，从而 $\prod_{i=1}^{k-1}(\hat{\chi}_k(y_i) - \hat{\chi}_i(y_i)) \notin I$，矛盾。□

我们以如下关键观察结束本子节：

定理 4.12. *(a)* 配对 $(\ ,\ )'$ 在 (4.23)中在第二自变量上具有零核。*(b)* 配对 $(\ ,\ )'$ 在 (4.24)中在第一自变量上具有零核。

证明. 由引理 3.10和推论 4.7，可知配对 $(\ ,)'$: $U_q^{<} \times U_q^{ev>} \to R$在两个自变量上均非退化。代数 $U_q^{<}$和 $U_q^{ev>}$均通过 (3.15) 按 R分次，且每个分次分量都是有限秩自由 R-模；配对 $(\ ,\ )'$ 的次数为零 (4.9)。因此，只需证明限制配对 $(\ ,)'$: $\dot{U}_q^0 \times U_q^{ev0} \to R$在第二自变量上非退化。

由于 $\{K^\nu\}_{\nu \in 2P} \in U_q^{ev0}$是群样的，我们得到特征 χ_ν^+: $\dot{U}_q^0 \to R$，对于 $\nu \in 2P$，其定义为 $\chi_\nu^+(x) = (x, K^\nu)'$。容易看出 $\chi_\nu^+ = \hat{\chi}_{-\gamma^{-1}(\nu)}$，这里 $\gamma^{-1}(\nu) \in Q$，因为 $\nu \in 2P$。配对 $(\ ,)'$: $\dot{U}_q^0 \times U_q^{ev0} \to 0$ 中第二个变量的非退化性等价于以下命题：若对有限多个 $a_\nu \neq 0 \in R$ 有 $\sum_\nu a_\nu \chi_\nu^+ = 0$，则对所有 ν都有 $a_\nu = 0$。但后一个命题可由引理 4.10.b) 得出。

(b) 证明相同。 □

4.3. **扭曲不变配对**。

考虑由下式定义的函数 G在 $(\mathfrak{h}^4) = \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ 上：

$$G(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) := \frac{(\lambda_1, \kappa(\mu_1) + \gamma(\mu_2)) + (\lambda_2, \kappa(\mu_2) + \gamma(\mu_1)) + (\gamma(\mu_1 - \mu_2), \gamma(\mu_1 - \mu_2)) - (\lambda_1, \lambda_2)}{2} + (2\rho, \mu_2),$$

其中端同态 $\kappa,\ \gamma \in \mathrm{End}(\mathfrak{h}^*)$ 在 (4.1) 中定义。

借助 $(,\ )'$ 中的霍普夫配对 (4.6)、$\mathbf{U}(\mathfrak{g},\ P/2)$ 的三角分解 **(3.24)**，以及 Q-分次 (3.15) 在 $\mathbf{U}_\Phi^{>}$ 和$\mathbf{U}_\Phi^{<}$ 上的结构（参见引理3.6之前的段落），我们定义一个$\mathbb{Q}(v^{1/2})$-双线性配对：

$$\langle\ ,\ \rangle' : \mathbf{U}(\mathfrak{g}, P/2) \times \mathbf{U}(\mathfrak{g}, P/2) \longrightarrow \mathbb{Q}(v^{1/\mathsf{N}}) \tag{4.26}$$

via

$$\langle y_1 K^{\lambda_1} x_1, y_2 K^{\lambda_2} x_2 \rangle' := (y_1, x_2)' \cdot (y_2, x_1)' \cdot v^{G(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)}, \tag{4.27}$$

对所有 $x_1 \in \mathbf{U}_{\Phi,\ \mu_1}^{>},\ x_2 \in \mathbf{U}_{\Phi,\ \mu_2}^{>},\ y_1 \in \mathbf{U}_{\Phi,\ -\nu_1}^{<},\ y_2 \in \mathbf{U}_{\Phi,\ -\nu_2}^{<}$，其中 $\mu_1,\ \mu_2,\ \nu_1,\ \nu_2 \in Q_+,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in P/2$。

注 4.13. 为简化 v 在（4.27）中的指数，我们可以将配对（4.26）改写为：

$$\Big\langle (y_1 K^{\kappa(\nu_1)}) K^{\lambda_1} (x_1 K^{\gamma(\mu_1)}), (y_2 K^{\kappa(\nu_2)}) K^{\lambda_2} (x_2 K^{\gamma(\mu_2)}) \Big\rangle' = (y_1, x_2)' \cdot (y_2, x_1)' \cdot v^{-\frac{(\lambda_1, \lambda_2)}{2} + (2\rho, \nu_1)} \tag{4.28}$$

对所有的 $x_1 \in \mathbf{U}^{>}_{\Phi,\mu_1}, x_2 \in \mathbf{U}^{>}_{\Phi,\mu_2}, y_1 \in \mathbf{U}^{<}_{\Phi,-\nu_1}, y_2 \in \mathbf{U}^{<}_{\Phi,-\nu_2}$，满足 $\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2 \in Q^+, \lambda_1,\lambda_2 \in P/2$。这里，我们使用 $\gamma+\kappa = 2\mathrm{Id}_{\mathfrak{h}^*}$，因此 $\gamma\kappa = \kappa\gamma$，并且由于（4.2），有 $(\gamma(\mu)\ \gamma(\mu')) = (\kappa(\mu)\ \kappa(\mu'))$。公式（4.28）也阐明了我们在第 4.2 节开头选择 N 时的第一个条件。

我们注意到：

$$\langle \mathbf{U}^{<}_{\Phi,-\nu_1}\mathbf{U}^{0}_{\Phi}\mathbf{U}^{>}_{\Phi,\mu_1}, \mathbf{U}^{<}_{\Phi,-\nu_2}\mathbf{U}^{0}_{\Phi}\mathbf{U}^{>}_{\Phi,\mu_2}\rangle' = 0 \quad \text{unless} \quad \nu_1=\mu_2\,,\ \nu_2=\mu_1\,. \tag{4.29}$$

下述结果与 [J1，命题 6.20]完全类似：

命题4.14。上述配对 $\langle\ ,\ \rangle'$ 在 (4.26) 上 $\mathbf{U}(\mathfrak{g},P/2)$ 满足：

$$\langle \mathrm{ad}'(x)y,z\rangle' = \langle y,\mathrm{ad}'(S'(x))z\rangle' \qquad \text{for any} \quad x,y,z\in\mathbf{U}(\mathfrak{g},P/2)\,. \tag{4.30}$$

证明。通过采用与 [J1，§6.14–6.20].中相同的逐行推理即可得出。 □

现在让我们考察配对（4.26）相对于 $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 以及 $U^{ev}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 的性质。

命题4.15。（*4.26*）的限制给出：

$$\langle\ ,\ \rangle' \colon U^{ev}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g}) \times \dot{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{A}[v^{\pm 1/\mathsf{N}}]\,. \tag{4.31}$$

由此可得 命题 3.11′ 中的伴随作用 $\dot{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g}) \curvearrowright U^{ev}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$，配对（*4.31*）满足：

$$\langle \mathrm{ad}'(x)y,z\rangle' = \langle y,\mathrm{ad}'(S'(x))z\rangle' \qquad \text{for any} \quad x,z\in\dot{U}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})\,,\ y\in U^{ev}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})\,. \tag{4.32}$$

证明。配对（4.26）在 $U^{ev}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 上的限制 $\times U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 满足条件（4.32），这是由（4.30）得出的；并且其取值属于 $\mathcal{A}[v^{\pm 1/\mathsf{N}}]$，这是由（4.28）和引理 4.8得出的。□

由引理 *4.8* 中的配对（，）（由（4.7，4.21）和（4.7，4.22）唯一确定）、引理 $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 和 $U^{ev}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ 的三角分解、3.10、两个代数的 Q-分次（3.15）、引理 4.1以及公式（4.28），可知配对（4.31）由下式给出：

$$\left\langle (yK^{\kappa(\nu)})K^{\lambda}(xK^{\gamma(\mu)}), (\dot{y}K^{\kappa(\dot{\nu})})K^{\dot{\lambda}}\prod_{i=1}^{r}\binom{K_i;0}{s_i}(\dot{x}K^{\gamma(\dot{\mu})})\right\rangle' = (\dot{y},x)'\cdot(y,\dot{x})'\cdot v^{-\frac{(\lambda,\dot{\lambda})}{2}+(2\rho,\nu)}\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(-\frac{(\alpha_i^\vee,\lambda)}{2}\atop s_i\right)_{v_i} \tag{4.33}$$

对于任意 $x\in\dot{U}^{>}_{\mathcal{A},\dot{\mu},\mu}, x\in U^{ev\,>}_{\mathcal{A},\mu}, y\in\dot{U}^{<}_{\mathcal{A},-\dot{\nu},\nu}, y\in U^{ev\,<}_{\mathcal{A},-\nu}, \dot{\mu},\mu,\dot{\nu},\nu\in Q_+, \dot{\lambda},\lambda\in 2P$，以及 $s_i\geq 0$。特别地，我们注意到 $-(\alpha_i^\vee,\lambda)/2\in\mathbb{Z}$，因此 $\left(-\frac{(\alpha_i^\vee,\lambda)}{2}\atop s_i\right)_{v_i}$ 是定义良好的。

给定 $q\in R$ 如（2.2）前一段所述，设 q 在 N 次方根于 R中存在，并固定这样一个根 $q^{1/\mathsf{N}}$提升 σ：$\mathcal{A}\to R$ 将（2.2）提升至 $\mathcal{A}[v^{1/\mathsf{N}}]\to R$，通过 $v^{1/\mathsf{N}}\mapsto q^{1/\mathsf{N}}$。由此得到：

命题 4.16. 定义一个 R-双线性配对

$$\langle\ ,\ \rangle' \colon U^{ev}_{q}(\mathfrak{g}) \times \dot{U}_{q}(\mathfrak{g}) \longrightarrow R \tag{4.34}$$

通过（*4.33*），其中 $v^{1/\mathsf{N}}=q^{1/\mathsf{N}}$ 以及配对（。y，x）′、（y，。x）′指的是（*4.23*、*4.24*）。于是：

(*a*) 配对（*4.34*）是 ad′-不变的：

$$\langle \mathrm{ad}'(x)y,z\rangle' = \langle y,\mathrm{ad}'(S'(x))z\rangle' \qquad \text{for any} \quad x,z\in\dot{U}_{q}(\mathfrak{g})\,,\ y\in U^{ev}_{q}(\mathfrak{g})\,.$$

(*b*) 配对（*4.34*）在第一自变量上的核为零。

证明。 （a）部分显然。我们来证明（b）部分。令 $x \in U_q^{ev}(\mathfrak{g})$，则利用引理 3.10中的PBW基，

$$x = \sum_{\vec{k},\vec{r}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N} (\tilde{F}^k K^{-\kappa(\mathrm{wt}(\tilde{F}^k))}) a_{\vec{k},\vec{r}} (\tilde{E}^r K^{\gamma(\mathrm{wt}(\tilde{E}^r))}),$$

对于有限多个非零 $a_{\vec{k},\vec{r}} \in U_q^{ev0}$。假设 $\langle x, u\rangle' = 0$ 对所有 $u \in \dot{U}_q(\mathfrak{g})$ 均成立。将其应用于 $u = (\tilde{F}_{(r)} K^{-\kappa(\mathrm{wt}(\tilde{F}^{(r)}))}) u_0 (\tilde{E}^{(k)} K^{\gamma(\mathrm{wt}(\tilde{E}^{(k)}))})$，对任意 $u_0 \in \dot{U}_q^0$，并利用推论 4.7 中的计算，可得 $\langle a_{\vec{k},\vec{r}}, u_0\rangle' = 0$ 对所有 $u_0 \in \dot{U}_q^0$ 均成立。注意，由 $u_0 \mapsto \langle K^{2\lambda}, u_0\rangle'$ 定义的映射 $\dot{U}_q^0 \to R$ 对所有 $\lambda \in P$ 都等于 $\hat{\chi}_{-\lambda}$。因此，根据引理 4.10， $a_{\vec{k},\vec{r}} = 0$，从而 $x = 0$。□

5. Twisted quantum Frobenius homomorphism

我们对 ℓ 施加如下限制，见下文第5.5 节。令 $\mathcal{A}'$ 为 $\mathcal{A}$ 对由 ℓ-分圆多项式 $f_\ell \in \mathcal{A}$生成的理想取商所得。 在本节中，我们假设给定的环同态 $\sigma\colon \mathcal{A} \to R$ 可分解为环同态 $\mathcal{A}' \to R$。为定义下文某些霍普夫代数的余乘法和编织，我们还进一步假设存在 $\epsilon^{1/\mathsf{N}} \in R$，其中 N 满足 $_{12}(P/2, P/2) \subset {}^{1}{}_{\mathsf{N}}\mathbb{Z}$，并固定这样的 N $\epsilon^{1/\mathsf{N}}$。设 $\epsilon_i = \epsilon^{\mathsf{d}_i}$，其中 $\mathsf{d}_i = (\alpha_i, \alpha_i)/2 \in \{1, 2, 3\}$。定义正整数 ℓ_i 如下：

$$\ell_i := \ell / \mathrm{GCD}(2d_i, \ell). \tag{5.1}$$

更一般地，对于任意 $\alpha \in \Delta_+$，令

$$\ell_\alpha := \ell / \mathrm{GCD}((\alpha, \alpha), \ell). \tag{5.2}$$

本节回顾带有小幅修改的 [L5] 的量子 Frobenius 同态。

今后，我们将经常使用以下结果：

引理5.1. *(a)* 对任意 $a \in \mathbb{Z}$ 和 $b \in \mathbb{N}$，有 $\binom{a}{b}_{\epsilon_i} = \binom{a_0}{b_0}_{\epsilon_i} \cdot \binom{a_1}{b_1}$，其中 $a = \ell_i a_1 + a_0$ 和 $b = \ell_i b_1 + b_0$ 满足 $a_1 \in \mathbb{Z}$, $b_1 \in \mathbb{N}$，且 $0 \leq a_0, b_0 \leq \ell_i - 1$。

(b) v-多项式二项式系数 $(n\ell_i)_{v_i}! \, ((\ell_i)_{v_i}!)_n \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 的 $v = \epsilon$ 特化等于 $n!$。

(c) $(-1)^{\ell_i} \epsilon_i^{\ell_i(\ell_i+1)} = -1$.

证明。 (a) 由 [L5、引理 34.1.2(c)] 结合 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{\epsilon_i} = \epsilon_i^{b(a-b)} \binom{a}{b}_{\epsilon_i}$ 和 $\epsilon_i^{2\ell_i} = 1$即可得出。

(b) 通过对 n 使用归纳法，并将 (a) 应用于 $a = n\ell_i$， $b = \ell_i$，即可得到。(c) 我们有 $(-1)^{\ell_i} \epsilon_i^{\ell_i(\ell_i+1)} = (-1)^{\ell_i} \epsilon^{\mathsf{d}_i \ell_i (\ell_i+1)}$。若 ℓ_i 为奇数，则 $(-1)^{\ell_i} = -1$， $\epsilon^{\mathsf{d}_i \ell_i(\ell_i+1)} = 1$。若 ℓ_i 为偶数，则注意到 $\epsilon^{\mathsf{d}_i \ell_i} = -1$，并且 $(-1)^{\ell_i} = 1$。结论得证。□

5.1. 量子 Frobenius 同态的整环。

让我们回顾 Lusztig 形式 U_ϵ 的 R-子代数 $U_\epsilon^{\geq}$， $U_\epsilon^{\leq}$ 的 R-子代数 $\{\tilde{E}_i^{(n)}\}_{1\leq i\leq r}^{n\geq 1}$，$\{\tilde{F}_i^{(n)}\}_{1\leq i\leq r}^{n\geq 1}$。回顾 Lusztig-Serre 关系，参见（3.21）：

$$\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \epsilon_i^{m a_{ij}(\epsilon_{ij}-1) - m(m-1)} \tilde{E}_i^{(1-a_{ij}-m)} \tilde{E}_j \tilde{E}_i^{(m)} = 0 \qquad (i \neq j),$$

$$\sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \epsilon_i^{m a_{ij}(\epsilon_{ij}-1) - m(m-1)} \tilde{F}_i^{(1-a_{ij}-m)} \tilde{F}_j \tilde{F}_i^{(m)} = 0 \qquad (i \neq j).$$

生成元 $\tilde{E}_i^{(n)}$ 和 $\tilde{F}_j^{(n)}$ 还满足以下关系，参见（3.18）：

$$
\begin{aligned}
&\tilde{E}_i^{(p)}\tilde{F}_j^{(s)} = \epsilon^{ps(\alpha_i,\kappa(\alpha_j))}\tilde{F}_j^{(s)}\tilde{E}_i^{(p)} \qquad \text{for } i \neq j\,,\\
&\tilde{E}_i^{(p)}\tilde{F}_i^{(s)} = \sum_{c=0}^{\min(p,s)} \epsilon_i^{2ps-c^2}\tilde{F}_i^{(s-c)}\binom{K_i;2c-p-s}{c}\tilde{E}_i^{(p-c)}\,.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

5.1.1. 幂等化 *Lusztig* 形式 $U_\epsilon(\mathfrak{g},X)$。

对于任意满足 $\mathfrak{g}$ 的 $X\subseteq P$ 的格式，其定义类似于 [L5，第 23] 章，生成元为

$$
\left\{\tilde{E}_i^{(n)}1_\lambda, \tilde{F}_i^{(n)}1_\lambda \,\middle|\, 1\le i\le r, n\ge 0, \lambda\in X\right\}.
$$

我们记录 $U_\epsilon(\mathfrak{g},\ X)$ 中的拓扑余乘法：

$$
\begin{aligned}
&\Delta(\tilde{E}_i^{(r)}1_\lambda) = \sum_{c=0}^{r}\prod_{\lambda'+\lambda''=\lambda}\epsilon^{-(r-c)(\zeta_i^{>},\lambda'')}\tilde{E}_i^{(r-c)}1_{\lambda'}\otimes\tilde{E}_i^{(c)}1_{\lambda''}\,,\\
&\Delta(\tilde{F}_i^{(r)}1_\lambda) = \sum_{c=0}^{r}\prod_{\lambda'+\lambda''=\lambda}\epsilon_i^{2c(r-c)}\epsilon^{c(\zeta_i^{<},\lambda'')}\tilde{F}_i^{(c)}1_{\lambda'}\otimes\tilde{F}_i^{(r-c)}1_{\lambda''}\,,
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

参见（3.20），以及 $U_\epsilon(\mathfrak{g},X)$ 中的一些关系：

$$
\begin{aligned}
&\tilde{E}_i^{(p)}1_\lambda\tilde{F}_j^{(s)} = \epsilon^{ps(\alpha_i,\kappa(\alpha_j))}\tilde{F}_j^{(s)}1_{\lambda+s\alpha_j+p\alpha_i}\tilde{E}_i^{(p)} \qquad \text{for } i\neq j\,,\\
&\tilde{E}_i^{(p)}1_\lambda\tilde{F}_i^{(s)} = \sum_{c\ge 0}\epsilon_i^{2ps-c^2}\binom{(\lambda,\alpha_i^\vee)+s+p}{c}_{\epsilon_i}\tilde{F}_i^{(s-c)}1_{\lambda+(p+s-c)\alpha_i}\tilde{E}_i^{(p-c)}\,,
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

参见（5.3），上面的公式中 $\lambda,\lambda',\lambda''\in X$。注意，在（5.4）中，元素 $\epsilon^{1/\mathsf{N}}$ 用于定义 ϵ 的非整数次幂，例如 $\epsilon^{c(\zeta_i^{<},\lambda'')} := (\epsilon^{1/\mathsf{N}})^{\mathsf{N}c(\zeta_i^{<},\lambda'')}$。

5.2. 量子 Frobenius 同态的陪域。

5.2.1. 根数据。 考虑以下数据：

- 格 $P^* = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\omega_i^*$ 和 $Q^* = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\alpha_i^*$，其中 $\omega_i^* := \ell_i\omega_i$，且 $\alpha_i^* := \ell_i\alpha_i$。我们还设 $\omega_i^{*\vee} := \omega_i^\vee/\ell_i$ 和 $\alpha_i^{*\vee} := \alpha_i^\vee/\ell_i$。
- 新的 Cartan 矩阵，其 (i,j)-项

$$
a_{ij}^* = 2(\alpha_i^*,\alpha_j^*)/(\alpha_i^*,\alpha_i^*) = 2\ell_j(\alpha_i,\alpha_j)/\ell_i(\alpha_i,\alpha_i)\,.
\tag{5.6}
$$

- 由包含 $P^*\subset P$，从 P 上的双线性形式诱导得到的 P^* 上的双线性形式。

$(a_{ij}^*)_{i,j=1}^r$ 是半单李代数的 Cartan 矩阵这一事实可由 [L5, §2.2.4] 得出；注意，我们的 ℓ 在 [L5, 第 35] 章中是 ℓ')。若 ℓ 对所有 i 都能被 $2\mathrm{d}_i$ 整除，则对所有 i,j，都有 $a_{ij}^* = a_{ji}$，因此 (a_{ij}^*) 是 $\mathfrak{g}$ 的朗兰兹对偶 $\mathfrak{g}^\vee$ 的 Cartan 矩阵。

注 5.2. 我们注意到 $\kappa(Q^*) = \gamma(Q^*) = 2P^*$ 与引理 4.1类似。

5.2.2. $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-霍普夫代数 $\mathbf{U}^*(\mathfrak{g}, P^*/2)$。

第 2–4 节中的所有构造都可以使用上述数据进行。令 $\mathsf{d}_i^* = (\alpha_i^*,\alpha_i^*)/2 = \mathsf{d}_i\ell_i^2$, $v_i^* = v^{\mathsf{d}_i^*}$, 并分别令 $\epsilon_i^* = \epsilon^{\mathsf{d}_i^*} \in \{\pm 1\}$。令 $\mathfrak{g}^d$ 为具有 Cartan 矩阵 (a_{ij}^*)、权格 P^* 和根格 Q^*的半单李代数。图 Dyn($\mathfrak{g}^d$)（定义见第 3.3节）与 Dyn($\mathfrak{g}$) 相同。考虑关联矩阵 (ϵ_{ij})，如（3.9）所示，然后考虑以下扭曲：

$$F^* := \prod_{\lambda,\mu\in P^*} v^{\sum_{i,j}\phi_{ij}^*(\omega_i^{*\vee},\lambda)(\omega_j^{*\vee},\mu)} 1_\lambda\otimes 1_\mu = \prod_{\lambda,\mu\in P^*} v^{\sum_{i,j}\phi_{ij}(\omega_i^{\vee},\lambda)(\omega_j^{\vee},\mu)} 1_\lambda\otimes 1_\mu\,,$$

其中 $\phi_{ij}^* = \epsilon_{ij}(\alpha_i^*,\ \alpha_j^*)/2 = \ell_i\ell_j\phi_{ij}$，参见（3.7）和（3.10）。

根据上述数据，我们定义 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$-Hopf 代数 $\mathbf{U}^*(\mathfrak{g}, P^*/2)$，它由集合 $\{\hat{e}_i, \hat{f}_i, K^\mu\}_{1\le i\le r}^{\mu\in P^*/2}$ 如第 2.1节所述生成。我们还定义了 $\mathbf{U}^*(\mathfrak{g}, P^*/2)$ 上的 Lusztig 的辫群作用：

$$\begin{aligned}
&T_i^*(K^\mu) = K^{s_i^*\mu}\,, \qquad T_i^*(\hat{e}_i) = -\hat{f}_i K^{\alpha_i^*}\,, \qquad T_i^*(\hat{f}_i) = -K^{-\alpha_i^*}\hat{e}_i\,,\\
&T_i^*(\hat{e}_j) = \sum_{k=0}^{-a_{ij}^*}(-1)^k \frac{(v_i^*)^{-k}}{[-a_{ij}^*-k]_{v_i^*}![k]_{v_i^*}!}\hat{e}_i^{-a_{ij}^*-k}\hat{e}_j\hat{e}_i^k \qquad (i\neq j)\,,\\
&T_i^*(\hat{f}_j) = \sum_{k=0}^{-a_{ij}^*}(-1)^k \frac{(v_i^*)^{k}}{[-a_{ij}^*-k]_{v_i^*}![k]_{v_i^*}!}\hat{f}_i^k\hat{f}_j\hat{f}_i^{-a_{ij}^*-k} \qquad (i\neq j)\,,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

其中 $s_i^* = s_{\alpha_i^*}$。通过将 s_i^*与 s_i对应起来，$\mathfrak{g}^d$ 的魏尔群与 $\mathfrak{g}$ 的魏尔群相同，因此我们也将 $\mathfrak{g}^d$ 的魏尔群记作 W。固定与第 w_0节中相同的 W里的最长元的约化分解 2.1。于是，$\beta_k^* = s_{i_1}^*\dots s_{i_{k-1}}^*\alpha_{i_k}^* = \ell_{i_k}\beta_k (1\le k\le N)$ 为 $\mathfrak{g}^d$的所有正根 Δ_+^d 提供了一个标记。接着，我们按标准方式定义根向量 $\{\hat{e}_{\beta_k^*}, \hat{f}_{\beta_k^*}\}_{1\le k\le N}$如下：

$$\hat{e}_{\beta_k^*} = T_{i_1}^*\dots T_{i_{k-1}}^*\hat{e}_{i_k}\,, \qquad \hat{f}_{\beta_k^*} = T_{i_1}^*\dots T_{i_{k-1}}^*\hat{f}_{i_k}\,.$$

根据（3.11、3.12），对于 $1\le i\le r$，令

$$\nu_i^{*>} := -\alpha_i^* + \sum_{1\le j\le r}\phi_{ij}^*\omega_j^{*\vee} = \ell_i\nu_i^>\,, \qquad \nu_i^{*<} := \sum_{1\le j\le r}\phi_{ij}^*\omega_j^{*\vee} = \ell_i\nu_i^<\,,$$

并设

$$\tilde{e}_i := \hat{e}_i K^{\nu_i^{*>}}\,, \qquad \tilde{f}_i := K^{-\nu_i^{*<}}\hat{f}_i\,.$$

那么，代数 $\mathbf{U}^*(\mathfrak{g},\ P^*/2)$ 也由 $\{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, K^\mu\}_{1\le i\le r}^{\mu\in P^*/2}$ 在 $\mathbb{Q}(v^{1/2})$ 上生成，并满足以下关系：

$$\begin{aligned}
&K^\mu K^{\mu'} = K^{\mu+\mu'}\,, \qquad K^0 = 1\,,\\
&K^\mu\tilde{e}_iK^{-\mu} = v^{(\alpha_i^*,\mu)}\tilde{e}_i\,, \qquad K^\mu\tilde{f}_iK^{-\mu} = v^{-(\alpha_i^*,\mu)}\tilde{f}_i\,,\\
&\tilde{e}_i\tilde{f}_j = v^{(\alpha_i^*,-\zeta_j^{*<})}\tilde{f}_j\tilde{e}_i \quad (i\neq j)\,, \qquad \tilde{e}_i\tilde{f}_i - (v_i^*)^2\tilde{f}_i\tilde{e}_i = v_i^*\frac{1-(K_i^*)^{-2}}{1-(v_i^*)^{-2}}\,,\\
&\sum_{m=0}^{1-a_{ij}^*}(-1)^m(v_i^*)^{ma_{ij}^*(\epsilon_{ij}-1)-m(m-1)}\tilde{e}_i^{(1-a_{ij}^*-m)}\tilde{e}_j\tilde{e}_i^{(m)} = 0 \qquad (i\neq j)\,,\\
&\sum_{m=0}^{1-a_{ij}^*}(-1)^m(v_i^*)^{ma_{ij}^*(\epsilon_{ij}-1)-m(m-1)}\tilde{f}_i^{(1-a_{ij}^*-m)}\tilde{f}_j\tilde{f}_i^{(m)} = 0 \qquad (i\neq j)\,,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

其中 $K_i^* = K^{\alpha_i^*}$，$\tilde{e}_i^{(m)} = \tilde{e}^m/(m)_{v_i^*}$，$\tilde{f}_i^{(m)} = \tilde{f}_i^m/(m)_{v_i^*}$，并令 $\zeta_j^{*<} = \ell_j\zeta_j^<$，$\zeta_j^{*>} = \ell_j\zeta_j^>$。按照第 3 节中的扭曲构造，我们还可以在 $\mathbf{U}^*(\mathfrak{g},\ P^*/2)$ 上定义如下扭曲 Hopf 代数结构：

$$\Delta'(K^\mu) = K^\mu \otimes K^\mu\,, \qquad \Delta'(\tilde{e}_i) = 1\otimes\tilde{e}_i + \tilde{e}_i\otimes K^{-\zeta_i^{*>}}\,, \qquad \Delta'(\tilde{f}_i) = 1\otimes\tilde{f}_i + \tilde{f}_i\otimes K^{\zeta_i^{*<}}\,,$$
$$S'(K^\mu) = K^{-\mu}\,, \qquad S'(\tilde{e}_i) = -\tilde{e}_iK^{\zeta_i^{*>}}\,, \qquad S'(\tilde{f}_i) = -\tilde{f}_iK^{-\zeta_i^{*<}}\,.$$

代数 $\mathbf{U}^*(\mathfrak{g}, P^*/2)$ 通过以下方式赋予 Q^*-分次：

$$\deg(\tilde{e}_i) = \alpha_i^*\,, \qquad \deg(\tilde{f}_i) = -\alpha_i^*\,, \qquad \deg(K^\mu) = 0\,. \tag{5.9}$$

注5.3. 与第2节类似，我们将（未扭曲的）Lusztig 形式 $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^*(\mathfrak{g})$ 定义为由元素 $\{\hat{e}_i^{[n]}, \hat{f}_i^{[n]}, K^\mu\}_{1\le i\le r, n\ge 1}^{\mu\in Q^*}$ 生成的 $\mathbf{U}^*(\mathfrak{g}, P^*/2)$ 的 $\mathcal{A}$-子代数，其中 $\hat{e}_i^{[n]} := \hat{e}_i^n/[n]_{v_i^*}!$，$\hat{f}_i^{[n]} := \hat{f}_i^n/[n]_{v_i^*}!$。接着，我们也考虑特化 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^*(\mathfrak{g}) := \dot{\mathcal{U}}_{\mathcal{A}}^*(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{A}} R$。

5.2.3. *$\mathcal{A}$-Hopf* 代数 $U_{\mathcal{A}}^*(\mathfrak{g})$ 及其特化 $U_\epsilon^*(\mathfrak{g})$。

我们定义 $\mathbf{U}^*(\mathfrak{g}, P^*/2)$ 中第 $\{\tilde{e}_i^{(n)}, \tilde{f}_i^{(n)}, K^\mu\}_{1\le i\le r}^{\mu\in 2P^*}$ 3.4 节所述元素生成的子代数。它是 $\mathcal{A}$ 上的 Hopf 代数。我们记录了 $\mathfrak{g}$ 的霍普夫代数结构：

$$\Delta'(\tilde{e}_i^{(s)}) = \sum_{c=0}^s \tilde{e}_i^{(s-c)}\otimes\tilde{e}_i^{(c)}K^{-(s-c)\zeta_i^{*>}}\,, \quad S'(\tilde{e}_i^{(s)}) = (-1)^s(v_i^*)^{s(s-1)}\tilde{e}_i^{(s)}K^{s\zeta_i^{*>}}\,,$$
$$\Delta'(\tilde{f}_i^{(s)}) = \sum_{c=0}^s (v_i^*)^{2c(s-c)}\tilde{f}_i^{(c)}\otimes\tilde{f}_i^{(s-c)}K^{c\zeta_i^{*<}}\,, \quad S'(\tilde{f}_i^{(s)}) = (-1)^s(v_i^*)^{s(1-s)}\tilde{f}_i^{(s)}K^{-s\zeta_i^{*<}}\,, \tag{5.10}$$
$$\Delta'(K^\mu) = K^\mu\otimes K^\mu\,, \qquad S'(K^\mu) = K^{-\mu}\,,$$
$$\varepsilon'(\tilde{e}_i^{(s)}) = \varepsilon'(\tilde{f}_i^{(s)}) = 0\,, \qquad \varepsilon'(K^\mu) = 1\,.$$

元素 $\binom{K_i^*;\ a}{n} := \prod_{s=1}^n(1-(K_i^*)^{-2}(v_i^*)^{2(s-a-1)})\prod_{s=1}^n(1-(v_i^*)^{-2s})$ 属于 $\dot{U}_{\mathcal{A}}^*(\mathfrak{g})$。令 $\dot{U}_{\mathcal{A}}^{*<}$，$\dot{U}_{\mathcal{A}}^{*>}, \dot{U}_{\mathcal{A}}^{*0}$ 表示由 $\{\tilde{e}_i^{(s)}\}, \{\tilde{f}_i^{(s)}\}, \overline{\left\{K^\mu, \binom{K_i^*;\ a}{n}\right\}}$ 分别生成的 $\mathcal{A}$-子代数 $\dot{U}_{\mathcal{A}}^*(\mathfrak{g})$。

对于任意 $\beta^* = \sum_{i=1}^r a_i\alpha_i^* \in Q_+^*$，令

$$\nu_{\beta^*}^> := \sum_i a_i\nu_i^{*>}\,, \qquad \nu_{\beta^*}^< := \sum_i a_i\nu_i^{*<}\,,$$
$$b_{\beta^*}^> = \sum_{i<j} a_ia_j(\nu_i^{*>}, \alpha_j^*)\,, \qquad b_{\beta^*}^< = -\sum_{i<j} a_ia_j(\nu_j^{*<}, \alpha_i^*)\,, \tag{5.11}$$

参见（3.26）–（3.27。类似于（3.28），对于任意 $\beta_k^* \in \Delta_+^d$，定义：

$$\tilde{e}_{\beta_k^*} := v^{b_{\beta_k^*}^>}\hat{e}_{\beta_k^*}K^{\nu_{\beta_k^*}^>}\,, \quad \tilde{f}_{\beta_k^*} := v^{b_{\beta_k^*}^<}K^{-\nu_{\beta_k^*}^<}\tilde{f}_{\beta_k^*}\,, \quad \tilde{e}_{\beta_k^*}^{(n)} := \frac{\tilde{e}_{\beta_k^*}^n}{(n)_{v_{i_k}^*}!}\,, \quad \tilde{f}_{\beta_k^*}^{(n)} := \frac{\tilde{f}_{\beta_k^*}^n}{(n)_{v_{i_k}^*}!}\,. \tag{5.12}$$

对于任意 $\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^N$，我们还定义有序单项式：

$$\tilde{e}^{(\vec{k})} := \tilde{e}_{\beta_1^*}^{(k_1)}\dots\tilde{e}_{\beta_N^*}^{(k_N)}\,, \qquad \tilde{f}^{(\vec{k})} := \tilde{f}_{\beta_1^*}^{(k_1)}\dots\tilde{f}_{\beta_N^*}^{(k_N)}\,,$$
$$\tilde{e}^{(k)} := \tilde{e}_{\beta_N^*}^{(k_N)}\dots\tilde{e}_{\beta_1^*}^{(k_1)}\,, \qquad \tilde{f}^{(k)} := \tilde{f}_{\beta_N^*}^{(k_N)}\dots\tilde{f}_{\beta_1^*}^{(k_1)}\,.$$

我们有以下与引理3.10类似的结果：

引理 5.4。 *(a)* 子代数 $\dot{U}_{\mathcal{A}}^{*<}, \dot{U}_{\mathcal{A}}^{*>}$是 Q^*-分次的，分次方式为 (5.9)，并且它们的每个次数分量都是有限秩自由 $\mathcal{A}$-模。
(b) 乘法映射：

$$\mathrm{m}\colon \dot{U}_{\mathcal{A}}^{*<} \otimes_{\mathcal{A}} \dot{U}_{\mathcal{A}}^{*0} \otimes_{\mathcal{A}} \dot{U}_{\mathcal{A}}^{*>} \longrightarrow \dot{U}_{\mathcal{A}}^{*}(\mathfrak{g})$$

是自由 $\mathcal{A}$-模的同构。
(c) 集合 $\{\tilde{e}^{(\vec{k})}\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$, $\{\tilde{e}^{(k)}\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$ 是 $\mathcal{A}$ 的基。*(d)* 集合 $\{\tilde{f}^{(\vec{k})}\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$, $\{\tilde{f}^{(k)}\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$ 是 $\mathcal{A}$ 的基。*(e)* 子代数 $\dot{U}_{\mathcal{A}}^{*0}$ 有如下 $\mathcal{A}$ 基：

$$\left\{ K^{2\varsigma_j^*} \cdot \prod_{i=1}^{r} \left((K_i^*)^{2\left\lfloor \frac{t_i}{2} \right\rfloor} \binom{K_i^*;0}{t_i} \right) \;\middle|\; t_i \geq 0, 1 \leq j \leq k \right\}, \tag{5.13}$$

其中 $\varsigma_1^*, \ldots, \varsigma_k^* \in P^*$ 是左陪集 P^*/Q^* 的一组代表元。

由代数同态 $\sigma\colon \mathcal{A} \to R$ (2.2)，我们定义：

$$\dot{U}_{\epsilon}^{*}(\mathfrak{g}) := \dot{U}_{\mathcal{A}}^{*}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{A}} R\,.$$

令 $\tilde{e}_i^{(n)}$、$\tilde{f}_i^{(n)}$、K^{μ}、$\binom{K_i^*;\ a}{n}$ 表示 $\dot{U}_{\epsilon}^{*}(\mathfrak{g})$ 中相应的元素，并令 $\dot{U}_{\epsilon}^{*>}$、$\dot{U}_{\epsilon}^{*<}$、$\dot{U}_{\epsilon}^{*0}$ 表示 $U_{\epsilon}^{*}(\mathfrak{g})$ 的相应 R-子代数。

我们还注意到 R 中的以下等式：

$$\epsilon^{(\alpha_i^*, \kappa(\alpha_j^*))} = 1 = (\epsilon_i^*)^{m a_{ij}^* (\epsilon_{ij} - 1) - m(m-1)}\,.$$

因此，在 $U_{\epsilon}^{*}(\mathfrak{g})$ 中，(5.8) 的最后两个关系可简化如下：

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{1-a_{ij}^*} (-1)^m \tilde{e}_i^{(1-a_{ij}^*-m)} \tilde{e}_j \tilde{e}_i^{(m)} = 0 \qquad \text{for} \quad i \neq j\,, \\ &\sum_{m=0}^{1-a_{ij}^*} (-1)^m \tilde{f}_i^{(1-a_{ij}^*-m)} \tilde{f}_j \tilde{f}_i^{(m)} = 0 \qquad \text{for} \quad i \neq j\,. \end{aligned} \tag{5.14}$$

此外，生成元 $\tilde{e}_i^{(n)}$ 和 $\tilde{f}_j^{(n)}$ 还满足以下关系，参见 (5.3)：

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i^{(p)} \tilde{f}_j^{(s)} &= \epsilon^{ps(\alpha_i^*, \kappa(\alpha_j^*))} \tilde{f}_j^{(s)} \tilde{e}_i^{(p)} = \tilde{f}_j^{(s)} \tilde{e}_i^{(p)} \qquad \text{for } i \neq j\,, \\ \tilde{e}_i^{(p)} \tilde{f}_i^{(s)} &= \sum_{c=0}^{\min(p,s)} (\epsilon_i^*)^{2ps-c^2} \tilde{f}_i^{(s-c)} \binom{K_i^*;\ 2c-p-s}{c} \tilde{e}_i^{(p-c)}\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

5.2.4. 幂等化 *Lusztig* 形式 $U_{\epsilon}^{*}(\mathfrak{g}, X^*)$。
对于任意带有 $Q^* \subseteq X^* \subseteq P^*$ 的格 X^*，我们也构造生成元为以下元素的 **幂等化 Lusztig 形式** $U_{\epsilon}^{*}(\mathfrak{g}, X^*$

$$\left\{ \tilde{e}_i^{(n)} 1_{\lambda}, \tilde{f}_i^{(n)} 1_{\lambda} \;\middle|\; 1 \leq i \leq r, n \geq 0, \lambda \in X^* \right\}.$$

我们记录 $U^*_\epsilon(\mathfrak{g}, X^*)$ 中的拓扑余乘法，参见 (5.4、5.10)：

$$\begin{aligned}\Delta(\tilde{e}_i^{(r)}1_\lambda) &= \sum_{c=0}^{r}\prod_{\lambda'+\lambda''=\lambda}\epsilon^{-(r-c)(\zeta_i^{*>},\lambda'')}\tilde{e}_i^{(r-c)}1_{\lambda'}\otimes\tilde{e}_i^{(c)}1_{\lambda''}\,,\\ \Delta(\tilde{f}_i^{(r)}1_\lambda) &= \sum_{c=0}^{r}\prod_{\lambda'+\lambda''=\lambda}\epsilon^{c(\zeta_i^{*<},\lambda'')}\tilde{f}_i^{(c)}1_{\lambda'}\otimes\tilde{f}_i^{(r-c)}1_{\lambda''}\,,\end{aligned}\tag{5.16}$$

以及 中的一些关系 $U^*_\epsilon(\mathfrak{g}, X^*)$，参见 (5.5、5.15)：

$$\begin{aligned}\tilde{e}_i^{(p)}1_\lambda\tilde{f}_j^{(s)} &= \tilde{f}_j^{(s)}1_{\lambda+s\alpha_j^*+p\alpha_i^*}\tilde{e}_i^{(p)} \qquad \text{for}\ \ i\neq j\,,\\ \tilde{e}_i^{(p)}1_\lambda\tilde{f}_i^{(s)} &= \sum_{c\geq 0}(\epsilon_i^*)^{2ps-c^2}\binom{(\lambda,\alpha_i^{*\vee})+s+p}{c}_{\epsilon_i^*}\tilde{f}_i^{(s-c)}1_{\lambda+(p+s-c)\alpha_i^*}\tilde{e}_i^{(p-c)}\,,\end{aligned}\tag{5.17}$$

在上述公式中使用 λ、λ'、$\lambda''\in X^*$。

5.3. Kostant 形式 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$。

事实证明，$U^*_\epsilon(\mathfrak{g}, X^*)$ 该代数个经典对象密切相关，即万有包络代数的 Kostant 形式。

回顾前几个子节中的半单李代数 $\mathfrak{g}^d$，其 Cartan 矩阵为 (5.6)，权格为P^*，根格为 Q^*。设 $\{e_i, f_i, h_i\}_{1\leq i\leq r}$ 为 $\mathfrak{g}^d$的 Chevalley 生成元。按照 [Ko1], ，**Kostant 形式** $\dot{U}_\mathbb{Z}(\mathfrak{g}^d)$ 是包络代数 $\mathbb{Z}$上的 $U_\mathbb{Q}(\mathfrak{g}^d)$ 之 $\mathbb{Q}$ 子代数，由以下元素生成：

$$e_i^{(n)} := \frac{e_i^n}{n!}\,,\qquad f_i^{(n)} := \frac{f_i^n}{n!}\,,\qquad \binom{h_i;a}{n} := \frac{(h_i+a)(h_i+a-1)\cdots(h_i+a-n+1)}{n!}\,.$$

令 $\dot{U}^>_\mathbb{Z}(\mathfrak{g}^d)$ $\dot{U}^<_\mathbb{Z}(\mathfrak{g}^d)$ $\dot{U}^0_\mathbb{Z}(\mathfrak{g}^d)$ 分别为由元素 $\{e_i^{(n)}\}$、$\{f_i^{(n)}\}$、$\left\{\binom{h_i;a}{n}\right\}$ 生成的 $\mathbb{Z}$-子代数，它们是 $\dot{U}_\mathbb{Q}(\mathfrak{g}^d)$ 的子代数。在 $U_\mathbb{Q}(\mathfrak{g}^d)$ 上有标准的辫群作用，定义如下：

$$\begin{aligned}&T_i^*(h_j) = s_i^*(h_j)\,,\qquad T_i^*(e_i) = -f_i\,,\qquad T_i^*(f_i) = -e_i\,,\\ &T_i^*(e_j) = \sum_{k=0}^{-a_{ij}^*}(-1)^k e_i^{(-a_{ij}^*-k)}e_j e_i^{(k)}\,,\qquad T_i^*(f_j) = \sum_{k=0}^{-a_{ij}^*}(-1)^k f_i^{(k)}f_j f^{(-a_{ij}^*-k)}\qquad (i\neq j)\,.\end{aligned}$$

借助 $\mathfrak{g}^d$ 的魏尔群中最长元 $w_0 = s_{i_1}^*\ldots s_{i_N}^*$ 的约化分解及由此产生的对所有 Δ_+^d 的标记 β_k^*，以标准方式定义 $\mathfrak{g}^d$ 的根向量：

$$e_{\beta_k^*} := T_{i_1}^*\ldots T_{i_{k-1}}^* e_{i_k}\,,\qquad f_{\beta_k^*} := T_{i_1}^*\ldots T_{i_{k-1}}^* f_{i_k}\,.$$

对于任意 $\vec{k}\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}$，我们定义

$$e^{(\vec{k})} = e_{\beta_1^*}^{(k_1)}\ldots e_{\beta_N^*}^{(k_N)}\,,\quad e^{(k)} := e_{\beta_N^*}^{(k_N)}\ldots e_{\beta_1^*}^{(k_1)}\,,\quad f^{(\vec{k})} := f_{\beta_1^*}^{(k_1)}\ldots f_{\beta_N^*}^{(k_N)}\,,\quad f^{(k)} := f_{\beta_N^*}^{(k_N)}\ldots f_{\beta_1^*}^{(k_1)}\,.$$

此构造给出了 $\mathfrak{g}^d$ 中所用的 Chevalley 型基 [Ko1] （证明留给感兴趣的读者）。然后我们可以应用 [Ko1 定理 1] 得到：

引理 5.5. *(a)* 乘法映射：

$$\mathrm{m}\colon \dot{U}^<_\mathbb{Z}(\mathfrak{g}^d)\otimes_\mathbb{Z}\dot{U}^0_\mathbb{Z}(\mathfrak{g}^d)\otimes_\mathbb{Z}\dot{U}^>_\mathbb{Z}(\mathfrak{g}^d)\longrightarrow\dot{U}_\mathbb{Z}(\mathfrak{g}^d)$$

是自由 $\mathbb{Z}$-模的同构。

(b) 集合 $\{e^{(\vec{k})}\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}}$、$\{e^{(k)}\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}}$ 是 $\dot{U}^>_\mathbb{Z}(\mathfrak{g}^d)$ 的 $\mathbb{Z}$ 基。

(c) The sets $\{f^{(\vec{k})}\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$, $\{f^{(k)}\}_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N}$ *are* $\mathbb{Z}$*-bases of* $\dot{U}_{\mathbb{Z}}^{<}(\mathfrak{g}^d)$.

(d) The set $\left\{\prod_{i=1}^{r}\binom{h_i;0}{t_i}\,\middle|\,t_i\geq 0\right\}$ *is a* $\mathbb{Z}$*-basis of* $\dot{U}_{\mathbb{Z}}^{0}(\mathfrak{g}^d)$.

对于任意交换环 R，我们通过以下方式定义**Kostant 形式** $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$:

$$\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d) := \dot{U}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}^d)\otimes_{\mathbb{Z}} R\,.$$

令 $\dot{U}_R^{>}(\mathfrak{g}^d)$ $\dot{U}_R^{0}(\mathfrak{g}^d)$ $\dot{U}_R^{<}(\mathfrak{g}^d)$ 为相应的 R-子代数，它们属于 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$。下面的引理联系了 $\dot{U}_\epsilon^{*}(\mathfrak{g})$ 和 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 的正、负子代数，参见 [L5, §33.2]。

引理 5.6。 *(a)* 存在唯一的 R-代数同构 $\mathcal{F}^{>}$: $\dot{U}_\epsilon^{*>}\to\dot{U}_R^{>}(\mathfrak{g}^d)$ 满足$\mathcal{F}^{>}(\tilde{e}_i^{(n)})=e_i^{(n)}$ 对所有 $n\geq 1$、$1\leq i\leq r$均成立。

(b) 存在唯一的 R-代数同构 $\mathcal{F}^{<}$: $\dot{U}_\epsilon^{*<}\to\dot{U}_R^{<}(\mathfrak{g}^d)$ 满足 $\mathcal{F}^{<}(\tilde{f}_{(n)\,i})=f_i^{(n)}$对所有 $n\geq 1$、$1\leq i\leq r$均成立。

证明。 我们用 $\dot{U}_\epsilon^{*>}$代替 $\dot{U}_R^{*>}$，以便标明基环 R。

(a) 唯一性显然。为证明存在性，我们注意到，一般情形可由情形 $R=\mathcal{A}'$ 经基变换得到。由于 $\mathcal{A}'$ 是一个整环，它嵌入其分式域 $\mathcal{K}$中。因此，代数 $\dot{U}_{\mathcal{A}'}^{*>}$ 嵌入 $\dot{U}_{\mathcal{K}}^{*>}$中，成为由 $\{\tilde{e}_i^{(n)}\}$生成的 $\mathcal{A}'$-子代数；见引理 5.4。同样，代数 $\dot{U}_{\mathcal{A}'}^{>}(\mathfrak{g}^d)$ 嵌入 $\dot{U}_{\mathcal{K}}^{>}(\mathfrak{g}^d)$ 中，成为由 $\{e_i^{(n)}\}$ 生成的 $\mathcal{A}'$-子代数；见引理 5.5。因此，情形 $R=\mathcal{A}'$ 中所述同构的存在性，可由情形 $R=\mathcal{K}$中的存在性推出。

由于 $\mathcal{K}$ 是特征为 0 的域，代数 $\dot{U}_{\mathcal{K}}^{>}(\mathfrak{g}^d)$ 由元素 e_i 生成，并满足通常的 Serre 关系。因此，根据 (5.14)，存在一个 $\mathcal{K}$-代数同态 $(\mathcal{F}^{>})^{-1}$: $\dot{U}_{\mathcal{K}}^{>}(\mathfrak{g}^d)\to\dot{U}_{\mathcal{K}}^{*>}$，其定义为 $(\mathcal{F}^{>})^{-1}(e_i)=\tilde{e}_i$，从而对于所有 $n\geq 1$,$1\leq i\leq r$，都有 $(\mathcal{F}^{>})^{-1}(e_i^{(n)})=\tilde{e}_i^{(n)}$。因此，$(\mathcal{F}^{>})^{-1}$ 是满射。此外，$(\mathcal{F}^{>})^{-1}$ 保持两个代数上的 Q^*-分次。根据引理 5.4 和 5.5，对于任意 $\mu\in Q_+^*$，有限维 $\mathcal{K}$-向量空间 $\dot{U}_{\mathcal{K}}^{*>}{}_{,\mu}$ 以及$\dot{U}_{\mathcal{K}}^{>}{}_{,\mu}(\mathfrak{g}^d)$具有相同的维数。因此，$(\mathcal{F}^{>})^{-1}$ 是$\mathcal{K}$-代数的同构。其逆映射就是对 $R=\mathcal{K}$所声称的同构 $\mathcal{F}^{>}$。(b) 证明相同。

□

推论 5.7。 若 R 是特征为0的域，则代数 $U_\epsilon^{*>}$是由 $\{\tilde{e}_i\}_{1\leq i\leq r}$生成、满足关系 $\sum_{m=0}^{1-a_{ij}^*}(-1)^m\tilde{e}^{(1-a_{ij}^*-m)}{}_i\,\tilde{e}_j\tilde{e}_i^{(m)}=0$ 的代数，其中 $i\neq j$；而代数 $\dot{U}_\epsilon^{*<}$是由 $\{\tilde{f}_i\}_{1\leq i\leq r}$ 生成、满足关系 $\sum_{m=0}^{1-a_{ij}^*}(-1)^m\tilde{f}^{(1-a_{ij}^*-m)}{}_i\,\tilde{f}_j\tilde{f}_i^{(m)}=0$ 的代数，其中 $i\neq j$。

5.4. **完备形式** $U_\epsilon(\mathfrak{g},P)$ $U_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)$ $U_\epsilon^*(\mathfrak{g},Q^*)$。

我们考虑以下完备化 $\widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g},\ P)$

$$\tilde{U}_\epsilon(\mathfrak{g},P) := \bigoplus_{\mu,\lambda\in Q_+}\dot{U}_{-\mu}^{<}\otimes_R\prod_{\nu\in P}R1_\nu\otimes_R\dot{U}_\lambda^{>}.$$

$\tilde{U}_\epsilon(\mathfrak{g},\ P)$ 的拓扑来自因子 $\prod_{\nu\in P}R1_\nu$，具体如下：$\prod R1_\nu$ 中的零的邻域包含元素 $\prod a_\nu 1_\nu$，满足 $a_\nu=0$，其中 ν 属于实向量空间 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 中以原点为中心的某个足够大的球 $\mathcal{B}$，且该球包含 P。注意，$\widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g},\ P)$ 上的拓扑霍普夫代数结构$\tilde{}$延拓为 $\tilde{U}_\epsilon(\mathfrak{g},\ P)$ 上的拓扑霍普夫代数结构。

类似地，我们考虑(为以下对偶)完备化的拓扑霍普夫代数 $\widehat{}$

$$\tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*) := \bigoplus_{\mu,\lambda\in Q_+^*}\dot{U}_{-\mu}^{*<}\otimes_R\prod_{\nu\in P^*}R1_\nu\otimes_R\dot{U}_\lambda^{*>},\quad \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},Q^*) := \bigoplus_{\mu,\lambda\in Q_+^*}\dot{U}_{-\mu}^{*<}\otimes_R\prod_{\nu\in Q^*}R1_\nu\otimes_R\dot{U}_\lambda^{*>}.$$

存在自然的代数同态：

$$\psi_1 : \dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \tilde{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P) \qquad \text{and} \qquad \psi_2 : \widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P) \to \tilde{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P). \tag{5.18}$$

映射 ψ_2 是自然嵌入。映射 ψ 由 $\psi_1(yu_0x) = y(\prod_\nu \chi_\nu(u_0)1_\nu)x$对 $y \in \dot{U}_\epsilon^<, x \in \dot{U}_\epsilon^>$和 $u_0 \in \dot{U}_\epsilon^0$ 定义。

引理 5.8. 两者 ψ_1 和 ψ_2 都是 *Hopf* 代数同态。由 ψ_1 和 ψ_2从 (5.18) 得到的像是陪域中的稠密子代数。

˜证明。 ψ_2的像显然在 $U_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$ 中稠密。要证明 ψ_1的像在 $\tilde{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$ 中稠密，只需证明自然映射 ψ_1^0: $\dot{U}_\epsilon^0(\mathfrak{g}) \to \prod_\nu R1_\nu$的像是稠密的。为此，只需证明对于任意一个以原点为中心的球 $\mathcal{B}$，映射$\dot{U}_\epsilon^0(\mathfrak{g}) \to \prod_{\nu\in\mathcal{B}\cap P} R1_\nu$是满射。由于 $\mathcal{B} \cap P$的基数有限，只需证明对于任意有限集 $S \subset P$，映射 ψ_1^S: $\dot{U}_\epsilon^0(\mathfrak{g}) \to \prod_{\nu\in S} R1_\nu$是满射。最后一个结论可由情形 $R = \mathcal{A}_N$: $= \mathcal{A}[v^{\pm 1/\mathsf{N}}]$ 经基变换推出，而基变换又将由 R 是域的情形推导得出。

步骤 *1*: $R = \mathbb{F}$ 是一个域。按照（4.25），考虑代数同态 $\hat{}\chi_\nu$: $\dot{U}_\epsilon^0(\mathfrak{g}) \to \mathbb{F}$ 定义如下：

$$\hat{\chi}_\nu : \quad K^\lambda \mapsto \epsilon^{(\lambda,\nu)}, \quad \begin{pmatrix} K_i; 0 \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\alpha_i^\vee, \nu) \\ t \end{pmatrix}_{\epsilon_i}. \tag{5.19}$$

特征 $\{\hat{}\chi_\nu\}_{\nu\in S}$是 $\dot{U}_\epsilon^0(\mathfrak{g})$ 的特征线性无关，参见命题 4.16(b) 的证明。映射 $\dot{U}_\epsilon^0(\mathfrak{g})$ $\to \prod_{\nu\in\mathcal{B}\cap P} R1_\nu$将元素 a映为 $(\hat{}\chi_\nu(a))_{\nu\in S}$从而完成证明。

步骤 *2*: $R = \mathcal{A}_{\mathsf{N}\mathfrak{p}}$。对于 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}}$的极大理想 $\mathfrak{p}$，令 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}\mathfrak{p}}$ 和 $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ 分别为 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}}$的局部化和剩余域。若对 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}}$ 的所有极大理想 $\mathfrak{p}$，映射 $\psi^S_{1,\mathcal{A}_{\mathsf{N}\mathfrak{p}}} : \dot{U}^0_{\mathcal{A}_{\mathsf{N}\mathfrak{p}}}(\mathfrak{g}) \to \prod_{\nu\in S} \mathcal{A}_{\mathsf{N}\mathfrak{p}} 1_\nu$均为满射，则映射 ψ_1^S为满射，因为其余核是一个有限生成模，在任意极大理想处局部化后都被湮灭，而这样的模必为 0。由于 $\prod_{\nu\in S} \mathcal{A}_{\mathsf{N}\mathfrak{p}} 1_\nu$ 是一个有限生成的 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}\mathfrak{p}}$-模，根据中山引理，$\psi^S_{1,\mathcal{A}_{\mathsf{N}\mathfrak{p}}}$ 为满射，当且仅当映射 $\psi^S_{1,\mathbb{F}_\mathfrak{p}}$: $\dot{U}^0_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}(\mathfrak{g}) \to \prod_{\nu\in S} \mathbb{F}_\mathfrak{p} 1_\nu$ 为满射。后者由步骤 1 得出。□

注记 5.9. 类似地，我们有 Hopf 代数同态

$$\psi_1^* : \dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}) \to \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*), \qquad \psi_2^* : \widehat{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*) \to \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*),$$

其陪域中的像是稠密的。此外，ψ_2^* 是一个包含映射。

引理 5.10. *(a)* 我们有以下代数同态：

$$\phi_P : \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d) \to \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*), \qquad \phi_Q : \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d) \to \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, Q^*), \tag{5.20}$$

定义为

$$\phi_X(e_i^{(n)}) = (\epsilon_i^*)^n \tilde{e}_i^{(n)} \prod_{\nu\in X^*} 1_\nu, \quad \phi_X(f_i^{(n)}) = \tilde{f}_i^{(n)} \prod_{\nu\in X^*} 1_\nu, \quad \phi_X\left(\begin{pmatrix} h_i; 0 \\ t_i \end{pmatrix}\right) = \prod_{\nu\in X^*} \begin{pmatrix} (\nu, \alpha_i^{*\vee}) \\ t_i \end{pmatrix} 1_\nu,$$

其中 $1 \le i \le r$、$t_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 和 X 或为 P，或为 Q。

(b) ϕ_P、ϕ_Q 是具有稠密像的包含映射。

证明。(a) 一般情形可由 $R = \mathcal{A}'$ 时的情形通过基变换得到。由于 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 和 $\tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},\ X^*)$ 在整环 $R = \mathcal{A}'$ 上无挠，$R = \mathcal{A}'$ 时的情形可由 $R = \mathcal{K}$ 时的情形推出，其中 $R = \mathcal{K}$ 是 $\mathcal{A}'$ 的分式域。

当 $R=\mathcal{K}$ 时，结合（5.17）和引理 5.6，利用包络代数 $\dot{U}_{\mathcal{K}}(\mathfrak{g}^d)$ 的 Serre 表示可得代数同态的存在性。

(b) 只需证明 $\phi_X^0\colon \dot{U}_R^0(\mathfrak{g}^d)\to\prod_{\nu\in X^*}R1_\nu$ 是单射。令 T_X^d 为格为 X^* 的环面，即 $R[T_X^d]=\oplus_{\nu\in X^*}R\chi_\nu$，因此，$\prod_{\nu\in X^*}R1_\nu=\mathrm{Hom}_R(R[T_X^d],\ R)$。另一方面，$\dot{U}_R^0(\mathfrak{g}^d)$ 是 Dist(T_X^d)，即 T_X^d 在单位元处的分布代数。于是可见，映射 ϕ_X^0 可由以下配对得到

$$\mathrm{Dist}(T_X^d)\times R[T_X^d]\to R.$$

此配对在第一自变量上非退化，因此 ϕ_X^0 是单射。稠密像的证明与引理 5.8 相同。□

注 5.11。 虽然 ϕ_Q 是霍普夫代数同态，但 ϕ_P 不是，例如考察余乘法即可看出。

$$\tilde{\Delta}(\tilde{e}_i\prod_{\nu\in P^*}1_\nu)=\tilde{e}_i\prod_{\nu\in P^*}1_\nu\otimes\prod_{\nu\in P^*}\epsilon^{(-\zeta_i^{*>},\nu)}1_\nu+\prod_{\nu\in P^*}1_\nu\otimes\tilde{e}_i\prod_{\nu\in P^*}1_\nu.$$

5.5. **量子 Frobenius 同态**。

根据 [L5，第 35.1.2] 节，设对于任意满足 $i\neq j$ $\ell_j\geq 2$ 的 $\ell_i\geq 1-a_{ij}$，均有。对于每种简单李代数，下表列出了 ℓ 的排除值：

A	B	C	D	E	F			G
∅	4	4	∅	∅	4			3, 4, 6

我们有如下 [L5 定理 35.1.9] 的类似结果：

命题 5.12。 存在唯一的 R-代数同态（扭量子 *Frobenius*）

$$\tilde{\mathrm{Fr}}\colon \widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g},P)\longrightarrow\widehat{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*) \tag{5.21}$$

使得

- $\tilde{\mathrm{Fr}}(1_\lambda)$ 等于 1_λ 当 $\lambda\in P^*$ 时，否则为零，
- $\tilde{\mathrm{Fr}}(\tilde{E}^{(n)}{}_i\ 1_\lambda)$ 等于 $\tilde{e}^{(n/\ell_i)}{}_i\ 1_\lambda$ 当 $\lambda\in P^*$ 且 n 能被 ℓ_i 整除时，否则为零；
- $\tilde{\mathrm{Fr}}(\tilde{F}^{(n)}{}_i\ 1_\lambda)$ 等于 $\tilde{f}^{(n/\ell_i)}{}_i\ 1_\lambda$ 当 $\lambda\in P^*$ 且 n 能被 ℓ_i 整除时，否则为零。

此外，这个同态是满射，并且与余乘法相容。

只有在讨论余乘法时，才需要假设存在 $\epsilon^{1/\mathsf{N}}$ 于 R 中。命题 5.12 的证明与 [L5 的定理 35.1.9] 类似。我们从以下结果开始：

命题 5.13。 ***(a)*** 存在唯一的 R-代数同态 $\widehat{\mathrm{Fr}}^<\colon \dot{U}_\epsilon^{*<}\to\dot{U}_\epsilon^<$，满足 $\widehat{\mathrm{Fr}}^<(\tilde{f}_i^{(n)})=\tilde{F}_{(n\ell_i)\,i}$ 对所有 i 和 $n\geq 1$ 均成立。同样，存在唯一的 R-代数同态 $\widehat{\mathrm{Fr}}^>\colon \dot{U}_\epsilon^{*>}\to\dot{U}_\epsilon^>$，满足 $\widehat{\mathrm{Fr}}^<(\tilde{e}_i^{(n)})=\tilde{E}^{(n\ell_i)}{}_i$ 对所有 i 和 $n\geq 1$ 均成立。

(b) 存在唯一的 R-代数同态：

$$\tilde{\mathrm{Fr}}^>\colon \dot{U}_\epsilon^>\longrightarrow\dot{U}_\epsilon^{*>} \tag{5.22}$$

满足 $\tilde{\mathrm{Fr}}^>(\tilde{E}_i^{(n)})$ 等于 $\tilde{e}^{(n/\ell_i)}{}_i$，如果 n 能被 ℓ_i 整除；否则等于零。同样，存在唯一的 R-代数同态

$$\tilde{\mathrm{Fr}}^<\colon \dot{U}_\epsilon^<\longrightarrow\dot{U}_\epsilon^{*<} \tag{5.23}$$

使得 $\tilde{\mathrm{Fr}}^<(\tilde{F}_{(n)\,i})$ 等于 $\tilde{f}_i^{(n/\ell_i)}$，当 n 可被 ℓ_i 整除时；否则等于零。

证明。 证明与 [L5] 中的证明相同。只需考虑以下情形： $R=\mathcal{K}$，即 $\mathcal{A}'$ 的分式域。

(a)$U^{\leq}$唯推性显然以及性单位使用以下生成元与关系得到

$$\sum_{n+m=1-a_{ij}^*}(-1)^m\tilde{F}_i^{(\ell_i n)}\tilde{F}_j^{(\ell_j)}\tilde{F}_i^{(\ell_i m)}=0.$$

该单位元由公式 [L5、 §35.2.3（b）]推导得到。
（b）我们只证明（5.23）。我们使用以下引理，它是定理 35。4。2(b) 在 [L5] 中结合 Cartan 扭曲后的一个版本

引理5.14。 令 $\mathfrak{f}$ 为由 F_i 生成、满足 $\ell_i\geq 2$的 $\mathcal{K}$- 子代数。存在一个 $\mathcal{K}$- 向量空间同构 $\mathfrak{F}$： $\dot{U}_\epsilon^{*<}\otimes\tilde{\mathfrak{f}}\to\dot{U}_\epsilon^{<}$，其定义为 $x\otimes y\mapsto \widehat{\mathrm{Fr}}^{<}(x)y$。

利用这个引理，接下来完全按照 [L5，定理35.1。7]的证明进行，从而完成证明。 □

注 5.15。首先，我们注意到复合 $\tilde{\mathrm{Fr}}^{>}\circ\widehat{\mathrm{Fr}}^{>}$ 和 $\tilde{\mathrm{Fr}}^{<}\circ\widehat{\mathrm{Fr}}^{<}$ 都是恒等映射。其次，我们断言，同态 $\tilde{\mathrm{Fr}}^{>}\colon \dot{U}_\epsilon^{>}\to\dot{U}_\epsilon^{*>}$（来自式（5.22））的核是由 $\{\tilde{E}_i^{(n)}\,|\,\ell_i\geq 2,\ell_i\nmid n\}$生成的双边理想；同样，同态$\tilde{\mathrm{Fr}}^{<}\colon \dot{U}_\epsilon^{<}\to\dot{U}_\epsilon^{*<}$（来自式（5.23））的核是由 $\{\tilde{F}_{(n)_i}\,|\,\ell_i\geq 2,\ell_i\nmid n\}$ 生成的双边理想。下面来确定映射 $\tilde{\mathrm{Fr}}^{>}$的核。只需证明，对于以下形式的元素，若 $\tilde{\mathrm{Fr}}^{>}(x)=0$，则 $x=0$： $x=\sum a_{n_1,\dots n_m}\tilde{E}^{(n_1)}_{i_1}\dots\tilde{E}^{(n_m)}_{i_m}$，其中 $\ell_{i_j}\mid n_j$且 $a_{n_1,\dots n_m}\in R$。对于这样的 x，考虑 $\tilde{x}=\sum a_{n_1,\dots n_m}\tilde{e}^{(n_1/\ell_{i_1})}_{i_1}\dots\tilde{e}^{(n_m/\ell_{i_m})}_{i_m}$，于是 $x=\widehat{\mathrm{Fr}}^{>}(\tilde{x})$ 且 $\tilde{x}=\tilde{\mathrm{Fr}}^{>}(x)$。因此，若 $\tilde{\mathrm{Fr}}(x)=0$，则 $x=0$。

命题的证明 *5.12*。 在 [L5], 定理 35.1.9 的证明基于第 31.1.3 节中确立的幂等化版本的生成元与关系表示。由于所有 Cartan 元素都是可逆的，类似的表示在我们的 Cartan 扭曲设置中也成立。我们需要检验的唯一非平凡关系是 $\tilde{E}_i^{(n)}$ 与 $\tilde{F}_j^{(m)}$ 之间的关系，但通过比较公式（5.5）和（5.17）即可直接得出。容易验证，$\tilde{\mathrm{Fr}}$同态 Fr 与（5.4）和（5.16）中的余乘法相容。 □

注记 5.16。我们有 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 在 $\widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g},P)$ 上经由 ad'_l 给出的自然伴随作用。通过霍普夫态射 $\tilde{\mathrm{Fr}}:\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g},P)\to\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)$，霍普夫代数 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 自然地经由 ad'_l 在 $\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)$ 上作用如下：$\mathrm{ad}'_l(x)b=\tilde{\mathrm{Fr}}(\mathrm{ad}'_l(x)b')$，其中 $b\in\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)$，且 $b'\in\widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g},P)$ 满足 $\tilde{\mathrm{Fr}}(b')=b$。

回顾子节 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 中的 Kostant 形式 5.3。于是，我们得到从原始 Lusztig 形式出发的如下扭曲 Frobenius 同态：

命题 5.17。 存在唯一的 *R-Hopf* 代数同态（扭曲量子 *Frobenius*）

$$\check{\mathrm{Fr}}\colon\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})\longrightarrow\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$$

使得

$$\tilde{E}_i^{(n)}\mapsto(\epsilon_i^*)^{-n/\ell_i}e_i^{(n/\ell_i)},\quad \tilde{F}_i^{(n)}\mapsto f_i^{(n/\ell_i)},\quad K^\lambda\mapsto 1,$$

其中 $\lambda\in 2P$ 且我们设定 $e^{(n/\ell_i)}_i=f^{(n/\ell_i)}_i=0$，如果 ℓ_i 不能整除 n。

˜ ˜证明。回顾第 $U_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$ 和 $U_\epsilon^*(\mathfrak{g}, Q^*)$ 节中的拓扑霍普夫代数5.4。命题 5.12 中的霍普夫代数同态给出了一个（拓扑）霍普夫代数同态:

$$\check{\mathrm{Fr}} : \tilde{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P) \to \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, Q^*). \tag{5.24}$$

另一方面，我们有以下霍普夫代数态射:

$$\psi_1 : \dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \tilde{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P), \qquad \phi_Q : \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d) \to \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, Q^*),$$

其中 ϕ_Q 是一个包含，见第5.4节。此外， $\psi_1(\tilde{E}_i^{(n)})$ $\psi_1(\tilde{F}_i^{(n)})$、$\psi_1(K^{2\lambda})$ 在 (5.24) 下的像包含于 $\phi_Q(\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d))$[5]。因此，霍普夫代数同态

$$\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\psi_1} \tilde{U}(\mathfrak{g}, P) \xrightarrow{\check{\mathrm{Fr}}} \tilde{U}(\mathfrak{g}, Q^*)$$

从而得到所需的霍普夫代数同态 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$。 □

引理 5.18。˘Fr: $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 的核是由下列元素生成的双边理想

$$\{K^\lambda - 1 \,|\, \lambda \in 2P\} \cup \{\tilde{E}_i^{(n)}, \tilde{F}_i^{(n)} \,|\, \ell_i \geq 2, \ell_i \nmid n\}. \tag{5.25}$$

证明。我们有

$$\check{\mathrm{Fr}} \circ \psi_1 \left(\binom{K_i; 0}{t_i} \right) = \prod_{\nu \in Q^*} \binom{(\nu, \alpha_i^\vee)}{t_i}_{\epsilon_i} 1_\nu = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell_i \nmid t_i \\ \prod_{\nu \in Q^*} \binom{(\nu, \alpha_i^{*\vee})}{t_i/\ell_i} 1_\nu = \phi_Q \left(\binom{h_i; 0}{t_i/\ell_i} \right), & \text{if } \ell_i \mid t_i \end{cases}$$

因此,

$$\phi \left(\binom{K_i; 0}{t_i} \right) = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell_i \nmid t_i \\ \binom{h_i; 0}{t_i/\ell_i} & \text{if } \ell_i \mid t_i \end{cases}.$$

步骤 *1*: 我们将证明，Ker(˘Fr) 是由以下元素生成的双边理想

$$\{K^\lambda - 1 | \lambda \in 2P\} \cup \left\{ \binom{K_i; 0}{t_i} | \ell_i \nmid t_i \right\} \cup \{\tilde{E}_i^{(n)}, \tilde{F}_i^{(n)} \,|\, \ell_i \geq 2, \ell_i \nmid n\}.$$

映射 ˘Fr 与三角分解相容，也就是说 $\check{\mathrm{Fr}} \cong \check{\mathrm{Fr}}^< \otimes \check{\mathrm{Fr}}^0 \otimes \check{\mathrm{Fr}}^>$ ，其中

$$\check{\mathrm{Fr}}^> : \dot{U}_\epsilon^> \to \dot{U}_R^>(\mathfrak{g}^d), \qquad \check{\mathrm{Fr}}^0 : \dot{U}_\epsilon^0 \to \dot{U}_R^0(\mathfrak{g}^d), \qquad \check{\mathrm{Fr}}^< : \dot{U}_\epsilon^< \to \dot{U}_R^<(\mathfrak{g}^d).$$

根据引理 5.15，Ker(˘Fr$^>$) 是由 $\{\tilde{E}_i^{(n)} | \ell_i \geq 2, \ell_i \nmid n\}$ 生成的双边理想；与此同时，ker(˘Fr$^<$) 是由 $\{\tilde{F}_i^{(n)} | \ell_i \geq 2, \ell_i \nmid n\}$ 生成的双边理想。另一方面，利用引理 3.10(c3) 中的 PBW 基，可以看出 Ker(˘Fr^0) 是由以下元素生成的双边理想

$$\{K^\lambda - 1 | \lambda \in 2P\} \cup \left\{ \binom{K_i; 0}{t_i} | \ell_i \nmid t_i \right\}.$$

˘Fr$^>$、˘Fr$^<$、˘Fr^0 都是满射。所有 $\dot{U}_R^\geq(\mathfrak{g}^d)$ $\dot{U}_R^0(\mathfrak{g}^d)$ $\dot{U}_R^\geq(\mathfrak{g}^d)$ 都是自由 R-模。因此，˘Fr$^<$、˘Fr^0, ˘Fr$^>$ 是 R-模的分裂态射。因此，˘Fr 与三角分解的相容性意味着

$$\mathrm{Ker}(\check{\mathrm{Fr}}) = \mathrm{Ker}(\check{\mathrm{Fr}}^<) \otimes \check{\mathrm{Fr}}^0 \otimes \check{\mathrm{Fr}}^> + \check{\mathrm{Fr}}^< \otimes \mathrm{Ker}(\check{\mathrm{Fr}}^0) \otimes \check{\mathrm{Fr}}^> + \check{\mathrm{Fr}}^< \otimes \check{\mathrm{Fr}}^0 \otimes \mathrm{Ker}(\check{\mathrm{Fr}}^>).$$

第一步至此完成。

[5]我们想指出，˘Fr$(\psi_1(K^{2\lambda}) = \prod_{\nu \in Q^*} 1_\nu$仅在 $2\lambda \in 2P$ 和 ν 遍历 Q^*时才会发生，这也为我们论证中的格限制提供了另一种依据。

步骤 2：如果我们能够证明 $\binom{K_i;-c}{t_i}$、$\ell_i \nmid t_i$、$\ell_i \mid c \geq 0$ 属于由 $\mathcal{J}$（5.25）生成的双边理想，则引理得证。我们有

$$\binom{K_i;-c}{t} = \sum_{0\leq k\leq t} (-1)^k \epsilon_i^{2t(c+k)-k(k+1)} \binom{c+k-1}{k}_i \binom{K_i;0}{t-k} \quad (t\geq 0, c\geq 1) \tag{5.26}$$

由于 $\binom{c+k-1}{k}_i = 0$ 对于 $\ell_i \mid c$ 和 $\ell_i \nmid k$，我们有

$$\binom{K_i;-c}{t} = \sum_{0\leq k<t, \ell_i\nmid k} (-1)^k \epsilon_i^{2t(c+k)-k(k+1)} \binom{c+k-1}{k}_i \binom{K_i;0}{t-k}, \ (t\geq 0, c\geq 1, \ell_i \mid c).$$

这意味着 $\binom{K_i;-c}{t}$，其中 $c\geq 1, \ell_i \mid c, \ell_i \nmid t$ 是 $\binom{K_i;0}{t'}$（其中 $\ell_i \nmid t' \leq t$）的线性组合。现在，第二步可通过对 t_i 归纳并利用下列方程得到

$$\tilde{E}_i^{(p)} \tilde{F}_i^{(p)} = \sum_{c=0}^{\min(p,s)} \epsilon_i^{2ps-c^2} \tilde{F}_i^{(p-c)} \binom{K_i;2c-2p}{c} \tilde{E}_i^{(p-c)}. \tag{5.27}$$

对 $0<p<\ell_i$使用 (5.27)，我们有 $\binom{K_i;0}{t_i} \in \mathcal{J}$ 对于 $0<t_i<\ell_i$，因此 $\binom{K_i;-c}{t_i}$（其中 $c\geq 0, \ell_i \mid c, 0<t_i<\ell_i$）属于 $\mathcal{J}$。由归纳法和 (5.27)，$\binom{K_i;0}{t} \in \mathcal{J}$对于 $\ell_i \nmid t$，因此$\binom{K_i;-c}{t_i} \in \mathcal{J}$对于所有 $c\geq 0, \ell_i \mid c, \ell_i \nmid t_i \leq t$。□

命题 5.19。*(a)* 存在一个 *R-Hopf* 代数同态 ϕ： $\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}) \to \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$，定义如下：

$$\tilde{e}_i^{(n)} \mapsto (\epsilon_i^*)^{-n} e_i^{(n)}, \quad \tilde{f}_i^{(n)} \mapsto f_i^{(n)}, \quad K^\lambda \mapsto 1 \ (\lambda \in 2P^*), \quad \binom{K_i^*;0}{t} \mapsto \binom{h_i;0}{t}. \tag{5.28}$$

(b) ϕ 的核是由 $\{K^\lambda - 1\}_{\lambda\in 2P^*}$生成的霍普夫理想（作为理想）。

证明。(a) 我们有如下 Hopf 代数同态：

$$\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\psi_1^*} \tilde{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P^*) \to \tilde{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, Q^*) \xleftarrow{\phi_Q} \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d).$$

$\tilde{e}_i^{(n)}$、$\tilde{f}_i^{(n)}$、K^λ 在 $\tilde{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, Q^*)$ 中的像都包含于 $\phi_Q(\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d))$。因此，我们得到所需的 R-Hopf 代数同态 ϕ： $\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}) \to \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$。

(b) 映射 ϕ 与三角分解相容，也就是说，$\phi \cong \phi^< \otimes \phi^0 \otimes \phi^>$ 与

$$\phi^< : \dot{U}_\epsilon^{*<} \to \dot{U}_R^{\leq}(\mathfrak{g}^d), \qquad \phi^0 : \dot{U}_\epsilon^{*0} \to \dot{U}_R^0(\mathfrak{g}^d), \qquad \phi^> : \dot{U}_\epsilon^{*>} \to \dot{U}_R^{\geq}(\mathfrak{g}^d).$$

注意到 $\phi^<$、$\phi^>$ 都是同构。由（5.28）以及引理 中 $U_\epsilon^*(\mathfrak{g})$ 的 PBW 基可知，核(ϕ^0) 是由 $\{K^\lambda - 1 | \lambda \in 2P^*\}$ 生成的双边理想。另一方面，ϕ^0 是一个 R-模的分裂态射，因为 $\dot{U}_R^0(\mathfrak{g}^d)$ 是 R 上的自由模，因此，

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \dot{U}_\epsilon^{*<} \otimes \mathrm{Ker}(\phi^0) \otimes \dot{U}_\epsilon^{*>}.$$

该引理得证。 □

注记 5.20. $U_\epsilon^*(\mathfrak{g})$ 对自身的左伴随作用，以及 $U_\epsilon^*(\mathfrak{g})$ 对 $\tilde{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, X^*)$ 的伴随作用，都经过命题 5.19 的 ϕ: $\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}) \to \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$。这是因为元素 K^λ，$\lambda \in 2P^*$ 的伴随作用是平凡的。因此，ϕ: $\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}) \to \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 和ϕ_Q: $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d) \hookrightarrow \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, X^*)$，其中 X 或为 P，或为 Q，都是 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$- 模的态射。

现在陈述一些第 5 节中需要用到的技术结果。令 A_{Q^*} 为由 $\tilde{e}_i^{(n)} K^{n\gamma(\alpha_i^*)}$、$\tilde{f}_i^{(n)} K^{n\kappa(\alpha_i^*)}$、$\binom{K_i^*;0}{t_i}$生成的 $\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g})$ 的 R-子代数；适用于 $1\leq i\leq r$； t_i， $n\geq 1$。

引理 5.21。 *(a)* A_{Q^*} 是 $\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g})$ 的一个 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-子模，并且限制映射 $\phi\colon A_{Q^*} \to \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 是一个 R-代数同构。
(b) 限制映射 $\psi_1^*\colon A_{Q^*} \to \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*)$ 是一个从 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-模到陪域的包含，且其像稠密。

证明。 (a) 根据引理 5.4，我们可以选取 Q^*-权 R-基 $\{u^<\}$ 和 $\{u^>\}$，分别是 $U_\epsilon^{*<}$和 $U_\epsilon^{*>}$的基，使得 A_{Q^*} 具有如下形式的 R-基

$$u^< K^{\kappa(-\deg(u^<))} \cdot \prod_i \binom{K_i^*; 0}{t_i} \cdot u^> K^{\gamma(\deg(u^>))}.$$

将此与引理 5.5 和 5.6结合，我们看到 $\phi\colon A_{Q^*} \to \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 是一个同构。容易看出，通过检查生成元集合 $\{\tilde{e}_i^{(n)}, \tilde{f}_i^{(n)}, K^\lambda \mid \lambda \in 2P^*\}$上的作用，$A_{Q^*}$ 在 $U_\epsilon^*(\mathfrak{g})$ 的左伴随作用下保持不变，因此 A_{Q^*} 是 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-子模，且是 $U_\epsilon^*(\mathfrak{g})$ 的子模。

(b) 证明与引理 5.10(b) 的证明相同。 □

注 5.22。 我们有两个具有稠密像的 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-模到陪域中的包含映射：

$$\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d) \overset{\phi^{-1}}{\cong} A_{Q^*} \overset{\psi_1^*}{\hookrightarrow} \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*), \qquad \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d) \overset{\phi_P}{\hookrightarrow} \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*).$$

它们与映射 $U_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P) \to U_\epsilon^*(\mathfrak{g}, Q^*)$ 复合后重合。第一个包含映射和代数 A_{Q^*} 用于第 6 节中配对 $Z_{Fr} \times \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d) \to R$ 的构造。

注 5.23。 令 $A^>$（分别为 $A^<$）为由 $U_\epsilon^>$（分别为 $U_\epsilon^<$）以及 K^λ 连同所有 $\lambda \in 2P$生成的 R-子代数 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$。那么， $A^>$ 和 $A^<$ 是 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的 R-Hopf 子代数。

引理 5.24。 回顾代数同态 Fr： $U_\epsilon(\mathfrak{g}, P) \to U_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*)$，其对应于 (5.12)。对于任意 $x \in \{\tilde{E}_i^{(n)}, \tilde{F}_{(n)\,i}、\ K^\mu - 1 \mid \ell_i \nmid n、\ \mu \in 2P\}$ 以及 $y \in \widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$，我们有 $\mathrm{ad}'(x)(y) \in$核($\tilde{}$Fr)。

证明。首先，我们注意到，对于 $y = \tilde{F}^{(k_1)} \cdots \tilde{F}^{(k_m)} {}_{i_1}1_\lambda \tilde{E}^{(r_1)} \cdots \tilde{E}^{(r_n)}_{j_n}$，使得 $\ell_{i_t} \mid k_t$对所有$1 \le t \le m$ 以及 $\ell_{j_t} \mid r_t$ 对所有 $1 \le t \le n$，显然有$\mathrm{ad}'(K^\mu - 1)(y) = 0$。因此，对于任意 $y \in \widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$，像 $\mathrm{ad}'(K^\mu - 1)(y)$ 是 R-线性组合，其元素形如$\tilde{F}^{(k_1)}{}_{i_1} \cdots \tilde{F}^{(k_m)}{}_{i_m}1_\lambda \tilde{E}^{(r_1)}{}_{j_1} \cdots \tilde{E}^{(r_n)}_{j_n}$，并且满足以下两种情况之一：存在 $t \le m$使得 $\ell_{i_t} \ge 2, \ell_{i_t} \nmid k_t$，或存在 $t \le n$使得 $\ell_{j_t} \ge 2, \ell_{j_t} \nmid r_t$。这意味着，对于任意 $y \in \widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$，$\mathrm{ad}'(K^\mu - 1)(y) \in$核($\tilde{}$Fr)。

任意元素 $U_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$都是 R-线性组合，其元素为 $\{y1_\lambda \mid y \in U_\epsilon(\mathfrak{g}, P)\ \lambda \in P\}$。根据(3.20)，我们有：

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(n)})(y1_\lambda) &= \sum_{c=0}^{n} \tilde{E}_i^{(n-c)} y 1_\lambda (-1)^c K^{(n-c)\zeta_i^>} \epsilon_i^{c(c-1)} \tilde{E}_i^{(c)} K^{c\zeta_i^>} \\ &= \sum_{c=0}^{n} (-1)^c \epsilon^{n(\lambda,\zeta_i^>)} \epsilon_i^{-c(c+1)} \tilde{E}_i^{(n-c)} y 1_\lambda \tilde{E}_i^{(c)}.\end{aligned}$$

若 $\ell_i \nmid n$，则 $n-c$ 或 c 中至少有一个不能被 ℓ_i整除，因此 $\tilde{E}_i^{(n-c)} y 1_\lambda \tilde{E}_i^{(c)} \in$ Ker($\tilde{}$Fr)。这证明对于任意 $y \in \widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$，只要 $\ell_i \nmid n$，就有$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(n)})(y) \in$Ker($\tilde{}$Fr)。关于 $\tilde{F}_i^{(n)}$的证明类似。□

5.6. **与Lusztig 的量子 Frobenius 映射的比较**。
Let $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$是 [L5] 对应的幂等化 Lusztig 形式。令 $\mathcal{U}_\epsilon^>$，$\mathcal{U}_\epsilon^<$为由 R-子代数 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 中的 $\{E_i^{[n]}\}_{1\le i\le r}^{n\ge 1}$，$\{F_i^{[n]}\}_{1\le i\le r}^{n\ge 1}$分别生成的子代数。令

$\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*>}$, $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*<}$为由 R-子代数 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^*(\mathfrak{g})$ 中的 $\{\hat{e}_i^{[n]}\}_{1\le i\le r}^{n\ge 1}$, $\{\hat{f}_i^{[n]}\}_{1\le i\le r}^{n\ge 1}$分别生成的子代数。根据 [L5], ，我们有量子 Frobenius 同态:

$$\mathrm{Fr}\colon \widehat{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g},P)\longrightarrow \widehat{\mathcal{U}}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)\,,\qquad \mathrm{Fr}^>\colon \dot{\mathcal{U}}_\epsilon^>\longrightarrow \dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*>}\,,\qquad \mathrm{Fr}^<\colon \dot{\mathcal{U}}_\epsilon^<\longrightarrow \dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*<}\,. \tag{5.29}$$

扭曲 F 和 F* 赋予 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g},\ P)$ 以及 $\mathcal{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},\ P^*)$ 新的（拓扑）霍普夫代数结构，使得 Fr 仍然是霍普夫代数的态射。

假设$(\mathfrak{g},R)$包含一个扭曲霍普夫结构，我们可以将其通过为

$$\tilde{E}_i^{(n)}1_\lambda=\epsilon_i^{\frac{n(1-n)}{2}}\epsilon^{(n\nu_i^>,\lambda)}E_i^{[n]}1_\lambda,\qquad F_i^{(n)}1_\lambda=\epsilon_i^{\frac{n(n-1)}{2}}\epsilon^{-(n\nu_i^<,\lambda)}F_i^{[n]}1_\lambda.$$

类似地，我们可以将 $U_\epsilon^*(\mathfrak{g},\ P^*)$ 与（通过扭曲 F*得到的扭曲霍普夫结构） $\mathcal{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},\ P^*)$ 通过以下方式识别

$$\tilde{e}_i^{(n)}1_\lambda=(\epsilon_i^*)^{\frac{n(1-n)}{2}}\epsilon^{(n\nu_1^{*>},\lambda)}\hat{e}_i^{[n]}1_\lambda,\qquad \tilde{f}_i^{(n)}1_\lambda=(\epsilon_i^*)^{\frac{n(n-1)}{2}}\epsilon^{-(n\nu_i^{*<},\lambda)}\hat{f}_i^{[n]}1_\lambda.$$

定义映射 $\Phi\colon \mathcal{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},\ P^*)\ \widehat{\to}\ \mathcal{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},\ P^*)$如下:

$$e_i^{[n]}1_\lambda\mapsto\left(\epsilon_i^{\frac{\ell_i^2-\ell_i}{2}}\right)^n e_i^{[n]}1_\lambda,\qquad f_i^{[n]}1_\lambda\mapsto\left(\epsilon_i^{\frac{\ell_i-\ell_i^2}{2}}\right)^n f_i^{[n]}1_\lambda,$$

映射 Φ 是 Hopf 代数的自同构，且其上赋予通常的霍普夫代数结构或扭曲霍普夫结构(通过扭曲 F*)，定义在 $\mathcal{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},\ P^*)$ 上。

引理 5.25. 回忆映射 $\mathrm{Fr}\colon U_\epsilon(\mathfrak{g},P)\to U_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)$。在上述对*Hopf* 代数的识别下，$\mathrm{Fr}=\Phi\circ\mathrm{Fr}$。

证明。 直接在生成元 $\tilde{E}_i^{(n)}1_\lambda$, $\tilde{F}_i^{(n)}1_\lambda$ 上验证等式即可得出结论。 □

现在陈述一些将在第 5 节中用到的技术结果。

引理 *5.26.* 假设对所有 i, $\ell_i\ge max\{2,1-a_{ij}\}_{1\le j\le r}$。令 $\mathscr{K}$ 为 $\mathbb{Z}_{\ge 0}^N$ 的一个子集，由所有满足某个 k_i 不被 ℓ_{β_i} 整除的 $\vec{k}=(k_1,\dots,k_N)$ 组成。*(a)* 集合 $\{F^{[\vec{k}]}\}_{\vec{k}\in\mathscr{K}}$, $\{F^{[k]}\}_{\vec{k}\in\mathscr{K}}$ 是 *Ker(Fr$^<$)* 的 R-基。类似地，集合 $\{E^{[\vec{k}]}\}_{\vec{k}\in\mathscr{K}}$,$\{E^{[k]}\}_{\vec{k}\in\mathscr{K}}$ 是 *Ker(Fr$^>$)* 的 R-基。*(b)* 集合 $\{\tilde{F}^{(\vec{k})}\}_{\vec{k}\in\mathscr{K}}$, $\{\tilde{F}^{(k)}\}_{\vec{k}\in\mathscr{K}}$ 是 *Ker($\tilde{}$Fr$^<$)* 的 R-基。类似地，集合 $\{\tilde{E}^{(\vec{k})}\}_{\vec{k}\in\mathscr{K}}$,$\{\tilde{E}^{(k)}\}_{\vec{k}\in\mathscr{K}}$ 是 *Ker($\tilde{}$Fr$^>$)* 的 R-基。

证明。(a) 固定 $\lambda\in P^*$。我们有， $\mathcal{U}_\epsilon^<1_\lambda$ 是一个自由的 $\mathcal{U}_\epsilon^<$-模，而 $\mathcal{U}_\epsilon^{*<}1_\lambda$ 是一个自由的$\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*<}$-模。由于同态 Fr: $\widehat{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g},P)\to\widehat{\mathcal{U}}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)$ 与由 [L5，注 41.1.9], 给出的辫群作用相容，我们看到 $\mathrm{Fr}^<(F^{[\vec{k}]}1_\lambda)=\mathrm{Fr}^<(F^{[\vec{k}]})1_\lambda=0$ 当且仅当 $\vec{k}\in\mathscr{K}$。此外，像 $\mathrm{Fr}^<(F^{[\vec{k}]}1_\lambda)$ 与 $\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^N\setminus\mathscr{K}$构成 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*<}1_\lambda$的一组 R-基。因此，集合 $\{F^{[\vec{k}]}\}_{\vec{k}\in\mathscr{K}}$是 Ker(Fr$^<$) 的一组 R-基。其他结论的证明类似。(b) 由 (a) 和引理 5.25 得出。□

推论 5.27。 *(a)* Fr的核有一个由以下元素构成的 R-基

- $\tilde{F}^{(\vec{k})}1_\lambda\tilde{E}^{(\vec{r})}$ 满足 $\lambda\in P\setminus P^*$ 且 $\vec{k},\vec{r}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^N$。
- $\tilde{F}^{(\vec{k})}1_\lambda\tilde{E}^{(\vec{r})}$ 满足 $\lambda\in P^*$， 且 $\vec{k}$或 $\vec{r}$之一包含于 $\mathscr{K}$中。

(b) $\tilde{}$Fr 的核是由 $\{1_\mu,\tilde{E}_i^{(n)}1_\lambda,\tilde{F}_i^{(n)}1_\lambda\}$ 生成的双边理想，其中 $1\le i\le r,\lambda\in P,\mu\notin P^*$, $\ell_i\nmid n$ 适用于 $\ell_i\ge 2$。

证明。（ a）由引理5.26立即可得。然后，根据（a）和注记5.15可得（b）。□

现在我们将在命题5.17中的 PBW基 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ $\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g})$ $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 中的根生成元与命题5.19中的 ϕ下的 $\check{}$态射 Fr 联系起来。

引入以下记号：在一个 R-模 M中，我们记 $m_1 \,\mathrm{s}\!\sim m_2$，如果 $m_1 = am_2$ 存在某个$a \in R^\times$。我们从下面的技术引理开始，某些术语的定义见（5.11）：

引理 5.28。令 $\mu \in Q_+^*$ 并设 $s_i^*(\mu) \in Q_+^*$。

(a) 令 $x \in \dot{U}_\epsilon^{*>}$、$\mu$ 以及 $\hat{x} := \epsilon^{b^>_{s_i^*}(\mu) T_i^*(\epsilon^{-b^>_\mu} x K^{-\nu^>_\mu}) K^{\nu^>_{s_i^*}(\mu)}}$。则 $\phi(\hat{x}) \,\mathrm{s}\!\sim T_i^*(\phi(x))$。

(b) 设 $y \in \dot{U}_\epsilon^{*<}$、$-\mu$ 以及 $\hat{y} := \epsilon^{b^<_{s_i^*}(\mu)} K^{-\nu^<_{s_i^*}(\mu)} T_i^*(\epsilon^{-b^<_\mu} K^{\nu^<_\mu} y)$。则 $\phi(\hat{y}) \,\mathrm{s}\!\sim T_i^*(\phi(y))$

证明。我们只证明 (a)。设 $\mu = \sum_j u_j \alpha_j^*$。按照引理 5.6中的论证，我们可以假设$R = \mathcal{K}$ 这个特征为 0 的域包含一个元素 $\epsilon^{1/2}$。设

$$x = \sum_{\alpha^*_{i_1} + \ldots + \alpha^*_{i_m} = \mu} p_{i_1,\ldots,i_m} \tilde{e}_{i_1} \ldots \tilde{e}_{i_m}$$

其中 $p_{i_1,\ldots,i_m} \in \mathcal{K}$。于是

$$\epsilon^{-b^>_\mu} x K^{-\nu^>_\mu} = \sum_{\alpha^*_{i_1} + \ldots + \alpha^*_{i_m} = \mu} p_{i_1,\ldots,i_m} \epsilon^{-b^>_\mu + \sum_{1 \le j < l \le m} (\nu^>_{i_j}, \alpha^*_{i_l})} \hat{e}_{i_1} \ldots \hat{e}_{i_m} .$$

因此

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sum_{\alpha^*_{i_1} + \ldots + \alpha^*_{i_m} = \mu} p_{i_1,\ldots,i_m} \epsilon^{b^>_{s_i^*(\mu)} - b^>_\mu + \sum_{j<l} (\nu^{*>}_{i_j}, \alpha^*_{i_l})} \Big(\vec{\prod}_{1 \le j \le m} T_i^*(\hat{e}_{i_j}) \Big) K^{\nu^>_{s_i^*(\mu)}} \\ &= \sum_{\alpha^*_{i_1} + \ldots + \alpha^*_{i_m} = \mu} p_{i_1,\ldots,i_m} \epsilon^{b^>_{s_i^*(\mu)} - b^>_\mu + B_{i_1,\ldots,i_m}} \vec{\prod}_{1 \le j \le m} \left(T_i^*(\hat{e}_{i_j}) K^{\nu^{*>}_{i_j} - a^*_{i,i_j} \nu^{*>}_i} \right), \end{aligned}$$

其中

$$B_{i_1\ldots,i_m} = \sum_{j<l} (\nu^{*>}_{i_j}, \alpha^*_{i_l}) - \sum_{j<l} (\nu^{*>}_{i_j} - a^*_{i,i_j} \nu^{*>}_i, s_i^*(\alpha^*_{i_l})) .$$

步骤 *1*：我们断言，对于不同的 $(i'_1, \ldots, i'_m)$，有 $B_{i_1,\ldots i_m} - B_{i'_1,\ldots,i'_m} \in \mathbb{Z}$ 以及

$$\epsilon^{B_{i_1,\ldots,i_m} - B_{i'_1,\ldots,i'_m}} = 1 .$$

只需证明以下情形即可：$(i'_1, \ldots, i'_m)$ 是通过置换两个相邻指标 i_j 和 i_{j+1}，由 $(i_1, \ldots, i_m)$ 得到的。此时 $B_{i_1,\ldots,i_m} - B_{i'_1,\ldots,i'_m}$ 等于

$$\begin{aligned} &(\nu^{*>}_{i_j}, \alpha^*_{i_{j+1}}) - (\nu^{*>}_{i_j} - a^*_{i,i_j} \nu^{*>}_i, s_i^*(\alpha^*_{i_{j+1}})) - (\nu^{*>}_{i_{j+1}}, \alpha^*_{i_j}) + (\nu^{*>}_{i_{j+1}} - a^*_{i,i_{j+1}} \nu^{*>}_i, s_i^*(\alpha^*_{i_j})) \\ &= \mathsf{d}_i^* a^*_{i,i_{j+1}} a^*_{i,i_j} (\epsilon_{i,i_{j+1}} - \epsilon_{i,i_j}) \in 2\mathsf{d}_i^* \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

步骤 *2*：我们计算 $T_i^*(\hat{e}_{i_j}) K^{\nu^{*>}_{i_j} - a^*_{i,i_j} \nu^{*>}_i}$。

若 $i_j = i$，则

$$T_i^*(\hat{e}_{i_j}) K^{\nu^{*>}_{i_j} - a^*_{i,i_j} \nu^{*>}_i} = -\hat{f}_i K^{\alpha_i^*} K^{-\nu^{*>}_i} = -\tilde{f}_i K^{2\alpha_i^*} .$$

若 $i_j \neq i$，则

$$T_i^*(\hat{e}_{i_j}) K^{\nu^{*>}_{i_j} - a^*_{i,i_j} \nu^{*>}_i} = (\epsilon_i^*)^{a^*_{i,i_j}(a^*_{i,i_j}+1)/2} \epsilon^{a^*_{i,i_j}(\nu^{*>}_i, \alpha^*_{i_j})} \sum_{k=0}^{-a^*_{i,i_j}} (-1)^k \tilde{e}_i^{(-a^*_{i,i_j} - k)} \tilde{e}_{i_j} \tilde{e}_i^{(k)} ,$$

其中我们使用 $(\epsilon_i^*)^2 = 1$。

步骤 *3*：因此，我们有

$$\phi(\hat{x}) = \sum_{\alpha^*_{i_1}+\ldots+\alpha^*_{i_m}=\mu} p_{i_1,\ldots,i_m} \epsilon^{b^{>}_{s^*_i(\mu)} - b^{>}_{\mu} + B_{i_1,\ldots,i_m} + C_\mu} \overrightarrow{\prod}_{1\leq j\leq m} T^*_i(e_{i_j}),$$

其中

$$C_\mu = \sum_{j\neq i} u_j \left(-\mathsf{d}^*_j + \frac{\mathsf{d}^*_i a^*_{ij}(1-a^*_{ij})}{2} + a^*_{ij}(\nu^{*>}_i, \alpha^*_j) \right).$$

由于根据步骤 1，$\epsilon^{b^{>}_{s^*_i(\mu)} - b^{>}_{\mu} + B_{i_1,\ldots,i_m} + C_\mu}$ 不依赖于 $(i_1,\ldots,i_m)$ 的选取，我们固定这样一个 $(i_1,\ldots,i_m)$。于是有：

$$\begin{aligned}\phi(\hat{x}) &= \epsilon^{b^{>}_{s^*_i(\mu)} - b^{>}_{\mu} + B_{i_1,\ldots,i_m} + C_\mu} \sum_{\alpha^*_{i_1}+\ldots+\alpha^*_{i_m}} p_{i_1,\ldots,i_m} \prod_j T^*_i(e_{i_j}) \\ &= \epsilon^{b^{>}_{s^*_i(\mu)} - b^{>}_{\mu} + B_{i_1,\ldots,i_m} + C_\mu} T^*_i(\phi(x)).\end{aligned}$$

这就完成了证明，因为 $\epsilon^{b^{>}_{s^*_i(\mu)} - b^{>}_{\mu} + B_{i_1,\ldots,i_m} + C_\mu} \in R^{\times}$。 □

引理 5.29. ***(a)*** 我们有 $\phi(\tilde{e}^{(n)}_{\beta^*_k})\mathrm{s} \sim e^{(n)}_{\beta^*_k}$ 以及 $\phi(\tilde{f}_{(n)^{\beta^*_k}})\mathrm{s} \sim f^{(n)}_{\beta^*_k}$。

(b) 回顾同态 $\check{}\mathrm{Fr}\colon \dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$，它来自命题 5.17。 n

$$\check{\mathrm{Fr}}(\tilde{E}^{(n)}_{\beta_k}) \overset{\mathrm{S}}{\sim} \begin{cases} 0 & \text{if } \ell_{\beta_k} \nmid n \\ e^{(n/\ell_{\beta_k})}_{\beta^*_k} & \text{if } \ell_{\beta_k} \mid n \end{cases}, \qquad \check{\mathrm{Fr}}(\tilde{F}^{(n)}_{\beta_k}) \overset{\mathrm{S}}{\sim} \begin{cases} 0 & \text{if } \ell_{\beta_k} \nmid n \\ f^{(n/\ell_{\beta_k})}_{\beta^*_k} & \text{if } \ell_{\beta_k} \mid n. \end{cases}$$

证明。 (a) 我们只证明第一个陈述。根据（5.12），有

$$\tilde{e}^{(n)}_{\beta^*_k} = \epsilon^{nb^{>}_{\beta^*_k}} \epsilon^{(\nu^{>}_{\beta^*_k}, \beta^*_k) n(n-1)/2} T^*_{i_1} \ldots T^*_{i_{k-1}} (\hat{e}^{(n)}_{i_k}) K^{n\nu^{>}_{\beta^*_k}}.$$

设 $\beta'_j = s^*_{i_j} \ldots s^*_{i_{k-1}} \alpha_{i_k}$。则 $\beta'_j \in Q^*_+$ 和 $s^*_{j-1}(\beta'_j) = \beta'_{j-1} \in Q^*_+$。对于 $1 \leq i \leq k$，令

$$x_j = \epsilon^{nb^{>}_{\beta'_j}} T^*_{i_j} \ldots T^*_{i_{k-1}} (\hat{e}^{(n)}_{i_k}) K^{n\nu^{>}_{\beta'_j}} \in \dot{U}^{>}_\epsilon, \qquad e^{(n)}_{\beta'_j} = T^*_{i_j} \ldots T^*_{i_{k-1}} (e^{(n)}_{i_k}) \in \dot{U}^{>}_R(\mathfrak{g}^d).$$

我们对 $1 \leq j \leq k$ 作递减归纳，证明 $\phi(x_j)\,\mathrm{s} \sim e^{(n)}_{\beta'_j}$。基例 $j = k$显然，因为 $x_k = \tilde{e}^{(n)}_{i_k}$。现在证明归纳步骤。我们有 $x_j \in \dot{U}^{*>}_{\epsilon,\beta'_j}$，因此 $\phi(x_{j-1})\,\mathrm{s} \sim T^*_{i_{j-1}}(\phi(x_j))$，根据引理 5.28。由归纳假设，有 $\phi(x_j)\,\mathrm{s} \sim e^{(n)}_{\beta'_j}$。因此 $\phi(x_{j-1})\,\mathrm{s} \sim T^*_{i_{j-1}}(e^{(n)}_{\beta'_j}) = e^{(n)}_{\beta'_{j-1}}$，完成归纳步骤。特别地，对于$j = 1$，可得 $\phi(\tilde{e}^{(n)}_{\beta^*_k})\,\mathrm{s} \sim e^{(n)}_{\beta^*_k}$。结论得证。

（b）我们只证明第一条陈述。由引理5.25，可得：

$$\tilde{\mathrm{Fr}}^{>}(\tilde{E}^{(n)}_{\beta_k}) \overset{\mathrm{S}}{\sim} \begin{cases} 0 & \text{if } \ell_{\beta_k} \nmid n \\ \tilde{e}^{(n/\ell_{\beta_k})}_{\beta^*_k} & \text{if } \ell_{\beta_k} \mid n \end{cases}.$$

注意，$\check{}\mathrm{Fr}: \dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 在 $\dot{U}^{>}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 上的限制是 $\tilde{}\mathrm{Fr}^{>}$ 与 ϕ 在 $U^{*>}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 上的限制的复合。因此，结合上述公式与 (a) 部分，我们得到 (b) 部分的第一条结论。□

5.7. **R-矩阵**。

按照 [J1，§8。30] 并使用除幂 $\{F_{\beta_i}^{[n]}, E_{\beta_i}^{[n]}\}_{1\le i\le N}^{n\ge 1}$，我们得到以下$\frown R$-矩阵 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g},\ P)$:

$$\mathcal{R} = \sum_{\lambda,\mu\in P} \epsilon^{-(\lambda,\mu)} 1_\lambda \otimes 1_\mu + \left(\sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^N\setminus(0,\dots,0)} c_{\vec{k}} F^{[k]} \otimes E^{[k]} \right) \left(\sum_{\lambda,\mu\in P} \epsilon^{-(\lambda,\mu)} 1_\lambda \otimes 1_\mu \right), \tag{5.30}$$

其中 $c_{\vec{k}} = \prod_{t=1}^N \left(\epsilon^{k_t \binom{1-k_t}{i_t}/2} (\epsilon_{i_t}^{-1} - \epsilon_{i_t})^{k_t} [k_t]_{i_t}! \right)$。

$\frown$借助 (3.6) 以及 F（3.7）可得以下 R-矩阵 $U_\epsilon(\mathfrak{g},\ P)$:

$$\mathcal{R}^{\mathsf{F}} = \mathsf{F}^{-1}\mathcal{R}\mathsf{F}^{-1} = \tag{5.31}$$

$$\sum_{\lambda,\mu\in P} \epsilon^{-(\lambda,\mu)-\sum_{i,j} 2\phi_{ij}(\omega_i^\vee,\lambda)(\omega_j^\vee,\mu)} 1_\lambda \otimes 1_\mu + \mathsf{F}^{-1} \left(\sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^N\setminus(0,\dots,0)} \sum_{\lambda,\mu\in P} d_{\lambda,\mu,\vec{k}} \tilde{F}^{(k)} 1_\lambda \otimes \tilde{E}^{(k)} 1_\mu \right) \mathsf{F}^{-1}$$

其中 $d_{\lambda,\ \mu,\ \vec{k}} = \epsilon^{a_{\lambda,\ \mu,\ \vec{k}}} \cdot \prod_{t=1}^N (\epsilon_{i_t}^{-1} - \epsilon_{i_t})^{k_t} (k_t)_{i_t}!$，对某些 $a_{\lambda,\ \mu,\ \vec{k}} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$。

引理 5.30. 假设对所有 i，$\ell_i \ge$ 最大$\{2, 1-a_{ij}\}_{1\le j\le r}$。那么，在同态 $\tilde{}\mathrm{Fr}^{\otimes 2}\colon \widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P)^{\otimes 2} \to \widehat{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*)^{\otimes 2}$（在适当的完备化）下，$\mathcal{R}^{\mathsf{F}}$ 的像为

$$\mathcal{R}^* = \sum_{\lambda,\mu\in P^*} \epsilon^{-(\lambda,\mu)-\sum_{i,j} 2\phi_{ij}(\omega_i^\vee,\lambda)(\omega_j^\vee,\mu)} 1_\lambda \otimes 1_\mu\,. \tag{5.32}$$

证明。若 $\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N\setminus(0,\dots,0)$ 满足：对某个 $1\le t\le N$，有 $k_t \ge \ell_{i_t}$，则 $(k_t)_{i_t}! = 0$，因此 $d_{\lambda,\mu,\vec{k}} = 0$ 对所有 $\lambda,\mu\in P$ 都成立。若 $\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N\setminus(0,\dots,0)$ 满足对所有 $1\le t\le N$ 均有 $0\le k_t < \ell_{i_t}$，则存在 t 使得 $0 < k_t < \ell_{i_t}$，因此由引理 5.26 可得 $\tilde{F}^{(k)} \in \mathrm{Ker}(\tilde{}\mathrm{Fr}^<)$ $\tilde{E}^{(k)} \in \mathrm{Ker}(\tilde{}\mathrm{Fr}^>)$。因此，对于任意 $\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N\setminus(0,\dots,0)$ 及 $\lambda,\mu\in P$，有

$$\tilde{\mathrm{Fr}}^{\otimes 2}(d_{\lambda,\mu,\vec{k}} \tilde{F}^{(k)} 1_\lambda \otimes \tilde{E}^{(k)} 1_\mu) = 0.$$

这就推出了引理。 □

注5.31. 对于 $\lambda,\ \mu\in Q^*$，$\mathcal{R}^*$ 中 $1_\lambda\otimes 1_\mu$ 的系数为 1。其他 $1_\lambda\otimes 1_\mu$ 的系数也可能等于 1，这取决于单位根 ϵ。

$\frown$**注5.32.** 今后，我们将把这个 $\mathcal{R}^*$ 视为 U_ϵ^*（$\mathfrak{g}$，P^*）的一个 R-矩阵。

6. The Frobenius center Z_{Fr}

在本节中，我们研究 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 的所谓 Frobenius 中心。我们对 ℓ施加以下条件：$\ell_i \ge \max\{2, 1-a_{ij}\}_{1\le j\le r}$。在此条件下，第 5 节的结果仍然成立；此外，在备注 5.15 和 5.18中，指标 i遍历所有 $\{1,\dots,r\}$。我们假设R 含有一个元素 $\epsilon^{1/\mathsf{N}}$。令 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}} := \mathbb{Z}[v^{\pm 1/\mathsf{N}}]\left[\left\{\frac{1}{v^{2k}-1}\right\}_{1\le k\le}^{\max\{d_i\}}\right]$。那么，取$\epsilon^{1/\mathsf{N}}$后，环同态 $\sigma\colon \mathcal{A}\to R$ 可通过 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}}\to R$ 分解，其中 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}}\to R$ 将 $v^{\pm 1/\mathsf{N}}$ 映射到 $\epsilon^{\pm 1/\mathsf{N}}$。

6.1. **幂等化版本的配对**。

考虑由下式定义的 R-线性配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle'\colon U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}) \times U_\epsilon(\mathfrak{g},P) \to R$

$$\left\langle (yK^{\kappa(\nu)})K^{\lambda}(xK^{\gamma(\mu)}), \dot{y}1_{\dot{\lambda}}\dot{x} \right\rangle' = \delta_{-\lambda/2,\dot{\lambda}}(y,\dot{x})'(\dot{y},x)'\epsilon^{(2\rho,\nu)}\epsilon^{(\dot{\mu},\gamma(\dot{\mu}))-(\dot{\lambda},\kappa(\dot{\nu})+\gamma(\dot{\mu}))} \tag{6.1}$$

对任意 $\lambda \in 2P$，$\lambda \in P$，$y \in U_{-\nu}^{ev<}$，$x \in U_{\mu}^{ev>}$，$y \in \dot{U}_{-}^{<}\nu$，$x \in \dot{U}^{>}\mu$和 μ，ν，μ，$\nu \in Q_+$。

引理 6.1. 配对 (6.1)在 $(\mathfrak{g})$-作用下不变，并且在第一个论元上非退化。

证明。 配对 (6.1) 可以自然地扩展为一个配对 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}) \times U_\epsilon(\mathfrak{g}, P) \to R$:

$$\left\langle (yK^{\kappa(\nu)})K^{\lambda}(xK^{\gamma(\mu)}), \dot{y}\prod a_{\dot{\lambda}}1_{\dot{\lambda}}\dot{x} \right\rangle' = a_{-\lambda/2}(y,\dot{x})'(\dot{y},x)'\epsilon^{(2\rho,\nu)}\epsilon^{(\dot{\mu},\gamma(\dot{\mu}))-(\dot{\lambda},\kappa(\dot{\nu})+\gamma(\dot{\mu}))}.$$

此配对是连续的，而 R 和 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 配备了离散拓扑，$U_\epsilon(\mathfrak{g},P)$ 的拓扑则在第 5.4 节中定义。$U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 在 $U_\epsilon(\mathfrak{g},P)$ 上的左伴随作用是连续的。此外，命题 4.16 的配对 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}) \times U_\epsilon(\mathfrak{g}) \to R$ 可经由同态 $\psi_1\colon U_\epsilon(\mathfrak{g}) \to U_\epsilon(\mathfrak{g},P)$ 分解，且该同态通过上述配对 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}) \times U_\epsilon(\mathfrak{g},P) \to R$。由于 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}) \times U_\epsilon(\mathfrak{g}) \to R$在第一自变量上非退化，$U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}) \times U_\epsilon(\mathfrak{g},P) \to R$也如此。此外，由于配对 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}) \times U_\epsilon(\mathfrak{g}) \to R$ 是伴随 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-不变的，并且映射 $\psi_1\colon U_\epsilon(\mathfrak{g}) \to U_\epsilon(\mathfrak{g},P)$ 是一个像稠密的 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-模同态，配对 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}) \times U_\epsilon(\mathfrak{g},P) \to R$必定是伴随 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-不变的。

由于 $\psi_2\colon U_\epsilon(\mathfrak{g},P) \to U_\epsilon(\mathfrak{g},P)$ 是一个 $U_\epsilon(\mathfrak{g}$-模嵌入，且其像稠密，因此配对(6.1) 必须是伴随 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-不变的，并且在第一自变量上非退化。□

6.2. **Frobenius 中心** Z_{Fr}。

回顾第 5 节中的以下同态:

$$\tilde{\mathrm{Fr}}\colon \widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g},P) \to \widehat{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*), \quad \tilde{\mathrm{Fr}}^{>}\colon \dot{U}_\epsilon^{>} \to \dot{U}_\epsilon^{*>}, \quad \tilde{\mathrm{Fr}}^{<}\colon \dot{U}_\epsilon^{<} \to \dot{U}_\epsilon^{*<}.$$

根据推论 5.27，同态 Fr 的核由以下元素在 R 上张成:

- $y1_\lambda x$，其中 $y \in U_\epsilon^{<}$，$x \in U_\epsilon^{>}$以及 $\lambda \in P \setminus P^*$;
- $y1_\lambda x$，其中 $\lambda \in P^*$ 且或者 $x \in \mathrm{Ker}(\tilde{\mathrm{Fr}}^{>})$，或者 $y \in \mathrm{Ker}(\tilde{\mathrm{Fr}}^{<})$。

定义 6.2。所谓*Frobenius* 中心，记作 Z_{Fr}，是 $U_\epsilon^{ev\sim}$中 Ker(Fr) 关于伴随 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-不变配对（6.1）下的正交补。

Let $Z_{Fr}^{>} := Z_{Fr} \cap U_\epsilon^{ev\,>}, Z_{Fr}^{0} := Z_{Fr} \cap U_\epsilon^{ev\,0}, Z_{Fr}^{<} := Z_{Fr} \cap U_\epsilon^{ev\,<}$.

引理 6.3。*(a)* Z_{Fr}是 U_ϵ^{ev}中的中心元素。此外，对于任意 $z \in Z_{Fr}$和 $x \in \{\tilde{E}_i^{(n)}, \tilde{F}_i^{(n)}, K^\lambda - 1 \mid \ell_i \nmid n, \lambda \in 2P\}$，$\mathrm{ad}'(x)(z) = 0$。

(b) $Z_{Fr}^0 = \oplus_{\lambda \in 2P^*} R \cdot K^\lambda$、$Z_{Fr}^{>} = R[\tilde{E}_\alpha^{\ell_\alpha}]_{\alpha\in\Delta_+}$和 $Z_{Fr}^{<} = R[\tilde{F}_\alpha^{\ell_\alpha}]_{\alpha\in\Delta_+}$。特别地，$Z_{Fr}^{<}$、$Z_{Fr}^{0}$、$Z_{Fr}^{>}$是 U_ϵ^{ev}的 R-子代数。

(c) $Z_{Fr} = Z_{Fr}^{<} \otimes_R Z_{Fr}^{0} \otimes_R Z_{Fr}^{>}$.

证明。 (a) 设 $z \in Z_{Fr}$。根据引理 5.24，我们有 $\mathrm{ad}'(S'(x))(y) \in$核(Fr，对任意 $y \in \widehat{U}_\epsilon(\mathfrak{g},P)$ 以及 $x \in \{\tilde{E}_i^{(n)}, \tilde{F}_i^{(n)}, K^\lambda - 1 \mid \ell_i \nmid n, \lambda \in 2P\}$。因此，取这些 x和 y，可得:

$$\langle \mathrm{ad}'(x)z, y\rangle' = \langle z, \mathrm{ad}'(S'(x))y\rangle' = 0.$$

由于配对（6.1）在第一自变量上非退化，因此 $\mathrm{ad}'(x)(z)=0$ 对所有 $x\in\{\tilde{E}_i^{(n)},\tilde{F}_i^{(n)},K^\lambda-1\,|\,\ell_i\nmid n,\lambda\in 2P\}$都成立。特别地，我们可以取 $n=1$。这意味着z 在 U_ϵ^{ev}中是中心的，因为（3.34）。

（b）由方程（6.1）容易看出，$Z_{Fr}^0=\bigoplus_{\lambda\in 2P^*}R\cdot K^\lambda$。对于 $x\in U_\epsilon^{ev>}$，有

$$\langle x,\dot{y}1_{\dot{\lambda}}\dot{x}\rangle'=\delta_{\gamma(\deg(x))/2,\dot{\lambda}}(\dot{y},x)'(1,\dot{x})'\epsilon^{(\dot{\mu},\gamma(\dot{\mu}))-(\dot{\lambda},\kappa(\dot{\nu})+\gamma(\dot{\mu}))}\epsilon^{(\gamma(\deg(x)),\deg(x))},$$

这意味着

$$Z_{Fr}^{\geq}=\left\{x\in U_\epsilon^{ev>}\,\middle|\,(\dot{y},x)'=0\text{ for all }\dot{y}\in\mathrm{Ker}(\tilde{\mathrm{Fr}}^<)\right\}.$$

由推论4.7和引理5.26，$Z_{Fr}^{\geq}$是一个自由的 R-模，其基为$\{\tilde{E}^k\,|\,\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N\setminus\mathscr{K}\}$，关于 $\mathscr{K}$的定义，参见引理 5.26。这意味着 $Z_{Fr}^{\geq}=R[\tilde{E}_\alpha^{\ell_\alpha}]_{\alpha\in\Delta_+}$。对$Z_{Fr}^{\leq}$ 的证明相同。

（c）根据引理3.10，任意 $u\in U_\epsilon^{ev}$都可以写成

$$u=\sum_{\vec{k},\vec{r}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N}^{\lambda\in P}a_{\vec{k},\vec{r},\lambda}\tilde{F}^kK^{2\lambda}\tilde{E}^r$$

对于有限多个非零的$a_{\vec{k},\vec{r},\lambda}\in R$。由推论4.7，有

$$\langle u,\tilde{F}^{(r)}1_{-\lambda}\tilde{E}^{(k)}\rangle'=a_{\vec{k},\vec{r},\lambda}b_{\vec{k},\vec{r},\lambda}$$

对于某个可逆元 $b_{\vec{k},\vec{r},\lambda}\in R$。因此，若 $u\in Z_{Fr}$，则必有 $a_{\vec{k},\vec{r},\lambda}=0$，只要 $\lambda\in P\setminus P^*$、$\vec{k}\in\mathscr{K}$ 或 $\vec{r}\in\mathscr{K}$ 中任一成立。因此，若 $u\in Z_{Fr}$，则

$$u=\sum_{\vec{k},\vec{r}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N\setminus\mathscr{K}}^{\lambda\in P^*}a_{\vec{k},\vec{r},\lambda}\tilde{F}^kK^{2\lambda}\tilde{E}^r,$$

使得 $u\in Z_{Fr}^{\leq}\otimes_R Z_{Fr}^0\otimes_R Z_{Fr}^{\geq}$。 □

推论 6.4. U_ϵ^{ev}是 Z_{Fr}上的秩为 $d=\prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha^2\cdot\prod_{1\leq i\leq r}\ell_i$的自由模，且 ℓ_α满足 (5.2)。

注 6.5. 由于 Ker(Fr) 是 $U_\epsilon(\mathfrak{g},P)$ 中的双边理想，因而在 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的伴随作用下封闭，子代数 Z_{Fr} 也在 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的伴随作用下封闭。Hopf 代数 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 也如注记 5.16 中所述，自然地作用于 $U_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)$。此外，根据引理 5.18 对 Ker(ˇFr) 的描述，以及引理 5.24 和引理 6.3(a) 中的计算可知，$\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 在 Z_{Fr} 和 $\widehat{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)$ 上的两个作用都经由态射 ˇFr : $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})\to\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 分解。

根据 Z_{Fr} 的定义，我们得到一个诱导配对

$$\langle\cdot,\cdot\rangle'\colon Z_{Fr}\times\widehat{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)\longrightarrow R,\tag{6.2}$$

它是 伴随 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-不变的，参见备注 6.5，并且关于第一自变量是非退化的。

设 G^d 是李代数为 $\mathfrak{g}^d$ 的单连通代数群。注意，$\mathfrak{g}^d$ 的根格为 Q^*，权格为 P^*。设 G_0^d 为 G^d 中的开 Bruhat 胞腔，即 $G_0^d=U_-^d\times T^d\times U_+^d$，其中 T^d 是极大环面，$U_\pm^d$ 是相反极大幺幂子群（因此 U_+^d 对应于 Δ_+）。所有对象均定义在 $\mathbb{Z}$ 上，因此经基变换后也有意义

在 R 上。现在我们将 与 $R[G_0^d]$对应起来，参见命题6.10。[6]为此，我们先给出一些技术结果。

The 完美配对（“完美”这一性质由引理3.10和推论 4.7）

$$(\cdot,\cdot)'\colon U_\epsilon^{ev\,<}\times \dot U_\epsilon^{>}\longrightarrow R\,,\qquad (\cdot,\cdot)'\colon \dot U_\epsilon^{<}\times U_\epsilon^{ev\,>}\longrightarrow R$$

给出了配对

$$(\cdot,\cdot)'\colon Z_{Fr}^{<}\times \dot U_R^{>}(\mathfrak{g}^d)\longrightarrow R\,,\qquad (\cdot,\cdot)'\colon \dot U_R^{<}(\mathfrak{g}^d)\times Z_{Fr}^{>}\longrightarrow R\,, \tag{6.3}$$

通过限制到子代数 $Z_{Fr}^{<}\subset U_\epsilon^{ev\,<}$（分别是 $Z_{Fr}^{>}\subset U_\epsilon^{ev\,>}$），并经由商映射 $\check{\mathrm{Fr}}^{>}\colon\ \dot U_\epsilon^{>}\to \dot U_R^{>}(\mathfrak{g}^d)$（分别是 $\check{\mathrm{Fr}}^{<}\colon\ \dot U_\epsilon^{<}\to \dot U_R^{<}(\mathfrak{g}^d)$），见引理 5.17。

引理 6.6。 中的两个配对 (6.3)都是完美配对。特别地，

$$(\tilde F^k, e^{(r^*)})' = \begin{cases}\in R^\times & \text{if } \vec k=\vec r\in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}/\mathscr{K}\\ 0 & \text{if } \vec k,\vec r\in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}/\mathscr{K} \text{ and } \vec k\neq\vec r,\end{cases}$$
$$(f^{(r^*)}, \tilde E^k)' = \begin{cases}\in R^\times & \text{if } \vec k=\vec r\in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}/\mathscr{K}\\ 0 & \text{if } \vec k,\vec r\in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}/\mathscr{K} \text{ and } \vec k\neq\vec r,\end{cases} \tag{6.4}$$

此处 $\vec r^*=(r_1/\ell_{\beta_1},\dots,r_N/\ell_{\beta_N})$ 对于 $\vec r\in\mathscr{K}$。子集 $\mathscr{K}$在引理 5.26中定义。

证明。 由引理 6.3， $Z_{Fr}^{<}$有一个 R-基 $\{\tilde F^k|\vec k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}\backslash\mathscr{K}\}$. 由引理 5.26，元素$\{\check{\mathrm{Fr}}^{<}(\tilde E^{(k)})|\vec k\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}\backslash\mathscr{K}\}$ 构成 R-基 $\dot U_R^{>}(\mathfrak{g}^d$的基。此外，由引理 5.29

$$\check{\mathrm{Fr}}^{<}(\tilde E^{(k)}) = a_{\vec k}e^{(k^*)}\qquad \text{for some } a_{\vec k}\in R^\times.$$

结合这些结果与推论4.7中的计算，可得式（6.4）中的第一个计算，因此式（6.3）中的第一个配对是完美的。第二个配对的证明相同。□

对于任意 $\lambda\in P^*$，我们都有相应的同态 $\chi_\lambda\colon \dot U_R^0(\mathfrak{g}^d)\to R$。换句话说，我们有一个配对

$$R[T^d]\times \dot U_R^0(\mathfrak{g}^d)\longrightarrow R\,.$$

这只是正则函数环 $R[T^d]$ 与分布代数 $\mathrm{Dist}_R(T^d)\simeq \dot U_R^0(\mathfrak{g}^d)$之间的 Hopf 代数配对。特别地，我们有

$$\chi_{\lambda_1+\lambda_2}(u_0)=\chi_{\lambda_1}(u_{0(1)})\chi_{\lambda_2}(u_{0(2)})\qquad \forall\, u_0\in \dot U_R^0(\mathfrak{g}^d)\,.$$

引理 6.7。 配对（6.2）导出一个 $\dot U_R(\mathfrak{g}^d)$-伴随不变配对

$$\langle\cdot,\cdot\rangle'\colon Z_{Fr}\times \dot U_R(\mathfrak{g}^d)\longrightarrow R\,,$$

它在第一自变量上非退化。该配对定义如下：

$$\Big\langle (yK^{\kappa(\nu)})K^{\lambda}(xK^{\gamma(\mu)}),\dot y u_0\dot x\Big\rangle' = \chi_{-\lambda/2}(u_0)(y,\dot x)'(\dot y,x)'\,, \tag{6.5}$$

其中 $\lambda\in 2P^*$, $u_0\in \dot U_R^0(\mathfrak{g}^d)$ $y\in Z_{Fr,-\nu}^{<}$, $x\in Z_{Fr,\mu}^{>}$, $.y\in \dot U_R^{<}(\mathfrak{g}^d)_{-\nu}$, $.x\in \dot U_R^{>}(\mathfrak{g}^d)_{.\mu}$ 满足 $\nu,\mu,.\nu,.\mu\in Q_+^*$。配对 $(y,.x)'$、 $(.y,x)'$ 由 (6.3) 给出。

该构造见证明。

[6]我们来谈谈通常的 De Concini-Kac 形式中与 Z_{Fr} 对应的类似情形：当 q 是奇数阶单位根时，对应的是文献 Z_0 中研究的中心子代数 [DCKP1、 §5.4、 6]；而当 q 是偶数阶单位根时，对应情形见文献 [T2、 §4]。

证明。 我们有以下 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-模的包含映射：

$$\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d) \overset{\phi^{-1}}{\cong} A_{Q^*} \overset{\psi_1^*}{\hookrightarrow} \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*) \hookleftarrow \widehat{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*). \tag{6.6}$$

$\widehat{}$配对 $Z_{Fr} \times U_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*) \to R$ 自然延拓为配对 $Z_{\mathrm{Fr}} \times U_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*) \to R$。由于 $\widehat{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*)$ 是 $\tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*)$ 的一个稠密 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-子模，配对 $Z_{Fr} \times \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*) \to R$ 是伴随 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-不变的，并且在第一自变量上非退化。由引理 5.21，映射 $\psi_1^* : A_{Q^*} \hookrightarrow \tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*)$ 是 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$- 模的一个具有稠密像的单射态射，因此通过限制得到的配对 $Z_{\mathrm{Fr}} \times A_{Q^*} \to R$ 是伴随 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$- 不变的，并且在第一自变量上非退化。配对 $Z_{Fr} \times A_{Q^*} \to R$ 的显式表达式如下（参见 (6.1)）：

$$\left\langle (yK^{\kappa(\nu)})K^\lambda(xK^{\gamma(\mu)}), (\dot{y}K^{\kappa(\dot{\nu})})u_0(\dot{x}K^{\gamma(\dot{\mu})}) \right\rangle' = (y, \dot{x})'(\dot{y}, x)'\hat{\chi}_{-\lambda/2}(u_0)\epsilon^{(2\rho,\nu)}$$

由（4.25）的 $\hat{\chi}_{-\lambda/2}$，对任意 $\nu, \mu, .\nu, .\mu \in Q_+^*, \lambda \in 2P^*$, $u_0 \in A_{Q^*}^0$, $y \in Z_{Fr,-\nu}^<, x \in Z_{Fr,\mu}^>, .y \in \dot{U}_\epsilon^{*<}(\mathfrak{g})_{-.\nu}, .x \in \dot{U}_\epsilon^{*>}(\mathfrak{g})_{.\mu}$。注意，（6.1）中的系数 $\epsilon^{(.\mu,\gamma(.\mu))-(.\lambda,\kappa(.\nu)+\gamma(.\mu))}$ 没有出现，这是因为我们回到了非幂等版本；与（4.33）相比即可看出。此外，对于 $\nu \in Q_+^*$, $\epsilon^{(2\rho,\nu)} = 1$, 因此

$$\left\langle (yK^{\kappa(\nu)})K^\lambda(xK^{\gamma(\mu)}), (\dot{y}K^{\kappa(\dot{\nu})})u_0(\dot{x}K^{\gamma(\dot{\mu})}) \right\rangle' = (y, \dot{x})'(\dot{y}, x)'\hat{\chi}_{-\lambda/2}(u_0), \tag{6.7}$$

指标如上。

现在利用引理 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-模 $A_{Q^*} \overset{\phi}{\to} \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 之间的同构（见引理 5.21），我们得到所需的 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-不变配对 $Z_{Fr} \times \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d) \to R$。方程（6.5）由（6.7）结合以下观察可得：

- $\hat{\chi}_{-\lambda/2}$: $\dot{U}_R^0(\mathfrak{g}^d) \cong A_{Q^*}^0 \to R$ 与 $\chi_{-\lambda/2}$: $\dot{U}_R^0(\mathfrak{g}^d) \to R$ 相同。
- 配对 $(y, \_\, x)'$: $Z_{Fr}^< \times \dot{U}_\epsilon^{*>} \to R$ 在 (6.7) 中，是由配对 $Z_{Fr}^< \times \dot{U}_\epsilon^> \to R$ 经由商 $\tilde{\mathrm{Fr}}^>$: $\dot{U}_\epsilon^> \to \dot{U}_\epsilon^{*>}$ 得到的。另一方面，态射 $\check{\mathrm{Fr}}^>$: $\dot{U}_\epsilon^> \to \dot{U}_R^\geq(\mathfrak{g}^d)$ 等于复合 $\dot{U}_\epsilon^> \overset{\tilde{\mathrm{Fr}}^>}{\longrightarrow} \dot{U}_\epsilon^{*>} \overset{\phi}{\to} \dot{U}_R^\geq(\mathfrak{g}^d)$。 □

引理 6.8。 *(a)* 对任意 $x_1, x_2 \in Z_{Fr}^>$ 和 。 $y \in \dot{U}_R^<(\mathfrak{g}^d)$，有

$$(\dot{y}, x_1x_2)' = (\dot{y}_{(1)}, x_1)'(\dot{y}_{(2)}, x_2)'. \tag{6.8}$$

(b) 对于任意 $y_1, y_2 \in Z_{Fr}^<$ 和 。 $x \in \dot{U}_R^\geq(\mathfrak{g}^d)$，我们有

$$(y_1y_2, \dot{x})' = (y_1, \dot{x}_{(1)})'(y_2, \dot{x}_{(2)})'. \tag{6.9}$$

证明。 回顾一下 R-Hopf 子代数 $A^>$ 和 $A^<$，它们来自备注5.23。Hopf 代数的同态 $\check{\mathrm{Fr}}$: $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 限制为以下 Hopf 代数同态：

$$\check{\mathrm{Fr}}^{A,>} : A^> \longrightarrow \dot{U}_R^\geq(\mathfrak{g}^d), \qquad \check{\mathrm{Fr}}^{A,<} : A^< \longrightarrow \dot{U}_R^\leq(\mathfrak{g}^d).$$

(a) Hopf 配对 $(\cdot,\cdot)'$: $\dot{U}_\epsilon^\leqslant \times U_\epsilon^{ev\geqslant} \to R$ 限制为配对 $(\cdot,\cdot)'$: $A^< \times Z_{Fr}^> \to R$，它满足

$$(\dot{y}, x_1x_2)' = (\dot{y}_{(2)}, x_1)'(\dot{y}_{(1)}, x_2)' \tag{6.10}$$

对于 。 $y \in A^<$ 和 x_1, $x_2 \in Z_{Fr}^>$。映射 $\check{\mathrm{Fr}}^{A,<}$ 的核在 R 上由 $\ker(\check{\mathrm{Fr}}^<)$ 和 $\dot{U}_\epsilon^<(K^\lambda - 1)$ 张成，其中 $\lambda \in 2P$。此外，$Z_{Fr}^>$ 与 $\dot{U}_\epsilon^<(K^\lambda - 1)$ 正交；事实上，对于任意 $x \in Z_{Fr,\mu}^>$ 以及任意 $\mu \in Q_+^*$ 和 。 $y \in \dot{U}_\epsilon^<$，我们有

$$(\dot{y}(K^\lambda - 1), x)' = (\dot{y}, x)'(\epsilon^{(\lambda,\mu)} - 1) = 0,$$

由于 $\mu \in Q_+^*$ 和 $\lambda \in 2P$。因此， $Z_{Fr}^{>}$与 $\mathrm{Ker}(\check{}\mathrm{Fr}^{A,\lhd})$ 正交。因此，配对$A^{<} \times Z_{Fr}^{>} \to R$通过下降到商而导出一个配对 $\dot{U}_R^{\leq}(\mathfrak{g}^d) \times Z_{Fr}^{>} \to R$，该配对与 $\dot{U}_R^{\leq}(\mathfrak{g}^d) \times Z_{Fr}^{>} \to R$中的配对相同，见 (6.3)。由 (6.10)，可知配对 $\dot{U}_R^{\leq}(\mathfrak{g}^d) \times Z_{Fr}^{>} \to R$满足：

$$(\dot{y}, x_1x_2)' = (\dot{y}_{(2)}, x_1)'(\dot{y}_{(1)}, x_2)'$$

对于 $y \in \dot{U}_R^{\leq}(\mathfrak{g}^d)$ 和 $x_1, x_2 \in Z_{Fr}^{>}$。但 $\dot{U}_R^{\leq}(\mathfrak{g}^d)$ 是余交换的，因此结论（a）成立。(b) 证明类似。 □

考虑由引理 $Z_{Fr} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)\ R)$ 得到的嵌入 6.7。注意，$\mathrm{Hom}_R(\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)\ R)$ 上的代数结构来自 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$ 上的余代数结构。

引理 6.9。上述嵌入 $Z_{Fr} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)\ R)$ 是一个 R-代数同态。

证明。设 $a_i = (y_i K^{\kappa(\nu_i)}) K^{\lambda_i} (x_i K^{\gamma(\mu_i)})$，其中 $y_i \in Z_{Fr,-\nu_i}^{<}, x_i \in Z_{Fr,\mu_i}^{>}$, $\lambda_i \in 2P^*$, $\nu_i, \mu_i \in Q_+^*$ 对于 $i = 1,2$。然后，对于任意 $u = .yu_0.x \in \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$，我们需要验证以下等式：

$$\langle a_1a_2, u\rangle' = \langle a_1, u_{(1)}\rangle'\langle a_2, u_{(2)}\rangle'.$$

事实上，使用 Sweedler记号（3.2），我们有：

$$\begin{aligned}\langle a_1, u_{(1)}\rangle'\langle a_2, u_{(2)}\rangle' &= \chi_{-\lambda_1/2}(u_{0(1)})(y_1, \dot{x}_{(1)})'(\dot{y}_{(1)}, x_1)' \cdot \chi_{-\lambda_2/2}(u_{0(2)})(y_2, \dot{x}_{(2)})'(\dot{y}_{(2)}, x_2)' \\ &= \chi_{-\lambda_1/2}(u_{0(1)})\chi_{-\lambda_2/2}(u_{0(2)}) \cdot (y_1, \dot{x}_{(1)})'(y_2, \dot{x}_{(2)})' \cdot (\dot{y}_{(1)}, x_1)'(\dot{y}_{(2)}, x_2)' \\ &= \chi_{(-\lambda_1-\lambda_2)/2}(u_0)(y_1y_2, \dot{x})'(\dot{y}, x_1x_2)' = \langle a_1a_2, u\rangle',\end{aligned}$$

这里用到了 $K^{\gamma(\mu_i)}$ $K^{\kappa(\nu_i)}$ 是中心的，这归因于注记5.2。证明至此完成。 □

现在我们可以将 Z_{Fr} 与 $R[G_0^d]$ 识别起来。它们可分解为权分量的直和：$Z_{Fr}^{>} = \bigoplus_{\mu \in Q_+^*} Z_{Fr,\ \mu}^{>}$ 和 $Z_{Fr}^{<} = \bigoplus_{\nu \in Q_+^*} Z_{Fr,\ -\nu}^{<}$。令

$$\tilde{Z}_{Fr}^{<} = \bigoplus_{\nu \in Q_+^*} \tilde{Z}_{Fr,-\nu}^{<}, \quad \tilde{Z}_{Fr}^{>} = \bigoplus_{\mu \in Q_+^*} \tilde{Z}_{Fr,\mu}^{>} \quad \text{with} \quad \tilde{Z}_{Fr,-\nu}^{<} = Z_{Fr,-\nu}^{<} K^{\kappa(\nu)}, \quad \tilde{Z}_{Fr,\mu}^{>} = Z_{Fr,\mu}^{>} K^{\gamma(\mu)}.$$

那么我们仍有分解$Z_{Fr} = \tilde{Z}_{Fr}^{<} \otimes_R Z_{Fr}^0 \otimes_R \tilde{Z}_{Fr}^{>}$，参见引理6.3(c)。

命题 6.10。存在一个 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-线性代数同构

$$\varphi\colon Z_{Fr} \xrightarrow{\sim} R[G_0^d] \simeq R[U_-^d] \otimes_R R[T^d] \otimes_R R[U_+^d].$$

*Furt*此外，在此同构下，我们有： $\tilde{Z}_{Fr}^{<} \simeq R[U_+^d]$, $\tilde{Z}_{Fr}^{>} \simeq R[U_-^d]$, $Z_{Fr}^0 \simeq R[T^d]$。

证明。我们有两个伴随的 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-不变配对，它们在第一自变量上非退化：

$$Z_{Fr} \times \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d) \longrightarrow R \qquad \text{and} \qquad R[G_0^d] \times \dot{U}_R(\mathfrak{g}^d) \longrightarrow R.$$

它们给出了 R-代数嵌入

$$Z_{Fr} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d), R) \hookleftarrow R[G_0^d],$$

它们与.....交织 $\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)$-作用。因此，只需证明.....的像 $\tilde{Z}_{Fr}^{<}, \tilde{Z}_{Fr}^{>}, Z_{Fr}^0$ 分别与 $R[U_+^d]$、$R[U_-^d]$、$R[T^d]$ 作为 R-子模时的像重合。

由引理 6.7，可知 K^λ可识别为 $\chi_{-\lambda/2} \in R[T^d]$，因此 Z_{Fr}^0可识别为 $R[T^d]$ 视为 R-子代数时的 $\mathrm{Hom}_R(\dot{U}_R(\mathfrak{g}^d)\ R)$。

令 $\dot{U}_R^0(\mathfrak{g}^d)+$, $\dot{U}_R^{>}(\mathfrak{g}^d)+$分别为余单位映射限制在 $\dot{U}_R^0(\mathfrak{g}^d)\dot{U}_R^{>}(\mathfrak{g}^d)$ 上的核。对于任意 $z \in \tilde{Z}_{Fr,\ \mu}^{>}$，有

$$\langle z, \dot{y}u_0\dot{x}\rangle' = 0,$$

如果 $u_0 \in \dot{U}_R^0(\mathfrak{g}^d)+$或。 $x \in \dot{U}_R^>(\mathfrak{g}^d)+$。此外，根据引理 6.6，配对 $\tilde{Z}_{Fr,\ \mu}^> \times \dot{U}_R^<(\mathfrak{g}^d)$ $_{-\mu} \to R$是完美配对。因此，，μ必须与 $R[U_-^d]_{-\mu}$ 等同，从而$\tilde{Z}_{Fr}^> \simeq R[U_-^d]$。

像 $\tilde{Z}_{Fr}^< \simeq R[U_+^d]$ 重合的证明类似。 □

6.3. Z_{Fr} **在** $R=\mathbb{F}$ **为代数闭域时的局部有限部分**。定义

$$Z_{Fr}^{fin} := \{z \in Z_{Fr} | \dim_{\mathbb{F}}(\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)z) < \infty\} \tag{6.11}$$

这是 Z_{Fr} 的一个子代数，因为 Z_{Fr} 是一个 $\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)$-模代数。

引理 6.11。 *(a)* $Z_{Fr}^{fin} \cong \mathbb{F}[G^d]$ 在同构 φ 下，对应命题 *6.10*。 *(b)* 设 $\lambda_0 = \sum_i \omega_i^* = \sum_i \ell_i \omega_i$，其中 ω_i 为基本权，而 ℓ_i 与第*5*节中的定义相同。则 $Z_{Fr}^{fin}[K^{2\lambda_0}] = Z_{Fr}$，其中左边是将 Z_{Fr}^{fin} 按 $K^{2\lambda_0}$ 局部化所得。 *(c)* 假设 $\mathbb{F}$ 的特征为 0，则 $Z_{Fr}^{fin} = \bigoplus_{\lambda \in P_+^*} \dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d) K^{-2\lambda}$。

证明。 (a) 我们只需证明 $\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)$-局部有限部分 $\mathbb{F}[G_0^d]$ 是 $\mathbb{F}[G^d]$。首先， $G^d(\mathbb{F})$ 的所有共轭类都与 $G_0^d(\mathbb{F})$ 相交，因为 $G_0^d(\mathbb{F})$ 含有一个 Borel 子群 $B^d(\mathbb{F})$，且 $G^d(\mathbb{F})$ 的任意元素都可以共轭到 $B^d(\mathbb{F})$ 中的某个元素。

令 $V^d(\lambda_0)$ 为 $\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)$ 的 Weyl 表示。令 $v_{\lambda_0}^d$ 为 $V^d(\lambda_0)$ 的最高权向量，并令 $(v_{\lambda_0}^d)^*$ 为 $v_{\lambda_0}^d$ 在 $(V^d(\lambda_0))^*$ 中的对偶权基。利用 Bruhat 胞腔分解 $G^d(\mathbb{F}) = \bigsqcup_{w \in W} U_-^d(\mathbb{F})\ \dot{w} T^d(\mathbb{F}) U_+^d(\mathbb{F})$，可以证明 $f = c_{(v_{\lambda_0}^d)^*, v_{\lambda_0}^d}$ 的零点集为 $G^d(\mathbb{F}) \backslash G_0^d(\mathbb{F})$，即 $G^d(\mathbb{F})$ 中开 Bruhat 胞腔 $G_0^d(\mathbb{F})$ 的补集。

设 V 是一个有限维 $\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)$-子模。设 C 是由 $\mathbb{F}[G^d]$ 和 V 生成的 $\mathbb{F}[G_0^d]$ 的子代数。那么 C 是一个 $\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)$-局部有限代数，且作为代数是有限生成的。设 $X = =\mathrm{Spec}(C)$。我们有约化 $G^d(\mathbb{F})$-代数的一个包含关系 $\mathbb{F}[G^d] \hookrightarrow C$，它诱导出局部化的一个同构 $\mathbb{F}[G^d]_f \cong C_f \cong \mathbb{F}[G_0^d]$。因此存在一个 $G^d(\mathbb{F})$-簇的映射 $\psi: X \to G^d(\mathbb{F})$，使得 $X_f \to G_0^d[\mathbb{F}]$ 是同构，其中 $X_f = =\mathrm{Spec}(C_f)$。设 $G^d X_f$ 是包含 X_f 的 X 的最小 G^d-子簇。由于 $G_0^d(\mathbb{F})$ 与所有 $G^d(\mathbb{F})$-轨道相交，因此 $\psi: G^d X_f \to G^d$ 是同构。另一方面，由于 C 是一个整环，因此 X 是不可约簇，且 $G^d X_f$ 是 X 的开稠密子集。因此，包含映射 $\mathbb{F}[G_0^d] \hookrightarrow C \to \mathbb{F}[G^d X_f]$ 的复合是同构，从而 $\mathbb{F}[G^d] = C$。这意味着，任何有限维 $\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)$-子模 V 都包含于 $\mathbb{F}[G_0^d]$ 的 $\mathbb{F}[G^d]$ 中。

(b)利用方程（6.5），容易证明 $\varphi(K^{-2\lambda_0}) = c_{(v_{\lambda_0}^d)^*,\ v_{\lambda_0}}$。于是由 (a) 部分可得 (b) 部分。

(c) 对任意 $\lambda \in P_+^*$，令 $V^d(\lambda)$ 为 $\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)$ 的韦伊模。令 v_λ^d 为 $V^d(\lambda)$ 的非零最高权向量，并令 $(v_\lambda^d)^*$ 为对偶权向量。当 $\mathbb{F}$ 的特征为 0 时，由彼得-外尔定理， $\mathbb{F}[G^d] = \bigoplus \dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d) c_{(v_\lambda^d)^*,\ v_\lambda^d}$。再次利用方程（6.5），$\varphi(K^{-2\lambda}) = c_{v_\lambda^d,\ v_\lambda}$，对 $\lambda \in P_+^*$成立。因此 (c) 部分得证。□

7. Rational representations of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ and $U_q(\mathfrak{g})$

考虑环 $\mathcal{A} := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$，使得 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的有限局部化。令 R 为一个 $\mathcal{A}$-代数，并令 q 表示 v 在 R 中的像。于是，我们可以如上在 R 上构造 Lusztig 形式 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$。

本节旨在回顾若干与 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$的有理表示相关的已知结果和构造。随后，我们将这些结果推广到$U_q(\mathfrak{g})$的有理表示。

定义 7.1。 设 M 是一个 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模。如果满足以下条件，我们就称它为*1* 型有理（下文简称有理）：

(i) M 是一个权模，即存在一个分解 $M=\bigoplus_{\lambda\in P}M_\lambda$，其中 K_i 通过 $q^{(\lambda,\alpha_i)}$ 作用于M_λ，且 $\begin{bmatrix}K_i;&0\\&t\end{bmatrix}$ 通过 $\begin{bmatrix}(\lambda,&\alpha_i^\vee\\&t\end{bmatrix}_{q_i}$)作用，其中对所有 $i=1,\dots,r$ 以及所有 $t>0$均成立。(ii) 对任意 $m\in M$，存在 $k>0$，使得对所有 $s>k$ 以及所有 $i=1,\dots,r$均有 $E_i^{(s)}m=0$。(iii) 对任意 $m\in M$，存在 $k>0$，使得对所有 $s>k$ 以及所有 $i=1,\dots,r$均有 $F_i^{(s)}m=0$。

定义 7.2. 令 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-Lmod 表示左 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模的范畴。令 Rep($\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$) 表示 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的有理表示范畴。Rep($\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$) 中的态射是保持权分解的左 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模态射。

命题 7.3. 自然函子 $\mathscr{I}:\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))\to\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-Lmod 是完全忠实的。此外，其像对取子商封闭。

在给出证明之前，我们需要以下结果。对于任意 $\lambda\in P$，令 $\chi_\lambda\colon \dot{\mathcal{U}}_q^0(\mathfrak{g})\to R$ 为由下式定义的 R- 代数同态

$$\chi_\lambda:\qquad K_i\mapsto q^{(\lambda,\alpha_i)},\qquad \begin{bmatrix}K_i;0\\t\end{bmatrix}_{q_i}\mapsto\begin{bmatrix}(\lambda,\alpha_i^\vee)\\t\end{bmatrix}_{q_i}. \tag{7.1}$$

对于任意 $N\in\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$-Lmod，令 $N_{(\lambda)}:=\{n\in N|xn=\chi_\lambda(x)n\ \forall x\in\dot{\mathcal{U}}_q^0(\mathfrak{g})\}$。

引理 7.4. $\sum_{\lambda\in P}N_{(\lambda)}$ 在 N 中的和是直和 $\bigoplus_\lambda N_{(\lambda)}$。因此，对于任意$M\in$ 表示范畴($\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$)，权空间 M_λ 由 $M_\lambda=\{m\in M|xm=\chi_\lambda(x)m\ \forall x\in\dot{\mathcal{U}}_q^0(\mathfrak{g})\}$唯一确定。

证明. 设 $\sum_{i=1}^m n_{\lambda_i}=0$ 满足 $n_{\lambda_i}\in N_{(\lambda_i)}$。那么 $\chi_{\lambda_1}(x)n_{\lambda_1}+\dots+\chi_{\lambda_m}(x)n_{\lambda_m}=0$ 对所有$x\in\dot{\mathcal{U}}_q^0(\mathfrak{g}$均成立。仿照引理 4.10.b 中的论证，可得 $n_{\lambda_i}=0$ 对所有 i均成立。 □

命题 7.3 的证明。设 $M_1,M_2\in$ 表示范畴($\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$)。要证明其完全忠实，只需证明 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模的任意态射 $M_1\to M_2$ 保持权分解。这由引理 7.4 得出。下面证明其像在取子商后仍封闭。设$M\in$ 表示范畴($\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$)。假设在 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$-Lmod 中有一个短正合列：$0\to M_1\xrightarrow{\iota}M\xrightarrow{\pi}M_2\to 0$。我们有 $M_2=\sum_\lambda\pi(M_\lambda)$ 和 $\pi(M_\lambda)\subset M_{2,(\lambda)}$。由引理 7.4 可知，$M_2=\bigoplus_\lambda\pi($ $M_\lambda)$，因此，$M_2\in$ 表示范畴($\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$)，进而 $M_1\in$ 表示范畴($\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$)。□

注 7.5. 设 $N\in\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-Lmod。由命题 7.3 和引理 7.4 ，我们可以讨论最大有理子表示 $N^{ral}$of N。此外，对于任意 $M\in$表示范畴($\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$),

$$\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(M,N^{ral})=\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(M,N).$$

我们将需要以下结果。

命题 7.6. 设 $M\in$ 表示范畴($\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$) 且 $m\in M$。那么 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})m$ 在 R证明。 任取最长元 w_0 在魏尔群 W 中的一个约化分解 $w_0=s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_N}$。 所需结果由以下引理立即得出：□

引理 7.7. *(a)* 设 $\dot{\mathcal{U}}_i^>$表示由 $\{E_i^{(s)}\}_{s\in\mathbb{N}}$生成的 R-子代数。那么：

$$\dot{\mathcal{U}}^>=\dot{\mathcal{U}}_{i_1}^>\dot{\mathcal{U}}_{i_2}^>\cdots\dot{\mathcal{U}}_{i_N}^>.$$

(b) 令 $\dot{\mathcal{U}}_i^<$ 表示由 $\{F_i^{(s)}\}_{s\in\mathbb{N}}$ 生成的 R-子代数。则：

$$\dot{\mathcal{U}}^<=\dot{\mathcal{U}}_{i_1}^<\dot{\mathcal{U}}_{i_2}^<\cdots\dot{\mathcal{U}}_{i_N}^<.$$

证明。对于 $R=k[v,v^{-1}]$ 的情形（其中 k 是任意域），这已在 [JL1，§5.8-5。11]中证明。一般 R 的情形将在下文分几种情况处理。

情形 *1*： R 是一个域。这由 $R=k[v^{\pm 1}]$ 的情形经基变换可得。

情形 *2*： R 是一个剩余域为 k的局部环。考虑 (a) 的情形；(b) 的情形类似。取 $\mu\in Q^+$。那么， $\dot{\mathcal{U}}^>$ 中的 μ-权分量及其子模 $\dot{\mathcal{U}}^>_{i_1}\dot{\mathcal{U}}^>_{i_2}\cdots\dot{\mathcal{U}}^>_{i_N}$ 都是有限生成的 R-模。注意到下图是交换图：

$$\begin{array}{ccc}(\dot{\mathcal{U}}^>_{R,i_1}\dot{\mathcal{U}}^>_{R,i_2}\cdots\dot{\mathcal{U}}^>_{R,i_N})_\mu & \longrightarrow & \dot{\mathcal{U}}^>_{R,\mu}\\ \downarrow & & \downarrow\\ (\dot{\mathcal{U}}^>_{k,i_1}\dot{\mathcal{U}}^>_{k,i_2}\cdots\dot{\mathcal{U}}^>_{k,i_N})_\mu & \longrightarrow & \dot{\mathcal{U}}^>_{k,\mu}\end{array}.$$

竖直箭头是从 R 到 k的基变换。由情形 1 可知，底部水平箭头是满射。应用中山引理，可推出顶部水平箭头是满射。

情形 *3*： R是一般情形。由情形 2 可知，同态 $(\dot{\mathcal{U}}^>_{R,\ i_1}\dot{\mathcal{U}}^>_{R,\ i_2}\cdots\dot{\mathcal{U}}^>_{R,\ i_N})_\mu\to\dot{\mathcal{U}}^{>0}_{R,\ \mu}$在每个极大理想处局部化后均为满射。因此它是满射。□

7.1. **韦伊模与对偶 Weyl 模。**

令 $\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_q)$ 表示满足定义 $\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_q$（分别$\dot{\mathcal{U}}^{\leqslant}_q$）7.1 的条件（i）和（ii）（分别为（iii））的 7.1. 令 $\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))$,$\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_q)$, $\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{\mathcal{U}}^{\leqslant}_q)$ 表示相应范畴的子范畴，其中包含所有在 R 上有限生成的对象。

按照 [APW 的做法， §1.1.14]我们定义 Joseph 归纳函子 $\mathfrak{J}:\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_q)\to\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))$ 如下：对于任意 $N\in\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_q)$ 中的对象，令 $\mathfrak{J}(N)$ 为 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})\otimes_{\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_q}N$的最大有理商。此最大有理商的存在性见 [APW，命题 1。14]。

注 7.8。APW 中考虑的代数定义在局部化环 $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}_0}$ 上，其极大理想为 $\mathfrak{m}_0=(v-1,p)$，其中 $p\in\mathbb{Z}$ 是某个奇素数。不过目前为止，APW 第 1.20 节之前关于 Joseph 归纳函子的结果对一般的 R 都成立。我们注意到，APW 中的引理 1.13 可由 [L5, §41.2] 中构造的任意有理 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模上的 Lusztig 的辫群作用推出，因此我们不采用 APW 中的证明，因为该证明不适用于一般的环 R。仔细处理后，APW 中引理 1.11 的证明也仍然成立。

以下结果见 [APW，命题 1。17]

命题 7.9。 函子 $\mathfrak{J}$ 是限制函子 $\mathfrak{F}:\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))\to\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_q)$ 的左伴随。

任意的 $\lambda\in P$都会给出同态 $\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_q\to R$，该同态由特征 $\chi_\lambda:\dot{\mathcal{U}}^0_q(\mathfrak{g})\to R$诱导到 $\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_q(\mathfrak{g})$。我们将对应于此同态的 $\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_q$ 上的秩 1 模记作 R_λ。

定义 7.10. $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模 $\Delta_q(\lambda):=\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\otimes_{\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_q}R_\lambda$称为*Verma* 模。对于 $\lambda\in P_+$，模 $W_q(\lambda):=\mathfrak{J}(R_\lambda)$ 称为韦伊模。

命题7.9给出自然同构：

$$\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(W_q(\lambda),?)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_q}(R_\lambda,?). \tag{7.2}$$

根据 [APW，命题 1。20], 我们有

命题 7.11. $W_q(\lambda)$ 是 $\Delta_q(\lambda)$ 对关系 $F_i^{[k]}v_\lambda=0$ 取商所得的商，对所有 $k>\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle$ 以及所有 $i=1,\ldots,r$均如此。这里， v_λ 表示 R_λ 中与1对应的元素。

命题 7.11 意味着 $W_q(\lambda) = W_{\mathcal{A}}(\lambda) \otimes_{\mathcal{A}} R$。由 .6.2 in [RH, §2.6], 我们得到韦伊模的一个重要性质:

引理 7.12. 模 $W_q(\lambda)$ 是 R 上的自由模，具有由权向量组成的 R-基，其特征由 *Weyl* 特征标公式给出。

注 7.13. 因此, [APW、§1-4] 在环 $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}_0}$ 上的结果同样适用于任意 $\mathcal{A}$-代数R ，但须将有限生成 $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}_0}$-模的自由性条件改为有限生成 R-模的投射性条件（少数情形除外）。

此外，我们有通常的诱导函子 H^0: 表示范畴($\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}$) $\to$ 表示范畴($\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$)，定义如下。对于任意 $M \in$表示范畴($\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}$)，空间 $\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}) M)$ 带有左 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$-模结构：对于任意 x, $u \in \dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$ $f \in \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}) M)$，有 $(xf)(u) = f(ux)$。于是， $H^0(M)$ 定义为 $\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) M)$ 的最大有理 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-子表示。以下结果见 [APW，命题 2。12]

命题 7.14. 函子 $H^0 : \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}) \to \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$ 是限制函子 $\mathfrak{F} : \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})) \to \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant})$的右伴随。

定义 7.15. 对于任意支配权 λ，模 $H_q^0(\lambda) := H^0(R_\lambda)$ 称为对偶魏尔模。

由命题 7.14，可得

$$\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(?, H_q^0(\lambda)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}}(?, R_\lambda). \tag{7.3}$$

注 7.16. 我们采用 H^0 中 [APW] 对函子 [RH], 的定义[RH, §2.9]而非 [RH] 中的定义 H^0。

7.2. **一些同调性质**。

替换 $\dot{\mathcal{U}}^{\leqslant}$与 R 和 $\dot{\mathcal{U}}^0$ 我们有以下诱导函子

$$H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, -) : R\text{-Lmod} \to \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})),$$
$$H^0(\dot{\mathcal{U}}/\dot{\mathcal{U}}^0, -) : \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q^0) \to \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})).$$

引理 7.17。 *(a)* 函子 $H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, -)$ 是正合的，会将内射对象映为内射对象，并且 $H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, M) \cong H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, R) \otimes_R M$对任意 R-模 M 都成立。特别地， $H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, -)$与直极限可交换。

(b) 函子 $H^0(\dot{\mathcal{U}}/\dot{\mathcal{U}}^0, -)$ 是正合的，并会将内射对象映为内射对象。*(c)* $H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathcal{A}, \mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} R \cong H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, R)$ 对任意 $\mathcal{A}$-代数 R 都成立。因此，对于任意 R-代数 R'，我们有 $H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, R) \otimes_R R' \cong H^0(\dot{\mathcal{U}}/R', R')$。

证明。（a）部分由 [APW、§1.31] 以及备注 7.13 得出。（b）部分由 [APW、§2.11、2.13]以及备注 7.13 得出。（c）部分见 [AW, §4.2]（感谢第 7.1 节和7.3 节中说明的结果，我们可以使用环 $\mathcal{A}$ 代替 $\mathcal{A}_1$ 中的环 [AW, §4.1]）。□

我们来为 $N \in \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ 构造一个内射分解。首先，将 N 嵌入内射 R-模 I^0 中。于是 N 是 N^0 的一个 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$-子模：$= H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, I^0)$。对 N^0/N 重复这一过程。由此得到正合列 $\ldots 0 \to N \to N^0 \to N^1 \to \ldots$，使得对于某个内射 R-模 I^i，有 $N^i = H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, I^i)$；于是 $N^0 \to N^1 \ldots$ 是 N 的一个内射分解。

存在一个由以下方式构造的 N**大型标准分解**： $N \hookrightarrow H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, N)$使 N成为 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$-子模，并成为 $H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, N)$的一个直 R-模直和项。令 $Q^0 =$

$H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, N)$。对 Q^0/N 重复这一过程，便得到一个分解 $N \to Q^0 \to Q^1 \to \ldots$，其中 $Q^i = H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, Q^{i-1}/Q^{i-2})$。

此外，N 有一个标准分解，构造如下：$N \hookrightarrow H^0(\dot{\mathcal{U}}/\dot{\mathcal{U}}^0, N)$ 使 N 成为 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$-子模以及 $H^0(\dot{\mathcal{U}}/\dot{\mathcal{U}}^0, M)$ 的一个直和 $\dot{\mathcal{U}}_q^0$-模直因子。令 $Q^0 := H^0(\dot{\mathcal{U}}/\dot{\mathcal{U}}^0, N)$。然后对 Q^0/N 重复此过程，便得到一个分解 $N \to Q^0 \to Q^1 \to \ldots$，其中 $Q^i = H^0(\dot{\mathcal{U}}/\dot{\mathcal{U}}^0, Q^{i-1}/Q^{i-2})$。此处我们滥用了记号 Q^i。这个标准分解就是 [APW, §2.17] 中所考虑的分解。

现在我们来证明 $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ 的一些同调性质；这些性质并非自动成立，因为 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 既不是诺特环，也不是有限生成代数。关键在于，诱导函子 $H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, -)$ 使我们能够将这些同调陈述转化为 R-Lmod 中的相应陈述。为强调 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 的基环，我们将 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 记作 $\mathcal{U}_R(\mathfrak{g})$。

引理 7.18。设 R 是一个诺特环。设 $M \in \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_R(\mathfrak{g}))$，使得 M 是一个有限生成的 R-模。则函子 $\mathrm{Ext}^i{}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_R(\mathfrak{g}))}(M, -)$ 与滤过直接极限交换。

证明。首先，我们回顾一种将 R-模函子性地嵌入内射 R-模的方法。设 M 是一个 R-模。令 $M^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$。我们有 R-模的一个嵌入 $M \hookrightarrow (M^\vee)^\vee$。令 $F_{M^\vee} := \oplus_{m \in M^\vee} R$ 为一个自由 R-模，其中指标遍历所有元素 $m \in M^\vee$，于是 $F_{M^\vee}^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_{M^\vee}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是一个内射 R-模。存在一个 R-模的自然满射态射 $F_{M^\vee} \twoheadrightarrow M^\vee$，由此得到一个 R-模的内射态射 $(M^\vee)^\vee \hookrightarrow F_{M^\vee}^\vee$。于是嵌入 $M \hookrightarrow F_{M^\vee}^\vee$ 关于 M 是函子性的。特别地，对于任意 R-模的直接系统 $\{M_i\}_I$，我们可以构造一个嵌入的直接系统 $\{M_i \hookrightarrow F_{M_i^\vee}^\vee\}_I$。

令 $\{N_i\}$ 为 $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_R(\mathfrak{g}))$ 中的一个直接系统，且 $\varinjlim N_i = N \in \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_R(\mathfrak{g}))$。根据上一段，我们可以构造一个由 R-模 $\{N_i \hookrightarrow I_i^0\}_I$ 的嵌入组成的直接系统，其中 I_i^0 是内射 R-模。这给出一个嵌入的直接系统 $\{N_i \hookrightarrow N_i^0\}_I$，其中 $N_i^0 = H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, I_i^0)$。重复这一过程，我们可以在 $\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_R(\mathfrak{g}))$ 中构造一个内射分解 $\{N \to N_i^0 \to N_i^1 \ldots\}_I$ 的直接系统，其中 $N_i^j = H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, I_i^j)$，其中某个内射 R-模为 I_i^j。

滤过直极限保持模范畴中的正合序列，而内射 R-模的直极限仍是内射 R-模，只要 R 是诺特的。因此，$\{N_i \to N_i^0 \to N_i^1 \ldots\}$ 的直极限给出一个内射分解 $N \to N^0 \to N^1 \to \ldots$，其中 $N^j = \varinjlim H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, I_i^j) = H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, \varinjlim I_i^j)$（$\varinjlim I_i^j$ 是一个内射 R-模）。最后一个等式成立，是因为根据引理7.17，$H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, -)$ 与直极限可交换。现在由此可得引理

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_R(\mathfrak{g})}(M, N_i^j) = \varinjlim \mathrm{Hom}_R(M, I_i^j) = \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim I_i^j) = \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_R(\mathfrak{g})}(M, N^j),$$

第二个 个等式成立，因为 R 是诺特的，且 M 是有限生成的 R-模。 □

引理 7.19。设 R 是一个诺特环。设 $M \in$表示范畴$(\mathcal{U}_R(\mathfrak{g}))$ 满足 M 是一个有限生成的 R-模。那么对于任意 $N \in$表示范畴$(\mathcal{U}_R(\mathfrak{g}))$，我们有一个同构

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_R(\mathfrak{g}))}(M, N) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_{R_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{g}))}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}), \tag{7.4}$$

对 $i \geq 0$，此处 $\mathcal{U}_{R_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{g}) := \mathcal{U}_R(\mathfrak{g}) \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$，$M_{\mathfrak{p}} := M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$ 以及 $N_{\mathfrak{p}} := N \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$。

证明。步骤 *1*。我们将证明，对于任意 $N \in$ 表示范畴$(\dot{\mathcal{U}}_R(\mathfrak{g}))$，自然映射 $N^{\dot{\mathcal{U}}} \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \to (N_{\mathfrak{p}})^{\dot{\mathcal{U}}}$ 是一个同构。由命题 7.6，N 是表示范畴$(\mathcal{U}_R)$中有限生成的模的并，且这些模在 R 上有限生成。因此由引理 7.18，我们可以假设 N 在 R 上有限生成。于是

存在 m_0，使得 $E_i^{(m)}n = F_i^{(m)}n = 0$ 对所有 $m \geq m_0$，$n \in N$ 以及 $1 \leq i \leq r$ 均成立。因此 e,

$$N^{\dot{\mathcal{U}}} = \{n \in N_0 | E_i^{(m)}n = F_i^{(m)}n = 0 \ \ \forall 1 \leq m < m_0, 1 \leq i \leq r\}$$
$$N_{\mathfrak{p}}^{\dot{\mathcal{U}}} = \{n \in (N_{\mathfrak{p}})_0 | E_i^{(m)}n = F_i^{(m)}n = 0 \ \ \forall 1 \leq m < m_0, 1 \leq i \leq r\}$$

由于局部化与有限交可交换，因此得到 $N^{\dot{\mathcal{U}}} \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong (N_{\mathfrak{p}})^{\dot{\mathcal{U}}}$。

步骤 2. 对于任意 $N \in$表示范畴$(\mathcal{U}_R(\mathfrak{g}))$，自然映射

$$\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_R}(M, N) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_{R_{\mathfrak{p}}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}), \tag{7.5}$$

是一个同构。事实上，

$$\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_R}(M, N) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Hom}_R(M, N)^{\dot{\mathcal{U}}} \otimes_R R_{\mathfrak{p}}, \quad \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_{R_{\mathfrak{p}}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})^{\dot{\mathcal{U}}}.$$

由于 M是一个有限生成的 R-模，因此 $\mathrm{Hom}_R(M, N) \in$表示范畴$(\mathcal{U}_R(\mathfrak{g}))$ 且$\mathrm{Hom}^{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}) \in$表示范畴$(\mathcal{U}_{R_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{g}))$，并且 $\mathrm{Hom}^{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Hom}_R(M, N) \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$。因此，由步骤 1 可得 (7.5) 成立。

步骤 3. 令 $N \to N^0 \to N^1 \to \ldots$为 N的一个内射分解，其中 $N^i = H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, I^i) \cong H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, R) \otimes_R I^i$ 对于某个内射 R-模 I^i，由引理 7.17 可得该同构。我们有 $N^i \otimes_R R_{\mathfrak{p}} = H^0(\dot{\mathcal{U}}/R_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} I^i_{\mathfrak{p}}$，且 $I^i_{\mathfrak{p}}$ 是一个内射 $R_{\mathfrak{p}}$-模，因为 R 是诺特的。因此，将 $- \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$ 应用于 N的内射分解，可得到 $N_{\mathfrak{p}}$的一个内射分解。利用步骤 2，并通过 N 和 $N_{\mathfrak{p}}$ 的内射分解计算 Ext 群，我们得到 (7.4)。□

令 I 为 R 的一个理想，且 $R_I := R/I$。设 $N \in \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_{R_I}(\mathfrak{g}))$，则 N 可视为 $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_R(\mathfrak{g}))$中的一个对象。设 $M \in \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_R(\mathfrak{g}))$。则 $M_{R_I} := M_R \otimes_R R_I \in \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_{R_I}(\mathfrak{g}))$。

引理 7.20. 设 R 是一个诺特环。假设 M 是 R 上的有限生成射影模，则对所有 $i \geq 0$,

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_R(\mathfrak{g}))}(M_R, N_{R_I}) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_{R_I}(\mathfrak{g}))}(M_{R_I}, N_{R_I}). \tag{7.6}$$

证明. 由于 M_R 是有限生成射影 R-模，M_{R_I} 是有限生成射影 R_I-模。因此，我们可以使用 N_{R_I} 在 $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_R(\mathfrak{g}))$和 $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_{R_I}(\mathfrak{g}))$ 中的大型标准分解来计算 (7.6) 中的 Ext 群，参见引理 7.19证明最后一段中的论证。的这两个大型标准分解如下：

$$N_{R_I} \to Q^0_R \to Q^1_R \to \ldots, \qquad N_{R_I} \to Q^0_{R_I} \to Q^1_{R_I} \to \ldots$$

其中 $Q^i_R = H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, Q^{i-1}_R/Q^{i-2}_R)$ 和 $Q^i_{R_I} = H^0(\dot{\mathcal{U}}/R_I, Q^{i-1}_{R_I}/Q^{i-2}_{R_I})$。

由引理 7.17,

$$Q^0_R = H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, N_{R_I}) \cong H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, R) \otimes_R N_{R_I} \cong H^0(\dot{\mathcal{U}}/R_I, R_I) \otimes_{R_I} N_{R_I} \cong H^0(\dot{\mathcal{U}}/R_I, N_{R_I}) = Q^0_{R_I}$$

由归纳法，$Q^i_R \cong Q^i_{R_I}$。另一方面，

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_R(\mathfrak{g}))}(M_R, Q^i_{R_I}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_{R_I}(\mathfrak{g}))}(M_{R_I}, Q^i_{R_I}).$$

因此，(7.6) 成立。 □

7.3. **Kempf 消失。**

表示范畴(多的内射对象，见 [APW， §2。13]。因此，我们可以定义诱导函子 H^i 的高阶导出函子 H^0。

我们用 $H_q^i(\lambda)$ 表示 $H^i(R_\lambda)$。令 $\lambda^* := -w_0\lambda$。

命题 7.21。假设 R 是诺特的，且 λ 是支配的。以下结论成立：

(i) 有 $H_q^0(\lambda) \simeq \mathrm{Hom}_R(W_q(\lambda^*)\ R)$。

(ii) 对所有 $i > 0$，都有 $H_q^i(\lambda) = \{0\}$。

该命题的第二部分称为 Kempf 消失定理。在 [APW],将 $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}_0}$ 特化到其剩余域 k 后，$q = 1 \in k$ 使作者得以在证明 Kempf 消失定理时使用一些关于模表示的结果。现在考虑基环为 $\mathcal{A}$的情形。对于任意极大理想 $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}$，域 $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$ 是有限域，因此 $q \in \mathcal{A}/\mathfrak{m}$ 是单位根。关于 [RH] 中域k 具有正特征且 $q \in k$ 为单位根时的一些结果，可以替代 [APW]证明 Kempf 消失定理时对模表示结果的引用。这样，我们便可以先在$\mathcal{A}$上证明 Kempf 消失定理，再通过基变换将其推广到 $\mathcal{A}$-代数 R 上。

证明。 (i) 根据注7.13，这一部分已在 [APW，命题 3.3]中证明。 (ii) 步骤 *1*：首先，我们考虑基环为 $\mathcal{A}$ 的情形。这可通过推广 [APW中的结果来证明，§5.5] 如下所示。对于任意极大理想 $\mathfrak{m} \in \mathcal{A}$，令 $\mathcal{A}_\mathfrak{m}$ 为局部化，并令 $k := \mathcal{A}_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\mathcal{A}_m \cong \mathcal{A}/\mathfrak{m}$ 为 $\mathcal{A}_\mathfrak{m}$的剩余域。那么 k 是一个正特征有限域。令 $\bar{q}$ 表示 q 在 k 中的像，则 $\bar{q}$ 是 k中的一个单位根。

- [APW 定理 5.1] 在 $\mathcal{A}$上成立。为了证明自然同态 $H_q^0(\lambda) \to H_q^0(s,\lambda)$（目标对象在定理之前引入）是满射，只需证明它在任意极大理想 $\mathfrak{m} \subset \mathcal{A}$处的局部化 $\mathcal{A}_\mathfrak{m}$ 上是满射。后者可按同上引文中的方法完成。在 (ii) 的证明中，为了证明自然同态$H_{\bar{q}}^0(\lambda) \to H_{\bar{q}}^0(s,\lambda)$是满射，将其中的参考文献替换为 [RH，引理5.3]：该引理结合 [RH 定理 5.4]中的同构 $\mathcal{D}_{w_0}(\lambda) \cong \mathcal{D}(\lambda)$，可推出 $H_{\bar{q}}^0(\lambda) \to H_{\bar{q}}^0(s,\lambda)$的对偶是单射。

- [APW，引理 5.3] 在 $\mathcal{A}$上成立。如同上中的证明所示，在 $H^0(\dot{\mathcal{U}}^{\leqslant}/\dot{\mathcal{U}}^0,\ \mu)$ 内，我们构造一个由与 $H_{\mathcal{A}}^0(m\rho) \otimes \mathcal{A}_{m\rho+\mu}$ 同构的子模组成的并，它定义在 $m \geq 0$上。但在任意极大理想 $H^0(\dot{\mathcal{U}}^{\leqslant}/\dot{\mathcal{U}}^0,\ \mu)$ 处局部化后，这个子模升链便相等；这可由 $\mathfrak{m} \subset \mathcal{A}$ 同上中的相同证明得到。因此， [APW，引理 53]在 $\mathcal{A}$上成立。

- 由此可知， [APW，定理 54] 在 $\mathcal{A}$上成立。

- [APW，命题 5.6] 在 $\mathcal{A}$上成立。该命题的第 (i) 部分在任意极大理想 $\mathcal{A}_\mathfrak{m}$ 处局部化后仍成立 $\mathfrak{m}$：在 $H_{\bar{q}}^0(\lambda) \xrightarrow{\sim} H_{\bar{q}}^0(w_0,\ \lambda)$ 的证明中，只需将其中引用的结果替换为 [RH，定理 54]。因此，第(i)部分在 $\mathcal{A}$上成立，进而可得第 (ii)、(iii) 部分。

然后，通过结合 $H_{\mathcal{A}}^i(\lambda) = 0$ 关于 $i \geq 1$ 的结论可由 [APW，定理 5.4(i)] 和[APW，命题 5.6 (iii)]得到。

步骤 *2*：对于一般的 $\mathcal{A}$-代数 R，现在我们可以使用 [APW 中的谱序列，§3.4 – 3.5]（其中 $\mathcal{A}_\mathfrak{m}$ 被 $\mathcal{A}$ 和 $\Gamma = R$ 替换），另见 [APW，注 3，5], 以说明$H_q^i(\lambda) = \{0\}$ 对所有 $i > 0$ 均成立，而

$$H_q^0(\lambda) = R \otimes_{\mathcal{A}} H_{\mathcal{A}}^0(\lambda).$$

□

我们指出，对于两个支配权 λ， λ'，有

$$\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(W_q(\lambda), H_q^0(\lambda')) \simeq R^{\oplus \delta_{\lambda,\lambda'}}. \tag{7.7}$$

当 R 是一个域时，非零同态 $W_q(\lambda) \to H_q^0(\lambda)$ 的像是单模。我们将其记为 $L_q(\lambda)$。映射 $\lambda \mapsto L_q(\lambda)$ 是支配权与 $\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))$ 中的单模之间的双射。

7.4. **良好滤过**。

定义 7.22。 设 $M \in \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))$。一个完备的 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$-模滤过 $\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \ldots$ 称为良好的，如果对于每个 i，都有 $M_i/M_{i-1} \simeq H_q^0(\lambda_i) \otimes_R P_i$，其中 λ_i 是某个支配权， R是某个有限生成射影 P_i-模。

引理 7.23。 设 R 是一个域。假设 $M \in \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))$ 满足以下条件

$$\dim_R \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(W_q(\lambda), M) < \infty, \quad \forall \lambda \in P_+, \tag{7.8}$$

其中 $P+$ 表示支配权的集合。那么，以下两个条件等价

(1) M 具有良好滤过。*(2)* Ext^i 表示范畴$(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))(W_q(\lambda)\ M) = 0$，对所有 $i > 0$ 和支配权 λ均成立。

证明。 证明分为几个步骤。

步骤 *1*。我们来证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。子模 M_j 具有良好滤过且是有限维的。因此，对所有i 表示范畴$(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))(W_q(\lambda)\ M_j) = 0$ 均成立， $i > 0$ 以及支配权 λ 由定理 3。1（见 [Pa]）可知。由引理 7.18,

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda), M) = \varinjlim \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda), M_j) = 0,$$

对所有 $i > 0$ 和支配权 λ均成立。

步骤 *2*。接下来需要证明 (2) $\Rightarrow$ (1)。我们将 P_+ 的序细化为全序： $\lambda_1 < \lambda_2 <$。 。 。 。我们将通过归纳法构造 M 上的一个滤过 $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots$，使其穷尽并满足以下条件

(3) M_i/M_{i-1} 是若干（有限多份） $H_q^0(\lambda_i)$ 的直和，(4) 对所有 $n \geq 0$ 以及包含在 $W_q(\lambda_j)$ 的 Serre 张成中且满足 $j \leq i$ 的有限维模 N， Ext^n 表示范畴 $(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))(N, M/M_i) = 0$。

步骤 *2.1.* 基例 $i = 0$。 $M_0 = \{0\}$， 且 (3)、(4) 显然成立。

步骤 *2.2.* 归纳步骤。假设我们已构造出满足 (3) 和 (4) 的 $M_0 \subset M_1 \subset \ldots M_i$。那么 M/M_i 不存在从由 $L_q(\lambda_j)$ 滤过且满足 $j \leq i$ 的对象到它的非零同态。因此，下面的映射是单射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(H_q^0(\lambda_{i+1}), M/M_i) \otimes H_q^0(\lambda_{i+1}) \to M/M_i. \tag{7.9}$$

令 M_{i+1} 为投影 $M \to M/M_i$下（7.9）的像的原像。由于映射 $W_q(\lambda_{i+1}) \to H_q^0(\lambda_{i+1}$ 的核和余核都包含在 $W_q(\lambda_j$ 的 Serre 张成中，且 $j \leq i$，由 (4) 得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(H_q^0(\lambda_{i+1}), M/M_i) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda_{i+1}), M/M_i).$$

那么，对所有 $n \geq 0$ 和 $j \leq i+1$， Ext^n 表示范畴$(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))(W_q(\lambda_j)\ M/M_{i+1}) = 0$。这意味着 M_{i+1} 满足 (4)。

步骤 *2.3*。只需证明我们构造的滤过是穷尽的。由 (4) 可知，对于任意满足所有权均为 $\leq \lambda_i$ 的 $N \in \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))$ （ ），我们有

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(N, M_i) \to \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(N, M) \to \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(N, M/M_i) = 0,$$

这意味着 M_i 是 M 中所有权均为 $\leq \lambda_i$的最大子模。根据命题 7.6， $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})m$ 对所有 $m \in M$ 都是有限维的。假设此子模中的所有权都小于或等于 λ_i。那么 $m \in M_i$。 □

以下是 [Pa]的主要结果。

命题 7.24。 设 R 是一个域。那么，$\mathrm{Rep}(U_q(\mathfrak{g}))$ 中的两个有限维模的张量积也具有良好滤过。

我们需要引理 7.23 和命题 7.24 在正则诺特整环上的类似结果R （我们将关注 $\mathcal{A}$的局部化的完备化）。我们将要用到的一个技术性结果是以下来自 [APW的论断 §5.13]，另见 [Pa， §4.2]。

引理 7.25。 设 M 是 $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$中的一个对象，且是有限生成的射影 R-模。那么，对于任意满同态 $R \twoheadrightarrow k$ 到一个域， M 具有良好滤过，当且仅当 $k \otimes_R M \in \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_k(\mathfrak{g}))$ 具有良好滤过。

证明。证明沿用 [Pa， §4.2]。我们只写出所需的修改。设 $\lambda \in P_+$是 M的权中最大的一个。由关于 M的假设可知， M_λ是有限生成射影 R-模。 $\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}$-模同态 $M \twoheadrightarrow M_\lambda$ 导出一个 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$-同态 $M \to H_q^0(M_\lambda)$。注意到 $H_q^0(M_\lambda) \cong H_q^0(\lambda) \otimes_R M_\lambda$。这是因为 $H_q^0(-)$与直和交换， $H_q^0(R_\lambda^{\oplus n}) \cong H_q^0(\lambda)^{\oplus n}$， 且 M_λ是有限生成射影 R-模。因此我们有一个 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$-模同态 $M \to H_q^0(\lambda) \otimes_R M_\lambda$。证明的其余部分沿用 [Pa， §4.2]。 □

命题7.24 的直接类比如下：

推论 7.26. 在 表示范畴$(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ 中，两个有限生成的 R-模的张量积若都具有良好滤过，其张量积也具有良好滤过。

现在我们将讨论引理 7.23的类比。先从下面的引理开始。

引理 7.27. 设 R是一个诺特环。那么，对于所有$i > 0$ 以及支配权 λ、 λ'，都有 Ext^i 表示范畴$(\dot{\mathcal{U}}_{q(\mathfrak{g})})(W_q(\lambda)\ H_q^0(\lambda')) = 0$。

证明。 由于 $W_q(\lambda)$ 在 R上是自由的，且 $\mathrm{Hom}_R(W_q(\lambda)\ R) \cong H_q^0(\lambda^*)$，我们有

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda), H_q^0(\lambda')) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(R_0, H_q^0(\lambda^*) \otimes_R H_q^0(\lambda')),$$

这里 R_0是一个 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$-模，其作用通过余单位 $\varepsilon\colon \dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}) \to R$。由推论 7.26， $H_q^0(\lambda^*) \otimes_R H_q^0(\lambda')$ 具有良好滤过。因此，只需证明

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(R_0, H_q^0(\lambda)) = 0, \tag{7.10}$$

对于 $i > 0$ 和支配权 λ。由于 $H_q^i(\lambda) = 0$ 对于 $i > 0$ 和支配 λ，因此

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(R_0, H_q^0(\lambda)) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant})}(R_0, R_\lambda).$$

考虑诱导函子 $H^0(\dot{\mathcal{U}}^{\leqslant}/\dot{\mathcal{U}}^0, -)$：表示范畴$(\dot{\mathcal{U}}_q^0) \to$表示范畴$(\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant})$。接着，我们按照第 7.2 节中的方法，为 R_λ 在表示范畴$(\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant})$ 中构造一个标准分解：

$$R_\lambda \to Q^0 \to Q^1 \to \dots, \tag{7.11}$$

其中 $Q^0 = H^0(\dot{\mathcal{U}}^{\leqslant}/\dot{\mathcal{U}}^0, R)$， $Q^i = H^0(\dot{\mathcal{U}}^{\leqslant}/\dot{\mathcal{U}}^0, Q^{i-1}/Q^{i-2})$ 对于 $i > 0$；这里我们设 $Q^{-1} := R_\lambda$。那么，空间 Ext^i $_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant})}(R_0, R_\lambda)$ 可由此标准分解计算。注意以下几点： Q^i 的所有权都包含在 $\lambda + Q_+$中。因此， Q^i 没有小于

0 的权。因此，对 $(\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant})(R_0,-)$ 应用 Hom，得到 (7.11)，它是正合的。由此可得 $\mathrm{Ext}^i{}_{\mathrm{Rep}(}\dot{\mathcal{U}}_q^{\leqslant})(R_0,R_\lambda)=0$ 对于 $i>0$，因此 (7.10) 成立。□

引理 7.28。设 R 是一个正则诺特整环。假设 $M\in\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ 满足以下条件

$$\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(W_q(\lambda),M)\ \textit{is a finitely generated } R\textit{-module}, \forall\lambda\in P_+, \tag{7.12}$$

那么以下两个条件等价。

(1) M 具有良好滤过。*(2)* R-模 M 同构于有限生成射影 R-模的直和，并且对所有 $i>0$ 和支配权 λ均成立。

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda),M)=0,$$

证明。证明分为几个步骤。我们先固定一些记号：对于任意 R-代数 R' 和 R-模M，记 $W_{R'}(\lambda):=W_q(\lambda)\otimes_R R'$, $H^0_{R'}(\lambda):=H^0_q(\lambda)\otimes_R R'$和 $M_{R'}:=M\otimes_R R'$。

步骤 *1*. 我们来证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。由引理 7.27，$\mathrm{Ext}^i{}_{\mathrm{Rep}(}\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))(W_q(\lambda)\ M_j)=0$ 对 $i>0$ 以及所有 j成立。由引理 7.18，我们有

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda),M)=\varinjlim\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda),M_j)=0.$$

步骤 *2*. 假设 M 满足 (2) 和 (7.12)。我们将证明 M 满足以下条件：

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda)\ M)$ 是有限生成射影 R-模；(b) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_k(\mathfrak{g}))}(W_k(\lambda)\ M_k)$ 在 k 上有限维，并且对所有 $i>0$、所有支配 λ 以及所有映到域的满同态 $R\twoheadrightarrow k$，$\mathrm{Ext}^i{}_{\mathrm{Rep}(}\dot{\mathcal{U}}_{k(\mathfrak{g}))}(W_k(\lambda)\ M_k)=0$。

引理7.19 使我们可以将问题归约到局部情形。因此可以假设 R 是一个局部正则诺特整环。令 $\mathfrak{m}=(x_1,\ldots,x_n)$ 为 R 的极大理想，其中 $x_1,\ldots,x_n$ 是一个极大正则序列。令 $R_i=R/(x_1,\ldots,x_i)$ 和 $M_{R_i}=M/(x_1M+\cdots+x_iM)$。我们看到 $M_{R_i}\in\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_{R_i}(\mathfrak{g}))$。由于 M 是 R上的射影模，我们有一个短正合列

$$0\to M\xrightarrow{\cdot x_1}M\to M_{R_1}\to 0.$$

A对 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda)\ -)$ 应用 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda)\ -)$，得到 Ext 群的长正合列，从而可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda),M)\xrightarrow{\cdot x_1}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda),W)\twoheadrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda),M_{R_1}),$$
$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda),M_{R_1})=0\ \ \forall i>0.$$

结合引理 7.20，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda),M)\xrightarrow{\cdot x_1}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda),W)\twoheadrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_{R_1}(\mathfrak{g}))}(W_{R_1}(\lambda),M_{R_1}),$$
$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_{R_1}(\mathfrak{g}))}(W_{R_1}(\lambda),M_{R_1})=0\ \ \forall i>0.$$

由于 M 是有限生成射影 R-模的直和，M_{R_1} 是有限生成射影 R_1-模的直和。因此，我们可以进行归纳，得到 (b)，并且还可断定 $x_1,\ldots,x_n$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda)\ M)$ 的正则序列。因此，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda)\ M)$ 是局部正则诺特整环 R 上有限生成的科恩–麦考利模。因此它是 R 上的自由模，等价地，(a) 成立。

步骤 *3*。我们来证明 (2) $\Rightarrow$ (1)。我们将归纳地构造 M 上的滤过 $\{0\}=M_0\subset M_1\subset M_2\subset\ldots$，该滤过是穷尽的，并满足

(3) $M_i/M_{i-1}\cong H^0_q(\lambda_i)\otimes_R P_i$ 对于某个有限生成的射影 R-模 P_i。

(4) M_i 是 M 作为 R-模的一个直和项。(5) 对于任意满同态 $R \twoheadrightarrow k$ 到一个域，$M_{k,i} := M_i \otimes_R k$ 是 i-th component of$M_k := M \otimes_R k$，它是在引理 7.23 的证明中步骤 2 所构造的。(6) 对所有支配的 λ，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda)\ M/M_{i-1})$ 是有限生成的 R-模。(7) 对所有 $n \geq 0$ 以及包含在 $W_q(\lambda_j)$ 的 Serre 张成中且满足 $j \leq i$ 的有限生成 R-模 N，$\mathrm{Ext}^n\ \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))(N, M/M_i) = 0$。

步骤 *3.1.* 基例 $i = 0$。 $M_0 = \{0\}$ 且 (3)-(7) 显然成立。

步骤 *3.2.* 归纳步骤。假设我们已经构造了 $M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{i-1}$。由于自然同态 $W_q(\lambda_i) \to H_q^0(\lambda_i)$ 的核与余核的权均严格小于 λ_i，因此它们属于对象 $W_q(\lambda_j)$（其中 $j < i$）的 Serre 张成。由 (7)，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(H_q^0(\lambda_i), M/M_{i-1}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda_i), M/M_{i-1}). \tag{7.13}$$

由 (6)-(7) 和步骤 2，(7.13) 是一个有限生成射影 R-模。考虑同态

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(H_q^0(\lambda_i), M/M_{i-1}) \otimes_R H_q^0(\lambda_i) \to M/M_{i-1}. \tag{7.14}$$

在步骤 2 中，我们看到

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda_i), M/M_{i-1}) \otimes_R k \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_k(\mathfrak{g}))}(W_k(\lambda_i), (M/M_{i-1})_k).$$

将此与 (7.13) 及其在 k上的版本结合起来，我们得到

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(H_q^0(\lambda_i), M/M_{i-1}) \otimes_R k \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_k(\mathfrak{g}))}(H_k^0(\lambda_i), (M/M_{i-1})_k).$$

因此，函子 $\bullet \otimes_R k$ 将（7.14）映射为在 k 上类似定义的同态。后者是单射。结合 M/M_{i-1} 是有限生成射影 R-模的直和这一事实，我们得到（7.14）是单射，且余核是有限生成射影 R-模的直和。

现在令 M_i 为在投影 $M \to M/M_{i-1}$下，（7.14）左端的原像。则 M_i 满足（3）—（6）。(7.14)的余核为 M/M_i。将函子 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda_j)\ -)$（其中 $j \leq i$）应用于（7.14），可以证明，对于所有 $n \geq 0$ 和 $j \leq i$，$\mathrm{Ext}^n{}_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda_j)\ M/M_i) = 0$。这意味着 M_i 满足（7）。

步骤 *3.3.* 利用 (7) 可知 M_i 是所有权均 $\leq \lambda_i$的最大子模。根据命题 7.6，$\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})m$ 是 R 上的有限生成模，对任意 $m \in M$均成立。假设该子模中的所有权都小于或等于 λ_i，那么 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})m \subset M_i$。因此，我们构造的滤过是穷尽的。□

7.5. 量子化坐标代数。

设 R 是一个诺特环。遵循 [APW 第 1] 节的做法，我们将量子化坐标代数 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$ 定义为 $\mathrm{Hom}_R(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})\ R)$ 中的最大有理子表示，其中的作用是 $\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})$ 的左作用或右作用（根据 [APW 第 1.30] 节，这一结果与所选作用无关）。根据定义，对于 $M \in \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))$，我们有一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(M, R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]) = \mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(M, \mathrm{Hom}_R(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}), R)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(M, R). \tag{7.15}$$

因此，$R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})] = H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, R)$ 在第 7.2 节中。如果 M 在 R上是射影的，则有

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(M, R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]) = 0, \quad \forall i > 0. \tag{7.16}$$

注释 7.29。在 $R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$, 上，我们有两个左 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-作用 γ，δ 如下：

$$(\delta(x)\cdot f)(u)=f(ux),\qquad (\gamma(x)\cdot f)(u)=f(S(x)u),$$

对于 $x,u\in\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 和 $f\in R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$。因此 $R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$ 是一个 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\otimes_R\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模（第一个作用是 δ，第二个作用是 γ）。在前几节的诱导函子中，我们考虑的以及 (7.15)-(7.16) 中使用的，正是通过 δ 定义在 $R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$ 上的左 $\mathcal{U}_q$-作用。此外，(7.15) 是一个 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模同构，两边的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模结构如下：通过 γ 定义在 $R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$ 上的左 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-作用，给出了 $\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(M,R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})])$ 上的左 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模结构；与此同时，$\mathrm{Hom}_R(M,R)$ 上的左 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模结构按通常方式定义。

引理 7.30。以下断言成立：

(1) $\underline{\mathcal{A}}[\dot{\mathcal{U}}_{\underline{\mathcal{A}}}(\mathfrak{g})]$ *is a free over* $\underline{\mathcal{A}}$.
(2) $R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]\simeq R\otimes_{\underline{\mathcal{A}}}\underline{\mathcal{A}}[\dot{\mathcal{U}}_{\underline{\mathcal{A}}}(\mathfrak{g})]$.

证明。（1）基本上见 [AW第 4 节。4] , 而（2）见 [AW第 4 节。2]（多亏了第 7.1 节和 7.3 节中阐述的结果，我们可以使用环 $\mathcal{A}$，而不必使用环 $\mathcal{A}_1$，后者见 [AW第 4 节。1]）。□

注释 7.31。我们有一个自然态射

$$R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]\otimes_R R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]\to R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})] \tag{7.17}$$

由 $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\ R)\otimes_R\mathrm{Hom}_R(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\ R)\to\mathrm{Hom}_R(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\otimes_R\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\ R)$。此态射（7.17）是一个同构。事实上，多亏了命题 7.6，只需证明

$$\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})\otimes\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(M,R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]\otimes_R R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})])\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})\otimes\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(M,R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})])$$

对所有有理的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\otimes_R\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模 M，它们在 R 上有限生成。这由（7.15）及其关于 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 的类似结论很容易得出。

以下是关于 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\otimes_R\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模结构的主要结果，其中涉及 $R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$。

命题 7.32。在 P_+ 上赋予一个精化通常偏序的全序，并令 $\lambda_1<\lambda_2<\ldots$ 为这些元素。$R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$上存在一个穷尽滤过 $\{0\}=M_0\subset M_1\subset\ldots$，使得 $M_i/M_{i-1}\simeq H_q^0(\lambda_i)\otimes_R H_q^0(\lambda_i^*)$。

证明。由引理 7.30 的(2)可知，只需证明 $\mathcal{A}\to R$ 是同构的情形。由(7.15)结合命题 7.21 我们得到

$$\mathrm{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(W_q(\lambda),R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})])\simeq H_q^0(\lambda^*),\ \ \forall\lambda\in P_+, \tag{7.18}$$

这里，$R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$上的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模结构由 δ定义。

现在，我们将检验引理 7.28 的条件 (2)，其中 $\mathfrak{g}$ 替换为 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ ——注意，$\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\otimes_R\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\simeq\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$——以及 $M=R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$。当 $R\cong\mathcal{A}$ 时，该引理适用。根据引理 7.30 的 (1)，可知 R-模 $R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$ 同构于有限生成射影 R-模的直和。因此，我们需要证明

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda)\otimes_R W_q(\mu),R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})])=0, \tag{7.19}$$

对所有 $i>0$ 和支配权 λ，μ。

我们将验证（7.19）。根据引理 7.18，任何形如 $R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})]\otimes_R Q$，其中 Q 是一个内射 R-模的对象，在 $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}))$ 中都是内射的。

$\dot{\text{Rep}}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}))$ 中的每个对象都有一个由这种形式的内射对象构成的分解。根据(7.17), 在 $\text{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}))$ 中,

$$R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})]\otimes Q = R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]\otimes_R R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]\otimes_R Q.$$

得益于同构 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}) \cong \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\otimes_R \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$, 任意 $M\in$ 表示范畴$(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}))$ 都带有两个左 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-作用。我们有函子

$$\text{Hom}_{\text{Rep}(\delta(\dot{\mathcal{U}}_q))}(W_q(\mu),\bullet) : \text{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})) \to \text{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})),$$

这里我们考虑表示范畴$(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$ 中模上的第一个 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-作用。我们在上标中使用 $\delta(\mathcal{U}_q)$, 因为 $R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$ 上的第一个 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-作用是通过 δ 定义的。此函子将 $R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})]\otimes_R Q$ 映射为

$$\text{Hom}_{\delta(\dot{\mathcal{U}}_q)}(W_q(\mu), R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]\otimes_R R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]\otimes_R Q) = R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]\otimes_R \text{Hom}_R(W_q(\lambda), Q).$$

R-模 $W_q(\mu)$ 是有限秩自由的, 因此 $\text{Hom}_R(W_q(\mu)\ Q)$ 是单射。因此, $R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]\otimes_R \text{Hom}_R(W_q(\mu)\ Q)$ 是表示范畴$(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ 中的单射对象（其中 $\text{Hom}_R(W_q(\mu)\ Q)$ 带有平凡作用）。

因此, 我们得到一个第二页等于

$$\text{Ext}^i_{\text{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}))}(W_q(\lambda), \text{Ext}^j_{\text{Rep}(\delta(\dot{\mathcal{U}}_q))}(W_q(\mu), R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})])) \tag{7.20}$$

并收敛到 Ext^{i+j} 表示范畴$(\dot{\imath}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}))(W_q(\lambda)\otimes_R W_q(\mu)\ R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})])$的谱序列。由(7.15)-(7.16), 对于 $j=0$, 有 Ext^j 表示范畴$(\delta(\dot{\imath}_q))(W_q(\mu)\ R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]) = H^0_q(\mu^*)$; 对于 $j>0$, 有 $\{0\}$。因此, (7.20)变为: 对于 $j=0$, Ext^i 表示范畴$(\dot{\imath}_q(\mathfrak{g}))(W_q(\lambda)\ H^0_q(\mu^*))$, 其余情况为零。这是$R^{\oplus\delta_\lambda}$, 当 $i=0$ 时为μ^*, 其余情况为零。特别地, (7.19)随之成立, 并且 $R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]\in$ 表示范畴$(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}))$具有良好滤过。

上一段还意味着, 在 $R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]$ 的良好滤过中出现的对偶 Weyl 模只能具有 $H^0_q(\lambda)\otimes_R H^0_q(\lambda^*)$ 的形式。此外,

$$\text{Hom}_{\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})\times\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})}(W_q(\lambda)\otimes_R W_q(\lambda^*), R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})]) \cong R.$$

因此, 我们关于滤过的断言成立。 □

注 7.33. 我们如下在 $P_+\times P_+$ 上定义一个全序。首先, 我们在第一个分支 P_+ 上赋予命题 7.32 中使用的全序。其次, 将最长元 $w_0\in W$ 所对应的 $-w_0$ 作用于命题 7.32 中使用的全序, 得到 P_+ 上的另一个全序。然后, 我们在第二个分支 P_+ 上赋予这个新全序。最后, 我们在 $P_+\times P_+$ 上考虑字典序 $(\lambda,0) > (0,\mu)$。对于 $P_+\times P_+$ 上的这个序, 命题 7.32 中的模 M_i 将是 $R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$ 中权被 (λ_i,λ_i^*) 界定的最大 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\otimes_R\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-子表示。

7.6. $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$在单位根处的有理表示。

本节中, 我们将在域 $\mathbb{F}$ 上讨论。令 $q:=\epsilon\in\mathbb{F}$ 为序为 ℓ 的单位根。假设 $\ell_i \geq \max\{2, 1-a_{ij}\}_{1\leq j\leq r}$。我们将回顾一些关于 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 在单位根处的有理表示的结果。许多论证遵循 [N] 和 [APW]。为简化记号, 本节中未标下标的张量积均取在 $\mathbb{F}$ 上。

我们需要一个技术引理。设 $\widehat{\mathcal{U}}^{\geqslant}_\epsilon(\mathfrak{g},\ P)$ $\widehat{\mathcal{U}}^{*\geqslant}_\epsilon(\mathfrak{g},\ P^*)$分别是$\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_\epsilon$, $\dot{\mathcal{U}}^{*\geqslant}_\epsilon$在第5.6节中定义的幂等化版本。设$\widehat{\mathcal{U}}^{\leqslant}_\epsilon(\mathfrak{g},\ P)$ $\widehat{\mathcal{U}}^{*\leqslant}_\epsilon(\mathfrak{g},\ P^*)$分别是$\dot{\mathcal{U}}^{\leqslant}_\epsilon$, $\dot{\mathcal{U}}^{*\leqslant}_\epsilon$的幂等化版本。

引理 7.34。*(a)* $\mathrm{Fr}\colon \mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g},P) \to \mathcal{U}^*_\epsilon(\mathfrak{g},P^*)$ 的核等于由 $\{1_\mu, E_i1_\lambda, F_i1_\lambda | \mu \notin P^*, \lambda \in P, 1\le i\le r\}$ 生成的左理想，也等于由同一组元素生成的右理想。

(b) $\mathrm{Fr}^{\geqslant}\colon \widehat{\mathcal{U}}^{\geqslant}_\epsilon(\mathfrak{g},P) \to \widehat{\mathcal{U}}^{*\geqslant}_\epsilon(\mathfrak{g},P^*)$ 的核等于由 $\{1_\mu, E_i1_\lambda | \mu \notin P^*, \lambda \in P, 1\le i\le r\}$ 生成的左理想，也等于由相同元素生成的右理想。对于 $\mathrm{Fr}^{\leqslant}\colon \widehat{\mathcal{U}}^{\leqslant}_\epsilon(\mathfrak{g},P) \to \widehat{\mathcal{U}}^{*\leqslant}_\epsilon(\mathfrak{g},P^*)$，也有类似的结论。

证明。(a) 步骤 *1*：我们有一个与推论 5.27(b) 类似的关于 Fr 的结果，即 Ker(Fr) 是由以下元素生成的双边理想

$$\{1_\mu, E_i^{(n)}1_\lambda, F_i^{(n)}1_\lambda | \mu \notin P^*, \lambda \in P, \ell_i \nmid n\}.$$

对于 $\ell_i \nmid n$，令 $n = \ell_i n_1 + n_0$，且 $0 < n_0 < \ell_i$，则

$$E_i^{(n)} = \frac{1}{(n_0)_{\epsilon_i}} E_i^{(\ell_i n_1)} E_i^{n_0}, \qquad F_i^{(n)} = \frac{1}{(n_0)_{\epsilon_i}} F_i^{(\ell_i n_1)} F_i^{n_0}.$$

因此，Ker(Fr) 是由以下元素生成的双边理想：

$$S = \{1_\mu, E_i1_\lambda, F_i1_\lambda | \mu \notin P^*, \lambda \in P, 1\le i\le r\}.$$

步骤 *2*：我们将证明 Ker(Fr) 是由 S 生成的左理想。证明 Ker(Fr) 是由 S 生成的右理想的方法类似。我们将 $\mathcal{U}$ 记作 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$。令 $\mathcal{U}S$ 表示由 S 生成的 $\mathcal{U}$ 的左理想 $\widehat{\mathcal{U}}$。令 $1_\mu\mathcal{U}$，$E_i1_\lambda\mathcal{U}$，$F_i1_\lambda\mathcal{U}$ 表示由 S 中相应的 $\widehat{\mathcal{U}}$ 个元素生成的右理想。于是，只需证明这些右理想包含于 $\mathcal{U}S$ 中。

令 $\mu \notin P^*$。我们有：

$$1_\mu E_j^{(n)} 1_\nu = \delta_{\nu,\mu-n\alpha_j} E_j^{(n)} 1_{\mu-n\alpha_j}, \qquad 1_\mu F_j^{(n)} 1_\nu = \delta_{\nu,\mu+n\alpha_j} F_j^{(n)} 1_{\mu+n\alpha_j}.$$

如果 $\ell_j \nmid n$，那么 $1_\mu E_j^{(n)}1_\nu$，$1_\mu F_j^{(n)}1_\nu \in \widehat{\mathcal{U}}S)$。另一方面，如果 $\ell_j \mid n$，那么 $\mu \pm n\alpha_j \notin P^*$，因此，$E_j^{(n)}1_{\mu-n\alpha_j}$，$F_j^{(n)}1_{\mu+n\alpha_j} \in \widehat{\mathcal{U}}S)$。因此，对于 $\mu \notin P^*$，有 $1_\mu\widehat{\mathcal{U}} \subset \widehat{\mathcal{U}}S$。

我们来考虑 E_i1_λ。我们有

$$\begin{aligned}
&E_i1_\lambda F_j^{(n)}1_\nu = \delta_{\lambda+n\alpha_j} F_j^{(n)} E_i 1_\nu \qquad (i\neq j), \qquad E_i1_\lambda E_i^{(n)}1_\nu = \delta_{\lambda-n\alpha_i,\nu} E_i^{(n)} E_i 1_\nu \\
&E_i1_\lambda F_i^{(n)}1_\nu = \delta_{\lambda+n\alpha_i,\nu} \left(F_i^{(n)} E_i 1_\nu + b_n F_i^{(n-1)} 1_\nu \right) \\
&E_i1_\lambda E_j^{(n)}1_\nu = \delta_{\lambda-n\alpha_j,\nu} \sum_{0\le s\le -a_{ij}<\ell_i} a_s E_i^{(n-s)} E_j E_i^{(s)} 1_\nu \qquad (i\neq j;\ n \ge 1-a_{ij})
\end{aligned} \tag{7.21}$$

最后一个等式可由高阶量子 *Serre* 关系在 [L5, §7.1.6] 对某个 $b_n, a_s \in \mathbb{F}$.

若 $\ell_i \nmid n$ 则 $E_i1_\lambda F_{(n}{}_{j}1_\nu \in \widehat{\mathcal{U}}S)$。另一方面，若 $\ell_i \mid n$ 则 $F_i^{(n)}E_i1_\nu + b_n F_{(n-1)\,i}\ 1_\nu \in \widehat{\mathcal{U}}S$。因此我们总有 $E_i1_\lambda F_i^{(n)}1_\nu \in \widehat{\mathcal{U}}S$。因此 (7.21) 蕴含 $E_i1_\lambda\widehat{\mathcal{U}} \subset \widehat{\mathcal{U}}S$。类似地，我们有 $F_i1_\lambda\mathcal{U} \subset \mathcal{U}S$。这就完成了 (a) 部分的证明。(b) 的证明与 (a) 部分类似。

□

注记 7.35. 根据引理 7.34中的相同分析，可以证明 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 生成的 $\{E_i, F_i\}_{1\le i\le r}$ 的左理想等于 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 生成的 $\{E_i, F_i\}_{1\le i\le r}$。因此，权空间 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})_\nu$ 且 $\nu \notin Q^*$ 包含于此 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的左理想中。

定义 7.36。令 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$ 为由 E_i、F_i、$\dot{\mathcal{U}}^0_\epsilon$ 生成的 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的霍普夫子代数。令 $\mathfrak{u}^>$（分别为 $\mathfrak{u}^<$）为 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 中分别由 E_i（分别由 F_i）生成的子代数。令 $\mathfrak{u}$ 为 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的霍普夫子代数，其由 E_i、F_i、K^{α_i} 生成。其中 $1\le i\le r$。

引理 7.37。 *(a)* 我们通过乘法映射得到一个三角分解：

$$\mathfrak{u}^{<}\otimes\dot{\mathcal{U}}_{\epsilon}^{0}\otimes\mathfrak{u}^{>}\xrightarrow{\mathfrak{m}}\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^{0}$$

(b) 代数 $\mathfrak{u}^{<}$ 有一个以 $\{F^{\vec{k}}:=F_{\beta_1}^{k_1}\dots F_{\beta_N}^{k_N}|1\le k_i\le\ell_{\beta_i}-1\}$ 为基的 $\mathbb{F}$。代数 $\mathfrak{u}^{>}$ 有一个以 $\{E^{\vec{k}}:=E_{\beta_1}^{k_1}\dots E_{\beta_N}^{k_N}|0\le k_i\le\ell_{\beta_i}-1\}$ 为基的 $\mathbb{F}$。因此，维数$_{\mathbb{F}}\mathfrak{u}^{<}=$维数$_{\mathbb{F}}\mathfrak{u}^{>}=\prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha$。

证明。利用 E_i、F_i、$\dot{\mathcal{U}}_{\epsilon}^{0}$ 之间的交换关系，很容易证明 $\mathfrak{m}$ 的像是一个包含 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^{0}$ 所有生成元的子代数，因此 $\mathfrak{m}$ 是满射。利用引理 2.6 中 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的三角分解，我们可知 $\mathfrak{m}$ 是单射。因此，(a) 部分得证。现在来证明 (b) 部分。代数 $\mathfrak{u}^{<}$ 是代数同态 $\iota:\mathcal{U}_\epsilon^{<}\to\mathcal{U}_\epsilon^{<}$ 的像。回顾引理 2.4 和引理 2.6 中 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{<}$ 和 $\mathcal{U}_\epsilon^{<}$ 的 PBW基。我们有 $\iota(F^{\vec{k}})=\prod_{j=1}^{N}[k_j]_{\epsilon_{i_j}}!F^{[\vec{k}]}$。另一方面，若 $k_j\ge\ell_{\beta_j}$，则 $[k_j]_{\epsilon_{i_j}}=0$；若 $0\le k_j\le\ell_{\beta_j}-1$，则 $\neq 0$。这就证明了 (b) 部分关于 $\mathfrak{u}^{<}$ 的结论。关于 $\mathfrak{u}^{>}$ 的证明类似。□

定义 7.38. 若存在分解 $M=\bigoplus_{\lambda\in P}M_\lambda$，使得 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^0$ 通过特征 χ_λ作用于 M_λ，则称 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-模 M 为 1 型有理表示。

我们来考虑 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$ 的幂等化版本，记作 $\hat{\mathfrak{u}}$。(R-矩阵 $\mathcal{R}$ (5.30) $\vec{}$是 $\hat{\mathfrak{u}}$中的一个元素：如果存在 k_t 的某个矩阵项 k 满足 $k_t\ge\ell_t$，那么 $c_{\vec{k}}=0$；而如果所有$k_t<\ell_t$ 都满足 $F^{[k]}$，那么 $E^{[k]}$ 和 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$都是 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$的元素。

我们可以定义以下诱导函子：

$$H^0(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0/\mathbb{F},-):\mathbb{F}\text{-mod}\to\mathrm{Rep}(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0),$$
$$H^0(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0/\dot{\mathcal{U}}^0,-):\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}^0)\to\mathrm{Rep}(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0),$$
$$H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0,-):\mathrm{Rep}(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)\to\mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}).$$

以下引理的证明见 [APW，命题 2。16]

引理 *7.39. (a)* 设 $V\in$ *Rep*$(\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ 且 $M\in$ *Rep*$(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)$。则存在一个 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模之间的自然同构：$H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0,M\otimes V)\cong H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0,M)\otimes V$. *(b)* 设 $V\in$ *Rep*$(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)$ 且 $N\in$ *Rep*$(\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^0)$。则存在一个 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-模之间的自然同构：$H^0(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0/\dot{\mathcal{U}}^0,N\otimes V)\cong H^0(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0/\dot{\mathcal{U}}^0,N)\otimes V$。

对于任意 $\lambda\in P$，回顾一下特征 $\chi_\lambda:\ \dot{\mathcal{U}}_\epsilon^0\to\mathbb{F}$ 它在 (7.1) 中定义。于是我们得到一个 $\mathfrak{u}^{>}\dot{\mathcal{U}}^0$-模 $\mathbb{F}_\lambda$，其作用由同态 $\mathfrak{u}^{>}\dot{\mathcal{U}}^0\to\dot{\mathcal{U}}^0\xrightarrow{\chi_\lambda}\mathbb{F}$给出。令

$$\widehat{\mathrm{W}}_\epsilon(\lambda):=\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0\otimes_{\mathfrak{u}^{>}\dot{\mathcal{U}}^0}\mathbb{F}_\lambda.$$

令 τ为 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$上的反对合，由 $\tau(E_i)=F_i$，$\tau(F_i)=E_i$，$\tau(u_0)=u_0$定义，其中$u_0\in\dot{\mathcal{U}}^0$、$1\le i\le r$为任意元素。对于 Rep$(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)$ 中的任意有限维模 M，令 $M^\tau:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(M,\ \mathbb{F})$ 为向量空间，其中 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$ 通过 τ作用。下面的引理是标准的：

引理 7.40。 *(a)* $\mathrm{W}_\epsilon(\lambda)$ 有唯一的单商模 $\mathrm{L}_\epsilon(\lambda)$。映射 $\lambda\mapsto\mathrm{L}_\epsilon(\lambda)$ *is* P 与 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)$ 中的简单模之间存在一一对应关系。 *(b)* $\widehat{\mathrm{L}}_\epsilon(\lambda)^\tau\cong\widehat{\mathrm{L}}_\epsilon(\lambda)$。

对于任意有限维模 M、$N\in\mathrm{Rep}(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)$，

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)}(M,N)\cong\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)}(N^\tau,M^\tau).$$

设 $\lambda_{\mathbf{St}}:=\sum_i(\ell_i-1)\omega_i$，以及 $\mathbf{St}:=L_\epsilon(\lambda_{\mathbf{St}})$，它是最高权为$\lambda_{\mathbf{St}}$的单 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模。现在我们将研究 $\mathbf{St}$ 作为 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-模的性质，并证明函子$H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0,-)$ 是正合的。

接下来两个引理的证明沿用 [N, §8.2]，其中类似结果是在复数 $\mathbb{C}$上证明的。

引理 7.41。对于任意 $\lambda \in P_\ell := \{\sum_i a_i\omega_i | 0 \le a_i \le \ell_i - 1,\ \forall 1 \le i \le r\}$，$\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模 $L_\epsilon(\lambda)$ 仍然是一个单 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-模。

证明。步骤 1：我们将证明 $(L_\epsilon(\lambda))^{\mathfrak{u}^>}$ 是一维的。证明沿用 [N，引理 8.4]。由于 λ是 $L_\epsilon(\lambda)$ 的最高权，我们有 $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}^>\dot{\mathcal{U}}^0}(\mathbb{F}_\lambda, L_\epsilon(\lambda)) = 1$。还需证明，对于所有 $\mu \neq \lambda$，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}^>\dot{\mathcal{U}}^0}(\mathbb{F}_\mu, L_\epsilon(\lambda)) = 0$，等价地，$(L_\epsilon(\lambda) \otimes \mathbb{F}_{-\mu})^{\mathfrak{u}^>\dot{\mathcal{U}}^0} = 0 \,\text{for} \mu \neq \lambda$。注意，$\mathbb{F}_{-\mu}$ 自然地是一个 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{\geqslant}$-模。

对于任意 $M \in \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{\geqslant}(\mathfrak{g})) = \mathrm{Rep}(\widehat{\mathcal{U}}_\epsilon^{\geqslant}(\mathfrak{g}, P))$，令

$$M^\bullet := \{m \in M | 1_\mu m = E_i 1_\lambda m = 0\ \forall 1 \le i \le r, \lambda \in P, \mu \notin P^*\}.$$

By L引理 7.34(b)，$M^\bullet$是一个 $\widehat{\mathcal{U}}_\epsilon^{\geqslant}(\mathfrak{g},\ P)$-子模，于是是 $\widehat{\mathcal{U}}_\epsilon^{*\geqslant}(\mathfrak{g},\ P^*$上的模).

设 $(L_\epsilon(\lambda) \otimes \mathbb{F}_{-\mu})^{\mathfrak{u}^>}$ $\mathcal{U}^0 \neq 0$ 对 $\mu \neq \lambda$。由于这个空间包含于 $(L_\epsilon(\lambda) \otimes \mathbb{F}_{-\mu})^\bullet$，后者非零。由于 $L_\epsilon(\lambda)$ 是一个单 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模，$L_\epsilon(\lambda)$ 和 $L_\epsilon(\lambda) \otimes \mathbb{F}_{-\mu}$的最高权空间均为一维，分别是 $L_\epsilon(\lambda)_\lambda$ 和 $L_\epsilon(\lambda)_\lambda \otimes \mathbb{F}_{-\mu}$。因此，$L_\epsilon(\lambda)_\lambda \otimes \mathbb{F}_{-\mu}$ 是 $(L_\epsilon(\lambda) \otimes \mathbb{F}_{-\mu})^\bullet$ 的最高权向量空间。

由于 $\lambda \neq \mu$，存在一个单根 α_i，使得 $(L_\epsilon(\lambda) \otimes \mathbb{F}_{-\mu})^\bullet$ 对于某个 $m > 0$具有一个权为 $\lambda - \mu - m\ell_i\alpha_i$ 的非零向量（如果 char $\mathbb{F} = 0$，则我们可以选择 $m = 1$）。于是，$L_\epsilon(\lambda)$ 的权空间包含 $\lambda - m\ell_i\alpha_i$ 的 W-轨道。然而，$s_i(\lambda - m\ell_i\alpha_i) = \lambda + (m\ell_i - a_i)\alpha_i > \lambda$，矛盾。因此，如果 $\lambda \neq \mu$，则 $(L_\epsilon(\lambda) \otimes \mathbb{F}_{-\mu})^{\mathfrak{u}^>\dot{\mathcal{U}}^0} = 0$。

步骤 *2*：如果 $L_\epsilon(\lambda)$ 作为 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-模不是单的，那么 $L_\epsilon(\lambda)$ 必须包含一个非零 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-子模 $N \subset \oplus_{\mu<\lambda} L_\epsilon(\lambda)_\mu$。注意，$N^{\mathfrak{u}^>} \neq 0$，因此，$L_\epsilon(\lambda)^{\mathfrak{u}^>}$ 至少必须是二维的，矛盾。因此，$L_\epsilon(\lambda)$ 在 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$ 上是单的。□

引理 7.42。$\widehat{\ }\mathrm{W}_\epsilon(\lambda)$ 在 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{u}^<\dot{\mathcal{U}}^0)$ 范畴中的底是一维的，并且由最低权空间生成。

$\widehat{\ }$证明。证明沿用 [N，引理 9。5]。我们有 $\mathrm{W}_\epsilon(\lambda) \cong \mathfrak{u}^<$ 作为 $\mathfrak{u}^<$-模。只需证明不变量空间 $(\mathfrak{u}^<)^{\mathfrak{u}^<} := \{u \in \mathfrak{u}^< | xu = 0\ \forall x \in \mathfrak{u}^<\}$ 是一维的。该不变量空间至少是一维的，因为它包含 $\mathfrak{u}^<$ 的一维最低权空间。注意，$\mathfrak{u}^<$ 是 Q-分次的。因此，任意不变量向量都可分解为齐次不变量向量之和。

设 u 是一个权为 λ 的 $\mathfrak{u}^<$中的不变量向量，则 $u(\sum_\mu \epsilon^{(\lambda,\mu)} K^\lambda)$ 是 $\mathfrak{u}^\leqslant$中的齐次不变量向量。这给出了向量空间 $(\mathfrak{u}^<)^{\mathfrak{u}^<} \hookrightarrow (\mathfrak{u}^\leqslant)^{\mathfrak{u}^\leqslant}$的嵌入。但 $\mathfrak{u}^\leqslant$是有限维霍普夫代数，并且任意有限维霍普夫代数中的不变量都是 1 维的 [Mo，定理 2.1。3]。因此 $(\mathfrak{u}^<)^{\mathfrak{u}^<}$ 的维数必为 1。□

引理 7.43。自然态射 $\widehat{\ }\mathrm{W}_\epsilon(\lambda_{\boldsymbol{St}}) \to \boldsymbol{St}$ 是 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-模之间的同构。因此，$\boldsymbol{St} \cong W_\epsilon(\lambda_{\boldsymbol{St}})$ 作为 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模。

证明。由引理 7.41，St 是一个单 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-模，因此自然态射 $\widehat{\ }\mathrm{W}_\epsilon(\lambda_{\mathbf{St}}) \to$St 是满射。St 的最低权为 $w_0(\sum_i(\ell_i - 1)\omega_i) = \sum_i(\ell_i - 1)w_0(\omega_i)$，且该最低权子空间的维数为 1。另一方面，$\mathrm{W}_\epsilon(\lambda_{\mathbf{St}})$ 有一个唯一的一维最低权子空间，其权为

$$\sum_i(\ell_i - 1)\omega_i - \sum_{\alpha\in\Delta_+}(\ell_\alpha - 1)\alpha = \sum_i(\ell_i - 1)w_0(\omega_i),$$

其中等式由引理 10.23中根系的性质得出。下文的 d' 和⌢等式 $\ell_\alpha = \ell_i$ 若 $\alpha = w(\alpha_i)$ 对某个 $w \in W$成立。因此，$\mathsf{W}_\epsilon(\lambda)$ 的最低权空间映射⌢到 $\mathbf{St}$中。由引理 7.42，态射 $\mathsf{W}_\epsilon(\lambda_{\mathbf{St}}) \to \mathbf{St}$ 是单射。

⌢因此，$\dim_{\mathbb{F}}(\mathbf{St}) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathsf{W}_\epsilon(\lambda_{\mathbf{St}})) = \prod_{\alpha\in\Delta_+} \ell_{\alpha\circ}$ 另一方面，根据 Weyl 特征˙公式，$\dim_{\mathbb{F}}(W_\epsilon(\lambda_{\mathbf{St}})) = \prod_{\alpha\in\Delta_+} \ell_{\alpha\circ}$ 因此，$\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模之间的满射态射$W_\epsilon(\lambda_{\mathbf{St}}) \to \mathbf{St}$ 必为同构。□

引理 7.44。 ***St*** 在表示范畴$(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)$中是射影的。

*Pr*明。 由引理 7.40、7.41 和 7.43，证明与 [J2 中命题 10 的证明相同。 2] □

引理 7.45。 函子 $H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, -)$ 是正合的。

证明。 设 $0 \to M \to N \to P \to 0$ 是 $\mathsf{Rep}(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)$ 中的一个正合列。令 $\mathbf{St}^*$ 为˙$\mathbf{St}$在 $\mathsf{Rep}(\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ 中的对偶。注意到

$$\begin{aligned} H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, M\otimes\mathbf{St}^*) &\cong (M\otimes\mathbf{St}^*\otimes\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})])^{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0}(\mathbb{F}, M\otimes\mathbf{St}^*\otimes\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})]) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0}(\mathbb{F}, M\otimes\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})]\otimes\mathbf{St}^*) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0}(\mathbf{St}, M\otimes\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})]) \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{St}$ 在表示范畴 $\mathsf{Rep}(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)$ 中是射影的，因此我们有一个正合列

$$0 \to H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, M\otimes\mathbf{St}^*) \to H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, N\otimes\mathbf{St}^*) \to H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, P\otimes\mathbf{St}^*) \to 0.$$

由于 $\mathbf{St}^* \in \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g}))$，根据引理 7.39，$H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, M\otimes\mathbf{St}^*) \cong H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, M)\otimes\mathbf{St}^*$.因此，序列

$$0 \to H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, M) \to H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, N) \to H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, P) \to 0$$

是正合的。 □

设 $\mathbb{F}[\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0] := H^0(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0/\mathbb{F}, \mathbb{F})$。通过限制，我们得到一个 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-模的自然态射：$\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})] \to \mathbb{F}[\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0]$。

引理 7.46。 态射 $\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})] \to \mathbb{F}[\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0]$ 是满射。

证明。 回顾特征 $\chi_\nu : \dot{\mathcal{U}}^0_\epsilon \to \mathbb{F}$，其中 $\nu \in P_\circ$。令 $D(\nu) := \mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$核$(\chi_\nu)$，则$\mathbb{F}[\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0]_\nu \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(D(\nu)\ \mathbb{F})$ 作为向量空间。自然映射 $\mathfrak{u}^<\mathfrak{u}^> \to D(\nu)$ 是向量空间的同构，此处 $\mathfrak{u}^<\mathfrak{u}^>$ 是元素 u_1u_2 的线性张成，其中 $u_1 \in \mathfrak{u}^<$，$u_2 \in \mathfrak{u}^>$。

˙对于任意支配权 $\lambda \in P_+$，令 $W'_\epsilon(-\lambda)$ 为 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})^{\otimes\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_\epsilon\mathbb{F}_{-\lambda}}$ 的最大有理商。于是，$W'_\epsilon(-\lambda)$ 是韦伊模 $W_\epsilon(\lambda)$ 的最低权类比。本段中的以下结果见于 [APW, §1]。设 λ, μ 为满足 $\lambda - \mu = \nu$ 的支配权。令 x_λ 为 $W_\epsilon(\lambda)$ 的最高权向量，令 $x_{-\mu}$ 为 $W'_\epsilon(-\mu)$ 的最低权向量。˙那么，$x_{-\mu}\otimes x_\lambda$ 作为 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模生成 $W'_\epsilon(-\mu)\otimes W_\epsilon(\lambda)$。令 $J(\mu,\lambda)$ 为 . $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$的左理想，它由 $\mathrm{Ker}(\chi_\mu)$、$\mathrm{Ann}_{\dot{\mathcal{U}}^{\leqslant}_\epsilon} x_\lambda$ 和 $\mathrm{Ann}_{\dot{\mathcal{U}}^{\geqslant}_\epsilon}(x_{-\mu})$ 生成。置 $D(\mu,\lambda) := \mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})/J(\mu,\lambda)$。于是，˙由 $u \mapsto u(x_{-\mu}\otimes x_\lambda)$ 定义的映射 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to W'_\epsilon(-\mu)\otimes W_\epsilon(\lambda)$ 通过一个向量空间同构˙分解为 $D(\mu,\lambda) \cong W'_\epsilon(-\mu)\otimes W_\epsilon(\lambda)$。此外，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(D(\mu,\lambda)\ \mathbb{F}) \subset \mathbb{F}[\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})]_{\nu\circ}$

考虑以下映射：

$$\mathfrak{u}^< \to W_\epsilon(\lambda),\quad u \mapsto ux_\lambda; \qquad \mathfrak{u}^> \to W'_\epsilon(-\mu),\quad u \mapsto ux_{-\mu}.$$

可以证明，对于充分大的 λ, μ，上述两个映射都是单射。因此，对于充分大的 λ, μ 且满足 $\lambda - \mu = \nu$，由下式定义的映射 $\mathfrak{u}^<\mathfrak{u}^> \to W'_\epsilon(-\mu)\otimes W_\epsilon(\lambda)$

$u \mapsto u(x_{-\mu} \otimes x_\lambda)$ 将是单射。另一方面，由 $u \mapsto u(x_{-\mu} \otimes x_\lambda)$ 定义的映射 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0 \to W_\epsilon'(-\mu) \otimes W_\epsilon(\lambda)$ 可经由映射 $D(\nu) \to W_\epsilon'(-\mu) \otimes W_\epsilon(\lambda)$ 分解。因此，对于充分大的 λ, μ 且满足 $\lambda - \mu = \nu$，自然映射 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0 \to W_\epsilon'(-\mu) \otimes W_\epsilon(\lambda)$ 可经由单射 $D(\nu) \hookrightarrow W_\epsilon'(-\mu) \otimes W_\epsilon(\lambda)$ 分解。

对于任意满足 $\lambda - \mu = \nu$ 的 λ、μ，包含 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0 \hookrightarrow \dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 诱导出自然映射 $D(\nu) \to D(\mu, \lambda)$。前面两段意味着，对于充分大的 λ，满足 $\lambda - \mu = \nu$ 的 μ 下，映射 $D(\nu) \to D(\mu, \lambda)$ 变为单射，因此 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(D(\mu, \lambda)\ \mathbb{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(D(\nu)\ \mathbb{F})$ 是满射。这意味着映射 $\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})]_\nu \to \mathbb{F}[\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0]_\nu$ 是满射。因此 $\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})] \to \mathbb{F}[\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0]$ 是满射。□

回顾一下 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$ 的幂等化版本，记作 $\widehat{\mathfrak{u}}$。通过限制，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$Frobenius 同态 $\mathrm{Fr}: \mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P) \to \mathcal{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*)$ 产生一个同态 $\mathrm{fr}: \hat{\mathfrak{u}} \to \oplus_{\lambda \in P^*} \mathbb{F} 1_\lambda$。后者给出拉回函子 $\mathrm{fr}^*:$ 表示范畴$(\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}) \to$ 表示范畴$(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)$。

引理 7.47。设 $M \in \mathrm{Rep}(\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0})$。则 $H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, \mathrm{fr}^*(M))$ 包含于函子 $\mathrm{Fr}^*: \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g})) \to \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))$的像中。

证明。回忆 $\mathcal{U} := \mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P) = \oplus_\lambda \mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) 1_\lambda$。注意到 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$ 是 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 上的双模。

设 $\mathrm{hom}_{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0}(\mathcal{U}, \mathrm{fr}^*(M))$（表示由所有在有限多个直和项 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) 1_\lambda$ 上非零的同态 f 所构成的子空间。我们看到，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$$\mathrm{hom}_{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0}(\mathcal{U}, \mathrm{fr}^*(M))$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0}(\mathcal{U}, \mathrm{fr}^*(M))$ 的 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模。此外，

$$\mathrm{hom}_{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0}(\widehat{\mathcal{U}}, \mathrm{fr}^*(M)) = \bigoplus_\lambda \mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0}(\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g}) 1_\lambda, \mathrm{fr}^*(M)).$$

所以 $\mathrm{hom}_{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0}(\widehat{\mathcal{U}}, \mathrm{fr}^*(M))$ 也是 $\widehat{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$ 上的一个模。

$\widehat{\ }$根据引理 7.34，$\mathrm{Fr}: \mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P) \to \mathcal{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*)$ 的核等于由 $\{E_i 1_\lambda, F_i 1_\lambda, 1_\mu | \lambda \in P, \mu \in P/P^*\}$ 生成的左理想，也等于由同一组元素生成的右理想。因此，$\widehat{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g}, P)$ 在 $\mathrm{hom}_{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0}(\widehat{\mathcal{U}}, \mathrm{fr}^*(M))$ 上的作用可通过 Frobe-$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$nius 态射 $\mathrm{Fr}: \mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}, P) \to \mathcal{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}, P^*)$ 分解。另一方面，我们可以将 module$H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, \mathrm{fr}^*(M))$ 解释为 $\mathrm{hom}_{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0}(\widehat{\mathcal{U}}, \mathrm{fr}^*(M))$ 的最大有理的 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模。因此，$H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}, \mathrm{fr}^*(M))$ 作为 $\mathrm{hom}_{\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0}(\widehat{\mathcal{U}}, \mathrm{fr}^*(M))$ 的最大有理的 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模，将包含在函子 $\mathrm{Fr}^*: \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g})) \to \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ 的像中。□

引理 7.48. 存在一个有限维模 $V \in \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))$，具有以下性质。对于任意有限维模 M（属于 $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))$），存在一个有限维模 N（属于 $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}))$），使得 M 同构于 $\mathrm{Fr}^*(N) \otimes V$ 的一个子商。

证明. 证明分为几个步骤。

步骤 1. 我们有一个识别 $\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}] \cong \bigoplus_{\lambda \in P^*} \mathbb{F}_\lambda$。借助这一识别，$\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}]$成为一个 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-模。存在一个有限维 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^0$-模 V_1，使得 $\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^0] \cong V_1 \otimes \mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}^{*0}]$ 作为 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^0$-模。根据引理 7.39，

$$\mathbb{F}[\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0] \cong H^0(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0/\dot{\mathcal{U}}^0, V_1) \otimes \mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}].$$

注意，$H^0(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0/\dot{\mathcal{U}}^0, V_1)$ 是有限维的。

步骤 2。我们将证明，存在一个有限维的 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模 V，使得它属于 $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))$，且 $\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}] \otimes V \twoheadrightarrow \mathbb{F}[\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0]$ 属于 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0)$。事实上，由于平凡表示是 $\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}^{*0}]$ 的一个直和项，我们有一个 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-模的满射态射 $\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}] \to \mathbb{F}$。这给出了一个 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-模的满射态射

$$\mathbb{F}[\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0] \cong H^0(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0/\dot{\mathcal{U}}^0, V_1) \otimes \mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}] \twoheadrightarrow H^0(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0/\dot{\mathcal{U}}^0, V_1).$$

将此与引理 7.46结合起来，我们有一个 $\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0$-模的满射态射

$$\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})] \twoheadrightarrow \mathbb{F}[\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0] \twoheadrightarrow H^0(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0/\dot{\mathcal{U}}^0, V_1).$$

那么，任何能映满 $H^0(\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0/\dot{\mathcal{U}}^0, V_1)$ 的有限维 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模 V of $\mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})]$ 都可行。

步骤 3。 $H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, -)$ 的正合性给出一个满射态射

$$H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, \mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}]) \otimes V \twoheadrightarrow H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, \mathbb{F}[\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0]) \cong \mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})].$$

No明 V 是一个 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模，因此 $H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, \mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}] \otimes V) \cong H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, \mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}]) \otimes V$.

步骤 4。固定一个如步骤 2 中所述的模 V 。令 M 为 Rep($\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})$) 中的一个有限维模。那么我们有一个嵌入 $M \hookrightarrow H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathbb{F}, M) \cong M_{triv} \otimes \mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})],$ ，其中 M_{triv} 与 M 是同一个空间，但带有平凡的 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-作用。考虑满同态

$$\pi : M_{triv} \otimes H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, \mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}]) \otimes V \twoheadrightarrow M_{triv} \otimes \mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(\mathfrak{g})],$$

我们可以找到一个有限维的 $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon$（$\mathfrak{g}$）-子模 N，它属于 $M_{triv} \otimes H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, \mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}])$ ，使得 $N \otimes V$在 π下的像包含 M。根据引理7.47， $H^0(\dot{\mathcal{U}}/\mathfrak{u}\dot{\mathcal{U}}^0, \mathbb{F}[\dot{\mathcal{U}}_\epsilon^{*0}])$ 包含于函子 Fr 的像中*，因此 N也是如此。因此， M是 Fr*（N）$\otimes V$的一个子商。证明完毕。□

7.7. $\mathcal{U}_q$的有理表示$\mathfrak{g}$， P。

让我们回顾一下幂等元化版本 $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}, P)$ ， $\widehat{\mathcal{U}}_q^{\geqslant}(\mathfrak{g}, P)$ ， $\widehat{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}(\mathfrak{g}, P)$ 。

定义 7.49. A $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}, P)$-模 M称为有理的，如果对任意 $m \in M$，都有 (i) 只有有限多个 $\lambda \in P$满足 $1_\lambda m \neq 0$，且 $\sum_\lambda 1_\lambda m = m$。(ii) 存在 $k > 0$，使得对所有 $s > k$及所有 $i = 1, \ldots, r$，都有 $E_i^{[s]} 1_\lambda m = 0$。(iii) 存在 $k > 0$，使得对所有 $s > k$及所有 $i = 1, \ldots, r$，都有 $F_i^{[s]} 1_\lambda m = 0$。

于是定义 Rep($\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}, P)$) 为所有有理 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}, P)$-模所构成的范畴。范畴 Rep($\widehat{\mathcal{U}}_q^{\geqslant}(\mathfrak{g}, P)$), Rep($\widehat{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}(\mathfrak{g}, P)$ 的定义类似。范畴 Rep^{fd}($\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}, P)$), Rep^{fd}($\widehat{\mathcal{U}}_q^{\geqslant}(\mathfrak{g}, P)$ 和 Rep^{fd}($\widehat{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}(\mathfrak{g}, P)$ 是相应范畴的全子范畴，由所有关于 R 有限生成的对象组成。

带编织的幺半范畴表示范畴 Rep($\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$) $\to$表示范畴 Rep($\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}, P)$)，其中我们通过 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}, P)$) 中的 R-矩阵 $\mathcal{R}$（见5.30）赋予 Rep(因此，第 7.1-7.4 节中的以下构造和结果同样适用于 Rep($\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}, P)$):

- Joseph 归纳函子 $\mathfrak{J}$: Rep^{fd}($\widehat{\mathcal{U}}_q^{\geqslant}(\mathfrak{g}, P)$) $\to$Rep^{fd}($\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}, P)$)
- 归纳函子 H^0: Rep($\widehat{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}(\mathfrak{g}, P)$) $\to$Rep($\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}, P)$) 以及第 7.2 节中的各种不变量
- 韦伊模 $W_q(\lambda) := \mathfrak{J}(R_\lambda)$，对偶魏尔模 $H_q^0(\lambda) := H^0(R_\lambda)$，量子化坐标代数 $R[\dot{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g})] := H^0(\dot{\mathcal{U}}/R, R)$。.
- 良好滤过的概念及 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \times \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$-模$R[\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})]$ 上的良好滤过。

令 $\widehat{\mathcal{U}}_q^{\mathsf{F}}(\mathfrak{g}, P)$、 $\widehat{\mathcal{U}}^{\geqslant,}{}_q{}^{\mathsf{F}}(\mathfrak{g}, P)$、 $\widehat{\mathcal{U}}^{\leqslant,}{}_q{}^{\mathsf{F}}(\mathfrak{g}, P)$ 表示通过扭曲从 $\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g}, P)$、$\widehat{\mathcal{U}}_q^{\geqslant}(\mathfrak{g}, P)$、 $\widehat{\mathcal{U}}_q^{\leqslant}(\mathfrak{g}, P)$ 得到的新 Hopf 代数

$$\mathsf{F} = \prod_{\lambda,\mu \in P} q^{\sum_{ij} \phi_{ij}(\omega_i^\vee, \lambda)(\omega_j^\vee, \mu)} 1_\lambda \otimes 1_\mu.$$

那么，范畴 Rep($\widehat{\mathcal{U}}_q^{\mathsf{F}}(\mathfrak{g},P)$ 只是带有新幺半群结构的阿贝尔范畴 Rep($\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g},P)$)；Rep($\widehat{\mathcal{U}}^{\geqslant}_{,q}{}^{\mathsf{F}}(\mathfrak{g},P)$) 和 Rep($\widehat{\mathcal{U}}^{\leqslant}_{,q}{}^{\mathsf{F}}(\mathfrak{g},P)$) 也类似。此外，Rep($\widehat{\mathcal{U}}_q^{\mathsf{F}}(\mathfrak{g},P)$ 是编织的，其 R-矩阵 $\mathcal{R}^{\mathsf{F}}$ 见式 (5.31)。

注7.50. 范畴 Rep($\widehat{\mathcal{U}}_q^{\mathsf{F}}(\mathfrak{g},P)$) 和 Rep($\widehat{\mathcal{U}}_q(\mathfrak{g},P)$) 作为带编织的幺半范畴是等价的。

7.8. $U_q(\mathfrak{g})$**的有理表示。**

D **定义 7.51.** A $U_q(\mathfrak{g})$-模 M 若满足以下条件，则称为有理的：
(i) 存在权分解 $M=\bigoplus_{\lambda\in P}M_\lambda$，其中 $\dot{U}_q^0$通过特征 $\hat{}\chi_\lambda$作用于 M_λ。(ii) 对任意 $m\in M$，存在 $k>0$，使得对于所有 $s>k$ 以及所有 $i=1$、.....、r，均有 $\tilde{E}_i^{(s)}m=0$。(iii) 对任意 $m\in M$，存在 $k>0$，使得对于所有 $s>k$ 以及所有 $i=1$、.....、r，均有 $\tilde{F}_i^{(s)}m=0$。

我们将 Rep($U_q(\mathfrak{g})$) 定义为所有有理的 $U_q(\mathfrak{g})$-表示所构成的范畴。类似地，我们可以定义范畴 Rep($\dot{U}_q^{\geqslant}$)、Rep($\dot{U}_q^{\leqslant}$)、Rep($\dot{U}_q^0$)。

那么，与第7.1-7.5节类似，我们可以定义以下对象

- Joseph 归纳函子 $\mathfrak{J}:\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{U}_q^{\geqslant})\to\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{U}_q(\mathfrak{g}))$。
- 归纳函子 $H^0(\dot{U}_q/\mathcal{B},\ -):\mathrm{Rep}(\mathcal{B})\to\mathrm{Rep}(\dot{U}_q(\mathfrak{g}))$，其中 $\mathcal{B}$ 是以下代数之一：R, $\dot{U}_q^0$, $\dot{U}_q^{\geqslant}$, $\dot{U}_q^{\leqslant}$。
- 韦伊模 $W_q(\lambda):=\mathfrak{J}(R_\lambda)$。对偶魏尔模 $H_q^0(\lambda):=H^0(\dot{U}_q/\dot{U}_q^{\leqslant},\ R_\lambda)$。.
- 量子化的坐标代数 $R[U_q(\mathfrak{g})]$。
- 良好滤过的概念。

第7.1—7.6 节中的结果可推广为 Rep($U_q(\mathfrak{g})$) 中的类似结果。理由如下：我们有一个带编织的幺半范畴之间的等价

$$\mathrm{Rep}(\dot{U}_q(\mathfrak{g}))\to\mathrm{Rep}(\widehat{\mathcal{U}}_q^{\mathsf{F}}(\mathfrak{g},P))$$

以及幺半范畴之间的等价

$$\mathrm{Rep}(\dot{U}_q^{\geqslant}(\mathfrak{g}))\to\mathrm{Rep}(\widehat{\mathcal{U}}_q^{\geqslant,\mathsf{F}}(\mathfrak{g},P)),\qquad \mathrm{Rep}(\dot{U}_q^{\leqslant}(\mathfrak{g}))\to\mathrm{Rep}(\widehat{\mathcal{U}}_q^{\leqslant,\mathsf{F}}(\mathfrak{g},P)),$$

结合第 7.7 节中的讨论。

我们需要一个适用于 Rep($U_q(\mathfrak{g})$) 的引理 7.48 的类似版本

引理 7.52. 设 $R=\mathbb{F}$ 和 $q=\epsilon\in\mathbb{F}$ 是阶为 ℓ 的单位根，满足 $\ell_i\geq$最大$\{2,1-a_{ij}\}_{1\leq j\leq r}$。存在一个有限维模 $V\in$表示范畴($U_q(\mathfrak{g})$)，具有如下性质。对于表示范畴Rep($U_\epsilon(\mathfrak{g})$)中的任意有限维模 M，存在一个有限维模 N，属于 $\tilde{}\mathrm{Rep}(U_\epsilon(\mathfrak{g}))$，使得 M 同构于$\mathrm{Fr}^*(V)\otimes V$的一个子商。

这里唯一的区别是，我们使用态射 Fr^* 而不是 Fr^*，但根据引理 5.25 （该引理指出 Fr^* 是 Fr^* 与范畴的一个自等价复合而成的） Φ^*，这点不便不会造成问题。

我们以不变量于对于伴随的子模的结果结束本节作用于 $R[U_q(\mathfrak{g})]$。我们重述一个关于 $U_q(\mathfrak{g})\otimes_R U_q(\mathfrak{g})$-模$R[U_q(\mathfrak{g})]$的良好滤过的结果。

引理 7.53. 在 P_+ 上赋予一个细化通常偏序的全序，并令 $\lambda_1<\lambda_2<\ldots$.为使得我们在 $P_+\times P_+$ 上得到全序的元素，如注 7.33所述。在 $R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})]$ 上存在一个穷尽滤过 $\{0\}=M_0\subset M_1\subset\ldots$，使得 $M_i/M_{i-1}\cong H_q^0(\lambda_i)\otimes H_q^0(\lambda_i^*)$。

模 M_i 是 $R[U_q(\mathfrak{g})]$ 的最大 $U_q(\mathfrak{g})\otimes_R U_q(\mathfrak{g})$-子表示，其权由上方的 (λ_i, λ_i^*) 所界。

$R[U_q(\mathfrak{g})]$ 上的 $U_q(\mathfrak{g})\otimes U_q(\mathfrak{g})$-模结构如下：

$$(x\otimes y)f(u) = f(S(y)ux) \qquad \text{for all } x,y,u\in \dot{U}_q(\mathfrak{g}) \text{ and } f\in R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})].$$

我们稍作修改。引理 7.53 在考虑以下 $U_q(\mathfrak{g})\otimes$. $U_q(\mathfrak{g})$-模结构于 $R[U_q(\mathfrak{g})]$:

$$(x\otimes y)f(u) = f(S(y)uS^2(x)) \qquad \text{for all } x,y,u\in \dot{U}_q(\mathfrak{g}) \text{ and } f\in R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})].$$

利用这一修改后的作用和余乘映射 $\Delta' : U_q(\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g})\otimes_R U_q(\mathfrak{g})$，我们得到 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$在 $R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})]$ 上的伴随作用，其定义为对所有 $x,u\in \dot{U}_q(\mathfrak{g})$和$f\in R[U_q(\mathfrak{g})]$，$(xf)(u) = f(\mathrm{ad}'_l(S(x))u)$。

对于任意 $V\in$Rep$(U_q(\mathfrak{g}))$，我们定义一个 R-线性映射

$$V\otimes_R V^* \to R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})], \qquad v\otimes f\mapsto c_{f,K^{-2\rho}v}, \forall\, v\in V, f\in V^*.$$

这是一个 $U_q(\mathfrak{g})\otimes_R U_q(\mathfrak{g})$-模同态（注意，此处我们在 $R[U_q(\mathfrak{g})]$ 上使用了 $U_q(\mathfrak{g})\otimes_R U_q(\mathfrak{g})$ 的修正作用）。

韦伊模 $W_q(\lambda)$ 在 R 上是自由的，其权基记为 $\{v_i\}$。因此，$\mathrm{End}_R(W_q(\lambda)) \cong W_q(\lambda)\otimes_R W_q(\lambda)^*$ 是 $U_q(\mathfrak{g})$-模。Id : $W_q(\lambda) \to W_q(\lambda)$ 在 $W_q(\lambda)\otimes_R W_q(\lambda)^*$ 中的像为 $\sum_i v_i\otimes v_i^*$，这里 v_i^*是 $W_q(\lambda)^*$的对偶权基。因此 $\sum_i v_i\otimes v_i^* \in (W_q(\lambda)\otimes_R W_q(\lambda)^*)^{\dot{U}_q}$。

令 c_λ 为映射 $W_q(\lambda)\otimes_R W_q(\lambda)^* \to R[U_q(\mathfrak{g})]$ 下 $\sum_i v_i\otimes v_i^*$ 的像。于是 $c_\lambda\in R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})]^{\dot{U}_q}$。

引理 7.54。考虑 $R[U_q(\mathfrak{g})]$ 上 $U_q(\mathfrak{g})$ 的伴随作用。$U_q(\mathfrak{g})$-不变部分 $R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})]^{\dot{U}_q}$ 是一个自由 R-模，其基为 $\{c_\lambda|\lambda\in P_+\}$。

证明。步骤 *1*。由于 $U_q(\mathfrak{g})\otimes_R U_q(\mathfrak{g})$-模 $W_q(\lambda_i)\otimes_R W_q(\lambda_i)^*$ 的支配权被 (λ_i,λ_i^*) 所界，映射 $W_q(\lambda_i)\otimes_R W_q(\lambda_i)^* \to R[U_q(\mathfrak{g})]$ 的像包含于 M_i。

步骤 *2*. 在 $R[U_q(\mathfrak{g})]$ 上的第一个 $U_q(\mathfrak{g})$-模结构（由 δ 定义）下，映射

$$\mathrm{Hom}_{\dot{U}_q(\mathfrak{g})}(W_q(\lambda_i), W_q(\lambda_i)\otimes_R W_q(\lambda_i)^*) \to \mathrm{Hom}_{\dot{U}_q(\mathfrak{g})}(W_q(\lambda_i), R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})]),$$

恰好是恒等态射 $W_q(\lambda_i)^* \xrightarrow{\mathrm{Id}} W_q(\lambda_i)^* \cong H_q^0(\lambda_i^*)$。因此，复合

$$W_q(\lambda_i)\otimes_R W_q(\lambda_i)^* \to M_i \twoheadrightarrow H_q(\lambda_i)\otimes_R H_q^0(\lambda_i^*)$$

只是来自自然同态 $W_q(\lambda_i) \to H_q^0(\lambda_i)$。

注意，$(H_q^0(\lambda_i)\otimes_R H_q^0(\lambda_i^*))^{\dot{U}_q} \cong \mathrm{Hom}_{\dot{U}_q(\mathfrak{g})}(W_q(\lambda_i) H_q^0(\lambda_i)) \cong R$，这里第一个同构利用了 $W_q(\lambda_i)$ 的 R-自由性以及同构 $H_q^0(\lambda_i^*)\cong W_q(\lambda_i)^*$。因此可知，$c_{\lambda_i}$ 在 $H_q^0(\lambda_i)\otimes_R H_q^0(\lambda_i^*)$ 中的像张成自由的秩一 R-模 $(H_q^0(\lambda_i)\otimes_R H_q^0(\lambda_i^*))^{\dot{U}_q}$。

步骤 *3*。现在我们继续通过归纳法证明 $M_i^{\dot{U}_q}$ 是一个以$\{c_{\lambda_j}|0\le j\le i\}$为基的自由 R-模。基例 $i=1$由步骤 2 得证。现在进行归纳步骤。假设 $M_{i-1}^{\dot{U}_q}$是一个以 $\{c_{\lambda_j}|0\le j\le i-1\}$为基的自由 R-模。模 M_{i-1}具有良好的滤过，而平凡的 $U_q(\mathfrak{g})$-模 R 就是韦伊模 $W_q(0)$。因此，短正合列

$$0\to M_{i-1}\to M_i\to H_q^0(\lambda_i)\otimes_R H_q^0(\lambda_i^*)\to 0$$

给出一个短正合列

$$0 \to (M_{i-1})^{\dot{U}_q} \to (M_i)^{\dot{U}_q} \to (H_q^0(\lambda_i) \otimes_R H_q^0(\lambda_i^*))^{\dot{U}_q} \to 0.$$

由于 $(H_q^0(\lambda_i) \otimes_R H_q^0(\lambda_i^*))^{\dot{U}_q}$ 是一个秩一自由 R-模，根据归纳假设，$(M_i)^{\dot{U}_q}$ 是一个有限秩自由 R-模。此外，根据 $H_q^0(\lambda_i) \otimes_R H_q^0(\lambda_i^*)$ 的像张成 $c_{\lambda_i} \in M_i$。再次结合归纳假设可知，对于 $0 \le j \le i$，元素 γ_{λ_j} 在 $(M_i)^{\dot{U}_q}$ 中构成一个 R-基。

步骤 2. 由于 $R[U_q(\mathfrak{g})]$ 的滤过 $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \dots$ 是穷尽的，由步骤 3 可得该引理。□

8. Reflection equation algebras

回顾一下，在 Hopf 代数 H 上，H-模代数 A 是一个含幺代数 A，带有左 H-模结构，使得

$$h1_A = \varepsilon(h)1_A, \qquad h \cdot ab = \sum (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b) \qquad \forall\, a, b \in A,\, h \in H\,. \tag{8.1}$$

本节中，我们证明，可以用 R-矩阵对 $R[U_q(\mathfrak{g})]$ 上的代数结构进行扭曲，使得 $R[U_q(\mathfrak{g})]$ 成为一个 $U_q(\mathfrak{g})$-模代数，其 $U_q(\mathfrak{g})$-模结构由下式给出

$$(xf)(y) = f(\mathrm{ad}_l'(S'(x))(y)), \qquad \forall x, y \in \dot{U}_q(\mathfrak{g}), f \in R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})].$$

新代数，记作 $O_q[G]$，在文献中称为反射方程代数。

8.1. 反射方程代数 $O_q[G]$。

出于技术上的原因，见注记 8.8，我们将使用 $U_q := U^{\mathrm{op},}{}_q{}^{\mathrm{cop}}(\mathfrak{g})$，即通过将 $U_q(\mathfrak{g})$ 的乘法和余乘法结构都取反得到的 Hopf 代数。令 ad_l°、ad_r° 分别表示 $\dot{U}_q$ 在自身上的左、右伴随作用。我们用 $\cdot^{\mathrm{op}}$ 表示 U_q 上的乘法，以及 U_q 在其模上的作用，以区别于 $U_q(\mathfrak{g})$ 中相应的构造。先记录 KS]中的命题-定义 2.5 [:

命题—定义 8.1。 *(a)* 设 $(H, 1_H, \mu, \varepsilon, \Delta)$ 为一个双代数，且设 $F \in H \otimes H$ 为满足以下条件的元素

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})(F)F_{12} = (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(F)F_{23}, \qquad (\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(F) = 1_H = (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(F).$$

对所有 $x \in H$，定义

$$\Delta^F(x) = F^{-1}\Delta(x)F.$$

那么 $H_F := (H, 1_H, \mu, \varepsilon, \Delta_F)$ 是一个双代数。我们称 F 是 H 的扭曲。
(b) 设 H 是一个双代数，$F \in H \otimes H$ 是 H 的一个扭曲。设 $(A, 1_A, m)$ 是一个带乘法 $m: A \otimes A \to A$ 的含幺左 H-模代数。定义一个线性映射

$$m_F : A \otimes A \to A, \qquad m_F(a \otimes b) = m(F(a \otimes b)).$$

那么 $A_F := (A, 1_A, m_F)$ 是一个代数。A 上的左 H-模结构使 A_F 成为一个左 H_F-模代数。

(c) 设 $(U, 1, \mu, \varepsilon, \Delta, \mathcal{R})$ 是一个带有普适 R-矩阵 $\mathcal{R}$ 的辫 *braided* 双代数，且 $H := U^{\mathrm{cop}} \otimes U$ 是乘积双代数。那么，以下两个元素是 H 的扭曲：

$$F := \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \in H \otimes H, \qquad \overline{F} := \mathcal{R}_{24}^{-1}\mathcal{R}_{14}^{-1} \in H \otimes H.$$

引理 8.2. 沿用命题*8.1.c)* 中的记号，U 的余乘法定义了一个双代数同态 $\Delta: U \to (U^{cop} \otimes U)_F$，满足 $F = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}$。

证明。 由于 $(U_{\mathrm{cop}}\otimes U)_F$的代数结构与 $U\otimes U$ 相同，我们只需验证该映射是一个余代数同态。令 $\tilde{\Delta}$，Δ 分别表示 $(U_{\mathrm{cop}}\otimes U)_F$，$U^{\mathrm{cop}}\otimes U$的余乘法。那么

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(x\otimes y)&=\mathcal{R}_{23}^{-1}\mathcal{R}_{13}^{-1}\mathring{\Delta}(x\otimes y)\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}\\&=\mathcal{R}_{23}^{-1}\mathcal{R}_{13}^{-1}(x_{(2)}\otimes y_{(1)}\otimes x_{(1)}\otimes y_{(2)})\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}\\&=\mathcal{R}_{23}^{-1}(x_{(1)}\otimes y_{(1)}\otimes x_{(2)}\otimes y_{(2)})\mathcal{R}_{23}\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(\Delta(x))=\tilde{\Delta}(x_{(1)}\otimes x_{(2)})=\mathcal{R}_{23}^{-1}(x_{(1)}\otimes x_{(3)}\otimes x_{(2)}\otimes x_{(4)})\mathcal{R}_{23}=x_{(1)}\otimes\mathcal{R}^{-1}\Delta^{\mathrm{op}}(x_{(2)})\mathcal{R}\otimes x_{(3)}\\=x_{(1)}\otimes\Delta(x_{(2)})\otimes x_{(3)}=(\Delta\otimes\Delta)\Delta(x)\end{aligned}$$

□

代数 Rep(的有理表示范畴也有一个直接对应的版本U_q。我们还有量子化坐标代数 $R[\mathring{U}_q]$，如第7.5节所述。此外，将$\mathring{U}_q$ 和 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$ 视为同一个 R-模，我们便可以将 R-模 $R[\mathring{U}_q]$ 与 $R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})]$等同起来。

量子化坐标代数 $R[U_q]$ 自然地具有代数结构，该结构来自 $\mathring{U}_q$ 的余乘法。此外，$R[\mathring{U}_q]$ 是一个 $\mathring{U}_{\text{余乘法}_q}\otimes\mathring{U}_q$-模代数，其 $\mathring{U}_q^{\mathrm{cop}}\otimes\mathring{U}_q$-模结构定义为

$$(x\otimes y)f(u)=f(S'(x)\cdot^{\mathrm{op}}u\cdot^{\mathrm{op}}y),$$

对于任意 x，y，$u\in U_q$和 $f\in R[U_q]$。

我们来考虑以下 R-矩阵，它对应于 U_q

$$\mathring{\mathcal{R}}:=(\mathcal{R}_{21}^{\mathsf{F}})^{-1}=\sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathbb{N}}}^{\nu,\mu\in P}q^{(\nu,\mu)-(\nu+\mu,\kappa(\mathrm{wt}(\tilde{E}^{(k)}))}d_{\vec{k}}(\tilde{E}^{(k)}\cdot^{\mathrm{op}}1_\mu)\otimes(S'(\tilde{F}^{(k)})\cdot^{\mathrm{op}}1_\nu),\tag{8.2}$$

其系数为 $d_{\vec{k}}\in R$，其中 $d_{\vec{0}}=1$

通过应用命题8.1 中的构造，我们得到以下引理

$$H=\mathring{U}_q^{\mathrm{cop}}\otimes\mathring{U}_q,\qquad A=R[\mathring{U}_q],\qquad F=\mathring{\mathcal{R}}_{13}\mathring{\mathcal{R}}_{23},$$

引理8.3。 $R[U_q]_F$是一个左$(U_q^{cop}\otimes U_q)_F$-模代数。

注释8.4。 $\mathcal{R}$ 不是 $U_q\otimes U_q$ 的元素，并且 U_q 不是拟三角的。然而，代数 $R[\mathring{U}_q]_F$ 仍然是良定义的。这是因为 $R[\mathring{U}_q]$ 的任意元素都是某个有限生成的 R-模对象在表示范畴($\mathring{U}_q$)中的矩阵系数。因此，在命题8.1.b 的公式应用于 $R[U_q]$时，$F=\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}$ 中除有限多个分支外，其余分支的作用均为零。

由引理 8.2可知，Δ^{op} 的余乘法 U_q 是一个霍普夫代数同态 $\Delta^{\mathrm{op}}:\ U_q\to(\mathring{U}_q^{cop}\otimes\mathring{U}_q)_F$。因此我们得到以下

引理 8.5. $R[U_q]_F$ 是一个左 U_q-模代数，其 U_q-模结构定义为

$$(x\cdot^{\mathrm{op}}f)(u)=f(\mathrm{ad}_r^\circ(x)(u)),$$

对于 x、$u\in U_q$和 $f\in R[U_q]_F$。

由此得到 $O_q[G]$的定义。

定义 8.6。 反射方程代数 $O_q[G]$ 是具有 $R[\mathring{U}_q]_F$ 的代数结构的 R-模 $R[U_q(\mathfrak{g})]$ 。如上所述，这里我们将 R-模 $R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})]$ 与 $R[\mathring{U}_q]_F$ 视为相同。

Lem **马萨诸塞州 8.7。** $O_q[G]$ 是一个左 $U_q(\mathfrak{g})$-模代数，其 $U_q(\mathfrak{g})$-模结构由 b 给出 y

$$(xf)(u) = f(\mathrm{ad}'_l(S'(x))(u)),$$

对于 x、$u \in U_q$（$\mathfrak{g}$）和 $f \in O_q[G]$

证明。 我们有

$$(xf)(u) = f(\mathrm{ad}'_l(S'(x))(u)) = f(\mathrm{ad}^\circ_r(S'(x))(u)) = (S'(x) \cdot^{\mathrm{op}} f)(u),$$

对于 x，$u \in U_q$（$\mathfrak{g}$）和 $f \in O_q[G]$。在表达式 S'（x）$\cdot^{\mathrm{op}} f$中，我们将 S'（x）视为U_q中的一个元素。因此，我们有

$$x(fg) = S'(x) \cdot^{\mathrm{op}} (fg) = (S'(x_{(1)}) \cdot^{\mathrm{op}} f)(S'(x_{(2)}) \cdot^{\mathrm{op}} g) = (x_{(1)}f)(x_{(2)}g),$$

对于 $x \in U_q$（$\mathfrak{g}$）和 f，$g \in O_q[G]$。 □

注记 8.8。可以直接将命题 8.1.b) 中的构造应用于 $U_q(\mathfrak{g})$，不过，由此得到的代数 $O_q[G]$ 将具有左 $U_q(\mathfrak{g})$-模结构，其中 $U_q(\mathfrak{g})$-模结构由 $(xf)(u) = f(\mathrm{ad}'_r(x))(u)$ 定义，适用于 $x, u \in \dot{U}_q(\mathfrak{g})$ 和 $f \in O_q[G]$。之后，我们希望得到引理 8.7 中的 $U_q(\mathfrak{g})$-模结构，因此需要使用 U_q。

注记 8.9。 .....的构造 $O_q[G]$关于基环是函子性的。也就是说，对于任意 $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$-代数 R，代数 $O_{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}[G] \otimes_{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}} R$ 与 $O_R[G]$ 相同（我们已经知道R-模同构 $O_{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}[G] \otimes_{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}} R \cong O_R[G]$，见引理 7.30）。

8.1.1.的范畴构造 $O_q[G]$。本子节最后，我们用范畴语言来解释 $O_q[G]$ 的代数结构。对于任意 $X \in \mathrm{Rep}(U_q)$，令 $X^* := \mathrm{Hom}_R(X, R) \in \mathrm{Rep}(U_q)$。那么

$$O_q[G] \simeq \bigsqcup X^* \otimes X / \sim, \tag{8.3}$$

其中 X 遍历 $\mathrm{Rep}(U_q)$ 中所有在 R 上有限生成的模。等价关系 $\sim$ 定义为

$$\phi^* y^* \otimes x \sim y^* \otimes \phi x \qquad \forall \phi\colon X \to Y, x \in X, y^* \in Y^*.$$

设 $\sigma_{-,-}$ 为 $\mathrm{Rep}(U_q)$ 上的编织。那么 $O_q[G]$ 上的乘法 m 可描述如下：

$$\begin{tikzcd} X^* \otimes X \otimes Y^* \otimes Y \arrow[r, "\sigma_{X^* \otimes X, Y^*}"] \arrow[d] & Y^* \otimes X^* \otimes X \otimes Y \arrow[r] & (X \otimes Y)^* \otimes (X \otimes Y) \arrow[d] \\ O_q[G] \otimes O_q[G] \arrow[rr, "\mathrm{m}"] & & O_q[G] \end{tikzcd} \tag{8.4}$$

由此可得上文构造的 上代数结构的代数描述（8.4），参见 [Jo, §2.3]

8.2. $R = \mathbb{F}$ **为域的情形。**

设 $\mathrm{Rep}^{fd}(U_q)$ 是 $\mathrm{Rep}(U_q)$ 中由所有有限维表示构成的全子范畴。回想一下，$\mathbb{F}[\mathring{U}_q]$中的任意元素都可以表示为 $\mathrm{Rep}^{fd}(\mathring{U}_q)$ 中某个对象的矩阵系数的线性组合。设 $X \in \mathrm{Rep}^{fd}(\mathring{U}_q)$ 且 $X^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(X, \mathbb{F})$。元素 $v \in X$ 和 $f \in X^*$ 给出矩阵系数$\mathring{c}_{f,v}$。我们使用记号 $\mathring{c}_{-,-}$，以便将这些矩阵系数与 $U_q(\mathfrak{g})$ 的矩阵系数 $c_{-,-}$ 区分开来。

$\mathring{\mathbb{F}}[U_q]$ 的 Hopf 代数结构可描述如下：

$$\mathring{c}_{f,v}\cdot\mathring{c}_{g,w}=\mathring{c}_{f\otimes g,v\otimes w}\,,\quad \Delta(\mathring{c}_{f,v})=\sum\mathring{c}_{f,v_i}\otimes\mathring{c}_{v_i^*,v}\,,$$
$$\varepsilon(\mathring{c}_{f,v})=f(v)\,,\qquad [S^{\pm1}(\mathring{c}_{f,v})](u)=f((S^{\pm1}u)v)\,,$$

其中 $v\in V$，$f\in V^*$ 以及 $w\in W$ 满足 V，$W\in$ 表示范畴 $^{fd}(\mathring{U}_q)$；$u\in\mathring{U}_q$ 和 $\{v_i\}$，$\{v_i^*\}$ 是 V，V^* 的对偶基。

定义双线性形式 $\mathbf{r}$：$\mathbb{F}[U_q]\otimes\mathbb{F}[U_q]\to\mathbb{F}$ 如下：

$$\mathbf{r}(\mathring{c}_{f,v},\mathring{c}_{g,w})=\langle f\otimes g,\mathring{\mathcal{R}}(v\otimes w)\rangle,$$

其中 $\mathcal{R}$ 来自 (8.2)。这个双线性形式使 $\mathbb{F}[U_q]$ 成为 **余准三角霍普夫代数**，其定义如下，参见 [KSc、§10.1.1] 或 [KS，定义 1。1]。

定义 8.10。余准三角双代数/霍普夫代数 $(A,\ \mathbf{r})$ 是定义在 $\mathbf{k}$ 上的一对对象，由定义在 $\mathbf{k}$ 上的双代数/霍普夫代数 A 以及卷积可逆线性映射 $\mathbf{r}$：$A\otimes A\to\mathbf{k}$ 构成，并满足以下关系：

$$\mathbf{r}(a_{(1)}\otimes b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)}=b_{(1)}a_{(1)}\mathbf{r}(a_{(2)}\otimes b_{(2)})\,,$$
$$\mathbf{r}(ab\otimes c)=\mathbf{r}(a\otimes c_{(1)})\mathbf{r}(b\otimes c_{(2)})\,,$$
$$\mathbf{r}(a\otimes bc)=\mathbf{r}(a_{(1)}\otimes c)\mathbf{r}(a_{(2)}\otimes b)\,.$$

我们可以对 $\mathbb{F}[U_q]$ 的代数结构进行扭曲，如下所示，参见 [KS，命题-定义 2 .1]

$$a\cdot_{\mathbf{r}}b:=\mathbf{r}(a_{(1)},b_{(2)})\mathbf{r}(a_{(3)},Sb_{(1)})a_{(2)}b_{(3)}=\mathbf{r}(a_{(2)},b_{(3)})\mathbf{r}(a_{(3)},Sb_{(1)})b_{(2)}a_{(1)},\tag{8.5}$$

其中 $a,\ b\in\mathbb{F}[U_q]$。

引理 8.11（引理 2.6, [KS]）。代数 $O_q[G]$ 可通过扭曲（8.5）得到。

8.3. **当 $\mathbb{F}=\mathbb{Q}(v^{1/\mathsf{N}})$ 且 $q=v$ 时的情形。**

令 $U_q:=\mathring{\mathbb{F}}[\mathring{U}_q]^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathring{\mathbb{F}}[\mathring{U}_q],\mathbb{F})$ 这自然构成一个代数。定义双线性映射 $\mathbf{q}(\cdot,\ \cdot):\mathbb{F}[U_q]\otimes\mathbb{F}[U_q]\to\mathbb{F}$ 如下：

$$\mathbf{q}(a\otimes b)=\mathbf{r}(b_{(1)},a_{(1)})\mathbf{r}(a_{(2)},b_{(2)}),\qquad \text{for } a,b\in\mathbb{F}[\mathring{U}_q].$$

由此得到一个线性映射 $l_{\mathbf{r}}:\mathbb{F}[U_q]\to\mathbb{F}[U_q]^*$，其定义如下：

$$\tilde{l}_{\mathbf{r}}(a)=\mathbf{q}(a,\cdot),\qquad \text{for } a\in\mathbb{F}[\mathring{U}_q].$$

当 $\mathbb{F}=\mathbb{Q}(v^{1/\mathsf{N}})$ 时，自然的霍普夫配对 $\mathbb{F}[\mathring{U}_q]\times\mathring{U}_q\to\mathbb{F}$ 关于第二个变量是非退化的，参见 [J1，命题 5。11]。因此，我们有一个代数嵌入 $\mathring{U}_q\hookrightarrow\mathbb{F}[\mathring{U}_q]^*$。

引理 8.12. *(a)* $l_{\mathbf{r}}(\mathbb{F}[U_q])\subset U_q$。

(b) 映射 $\tilde{l}_{\mathbf{r}}:O_q[G]\to\mathring{U}_q$ 是左 U_q-模代数的同态，其中 U_q 在 $O_q[G]$ 上的作用见引理 *8.5*，而 $\mathring{U}_q$ 在 $\mathring{U}_q$ 上的作用是左伴随作用 ad_l°。

证明。(a) 设 $\mathring{\mathcal{R}}=\sum_{i\in I}s_i\otimes t_i$。设 $V,W\in$ 表示范畴 $\mathrm{Rep}^{fd}(\mathring{U}_q)$。设 v,w,f,g 分别是 V,W,V^*,W^* 中的权向量。设 $\{v_l\},\{w_k\}$ 分别是 V,W 的权基。设 $\{v_l^*\},\{w_k^*\}$

是 V^*, W^* 对应的对偶基。于是我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(\mathring{c}_{f,v}, \mathring{c}_{g,w}) &= \sum_{l,k} \Big\langle g \otimes f, \mathring{\mathcal{R}}(w_k \otimes v_l) \Big\rangle \Big\langle v_l^* \otimes w_k^*, \mathring{\mathcal{R}}(v \otimes w) \Big\rangle \\ &= \sum_{l,k,i,j} g(s_i w_k) f(t_i v_l) v_l^*(s_j v) w_k^*(t_j w) \\ &= g(\sum_{i,j} s_i t_j f(t_i s_j v) w)\end{aligned} \tag{8.6}$$

利用（8.6）和（8.2），可得

$$\tilde{l}_{\mathbf{r}}(\mathring{c}_{f,v}) = \sum_{\vec{k},\vec{r}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^N} d_{\vec{k}} d_{\vec{r}} q^{-(\mathrm{wt}(v),\kappa(\mathrm{wt}(\tilde{E}^{(k)}))+\kappa(\mathrm{wt}(\tilde{E}^{(\vec{r})}))} f(S'(\tilde{F}^{(k)}) \cdot^{\mathrm{op}} \tilde{E}^{(r)}(v))$$

$$\tilde{E}^{(k)} \cdot^{\mathrm{op}} S'(\tilde{F}^{(r)}) \cdot^{\mathrm{op}} K^{2\mathrm{wt}(v)-\kappa(\mathrm{wt}(\tilde{E}^{(k)}))-\kappa(\mathrm{wt}(\tilde{E}^{(\vec{r})}))}.$$

于是我们看到，对于所有 $\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$，$\tilde{l}_{\mathbf{r}}(\mathring{c}_{f,v}) \in \mathring{U}_q$，因为 $\kappa(\mathrm{wt}(\tilde{E}^{(k)})) \in 2P$。

(b) 这由 [KSc中的命题 11（方程 10.1.3(28)-(30)）得出 §10.1.3]，另见 [KS]中的命题 1.7 和 2.8。注意，在 [KSc], 的方程 10.1.3(28) 中，项 $g(a_{(1)}S(a_{(3)}))$ 应替换为 $g(S(a_{(1)})a_{(3)})$。这一印刷错误已在 [KS，命题 1 中指出7]。□

考虑以下复合：

$$l_{\mathbf{r}} : O_q[G] \xrightarrow{\tilde{l}_{\mathbf{r}}} \mathring{U}_q \xrightarrow{(S')^{-1}} \dot{U}_q(\mathfrak{g}). \tag{8.7}$$

对每个 $\lambda \in P_+$，令 $L_q(\lambda)$ 为 $\mathrm{Rep}(U_q(\mathfrak{g}))$ 中最高权为 λ 的单模。令 v_λ 为 $L_q(\lambda)$ 中非零的最高权向量，令 v_λ^* 为 $(L_q(\lambda))^*$ 中的对偶权向量。因此，我们有矩阵系数 $c_{v_\lambda^*, v_\lambda} \in O_q[G]$。

引理 8.13。*(a)* 映射 $l_{\mathbf{r}}$ 是左 $U_q(\mathfrak{g})$-模代数的一个态射，其中 $U_q(\mathfrak{g})$- 作用于 $O_q[G]$，见引理 8.7，而 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$-作用于 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$ 的是左伴随作用 ad'_l。*(b)* $l_{\mathbf{r}}(c_{v_\lambda^*, v_\lambda}) = K^{-2\lambda}$。

证明。(a) $\tilde{l}_{\mathbf{r}}$ 和 $(S')^{-1}$ 均为代数同态，因此 $l_{\mathbf{r}}$ 也是如此。只需验证：$l_{\mathbf{r}}$ 是 $U_q(\mathfrak{g})$-线性的：

$$l_{\mathbf{r}}(xf) = (S')^{-1}[\tilde{l}_{\mathbf{r}}(xf)] = (S')^{-1}[\tilde{l}_{\mathbf{r}}(S'(x) \cdot^{\mathrm{op}} f)] = (S')^{-1}[\mathrm{ad}_l^\circ(S'(x))(\tilde{l}_{\mathbf{r}}(f))] =$$

$$\mathrm{ad}'_l(x)((S')^{-1}[\tilde{l}_{\mathbf{r}}(f)]) = \mathrm{ad}'_l(x)(l_{\mathbf{r}}(f)),$$

对于 $x \in U_q(\mathfrak{g})$ 和 $f \in O_q[G]$。在表达式 $S'(x) \cdot^{\mathrm{op}} f$ 中，我们将 $S'(x)$ 视为 U_q 中的一个元素。(b) 任意左 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$-模 V 都可赋予如下左 $\mathring{U}_q$-模结构：$x \cdot^{\mathrm{op}} v = S'(x)v$对于所有 $x \in \mathring{U}_q$ 和 $v \in V$。令 $\mathring{L}_q(\lambda)$ 为由 $L_q(\lambda)$ 得到的左 $\mathring{U}_q$-模。因此我们有一个 U_q 的矩阵系数$\mathring{c}_{v_\lambda^*, v_\lambda}$。注意，$v_\lambda$ 在 $L_q(\lambda)$ 中具有权 $-\lambda$。

结果表明，$c_{v_\lambda^*, v_\lambda} = (S')^{-1}\mathring{c}_{v_\lambda^*, v_\lambda}$ 属于 $O_q[G]$。事实上，

$$(S')^{-1}\mathring{c}_{v_\lambda^*, v_\lambda}(x) = v_\lambda^*((S')^{-1}x \cdot^{\mathrm{op}} v_\lambda) = v_\lambda^*(xv_\lambda) = c_{v_\lambda^*, v_\lambda}(x),$$

对于所有 $x \in U_q$，其中我们将 U_q 与 $U_q(\mathfrak{g})$ 视为 $\mathbb{F}$-向量空间。

另一方面，根据引理 8.12(a) 中的算法，可得

$$\mathbf{q}(S'^{-1}\mathring{c}_{v_\lambda^*, v_\lambda}, \mathring{c}_{g,w}) = g(q^{2(\lambda, \mathrm{wt}(w))}w) = g(K^{2\lambda}w),$$

其中 w, g 是 W, W^* 中的权向量，其中某个 $W \in \mathrm{Rep}^{fd}(\mathring{U}_q)$。由此可得

$$\tilde{l}_{\mathbf{r}}((S')^{-1}\mathring{c}_{v_\lambda^*,v_\lambda}) = K^{2\lambda},$$
$$l_{\mathbf{r}}(c_{v_\lambda^*,v_\lambda}) = (S')^{-1}(\tilde{l}_{\mathbf{r}}((S')^{-1}\mathring{c}_{v_\lambda^*,v_\lambda})) = (S')^{-1}(K^{2\lambda}) = K^{-2\lambda}.$$

证明至此完成。 □

引理 8.14。 $O_q[G] \cong \bigoplus_{\lambda\in P_+} U_q(\mathfrak{g})c_{v_\lambda^*,\ v_\lambda}$。

证明。 对于任意 $V \in$ 表示范畴$^{fd}(\dot{U}_q(\mathfrak{g}))$，由 $V \otimes V^* \to O_q[G]$ 定义的映射 $v \otimes f \mapsto c_{f,\ K^{-2\rho}v}$ 是 $U_q(\mathfrak{g})$-线性的，其中 $U_q(\mathfrak{g})$-作用于 $O_q[G]$ 由引理 8.7给出。于是我们有

$$O_q[G] \cong \bigsqcup_{X\in \mathrm{Rep}^{fd}(\dot{U}_q(\mathfrak{g}))} X \otimes X^*/\sim,$$

其中等价关系 $\sim$ 由下式给出

$$x \otimes \phi^* y^* \sim \phi x \otimes y^* \qquad \forall \phi : X \to Y, x \in X, y^* \in Y^*.$$

由于我们是在 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(v^{1/\mathsf{N}})$ 上工作，范畴 $\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{U}_q(\mathfrak{g}))$ 是半单的，其简单对象为 $\{L_q(\lambda) | \lambda \in P_+\}$。因此，

$$O_q[G] \cong \bigoplus_{\lambda\in P_+} L_q(\lambda) \otimes L_q(\lambda)^*.$$

另一方面，容易证明 $L_q(\lambda) \otimes L_q(\lambda)^*$ 由 $(K^{2\rho}v_\lambda) \otimes v_\lambda^* = q^{(2\rho,\lambda)}v_\lambda \otimes v_\lambda^*$ 在 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$ 上生成。此外，在证明开头定义的态射$L_q(\lambda)\otimes L_q(\lambda)^* \to O_q[G]$下，$(K^{2\rho}v_\lambda) \otimes v_\lambda^*$ 映射为 $c_{v_\lambda^*,\ v_\lambda}$。因此，引理得证。□

9. Isomorphism between REA and the locally finite part

本节中，设 R 是一个 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}}$-代数，其中 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}} = \mathcal{A}[v^{\pm 1/\mathsf{N}}]$。

9.1. Ad 不变双线性形式与诱导嵌入。

回顾配对 $\langle ., .\rangle' \colon U_q^{ev}(\mathfrak{g}) \times \dot{U}_q(\mathfrak{g}) \to R$ 给出如下

$$\left\langle (yK^{\kappa(\nu)})K^{\lambda}(xK^{\gamma(\mu)}), (\dot{y}K^{\kappa(\dot{\nu})})u_0(\dot{x}K^{\gamma(\dot{\mu})})\right\rangle' = (y,\dot{x})' \cdot (\dot{y},x)' \cdot \hat{\chi}_{-\lambda/2}(u_0) \cdot q^{(2\rho,\nu)}, \tag{9.1}$$

对于 $y \in U_{-\nu}^{ev<}$, $x \in U_\mu^{ev>}$, 。 $y \in \dot{U}_-^{<}$。 ν, 。 $x \in \dot{U}^{>}$。 μ, ν, μ, 。 ν, 。 $\mu \in Q_+$, 以及 。 λ, $\lambda \in 2P$, 参见命题 4.16。

此配对诱导出一个 $U_q(\mathfrak{g})$-模的嵌入：

$$\iota \colon U_q^{ev}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \left(\dot{U}_q(\mathfrak{g})\right)^* := \mathrm{Hom}_R(\dot{U}_q(\mathfrak{g}), R)\,. \tag{9.2}$$

引理 9.1。 *(a)* 设 $\phi \colon \dot{U}_{-\nu}^{\leq} \times \dot{U}_\mu^{>} \to R$ 是一个双线性同态，且 $\lambda \in P$。那么存在唯一的元素 $u \in (U_{-\mu}^{ev<}K^{\kappa(\mu)})K^{2\lambda}(U_\nu^{ev>}K^{\gamma(\nu)})$ 使得

$$\langle u, (\dot{y}K^{\kappa(\nu)})u_0(\dot{x}K^{\gamma(\mu)})\rangle' = \phi(\dot{y},\dot{x})\hat{\chi}_{-\lambda}(u_0) \qquad \forall\, \dot{x} \in \dot{U}_\mu^{>}, \dot{y} \in \dot{U}_{-\nu}^{\leq}, u_0 \in \dot{U}_q^0\,. \tag{9.3}$$

(b) ι 的像来自 (9.2) 包含 $R[U_q(\mathfrak{g})]$。

证明。 (a) 回忆完美配对 $(\cdot,\cdot)' \colon U_{-\mu}^{ev<} \times \dot{U}_\mu^{>} \to R$ 以及 $(\cdot,\cdot)' \colon \dot{U}_{-\nu}^{\leq} \times U_\nu^{ev>} \to R$。我们为 $\dot{U}_\mu^{>}$选取一组基 $u_1^\mu, \ldots, u_{r(\mu)}^\mu$，并为 $U_{-\mu}^{ev<}$选取对偶基 $v_1^{-\mu}, \ldots, v_r^{-\mu}{}_{(\mu)}$。类似地，我们为 $\dot{U}_{-\nu}^{\leq}$选取一组基 $u_1^{-\nu}, \ldots, u_r^{-\nu}{}_{\nu()}$，并为 $U_\nu^{ev>}$选取对偶基 $v_1^\nu, \ldots, v_{r(\nu)}^\nu$。于是

$$u = \sum \phi(u_j^{-\nu}, u_i^\mu) q^{-(2\rho,\nu)} (v_i^{-\mu}K^{\kappa(\mu)})K^{2\lambda}(v_j^\nu K^{\gamma(\nu)})$$

满足 (9.3)。的唯一性源于 $\langle\cdot$在第一自变量上$\cdot\rangle'$ 的非退化性，见命题 4.16 。

(b) 设 $V \in \mathrm{Rep}(U_q(\mathfrak{g}))$，使得 V在 R上有限生成。设 $m \in V$是权为 λ的元素，且 $f \in V^* := \mathrm{Hom}_R(V, R)$ 是权为 λ'的元素。只需证明 $c_{f,m}$ 包含于 ι 的像中，因为 $R[U_q(\mathfrak{g})]$ 由这些矩阵系数在 R上张成。注意到，对于有限多个对 (ν, μ)，有 $c_{f,m}(\dot{U}^{\leq}_{-\nu}\dot{U}^0_q\dot{U}^{\geq}_{\mu}) \neq 0$ $\in Q_+ \times Q_+$。对于任意这样的 ν、μ以及所有 $. x \in \dot{U}^{\geq}_{\mu}$、$.y \in \dot{U}^{\leq}_{-\nu}$，$u_0 \in U^0_q$，我们有

$$c_{f,m}((\dot{y}K^{\kappa(\nu)})u_0(\dot{x}K^{\gamma(\mu)})) = f((\dot{y}K^{\kappa(\nu)})u_0(\dot{x}K^{\gamma(\mu)})m) = \hat{\chi}_{\mu+\lambda}(u_0)f((\dot{y}K^{\kappa(\nu)})(\dot{x}K^{\gamma(\mu)})m)\,.$$

根据 (a)，存在 $u_{\mu\nu} \in U^{ev,<}_{-\mu}U^{ev,0}U^{ev,>}_{\nu}$，使得对所有 $v \in \dot{U}^{\leq}_{-\nu}\dot{U}^0_q\dot{U}^{\geq}_{\mu}$，都有 $\langle u_{\mu\nu}, v\rangle' = c_{f,m}(v)$。因此，元素 $u = \sum_{\mu,\nu} u_{\mu\nu}$ （除有限多个 $u_{\mu\nu}$ 外，均为 0）满足 $\iota(u) = c_{f,m}$。□

对于任意 $\lambda \in P_+$，回顾第 7 节中的韦伊模 $W_q(\lambda)$。根据引理 7.12，$W_q(\lambda)$ 是一个有限秩自由 R-模，其基由权向量组成。令 v_λ 为张成最高权空间 $W_q(\lambda)_\lambda$的非零向量。于是，我们可以找到一个权向量 $v^*_\lambda \in W_q(\lambda)^*$，使得 $v^*_\lambda(v_\lambda) = 1$，而 $v^*_\lambda(v_i) = 0$ 对 R-基 $W_q(\lambda)$ 中的其他权向量成立。

引理 9.2. 我们有 $\iota(K^{-2\lambda}) = c_{v^*_\lambda, v_\lambda}$。

证明。对于任意 $u \in \dot{U}^0_q$，配对 $\langle K^\lambda, u\rangle'$ 等于 $\hat{\chi}_{-\lambda/2}(u)$，并且对所有元素 $u \in \bigoplus_{(\nu,\mu)} \in Q_+\times Q_+\setminus(0,0)$ $\dot{U}^{\leq}_{-\nu}\dot{U}^0_q\dot{U}^{\geq}_{\mu}$均为零。另一方面，对于任意 $u \in \dot{U}^0_q$，$c_{v^*_\lambda, v_\lambda}(u)$ 等于 $\hat{\chi}_\lambda(u)$，并且对所有 $u \in \bigoplus_{(\nu,\mu)\in Q_+\times Q_+\setminus(0,0)} \dot{U}^{\leq}_{-\nu}\dot{U}^0_q\dot{U}^{\geq}_{\mu}$均为零。这立即得出所需结果。□

因此，我们得到左 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$-模的嵌入，使得 $\hat{\iota}(c_{v^*_\lambda, v_\lambda}) = K^{-2\lambda}$，

$$\hat{\iota} : R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})] \hookrightarrow U^{ev}_q(\mathfrak{g}).$$

这里，我们通过 $(xf)(y) = f(\mathrm{ad}'_l(S'(x))y)$ 为所有 $. \qquad x, y \in U_q(\mathfrak{g})$ 和 $f \in R[U_q(\mathfrak{g})]$，赋予 $R[\dot{U}_q(\mathfrak{g})]$ 左 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$-模结构。回顾一下第 8.1 节中的代数 $O_q[G]$。

引理 9.3. 嵌入 $\hat{\iota}: O_q[G] \hookrightarrow U^{ev}_q(\mathfrak{g})$ 是 $U_q(\mathfrak{g})$-模代数的同态。

证明. 由于 $\hat{\iota}$ 是 $U_q(\mathfrak{g})$-模的同态，只需证明 $\hat{\iota}$ 是代数同态。在本证明的其余部分，我们将用包含 q 的基环替换下标 q。令 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(v^{1/\mathsf{N}})$。考虑以下图

$$\begin{array}{ccc} O_{\mathbb{K}}[G] & \xrightarrow{\hat{\iota}_{\mathbb{K}}} & U^{ev}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ O_{\mathcal{A}_{\mathsf{N}}}[G] & \xrightarrow{\hat{\iota}_{\mathcal{A}_{\mathsf{N}}}} & U^{ev}_{\mathcal{A}_{\mathsf{N}}}(\mathfrak{g}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ O_R[G] & \xrightarrow{\hat{\iota}_R} & U^{ev}_R(\mathfrak{g}) \end{array}$$

其他水平映射均由中间映射通过基变换得到。上方的两个垂直箭头是包含映射，因为 $O_{\mathcal{A}_{\mathsf{N}}}[G]$ 和 $U^{ev}_{\mathcal{A}_{\mathsf{N}}}(g)$ 在 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}}$ 上是自由的，根据引理 7.30 和引理 3.10。因此，只需证明 $\hat{\iota}_{\mathbb{K}}: O_{\mathbb{K}}[G] \to U^{ev}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ 是代数同态。

. 回顾一下 (8.7) 中的 $U_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$-模代数同态 $l_{\mathbf{r}}$：$O_{\mathbb{K}}[G] \to U_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$。另一方面，我们考虑态射 $\hat{\iota}_{\mathbb{K}}: O_{\mathbb{K}}[G] \to U^{ev}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \cong U_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$。$\hat{\iota}_{\mathbb{K}}$ 和 $l_{\mathbf{r}}$ 都是 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$-模的态射，且 $\hat{\iota}_{\mathbb{K}}(c_{v^*_\lambda, v_\lambda}) = l_{\mathbf{r}}(c_{v^*_\lambda, v_\lambda}) = K^{-2\lambda}$，见引理 8.13 和引理 9.2。此外，由引理 8.14，$O_{\mathbb{K}}[G]$ 是由 $c_{v^*_\lambda, v_\lambda}$ 在 $U_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ 上生成的。因此，$l_{\mathbf{r}}$ 与 $\hat{\iota}_{\mathbb{K}}$ 重合。这意味着 $\hat{\iota}_{\mathbb{K}}$ 是代数同态。□

9.2. **局部有限部分** U_q^{fin}。

我们来 fine

$$U_q^{fin} := \left\{ a \in U_q^{ev}(\mathfrak{g}) \,\middle|\, \mathrm{ad}'(\dot{U}_q(\mathfrak{g}))(a) \text{ is a finitely generated } R\text{-module} \right\}$$

由于 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 是一个权模， U_q^{fin}是 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 的最大有理子表示，因此 $\imath(O_q[G]) \subset U_q^{fin}$。由 (3.3) 可知， U_q^{fin}显然是 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 的一个 R-子代数。我们将这个子代数称为局部有限部分。我们将证明，对于任意诺特 $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$-代数 R，$\imath(O_q[G]) \xrightarrow{\sim} U_q^{fin}$，并通过 $\hat{\imath}$ 将 $O_q[G]$ 识别为 U_q^{ev} 的一个子代数。

本节的关键结果与 [JL1，定理 6 相似。4]

命题 9.4。*(a)* $K^{2\beta} \in U_q^{fin}$当且仅当 $\beta \in -P_+$。

(b) $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 由 U_q^{fin}（分别是 $O_q[G]$）通过局部化元素 $\{K^{-2\omega_i}\}_{i=1}^r$ 得到。

证明。(a) 我们声称， $K^\beta \in U_q^{fin} \cap U^{ev}{}_q{}^0(\mathfrak{g})$ 当且仅当对于所有 i，$(\alpha_i,\beta)_{2d_i} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$。充分性由对所有 $\lambda \in P_+$ 有 $\imath(c_{v_\lambda^*, v_\lambda}) = K^{-2\lambda}$，以及 $\imath(O_q[G]) \subset U_q^{fin}$ 得出。下面证明必要性。

反设，取 $\beta \in 2P$使得 $K^\beta \in U_q^{fin}$且存在 $i \in \{1,\dots,r\}$满足 $c := (\alpha_i,\beta)_{2d_i} \in \mathbb{Z}_{>0}$。根据（3.39），有

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^{(m)})(K^\beta) = \frac{\prod_{s=0}^{m-1}(1-q_i^{2(c+s)})}{(m)_{q_i}!} \cdot \tilde{E}_i^m K^{\beta + m\zeta_i^>}, \tag{9.4}$$

其中，一如既往，系数 $\prod_{s=0}^{m-1}(1-q_i^{2(c+s)})/(m)_{q_i}!$ 表示 $\prod_{s=0}^{m-1}(1-v_i^{2(c+s)})/(m)_{v_i}!$ 在（$\sigma: \mathcal{A} \to R$）的代数同态下的像，该代数同态见（2.2）。我们将证明

$$\text{there are infinitely many } m \geq 1 \text{ such that } c_m := \frac{\prod_{s=0}^{m-1}(1-q_i^{2(c+s)})}{(m)_{q_i}} \neq 0 \text{ in } R. \tag{9.5}$$

这意味着 $\mathrm{ad}'(\dot{U}_q(\mathfrak{g}))(K^\beta)$ 包含无穷多个$\{\tilde{E}_i^m K^{\beta+m\zeta_i^>}\}_{m\geq 1}$的非零倍数。这些元素由引理 3.10 中的 PBW基可知是 R-线性无关的。因此，$\mathrm{ad}'(\dot{U}_q(\mathfrak{g}))(K^\beta)$ 在 R上不是有限生成的，这就导致矛盾。

令 $\mathfrak{m}$ 为 R 的任意极大理想，并令 $\mathbb{F} = R/\mathfrak{m}$。令 $\bar{q}$ 为 q 在 $\mathbb{F}$ 中的像，那么只需证明在将 (9.5) 中的 (R, q) 替换为 $(\mathbb{F}, \bar{q})$ 时，结论仍然成立。但我们有

$$c_m = (-1)^m (1-\bar{q}_i^{-2})^m \bar{q}_i^{(2c+m-1)m} \binom{c+m-1}{m}_{\bar{q}_i}.$$

由此可见，无论 $\mathbb{F}$ 的特征如何，也无论 $\bar{q}$ 是否为 $\mathbb{F}$ 中的单位根，都存在无穷多个 $m \geq 1$，使得 $c_m \neq 0$ 属于 $\mathbb{F}$。

(b) 由于 $K^{-2\omega_i} \in U_q^{fin}$ 和 $K^{-2\omega_i} \in O_q[G]$，我们得到

$$(1-q_i^{-2})\tilde{E}_i K^{\zeta_i^>} K^{-2\omega_i} = \mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)(K^{-2\omega_i}) \in U_q^{fin},\ O_q[G],$$
$$(1-q_i^{-2})\tilde{F}_i K^{-\zeta_i^<} K^{-2\omega_i} = \mathrm{ad}'(\tilde{F}_i)(K^{-2\omega_i}) \in U_q^{fin},\ O_q[G].$$

由于假设 $1-q_i^{-2} \in R$ 可逆，因此我们得到

$$\tilde{E}_i K^{\zeta_i^>}, \tilde{F}_i K^{-\zeta_i^<} \in U_q^{fin} K^{2\omega_i},\ O_q[G] K^{2\omega_i} \qquad \forall 1 \leq i \leq r.$$

这就完成了我们的证明，因为 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 由 $\{\tilde{E}_i K^{\zeta_i^>}, \tilde{F}_i K^{-\zeta_i^<}, K^{\pm 2\omega_i}\}_{i=1}^r$ 生成。 □

9.3. $O_\epsilon[G] \cong U_\epsilon^{fin}$**当** $R = \mathbb{F}$ **为一个域且** q **不是单位根时。**

本节内容沿用 [JL2]。为方便读者，我们概述主要思路[JL2]，并作了一些修改，以考虑本文中的扭曲。

设 $R = \mathbb{F}$ 为一个域，且 $q \in \mathbb{F}$ 不是单位根。在这种情况下，我们有 $U_q^{ev}(\mathfrak{g}) \cong U_q(\mathfrak{g})$。

范畴 $\mathrm{Rep}(U_q(\mathfrak{g})) \cong \mathrm{Rep}(\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}))$ 是半单的，参见 [APW，推论 7。7]。结合这一观察与扭曲配对（4.33）以及 [J1第 6], 节中的论证，我们得到

命题 9.5。 设 Z 为 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}) \cong U_q(\mathfrak{g})$的中心。*Harish-Chandra* 同态（关于该构造，参见 [J1， §6.2] 或下文第 *9.7* 节 ）给出一个同构 $Z \cong \mathbb{F}[K^{2\lambda}]^{W_\bullet}_{\lambda \in P}$。

我们来定义范畴 O ，其对象为 $U_q(\mathfrak{g})$。 O 中的对象是具有权分解 $M = \oplus_\lambda M_\lambda$ 的 $U_q(\mathfrak{g})$-模 M ，满足

(i) 集合 $\{\lambda | M_\lambda \neq \{0\}\}$ 关于权格上的通常序有上界。(ii) 对所有 λ，$\dim_{\mathbb{F}} M_\lambda < \infty$ 。

范畴 O 中的态射是 $U_q(\mathfrak{g})$-模的同态。*Verma* 模$M_q(\lambda) = U_q(\mathfrak{g}) \otimes_{\dot{U}_q^{\geqslant}} \mathbb{F}_\lambda$ 是 O中的一个对象。

我们要在范畴 O上引入一个对偶 τ 。考虑包含 $U_q(\mathfrak{g}) \subset$

$U_q(\mathfrak{g}, P/2)$。那么 O中的每个对象自然都是 $U_q(\mathfrak{g}, P/2)$上的一个模。在 $U_q(\mathfrak{g}, P/2)$上，我们有如下定义的反自同构 τ :

$$\tau(E_i) = F_i, \quad \tau(F_i) = E_i, \quad \tau(K^\lambda) = K^\lambda \qquad \text{for } \lambda \in P/2.$$

对于任意 $M \in O$，令 $M^\tau := \oplus_\lambda (M_\lambda)^* \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(M, \mathbb{F})$，视为向量空间。 M^τ 上的 $U_q(\mathfrak{g}, P/2)$-模结构定义如下:

$$xf(m) = f(\tau(x)m) \qquad \text{for } x \in \dot{U}_q(\mathfrak{g}, P/2),\ f \in M^\tau,\ m \in M.$$

通过将作用限制到 $U_q(\mathfrak{g})$， M^τ 便成为 O 中的一个对象。

一旦我们得到了关于 $U_q(\mathfrak{g})$ 的命题 9.5，以下结论可由标准论证证明： [H，第 1]章。

引理 9.6。 *(a)* O 中的每个对象都有有限长度。

(b) 模 $M_q(\lambda)$有唯一的单商模 $L_q(\lambda)$。模 $M_q(\lambda)^\tau$ 有唯一的单子模 $L_q(\lambda)$。模 $L_q(\lambda)$ 是有限维的，当且仅当 $\lambda \in P_+$。

现在，我们在 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 上定义一个滤过 $\mathcal{F}$ ，它在 $U_q(\mathfrak{g})$ 对 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 的伴随作用下保持不变。该滤过以权格 P 为指标，并采用通常的支配序。在由 $\tilde{E}_i, \tilde{F}_i, K^\lambda$ 生成的自由结合代数上，我们定义

$$\deg(K^{2\lambda}) = -\lambda, \qquad \deg(\tilde{E}_i) = \zeta_i^>/2, \qquad \deg(\tilde{F}_i) = -\zeta_i^</2.$$

这给出了一个以权格 P 为指标、采用支配序的滤过。这在 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 上诱导出滤过 $\mathcal{F}$。回忆一下 $U_q(\mathfrak{g})$ 对 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 的伴随作用:

$$\mathrm{ad}'(K^\mu)(x) = K^\mu x K^{-\mu}, \qquad \mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)(x) = [\tilde{E}_i, x]K^{\zeta_i^>}, \qquad \mathrm{ad}'(\tilde{F}_i)(x) = [\tilde{F}_i, x]K^{-\zeta_i^<}.$$

我们看到， $U_q(\mathfrak{g})$ 的作用保持了 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 上的滤过 $\mathcal{F}$ 。

分别令 G^- 和 G^+ 为由 $\{\tilde{F}_i K^{-\zeta_i^<}\}$ 和 $\{\tilde{E}_i K^{\zeta_i^>}\}$ 生成的 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(U_q^{ev}(\mathfrak{g}))$ 的子代数。则

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(U_q^{ev}(\mathfrak{g})) = \bigoplus_\lambda G(\lambda), \qquad \text{here } G(\lambda) = G^- \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}K^{-2\lambda} \otimes_{\mathbb{F}} G^+.$$

我们有 $G(\lambda)G(\mu) \subset G(\lambda+\mu)$ 和 G^-, $G^+ \subset G(0)$。同构 $G^- \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}K^{-2\lambda} \otimes_{\mathbb{F}} G^+ \to G(\lambda)$ 由乘法映射给出（我们将 G^-, G^+ 视为 $G(0)$ 的子集，并将 $K^{-2\lambda}$ 视为 $G(\lambda)$ 中的一个元素）。$U_q(\mathfrak{g})$ 在 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(U_q^{ev}(\mathfrak{g}))$ 上的作用满足

$$\mathrm{ad}'(x)(ab) = \mathrm{ad}'(x_{(1)})(a)\,\mathrm{ad}'(x_{(2)})(b), \tag{9.6}$$

对所有 $x \in U_q(\mathfrak{g})$，以及 a, $b \in \mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(U_q^{ev}(\mathfrak{g}))$。此外，$U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 上的 Q-分次诱导出Q-分次于 $G(\lambda)$ G^-, G^+。

引理 9.7 (参见 [JL2])。 G^-, G^+ 是 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$-子模，它们属于 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(U_q^{ev}(\mathfrak{g}))$。

证明。我们先证明 G^- 的情形。元素 K^λ, $\tilde{F}_i \in \dot{U}_q(\mathfrak{g})$ 的作用显然保持 G^-。另一方面，在 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 中，我们有

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)(\tilde{F}_j K^{-\zeta_i^<}) = 0, \quad \mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)(\tilde{F}_i K^{-\zeta_i^<}) = \frac{q_i}{1-q_i^{-2}}(K^{2\alpha_i}-1),$$

对于 $i \neq j$。因此，在 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(U_q^{ev}(\mathfrak{g}))$ 中，我们有

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)(\tilde{F}_j K^{-\zeta_i^<}) = -\delta_{ij}\frac{q_i}{1-q_i^{-2}}.$$

将此与 (9.6) 结合起来，可知 G^- 是一个 $U_q(\mathfrak{g})$-子模，且属于 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(U_q^{ev}(\mathfrak{g}))$。 □

设 $G^{fin}(\lambda) := \{m \in G(\lambda) \mid \dim \mathrm{ad}'(\dot{U}_q(\mathfrak{g}))m < \infty\}$。以下是 [JL2] 中的一条重要结果。

引理 9.8. $G^{fin}(\lambda) = 0$ 除非 $\lambda \in P^+$。当 $\lambda \in P^+$ 时，$G^{fin}(\lambda) = \mathrm{ad}'(\dot{U}_q(\mathfrak{g}))(K^{-2\lambda})$。

证明。*步骤 1*。 关键观察是： $G^- \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}K^{-2\lambda}$ 可以赋予如下的 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$-模结构：

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_i(u_- \otimes K^{-2\lambda}) &= q^{-(\lambda,\zeta_i^>)}\,\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i)(u_-) \otimes K^{-2\lambda} \\
K^\mu(u_- \otimes K^{-2\lambda}) &= q^{(\lambda,\mu)}\,\mathrm{ad}'(K^\mu)(u_- \otimes K^{-2\lambda}) \\
\tilde{F}_i(u_- \otimes K^{-2\lambda}) &= q^{(\lambda,\zeta_i^<)}\,\mathrm{ad}'(\tilde{F}_i)(u_- \otimes K^{-2\lambda}),
\end{aligned}$$

对于 $u_- \in G^-$，这里我们利用了 $G^- \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}K^{-2\lambda}$ 是一个 $\dot{U}_q^<$-子模，而 G^- 是 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(U_q^{ev}(\mathfrak{g}))$ 的一个 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$-子模。于是我们得到

$$\{m \in G^- \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}K^{-2\lambda} \mid \text{维 } \mathrm{ad}'(\dot{U}_q^<)(m) < \infty\} = \{m \in G^- \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}K^{-2\lambda} \mid \text{维 } \dot{U}_q(\mathfrak{g})(m) < \infty\} \tag{9.7}$$

步骤 2。 仿照 [JL2, §4.8]，其中使用引理 9.6，可得 $G^- \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}K^{-2\lambda} \cong M_q(\lambda)^\tau$。将此与 (9.7) 结合，可得

$$L(\lambda)^- := \{m \in G^- \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}K^{-2\lambda} \mid \dim \mathrm{ad}'(\dot{U}^<)(m) < \infty\} = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda \text{ is not dominant,} \\ \mathrm{ad}'(\dot{U}^<)(K^{-2\lambda}) & \text{if } \lambda \text{ is dominant.} \end{cases}$$

若 λ 是支配的，则对于某个 $K(\lambda)^- \subset G^-$，有 $L(\lambda)^- = K(\lambda)^- \otimes \mathbb{F}K^{-2\lambda}$。由 (9.7) 可知，$L(\lambda)^-$ 是 $G^- \otimes \mathbb{F}K^{-2\lambda}$ 的一个 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$-子模。考察步骤 1 中定义的 $\tilde{E}_i$ 在 $G^- \otimes \mathbb{F}K^{-2\lambda}$ 上的作用可知，$K(\lambda)^-$ 是 G^- 的一个 $\dot{U}_q^>$- 子模。

步骤 3。 同理，可得

$$L(\lambda)^+ := \{m \in G^+ \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}K^{-2\lambda} \mid \dim \mathrm{ad}'(\dot{U}^>)(m) < \infty\} = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda \text{ is not dominant,} \\ \mathrm{ad}'(\dot{U}^>)(K^{-2\lambda}) & \text{if } \lambda \text{ is dominant.} \end{cases}$$

当 λ 是支配的时，对于某个 $\dot{U}_q^<$-子模 $K(\lambda)^+$，有 $L(\lambda)^+ = K(\lambda)^+ \otimes \mathbb{F}K^{-2\lambda}$，其中该子模属于 G^+。

步骤 4。 利用步骤 2 和步骤 3，我们完全按照 [JL2 中的做法, §4.9] 完成该引理的证明。 □

推论 9.9。 U_q^{fin}由 $\{K^{-2\lambda}\}_{\lambda\in P_+}$ 张成，作为一个 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$-模。

命题 9.10。 包含 $O_q[G]\hookrightarrow U_q^{fin}$是 $\dot{U}_q(\mathfrak{g})$-模代数的同构。

证明。 只需证明这是一个 $U_q(\mathfrak{g})$-模之间的满同态。引理 9.2 表明 $K^{-2\lambda},\lambda\in P_+$, 包含在像中。因此，根据推论 9.9，包含映射$O_q[G]\hookrightarrow U_q^{fin}$是满射。 □

9.4. $O_q[G]\cong U_q^{fin}$**当** $R=\mathbb{F}$ **是一个域且** $q=\epsilon$ **是单位根时**。

先假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的。

回顾 Hopf 代数 $\mathring{U}_q$ 通过同时取乘法和余乘法结构的反结构而得到的 Hopf 代数。于是，有理表示范畴 $\mathrm{Rep}(\mathring{U}_q^*)$ 以显而易见的方式定义。令 $\mathrm{Rep}^{fd}(\mathring{U}_q)$、$\mathrm{Rep}^{fd}(\mathring{U}_q^*)$ 为 $\mathrm{Rep}(U_q)$、$\mathrm{Rep}(U_q^*)$ 中由有限维对象组成的满子范畴。然后，我们可以像第 8 节那样，关于（5.32）中的 R-矩阵 $\mathcal{R}^*$，定义 $\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g})$ 的代数 $O_\epsilon[G^d]$。

Hopf 代数同态 $\mathrm{Fr}\colon U_\epsilon(\mathfrak{g},P)\to U_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)$，由（5.21）导出一个编织单元全忠实函子

$$\tilde{\mathrm{Fr}}^*:\mathrm{Rep}(\mathring{U}_q^*)\to\mathrm{Rep}(\mathring{U}_q).$$

B利用第 8.1.1 节中反射方程代数的范畴实现，我们得到一个包含 on

$$O_\epsilon[G^d]\hookrightarrow O_\epsilon[G].$$

范畴实现

$$O_\epsilon[G^d]\cong\bigsqcup_{X\in\mathrm{Rep}^{fd}(\mathring{U}_q^*)}X^*\otimes X/\sim$$

也告诉我们，$O_\epsilon[G^d]$是 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模。此外，$\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$在 $O_\epsilon[G^d]$ 上的作用可经由 $\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)$分解：元素 $\tilde{E}_i$, $\tilde{F}_i$ 作用为零；$O_\epsilon[G^d]$ 的权包含于 Q^*中，因此对所有 $\lambda\in 2P$，K^λ 在 $O_\epsilon[G^d]$ 上作用为单位元。

因此我们有嵌入的复合

$$\varphi:O_\epsilon[G^d]\hookrightarrow O_\epsilon[G]\xrightarrow{\hat{\iota}}U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}),$$

其中$\hat{\iota}$ 来自引理 9.3。接下来的结果描述了 $O_\epsilon[G^d]$ 在 φ下的像。为此，我们回顾 Z_{Fr}^{fin}（6.11）：

$$Z_{Fr}^{fin}=\{z\in Z_{Fr}\,|\,\dim_{\mathbb{F}}(\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)z)<\infty\}.$$

引理 9.11。 借助代数同态 $Z_{Fr}\cong\mathbb{F}[G_0^d]$（命题 *6.10*），我们有 $\varphi(O_\epsilon[G^d])=Z_{Fr}^{fin}\cong\mathbb{F}[G^d]$。

证明。 $\mathbb{F}$-向量空间 $O_\epsilon[G^d]$ 由 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g},P)$-模的矩阵系数张成，这些模是 $\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{U}_\epsilon^*)$ 中的对象。这些矩阵系数在 $\tilde{\mathrm{Fr}}\colon\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g},P)\to\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)$ 的核上取值为零。根据 Z_{Fr} 的定义，我们有 $\varphi(O_\epsilon[G^d])\subset Z_{Fr}$。

回忆同态（6.6）：

$$\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)\overset{\phi^{-1}}{\cong}A_{Q^*}\hookrightarrow\tilde{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)\hookleftarrow\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*).\tag{9.8}$$

$\mathrm{Rep}(\dot{U}_\epsilon^*)$ 和 $\mathrm{Rep}(\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d))$ 中的所有表示都可以自然地扩展为 $U_\epsilon^*(\mathfrak{g},P^*)$ 的表示$\tilde{}$。通过取这些扩展，再将作用限制到另一个代数上，我们得到以下函子：

$$\mathfrak{T}:\mathrm{Rep}(\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}))\to\mathrm{Rep}(\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)),\qquad\mathfrak{T}':\mathrm{Rep}(\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d))\to\mathrm{Rep}(\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g})),\tag{9.9}$$

这些函子互为拟逆。特别地， $\mathfrak{T}$是一个范畴等价。

通过分析 $Z_{Fr} \cong \mathbb{F}[G_0^d]$ 的构造可知， $\varphi(O_\epsilon[G^d]) \subset Z_{Fr} \cong \mathbb{F}[G_0^d]$由 $\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{U}_\epsilon^*(\mathfrak{g}))$ 中表示的矩阵系数张成，这些表示通过函子 $\mathfrak{T}$ 被视为 $\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)$ 上的模。然而， $\mathfrak{T}$ 是范畴等价。因此，$\varphi(O_\epsilon[G^d]) \subset \mathbb{F}[G_0^d]$包含 $\mathrm{Rep}^{fd}(\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d))$ 中表示的所有矩阵系数。但这些矩阵系数张成 $\mathbb{F}[G^d]$ ，且 $\varphi(O_\epsilon[G^d]) \subset \mathbb{F}[G^d]$。因此 $\varphi(O_\epsilon[G^d]) = \mathbb{F}[G^d]$。□

注记 9.12。 根据引理 9.11， $O_\epsilon[G^d]$ 在 $O_\epsilon[G]$中是中心的。

以下技术性结果将在第 9.5节中证明:

Pr命题 9.13。 $O_\epsilon[G]$ 是一个有限生成的射影左、右 $O_\epsilon[G^d]$-模。

回忆一下， $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$作用在 $O_\epsilon[G^d]$ 上，使得 $O_\epsilon[G^d]$ 成为一个 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模代数。因此，我们可以构造以下范畴： $O_\epsilon[G^d]$-左模 $^{\dot{U}_\epsilon}$， $O_\epsilon[G^d]$-右模 $^{\dot{U}_\epsilon}$， $O_\epsilon[G^d]$-双模 $^{\dot{U}_\epsilon}$，它们分别是 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-等变左模、右模和双模，定义在 $O_\epsilon[G^d]$上。详情请参阅附录 A。

定义 9.14. 令 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{bimod}^{G_\epsilon}$ 为 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{Bimod}^{\dot{U}_\epsilon}$ 的全子范畴，由所有作为左、右 $O_\epsilon[G^d]$-模均为有限生成，且为$\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-表示的有理对象组成。范畴 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{lmod}^{G_\epsilon}$ 和 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{rmod}^{G_\epsilon}$ 的定义类似。

由于 $O_\epsilon[G^d] \cong \mathbb{F}[G^d]$ 是诺特的，且范畴 $\mathrm{Rep}(\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ 是阿贝尔范畴，所有三个范畴 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{bimod}^{G_\epsilon}$、$O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{lmod}^{G_\epsilon}$、$O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{rmod}^{G_\epsilon}$ 都是阿贝尔范畴。注意， $O_\epsilon[G]$ 属于 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{bimod}^{G_\epsilon}$，这要归功于命题9.13。

对于任意 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-表示 M，令

$$M^{fin} := \{m \in M \mid \dim_{\mathbb{F}}(\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})m) < \infty\}. \tag{9.10}$$

由于 $O_\epsilon[G^d]$ 是有理的 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-表示， $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的作用是局部有限的，因此对任意 $M \in O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{Rmod}^{\dot{U}_\epsilon}$，局部有限部分 M^{fin} 是 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{Rmod}^{\dot{U}_\epsilon}$ 中的一个对象。注意，并不要求 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 在 M^{fin} 上的作用是有理的。

引理 9.15. 设 $M \in O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{Rmod}^{\dot{U}_\epsilon}$ 和 $P \in O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{lmod}^{G_\epsilon}$，其中 P 是一个有限生成的射影左 $O_\epsilon[G^d]$-模。那么自然映射

$$M^{fin} \otimes_{O_\epsilon[G^d]} P \to M \otimes_{O_\epsilon[G^d]} P \tag{9.11}$$

是单射，其像为 $(M \otimes_{O_\epsilon[G^d]} P)^{fin}$。

证明。 由于 P 是有理的 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-表示， $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 在 P 上的作用是局部有限的。因此， $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 在 $M^{fin} \otimes_{O_\epsilon[G^d]} P$ 上的作用是局部有限的，并且 (9.11) 的像包含于 $(M \otimes_{O_\epsilon[G^d]} P)^{fin}$。

只需证明所诱导的映射

$$\mathrm{Hom}_{\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})}(V, M^{fin} \otimes_{O_\epsilon[G^d]} P) \to \mathrm{Hom}_{\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})}(V, M \otimes_{O_\epsilon[G^d]} P) \tag{9.12}$$

对任意有限维 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-模 V 都是双射。

令 $Q = \mathrm{Hom}_{O_\epsilon[G^*]\text{左模}}(P, O_\epsilon[G^*])$。由于 P 是有限生成射影左 $O_\epsilon[G^*]$-模， Q 是有限生成射影右 $O_\epsilon[G^*]$-模，并且根据引理$P \simeq \mathrm{Hom}_{O_\epsilon[G^*]\text{-R模}}(Q, O_\epsilon[G^*])$ 在范畴 $O_\epsilon[G^*]$-左模$^{G_\epsilon}$ 中有一个同构，见引理 A.7。利用

引理A.7的张量-同态伴随关系，我们有：

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})}(V, M\otimes_{O_\epsilon[G^*]} P) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, M\otimes_{O_\epsilon[G^*]} P)^{\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})}\\ &= \mathrm{Hom}_{O_\epsilon[G^*]\text{-Rmod}}(V\otimes_{\mathbb{C}} Q, M)^{\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})}\\ &= \mathrm{Hom}_{O_\epsilon[G^*]\text{-Rmod}^{\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})}}(V\otimes_{\mathbb{C}} Q, M).\end{aligned} \tag{9.13}$$

由于 $Q\in O_\epsilon[G^*]$-$\mathbf{Rmod}^{G_\epsilon}$， $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 在 Q 上的作用局部有限，因此我们有 e:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})}(V, M\otimes_{O_\epsilon[G^*]} P) &= \mathrm{Hom}_{O_\epsilon[G^*]\text{-Rmod}^{\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})}}(V\otimes_{\mathbb{C}} Q, M^{fin})\\ &= \mathrm{Hom}_{\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})}(V, M^{fin}\otimes_{O_\epsilon[G^*]} P).\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

现在我们准备证明本节的主要结果。这里不要求 $\mathbb{F}$ 是代数闭的。

命题 9.16. 包含 $\hat{\imath}: O_\epsilon[G]\hookrightarrow U_\epsilon^{fin}$ 是 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模代数的一个同构

证明。 首先，假设 $\mathbb{F}$ 是代数闭的。根据引理 9.11 和引理 6.11，我们有 $O_\epsilon[G^d][K^{2\lambda_0}] = Z_\epsilon^{ev}$。由命题 9.4， $O_\epsilon[G][K^{2\lambda_0} = U_\epsilon^{ev}$。由于 $O_\epsilon[G]$ 在 $O_\epsilon[G^d]$上有限生成，这是由命题 9.13得出的，

$$Z_{Fr}\otimes_{O_\epsilon[G^d]} O_\epsilon[G]\cong O_\epsilon[G^d][K^{2\lambda_0}]\otimes_{O_\epsilon[G^d]} O_\epsilon[G]\cong O_\epsilon[G][K^{2\lambda_0}] = U_\epsilon^{ev}.$$

我们有 $O_\epsilon[G]\in O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{lmod}^{G_\epsilon}$， $Z_{Fr}\in O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{Rmod}^{\dot{U}_\epsilon}$，并且 $O_\epsilon[G]$ 是 $O_\epsilon[G^d]$上的有限生成射影对象。因此，根据引理 9.11和引理 9.15，可得

$$(Z_{Fr}\otimes_{O_\epsilon[G^d]} O_\epsilon[G])^{fin}\cong Z_{Fr}^{fin}\otimes_{O_\epsilon[G^d]} O_\epsilon[G]\cong O_\epsilon[G^d]\otimes_{O_\epsilon[G^d]} O_\epsilon[G]\cong O_\epsilon[G],$$

这意味着同构 $O_\epsilon[G]\cong U_\epsilon^{fin}$，当 $\mathbb{F}$ 是代数闭的时。

一般而言，设 $\overline{\mathbb{F}}$ 是 $\mathbb{F}$上的一个代数闭域。下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} O_{\mathbb{F}}[G]\otimes_{\mathbb{F}}\overline{\mathbb{F}} & \hookrightarrow & U_{\mathbb{F}}^{fin}\otimes_{\mathbb{F}}\overline{\mathbb{F}}\\ \downarrow\cong & & \downarrow\\ O_{\overline{\mathbb{F}}}[G] & \xrightarrow{\cong} & U_{\overline{\mathbb{F}}}^{fin}\end{array}$$

这意味着上方的水平映射是双射。因此， $O_{\mathbb{F}}[G]\to U_{\mathbb{F}}^{fin}$ 是一个同构。 □

9.5. **命题的证明9.13**。

这里， $\mathbb{F}$ 是代数闭的。回忆函子

$$\tilde{\mathrm{Fr}}^*: \mathrm{Rep}(\mathring{U}_q^*)\to\mathrm{Rep}(\mathring{U}_q).$$

引理 9.17. $O_\epsilon[G]$ 在 $O_\epsilon[G^d]$上有限生成。

证明。根据引理 7.48，存在一个有限维模 $V\in$Rep(U_q)，使得任意有限维模 $M\in$Rep$(\mathring{U}_q)$ 都是某个有限维模 $N\in$Rep$(\mathring{U}_q^*)$ 的 $\tilde{\mathrm{Fr}}^*(N)\otimes V$ 的子商。因此， $O_\epsilon[G]$ 由形如 $\tilde{\mathrm{Fr}}^*(N)\otimes V$ 的模（其中 $N\in$Rep$(\mathring{U}_q^*)$ ）的矩阵系数张成。所以， $O_\epsilon[G]$ 由以下映射的像线性张成

$$(\tilde{\mathrm{Fr}}^*(N)\otimes V)^*\otimes(\tilde{\mathrm{Fr}}^*(N)\otimes V)\to O_\epsilon[G].$$

借助（8.4）中的乘法，我们得到

$$\begin{array}{ccc}(\tilde{\mathrm{Fr}}^*(N))^*\otimes\tilde{\mathrm{Fr}}^*(N)\otimes V^*\otimes V & \xrightarrow{\cong} & (\tilde{\mathrm{Fr}}^*(N)\otimes V)^*\otimes\tilde{\mathrm{Fr}}^*(N)\otimes V\\ \downarrow & & \downarrow\\ O_\epsilon[G]\otimes O_\epsilon[G] & \xrightarrow{\quad\mathrm{m}\quad} & O_\epsilon[G]\end{array}$$

另一方面，$(\tilde{\mathrm{Fr}}(N))^*\otimes\tilde{\mathrm{Fr}}^*(N)\to O_\epsilon[G]$ 的像包含于 $O_\epsilon[G^d]$中。由这些观察可知，$O_\epsilon[G]$ 由 $V^*\otimes V\to O_\epsilon[G]$ 在 $O_\epsilon[G^d]$上的像张成。由于 V 是有限维的，$O_\epsilon[G]$在 $O_\epsilon[G^d]$上有限生成。□

为了证明 $O_\epsilon[G]$ 是 $O_\epsilon[G^d]$上的射影对象，我们需要两个技术引理。回忆定义 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{rmod}^{G_\epsilon}$、$O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{lmod}^{G_\epsilon}$、$O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{bimod}^{G_\epsilon}$ 中的范畴9.14。

引理 9.18。对于任意 $M\in O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{rmod}^{G_\epsilon}$，所有 Ext-群 $\mathrm{Ext}^i_{O_\epsilon[G^d]\text{-}\mathrm{rmod}}(M,O_\epsilon[G^d])$ 都是 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{lmod}^{G_\epsilon}$中的对象。

证明。由于 M 在 $O_\epsilon[G^d]$ 上有限生成，因此对于某个有限维有理 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模 V_1，存在一个范畴 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathbf{rmod}^{G_\epsilon}$ 中的满射态射 $V_1\otimes O_\epsilon[G^d]\twoheadrightarrow M$。对这个满射态射的核重复这一过程，依此类推，我们便得到 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathbf{rmod}^{G_\epsilon}$ 中的一个长正合列，其中 V_i 是有限维有理 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模：

$$\cdots\to V_2\otimes O_\epsilon[G^d]\to V_1\otimes O_\epsilon[G^d]\to M\to 0,$$

这是右 $O_\epsilon[G^d]$-模 M 的一个自由分解。另一方面，根据引理 A.4，对于任意 $N\in O_\epsilon[G^d]$-$\mathbf{rmod}^{G_\epsilon}$，$\mathrm{Hom}_{O_\epsilon[G^d]\text{-}\mathrm{rmod}}(N,\ O_\epsilon[G^d])$ 是 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathbf{lmod}^{G_\epsilon}$ 中的一个对象。因此，$\mathrm{Ext}^i_{O_\epsilon[G^d]\text{-}\mathrm{rmod}}(M,\ O_\epsilon[G^d])$ 确实是 $O_\epsilon[G^d]$-$\mathbf{lmod}^{G_\epsilon}$ 中的对象。□

回顾一下，$f=K^{-2\lambda_0}\in O_\epsilon[G^d]\cong\mathbb{F}[G^d]$ 在 $G^d(\mathbb{F})$ 中的零点集是 $G^d(\mathbb{F})\backslash G_0^d(\mathbb{F})$。对于任意 $M\in O_\epsilon[G^d]$-$\mathbf{lmod}^{G_\epsilon}$，令 M_f 为 M 关于 $f\in O_\epsilon[G^d]$ 的局部化。

引理 9.19. 若 $M\in O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{lmod}^{G_\epsilon}$ 满足 $M_f=0$，则 $M=0$。

该结果的证明借助了其经典对应结果，即代数群作用下等变层的情形。令 $\mathfrak{u}_\epsilon$ 为由 $\{\tilde{E}_i,\tilde{F}_i,K^\lambda\}_{1\le i\le r}^{\lambda\in 2P}$ 生成的 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的 Hopf 子代数。

引理 9.20. ***(a)*** 对任意有理的 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-模 M，其 $\mathfrak{u}_\epsilon$-不变部分 $M^{\mathfrak{u}_\epsilon}$是一个有理的$\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)$-模。

(b) 对于任意 $M\in O_\epsilon[G^d]$-$\mathrm{lmod}^{G_\epsilon}$，$\mathfrak{u}_\epsilon$-不变部分 $M^{\mathfrak{u}_\epsilon}$ 属于 $O_\epsilon[G^d]$-mod^{G^d}，即定义在 $\mathrm{Spec}(O_\epsilon[G^d])=G^d$ 上的 G^d-等变相干层的范畴。

证明。(a) 只要证明 $M^{\mathfrak{u}_\epsilon}$是 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的子模，M即可得到结论。因为由此，$M^{\mathfrak{u}_\epsilon}$是一个有理的 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-模，而 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 在 $M^{\mathfrak{u}_\epsilon}$上的作用将通过态射 $\tilde{\mathrm{Fr}}:\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})\to\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)$ 分解，这由引理 5.18得出。

如注记 7.35所述，$U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 中由 $\{E_i,F_i\}_{1\le i\le r}$ 生成的左理想等于由 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 中的 $\{E_i,F_i\}_{1\le i\le r}$生成的右理想；并且权空间 $U_\epsilon(\mathfrak{g})_\nu$ 满足 $\nu\notin Q^*$ 的部分包含于 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的这个左理想中。

设 u 是 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 和 $m\in M^{\mathfrak{u}_\epsilon}$ 中的一个权元素。我们将证明 $um\in M^{\mathfrak{u}_\epsilon}$。如果 u 的权不属于 Q^*，那么根据第二段，$um=0$。因此，我们可以假设 u 的权属于 Q^*。于是，对所有 $\lambda\in P$，都有 $K^{2\lambda}u=uK^{2\lambda}$，从而 $K^{2\lambda}um=uK^{2\lambda}m=um$。与此同时，$\tilde{E}_iu$，$\tilde{F}_iu$ 的权不属于 Q^*，因此根据第二段，E_iu和 F_iu属于由 $\{E_i,F_i\}_{1\le i\le r}$ 生成的 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的左理想。这意味着 $E_ium=F_ium=0$。

(b) 由于 $\mathfrak{u}_\epsilon$ 通过余单位作用于 $O_\epsilon[G^d]$，并利用 (a) 部分，$M^{\mathfrak{u}_\epsilon}$ 是一个 $\dot{U}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}^d)$-等变$O_\epsilon[G^d]$-模。由于 $O_\epsilon[G^d]$ 是诺特的，且 M 在 $O_\epsilon[G^d]$上有限生成，因此 $M^{\mathfrak{u}_\epsilon}$ 在 $O_\epsilon[G^d]$上有限生成。□

证明。假设 $M \neq 0$。那么存在一个有限维有理的 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-模 V，使得 $\mathrm{Hom}_{\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})}(V, M) \neq 0$。这意味着 $(M \otimes V^*)^{\mathfrak{u}_\epsilon} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}_\epsilon}(V, M) \neq 0$。另一方面，$M \otimes V^* \in O_\epsilon[G^d]$-模$^{G^d}$ 且 $(M \otimes V^*)_f = 0$，其中 $O_\epsilon[G^d]$ 仅作用于$M \otimes V^*$中的第一个因子。因此，$(M \otimes V^*)^{\mathfrak{u}_\epsilon} \neq 0$ 属于 $O_\epsilon[G^d]$-模$^{G^d}$，且 $(M \otimes V^*)^{\mathfrak{u}_\epsilon}_f = 0$。然而，后者不可能成立。事实上，$(M \otimes V^*)^{\mathfrak{u}_\epsilon}$ 的支集必须是 $G^d = \mathrm{Spec}(O_\epsilon[G^d])$ 的一个 $G^d(\mathbb{F})$-不变闭子簇，而 $(M \otimes V^*)^{\mathfrak{u}_\epsilon}_f = 0$ 意味着该支集包含于 $G^d(\mathbb{F}) \backslash G^d_0(\mathbb{F})$。然而，开 Bruhat 胞腔与 $G^d(\mathbb{F})$ 中的任意共轭类都有非空交集，见引理 6.11 的 (a) 部分。因此，$(M \otimes V^*)^{\mathfrak{u}_\epsilon}$ 的支集必为空。于是，$(M \otimes V^*)^{\mathfrak{u}_\epsilon} = 0$，矛盾。□

现在我们可以完成命题9.13的证明了

命题 9.21。 $O_\epsilon[G]$ 是 $O_\epsilon[G^d]$上的射影左模和右模。

证明。根据注记 9.12，$O_\epsilon[G^d]$是 $O_\epsilon[G]$的中心子代数，因此只需证明 $O_\epsilon[G]$ 是射影右 $O_\epsilon[G^d]$-模。由命题 9.4 和 $O_\epsilon[G^d]_f \cong Z_{Fr}$，因为 $(O_\epsilon[G])_f \cong U_\epsilon^{fin}[K^{2\lambda_0}] \cong U_\epsilon^{ev}$，根据推论 6.4 可知 $(O_\epsilon[G])_f$ 是自由右 $O_\epsilon[G^d]_f$-模。将 $O_\epsilon[G]$ 视为 $O_\epsilon[G^d]$-rmod$^{G_\epsilon}$中的一个对象，根据引理 9.18，我们知道所有 $\mathrm{Ext}^i_{O_\epsilon[G^d]\text{-rmod}}(O_\epsilon[G], O_\epsilon[G^d])$ 都是 $O_\epsilon[G^d]$-lmod$^{G_\epsilon}$ 中的对象。

此外，由于 $(O_\epsilon[G])_f$ 是一个自由右 $(O_\epsilon[G^d])_f$-模，我们必有

$$(\mathrm{Ext}^i_{O_\epsilon[G^d]\text{-rmod}}(O_\epsilon[G], O_\epsilon[G^d]))_f = 0, \qquad , \forall i > 0$$

由引理 9.19，可得

$$\mathrm{Ext}^i_{O_\epsilon[G^d]\text{-rmod}}(O_\epsilon[G], O_\epsilon[G^d]) = 0, \forall i > 0. \tag{9.14}$$

由于簇 $G^d = \mathrm{Spec}(O_\epsilon[G^d])$ 是光滑的，因而是 Cohen-Macaulay 的，且 $O_\epsilon[G]$ 在 $O_\epsilon[G^d]$上有限生成，(9.14) 蕴含 $O_\epsilon[G]$ 是一个射影右 $O_\epsilon[G^d]$-模。□

9.6. $O_q[G] \cong U_q^{fin}$：诺特 $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$-代数 R。

9.6.1. 关于 $O_\epsilon[G]$ 和 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 上滤过的一项技术性结果。

在本节中，我们假设 $R = \mathbb{F}$ 是一个域。我们将 P 细化为一个线性有序集；特别地，P_+ 有元素 $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$。注意，本节中的结果取决于 P 上细化后的序。

由引理 7.53 可知，存在一个穷尽的良好 $U_\epsilon(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{F}} U_\epsilon(\mathfrak{g})$-模滤过 $O_\epsilon[G]$，其中. M_i是 $U_\epsilon(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{F}} U_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模的最大者，且 $O_\epsilon[G]$ 的权被 (λ_i, λ_i^*) 所界定。

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots$$

$\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \otimes \dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-作用在 $O_\epsilon[G]$ 上的作用由 $(x \otimes y)f(u) = f(S(y)uS^2(x))$ 给出，对所有 x、y、$u \in \dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 和 $f \in O_\epsilon[G]$ 均成立。设 $c_{f,v}$ 是 $V \in$ 表示范畴 $^{fd}(\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ 的一个矩阵系数，则该作用写为 $(x \otimes y)c_{f,v} = c_{yf,S^2(x)v}$。由该作用的描述以及 M_i的权被 (λ_i, λ_i^*) 所界定这一性质，可得

引理 9.22. M_i 由所有满足以下条件的 $V \in$表示范畴$^{fd}(\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ 的矩阵系数张成：V 的权有界于 λ_i。

证明。 $V \in \mathrm{Rep}^{fd}(\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ 的矩阵系数包含于 M_i，因为 M_i 是 $O_\epsilon[G]$ 中权空间有界于 (λ_i, λ_i^*) 的最大. $U_\epsilon(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{F}} U_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模。下面证明反向包含。

令 $\phi \in M_i$。令 $V := \dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})\phi \subset M_i$ 表示 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模，关于第一 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-作用。因此， V的权由 λ_i 界定，而 V^* 的权由 λ_i^*界定。令 $f \in V^*$ 由 $f(v) = v(1)$对所有 $v \in V \subset O_\epsilon[G]$定义。

回想 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{F}}$ $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-线性映射 $V \otimes V^* \to O_\epsilon[G]$ 由 $v \otimes f \mapsto c_{f,\ K^{-2\rho}v}$定义。 $K^{2\rho}\phi \otimes f$ 的像为 $c_{f,\ \phi}$。这个元素与 ϕ相同，事实上，

$$c_{f,\phi}(u) = f(u\phi) = u\phi(1) = \phi(u), \qquad \text{for all } u \in \dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}).$$

证明至此完成。 □

与第 9.3 节 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 具有一个以权格 P 为指标的 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-模滤过，使得 $\deg(\tilde{E}_i K^{\zeta_i^>}) = 0$, $\deg(\tilde{F}_i K^{-\zeta_i^<}) = 0$, $\deg(K^{2\lambda}) = -\lambda$ 对于 $1 \le i \le r$, $\lambda \in P$。令

$$\tilde{U}_\epsilon^{ev>} =: \bigoplus_{\mu \in Q_+} U_{\epsilon,\mu}^{ev>} K^{\gamma(\mu)}, \qquad \tilde{U}_\epsilon^{ev<} := \bigoplus_{\mu \in Q_+} U_{\epsilon,-\mu}^{ev<}(\mathfrak{g}) K^{\kappa(\mu)}.$$

Then

$$U_{\epsilon,\le\lambda}^{ev} := \bigoplus_{\mu \le \lambda} \tilde{U}_\epsilon^{ev<} \otimes K^{-2\mu} \otimes \tilde{U}_\epsilon^{ev>}.$$

注记 9.23。 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{\lambda_i \in P_+} U_{\epsilon,\ \le\lambda_i}^{ev}$。

引理 9.24。 设 $R = \mathbb{F}$ 是一个域。那么对所有 $\lambda_i \in P_+$，我们有

$$(U_{\epsilon,\le\lambda_i}^{ev})^{fin} = U_{\epsilon,\le\lambda_i}^{ev} \cap O_\epsilon[G] = M_i.$$

证明。 等式 $(U_{\epsilon,\le\lambda_i}^{ev})^{fin} = U_{\epsilon,\le\lambda_i}^{ev} \cap O_\epsilon[G]$ 成立，因为 $O_\epsilon[G] \cong U_\epsilon^{fin}$。

设 $c_{f,v}$ 是 $V \in$ 表示范畴$^{fd}(\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ 的一个矩阵系数，且满足 $c_{f,v} \in U_{\epsilon,\le\lambda_i}^{ev}$。根据引理 9.22，只需证明 $c_{f,v}$ 可视为某个模$V' \in$ 表示范畴$^{fd}(\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ 的矩阵系数，使得 V' 的权有界于 λ_i。

注意，我们可以假设 f, v 分别是 V^*, V的权向量。此外，我们可以假设 $V = U_\epsilon(\mathfrak{g})v$。令 N 为 $U_\epsilon(\mathfrak{g})v$ 中由所有权大于 λ_i 的权向量v_i生成的 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模。接下来我们将证明 V'可以取为 V/N。

在引理 9.1 中，我们构造了元素 $c_{f,v} \in U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$。也就是说，存在 $c_{f,v} = \sum_{\mu,\nu} u_{\mu\nu}$，对于 $u_{\mu,\nu} \in (U_{\epsilon\ ,-\mu}^{ev<} K^{\kappa(\mu)}) K^{-2\mathrm{wt}(v)-2\mu} (U_{\epsilon\ ,\nu}^{ev>} K^{\gamma(\nu)})$，使得

$$\langle u_{\mu\nu}, (\dot{y}K^{\kappa(\nu)}) u_0 (\dot{x}K^{\gamma(\mu)}) \rangle' = \hat{\chi}_{\mathrm{wt}(v)+\mu}(u_0) f((\dot{y}K^{\kappa(\nu)})(\dot{x}K^{\gamma(\mu)})v),$$

对所有 $.y \in \dot{U}_{\epsilon\ ,-\nu}^{<}$、$.x \in \dot{U}_{\epsilon\ ,\mu}^{>}$ 以及 $u_0 \in \dot{U}_\epsilon^0$。特别地， $u_{\mu\nu} = 0$当且仅当 $f((.yK^{\kappa(\nu)})(.xK^{\gamma(\mu)})v) = 0$ 对于 $.x, .y, u_0$ 如上所述。

由于 $c_{f,v} \in U_{\epsilon\ ,\le\lambda_i}^{ev}$，可知 $u_{\mu,\nu} = 0$对所有 $\mu > \lambda_i - \mathrm{wt}(v)$ 均成立。因此，对于上述所有 $.y, .x, u_0$，只要 $\mu > \lambda_i - \mathrm{wt}(v)$，就有 $((.yK^{\kappa(\nu)})(.xK^{\gamma(\mu)})v) = 0$。由此可得 $f(N) = 0$，因此 $c_{f,v}$可视为 $V' = V/N$ 的矩阵系数。□

9.6.2. $O_q[G] \cong U_q^{fin}$。

我们指出，对于任意权 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-模 $M = \oplus_\lambda M_\lambda$， $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-局部有限部分 M^{fin}也是 M 的最大有理 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模。

Lemma 9.25. 设 $R = \mathbb{F}$ 为一个域。那么 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的局部有限部分 $(U_{\mathbb{F}}^{ev}(\mathfrak{g})/O_{\mathbb{F}}[G])^{fin}$ 为零。

证明。 我们有一个短正合列

$$0 \to O_{\mathbb{F}}[G] \to U_{\mathbb{F}}^{ev}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\pi} U_{\mathbb{F}}^{ev}(\mathfrak{g})/O_{\mathbb{F}}[G] \to 0. \tag{9.15}$$

假设 $(U_{\mathbb{F}}^{ev}(\mathfrak{g})/O_{\mathbb{F}}[G])^{fin} \neq 0$，则存在一个有限维有理 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模$V \neq 0$，它包含于 $U_{\mathbb{F}}^{ev}(\mathfrak{g})/O_{\mathbb{F}}[G]$。由注记 9.23，存在 λ_i，使得映射 $M := U_{\mathbb{F}}^{ev}{}_{,\leq\lambda_i}$ 在商映射 $\pi\colon U_{\mathbb{F}}^{ev}(\mathfrak{g}) \to U_{\mathbb{F}}^{ev}/O_{\mathbb{F}}[G]$ 下的像包含 V。由引理 9.24， M^{fin} 是一个有限维有理 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-模。

短正合列 (9.15) 导出了一个短正合列

$$0 \to M^{fin} \to M \to \pi(M) \to 0.$$

注意到 M^{fin} 和 V 是有限维有理 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模，而 M 是一个权$\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-模。因此，在映射 $\pi\colon M \to \pi(M)$ 下， $\pi^{-1}(V) \subset M$ 的原像必定是一个真包含 M^{fin} 的有理 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模。这导致矛盾，因为 M^{fin} 是 M 的最大有理 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$-子模。□

命题 9.26. 当 R 是整环时，包含 $O_R[G] \hookrightarrow U_R^{fin}$ 是一个同构。

证明。 对于任意非零的 $x \in R$，我们有如下交换图，其中各行正合，而所有竖直态射都是单射:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & O_R[G] & \xrightarrow{\cdot x} & O_R[G] & \longrightarrow & O_{R/(x)}[G] & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & U_R^{ev}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\cdot x} & U_R^{ev}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & U_{R/(x)}^{ev}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由蛇引理，态射

$$U_R^{ev}(\mathfrak{g})/O_R[G] \xrightarrow{\cdot x} U_R^{ev}(\mathfrak{g})/O_R[G]$$

对于所有非零的 $x \in R$都是单射。换言之， $U_R^{ev}(\mathfrak{g})/O_R[G]$ 在 R上无挠。令 $\mathbb{K}$为 R的分式域。那么我们有包含

$$U_R^{ev}(\mathfrak{g})/O_R[G] \hookrightarrow (U_R^{ev}(\mathfrak{g})/O_R[G]) \otimes_R \mathbb{K} \cong U_{\mathbb{K}}^{ev}(\mathfrak{g})/O_{\mathbb{K}}[G].$$

由于 $U_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$-局部有限部分 $U_{\mathbb{K}}^{ev}(\mathfrak{g})/O_{\mathbb{K}}[G]$ 由引理 9.25可知为零，因此 $(U_R^{ev}(\mathfrak{g})/O_R[G])^{fin} = 0$。另一方面，我们有一个左正合序列

$$0 \to O_R[G] \to U_R^{fin} \to (U_R^{ev}/O_R[G])^{fin}.$$

因此，$O_R[G] \cong U_R^{fin}$ 。 □

以下是本节的主要结果。

定理 9.27. 对于任意诺特 $\mathcal{A}_{\mathsf{N}}$-代数 R，包含 $O_R[G] \hookrightarrow U_R^{fin}$ 是一个同构。

证明. 设 $\mathfrak{p}$ 是 R 的一个素理想。用 $\bullet^{fin,\dot{U}_{R/\mathfrak{p}}}$ 表示 $\dot{U}_{R/\mathfrak{p}}(\mathfrak{g})$-局部有限部分。我们用 $\bullet^{fin}$ 表示 $\dot{U}_R(\mathfrak{g})$-局部有限部分。于是可以看出

$$(U_{R/\mathfrak{p}}^{ev}(\mathfrak{g}))^{fin} \cong (U_{R/\mathfrak{p}}^{ev}(\mathfrak{g}))^{fin,\dot{U}_{R/\mathfrak{p}}}.$$

根据命题 9.26，我们有如下同构

$$O_{R/\mathfrak{p}}[G] \to (U_{R/\mathfrak{p}}^{ev}(\mathfrak{g}))^{fin,\dot{U}_{R/\mathfrak{p}}}.$$

注意， $O_R[G]\otimes_R R/\mathfrak{p} = O_{R/\mathfrak{p}}[G]$和 $U_R^{ev}(\mathfrak{g})\otimes R/\mathfrak{p} = U_{R/\mathfrak{p}}^{ev}(\mathfrak{g})$。因此，自然态射

$$O_R[G]\otimes_R R/\mathfrak{p}\to (U_R^{ev}(\mathfrak{g})\otimes_R R/\mathfrak{p})^{fin} \tag{9.16}$$

对于任意素理想 $\mathfrak{p}$ of R，它都是同构。

由于 R 是诺特的，因此存在有限的 R-模滤过 $0=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_n=R$，使得 $M_i/M_{i-1}\cong R/\mathfrak{p}_i$，其中对所有 $1\le i\le n$， $\mathfrak{p}_i$ 都是某个素理想。我们将用归纳法证明这些同态

$$O_R[G]\otimes_R M_i\to (U_R^{ev}\otimes_R M_i)^{fin}$$

对所有 $1\le i\le n$都是同构。基例 $i=1$ 由（9.16）成立。下面进行归纳步骤。由于 $O_R[G]$ 和 U_R^{ev}（$\mathfrak{g}$）在 R上是自由的，因此有交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & O_R[G]\otimes_R M_{i-1} & \longrightarrow & O_R[G]\otimes_R M_i & \longrightarrow & O_R[G]\otimes_R R/\mathfrak{p}_i & \longrightarrow & 0\\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & U_R^{ev}\otimes_R M_{i-1} & \longrightarrow & U_R^{ev}(\mathfrak{g})\otimes_R M_i & \longrightarrow & U_R^{ev}(\mathfrak{g})\otimes_R R/\mathfrak{p}_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由此得到交换图

(9.17)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & O_R[G]\otimes_R M_{i-1} & \longrightarrow & O_R[G]\otimes_R M_i & \longrightarrow & O_R[G]\otimes_R R/\mathfrak{p}_i & \longrightarrow & 0\\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (U_R^{ev}\otimes_R M_{i-1})^{fin} & \longrightarrow & (U_R^{ev}(\mathfrak{g})\otimes_R M_i)^{fin} & \longrightarrow & (U_R^{ev}(\mathfrak{g})\otimes_R R/\mathfrak{p}_i)^{fin} & & \end{array}$$

（9.17）中的第一个垂直箭头根据归纳假设是同构，而（9.17）中的第三个垂直箭头根据（9.16）是同构。因此，中间的垂直态射是同构。这就完成了归纳。特别地，当 $i=n$时，我们得到了所需的同构 $O_R[G]\cong U_R^{fin}$。□

9.7. Harish-Chandra 中心。

定义 9.28. *Harish-Chandra* 中心 $Z_{HC}\subset U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 定义为 $U_q(\mathfrak{g})$-不变的 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 部分。

引理 9.29. Z_{HC}在 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 中是中心的，并且 $Z_{HC}\subset U_q^{ev}(\mathfrak{g})_0$,是 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$的零权空间。

证明。 由于 $Z_{HC}=\mathrm{Hom}_{\dot U_q(\mathfrak{g})}(W_q(0)\ U_q^{ev}(\mathfrak{g}))$，第二个陈述成立。另一方面，

$$\mathrm{ad}'(K^\lambda)(x)=K^\lambda xK^{-\lambda},\qquad \mathrm{ad}'(\tilde E_i)(x)=[\tilde E_i,x]K^{\zeta_i^>},\qquad \mathrm{ad}'(\tilde F_i)(x)=[\tilde F_i,x]K^{-\zeta_i^<},$$

对于 $x\in U_q^{ev}(\mathfrak{g})$。因此，对于 $z\in Z_{HC}$，我们必须有 z与 $\tilde E_i,\tilde F_i,K^\lambda$对易，对于 $1\le i\le r$和 $\lambda\in 2P$，因此， z在 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 中是中心的。□

零权空间 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})_0$ 具有如下分解：

$$U_q^{ev}(\mathfrak{g})_0=U_q^{ev0}\oplus\bigoplus_{\mu\in Q_+}U_{q,-\mu}^{ev<}U_q^{ev0}U_{q,\mu}^{ev>}.$$

利用 $\tilde E_i$， $\tilde F_i$与 K^λ之间的交换关系，很容易看出$\bigoplus_{\mu\in Q_+}U_q^{ev<}{}_{,-\mu}U_q^{ev0}U_{q\,\mu}^{ev>}$，是 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})_0$中的一个双边理想。因此，我们有一个代数同态

$$\pi: Z_{HC}\hookrightarrow U_q^{ev}(\mathfrak{g})_0\twoheadrightarrow U_q^{ev0}(\mathfrak{g}).$$

定理 9.30。 同态 π 在 Z_{HC} 与 $U_q^{ev0}(\mathfrak{g})$ 的以下子代数之间定义了一个代数同构：

$$R\Big[K^{\pm 2\omega_1},\dots,K^{\pm 2\omega_r}\Big]^{W_\bullet}, \tag{9.18}$$

其中，我们使用魏尔群对 W 在 $U_q^{ev0}(\mathfrak{g})$ 上的点作用，该作用由以下关系通过线性延拓得到：

$$w_\bullet(K^\mu)=q^{(w^{-1}\rho-\rho,\mu)}K^{w(\mu)} \qquad \text{for all } x\in W,\ \mu\in 2P.$$

关于通常的 De Concini-Kac 形式在一般情形下的 Harish-Chandra 中心的结果，可见于 q [J1，定理 6。25]参见 [DCKP1， §6.2] 其中给出了 q 为奇数阶单位根时的结果；而当 [T2为偶数阶单位根时的结果，参见命题 3。3] q 。

证明。 由引理 7.54， $O_q[G]^{\dot U_q}$ 是一个自由的 R-模，其基为 $c_\lambda=\sum_i c_{v_i^*,\ K^{-2\rho}v_i}$ 对所有 $\lambda\in P_+$均成立，其中 $\{v_i\}$是韦伊模 $W_q(\lambda)$的权基。因此，借助同构 $\hat\iota\colon O_q[G]\cong U_q^{fin}$， Z_{HC} 是一个自由的 R-模，其基为 $\hat\iota(c_\lambda)|\lambda\in P_+\}$ 。

让我们计算 $\pi\circ\hat\iota(c_\lambda)$。该元素由以下条件唯一确定：

$$\Big\langle \pi\circ\hat\iota(c_\lambda),u\Big\rangle=c_\lambda(u),$$

对所有 $u\in\dot U_q^0$ 均成立。另一方面，令 $P_{+,\ \lambda}$ 为 $W_q(\lambda)$ 中支配权的集合，则不难看出

$$c_\lambda(u)=\sum_{\mu\in P_{+,\lambda}}\operatorname{rank}\big(W_q(\lambda)_\mu\big)\sum_{\mu'\in W\mu}q^{(-2\rho,\mu')}\hat\chi_{\mu'}(u),$$

对所有 $u\in\dot U_q^0$ 均成立。因此，

$$c_\lambda(u)=\Big\langle\sum_{\mu\in P_{+,\lambda}}\operatorname{rank}\big(W_q(\lambda)_\mu\big)\sum_{\mu'\in W\mu}q^{(2\rho,\mu')}K^{2\mu'},u\Big\rangle$$

对所有 $u\in\dot U_q^0$ 均成立。由此可得

$$\pi\circ\hat\iota(c_\lambda)=\sum_{\mu\in P_{+,\lambda}}\operatorname{rank}\big(W_q(\lambda)_\mu\big)\sum_{\mu'\in W\mu}q^{(\rho,2\mu')}K^{2\mu'}. \tag{9.19}$$

容易证明，9.19右端的元素对所有 $\lambda\in P_+$ 构成一个 R-基的自由 R-模（9.18）。这意味着 π 定义了一个从 Z_{HC} 到代数（9.18）之间的代数同态。 □

10. Poisson Geometry of center Z of $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ over $\mathbb{C}$

本节的目标是将关于奇数阶单位根处 De Concini-Kac 形式的中心和 Azumaya 位点的结果推广到偶部代数 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 在奇数阶和偶数阶单位根处的情形。大部分论证都密切遵循 [DCK、DCKP1和DCKP2]。

10.1. Z 和 Z_{Fr}上的 Poisson 括号。

设 $q=\epsilon\in\mathbb{C}$ 是一个 ℓ 阶的单位根，满足 $\ell_i>\max\{2,1-a_{ij}\}_{1\le j\le r}$。 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$的中心$Z$ 通过量子化自然地带有泊松结构。

考虑

$$\mathcal{A}'=\mathbb{C}[v,v^{-1}]\Big[\frac{1}{v^{2k}-1}\Big]_{1\le k\le\max\{\mathtt{d}_i\}}, \tag{10.1}$$

并令 $\varphi_\epsilon\colon U_{\mathcal{A}'}^{ev}(\mathfrak{g}) \to U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 表示将 v 映至 ϵ 的自然满同态。于是，任意$x \in \varphi_\epsilon^{-1}(Z)$ 都自然地给出代数 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 的一个导子，定义如下：对于任意$u \in U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$，取其任意提升 $\hat{u}$，使其属于 $U_{\mathcal{A}'}^{ev}(\mathfrak{g})$，并定义

$$\{x,u\} := \varphi_\epsilon\left(\frac{[x,\hat{u}]}{v-\epsilon}\right). \tag{10.2}$$

注释 10.1. (a) 我们注意到，$\{x,u\}$ 显然与提升 $\hat{u} \in \varphi_\epsilon^{-1}(u)$ 的选择无关。(b) 上述构造还如下给出了 Z 上的一个 Poisson 括号：给定 $u,w \in Z$，任取提升 $\hat{u} \in \varphi_\epsilon^{-1}(u)$ 和 $\hat{w} \in \varphi_\epsilon^{-1}(w)$，并定义：

$$\{u,w\} := \varphi_\epsilon\left(\frac{[\hat{u},\hat{w}]}{v-\epsilon}\right). \tag{10.3}$$

(c) 我们注意到，在 (10.2) 中定义的整个代数 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 的导子 $\{x,-\}$，确实取决于 x，而不仅仅取决于其特化 $\varphi_\epsilon(x) \in Z$；这与 (b) 相反。

回忆环同态 $\sigma\colon \mathcal{A}' \to \mathbb{C}$，它将 v 映至 ϵ。我们通过以下方式定义一个非零标量 $\mathsf{p}_i \in \mathbb{C}$:

$$\mathsf{p}_i := \sigma\left(\frac{(\ell_i)_{v_i}!}{v-\epsilon}\right). \tag{10.4}$$

命题 10.2. 对于任意 $u \in Z$，有以下等式:

$$\mathrm{ad}'\left(\mathsf{p}_i\tilde{E}_i^{(\ell_i)}\right)(u) = \{\tilde{E}_i^{\ell_i},u\}K^{\ell_i\zeta_i^>} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{ad}'\left(\mathsf{p}_i\tilde{F}_i^{(\ell_i)}\right) = \{\tilde{F}_i^{\ell_i},u\}K^{-\ell_i\zeta_i^<}, \tag{10.5}$$

其中 *Poisson* 括号 $\{\tilde{E}_i^{\ell_i},u\}$ 和 $\{\tilde{F}_i^{\ell_i},u\}$ 由注 (10.3) *10.1* 中的 *10.1*定义。

证明。 我们只证明第一个等式。根据（3.20），在 $U_{\mathcal{A}'}^{ev}$（$\mathfrak{g}$）中有:

$$\Delta'(\tilde{E}_i^r) = \sum_{c=0}^{r} v_i^{2(r-c)c}\begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix}_{v_i} \tilde{E}_i^{r-c} \otimes K^{-(r-c)\zeta_i^>}\tilde{E}_i^c,$$
$$S'(K^{-(r-c)\zeta_i^>}\tilde{E}_i^c) = (-1)^c v_i^{c(c-1)}\tilde{E}_i^c K^{r\zeta_i^>}.$$

因此，对于任意 $r \in \mathbb{N}$和 $y \in U_{\mathcal{A}'}^{ev}(\mathfrak{g})$，有:

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^r)(y) = \sum_{c=0}^{r}(-1)^c v_i^{c(2r-c-1)}\begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix}_{v_i} \tilde{E}_i^{r-c}y\tilde{E}_i^c K^{r\zeta_i^>} =$$
$$\left(\tilde{E}_i^r y + \sum_{c=1}^{r}(-1)^c v_i^{c(2r-c-1)}\begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix}_{v_i} y\tilde{E}_i^r + \sum_{c=1}^{r-1}(-1)^c v_i^{c(2r-c-1)}\begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix}_{v_i} [\tilde{E}_i^{r-c},y]\tilde{E}_i^c\right) K^{r\zeta_i^>}.$$

利用单位元

$$\sum_{c=0}^{r}(-1)^c v_i^{c(2r-c-1)}\begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix}_{v_i} = \sum_{c=0}^{r}(-1)^c v_i^{c(r-1)}\begin{bmatrix} r \\ c \end{bmatrix}_{v_i} = 0,$$

从而得到:

$$\mathrm{ad}'(\tilde{E}_i^r)(y) = [\tilde{E}_i^r,y]K^{r\zeta_i^>} + \sum_{c=1}^{r-1}(-1)^c v_i^{c(2r-c-1)}\begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix}_{v_i} [\tilde{E}_i^{r-c},y]\tilde{E}_i^c K^{r\zeta_i^>}. \tag{10.6}$$

将公式（10.6）应用于 $r=\ell_i$ 和 $y \in \varphi_\epsilon^{-1}(u)$，其中 $u \in Z$，于是得到:

$$\mathrm{ad}'\left(\mathsf{p}_i\tilde{E}_i^{(\ell_i)}\right)(u) = \varphi_\epsilon\left(\frac{[\tilde{E}_i^{\ell_i},y]}{v-\epsilon}K^{\ell_i\zeta_i^>} + \sum_{c=1}^{\ell_i-1}(-1)^c v_i^{c(2\ell_i-c-1)}\frac{\binom{\ell_i}{c}_{v_i}}{v-\epsilon}[\tilde{E}_i^{\ell_i-c},y]\tilde{E}_i^c K^{\ell_i\zeta_i^>}\right).$$

由于 $\varphi_\epsilon([\tilde{E}_i^k, y]) = [\tilde{E}_i^k, u] = 0$，最终得到

$$\mathrm{ad}'\left(\mathsf{p}_i \tilde{E}_i^{(\ell_i)}\right)(u) = \{\tilde{E}_i^{\ell_i}, u\} K^{\ell_i \zeta_i^>} \qquad \forall\, u \in Z.$$

这就完成了对等式（10.5）中第一个等号的证明。 □

事实证明，Frobenius 中心 Z_{Fr} 是 Z的 Poisson 子代数：

命题 10.3。 *(a)* 中心 Z_{Fr} 在 Z的 *Poisson* 括号下封闭。*(b)* Z_{Fr} 由 $\left\{K^\lambda、\ \tilde{E}_i^{\ell_i}、\ \tilde{F}_i^{\ell_i}\right\}$ 生成，$1 \le i \le r$和 $\lambda \in 2P^*$构成一个 *Poisson* 代数。 *(c)* 回顾命题 $Z_{Fr} \simeq \mathbb{C}[G_0^d]$ *6.10*中的识别。*Spec*$Z_{Fr} \cong G_0^d$ 的辛叶是 G^d 的共轭类与 G_0^d的交集。

证明。 首先，我们将同时证明 (a) 和 (b)。步骤 *1*： 我们证明 Z_{Fr}在导子 $\{\tilde{E}_i^{\ell_i}, -\}$、$\{\tilde{F}_i^{\ell_i}, -\}$ 以及 $\{K^\lambda, -\}$作用下封闭，其中 $1 \le i \le r$ 和 $\lambda \in 2P^*$任意。根据命题 10.2，我们有：

$$\mathrm{ad}'(\mathsf{p}_i \tilde{E}^{(\ell_i)})(u) = \{\tilde{E}^{\ell_i}, u\} K^{\ell_i \zeta_i^>}, \qquad \mathrm{ad}'(\mathsf{p}_i \tilde{F}^{(\ell_i)})(u) = \{\tilde{F}_i^{\ell_i}, u\} K^{-\ell_i \zeta_i^<} \tag{10.7}$$

对任意 $u \in Z$。由于 Z_{Fr} 在 $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的伴随作用下封闭（见注 6.5），且$K^{-\ell_i \zeta_i^>}$，$K^{\ell_i \zeta_i^<} \in Z_{Fr}$。因此 Z_{Fr}在导子 $\{\tilde{E}_i^{\ell_i}, -\}$和 $\{\tilde{F}_i^{\ell_i}, -\}$作用下封闭。

设 $\theta := \left[\frac{v^{\ell}-1}{v-\epsilon}\right]_\epsilon$。那么对于任意齐次元 $u \in Z_{Fr}$和 $\lambda \in 2P^*$，有

$$\{K^\lambda, u\} = \theta \frac{(\lambda, \mathrm{wt}(u))}{\ell} u K^\lambda. \tag{10.8}$$

因此， Z_{Fr}在导子 $\{K^\lambda, -\}$作用下对任意 $\lambda \in 2P^*$均封闭。步骤 *2*： 令 $\mathcal{P}$表示由 Z生成的 $\{\tilde{E}_i^{\ell_i}, \tilde{F}_i^{\ell_i}, K^\lambda\}_{1 \le i \le r}^{\lambda \in 2P^*}$ Poisson 子代数。由步骤 1， Z_{Fr}包含 $\mathcal{P}$。现在证明 $\mathcal{P}$包含 Z_{Fr}，这意味着结论 (a) 和 (b)。根据引理 6.11 及其记号，我们有

$$Z_{Fr} = Z_{Fr}^{fin}[K^{\lambda_0}], \qquad Z_{Fr}^{fin} = \bigoplus_{\lambda \in P_+^*} \mathrm{ad}'(\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})) K^{-2\lambda}.$$

因此，只需证明 $\mathrm{ad}'(\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))K^{-2\lambda} \in \mathcal{P}$。 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 在 Z_{Fr} 上的作用可经由 $\check{}$Fr: $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) \to \dot{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^d)$ 分解，而 $\dot{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^d)$ 是由 e_i, f_i 作为一个代数生成的。因此，$\mathrm{ad}'(\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g}))K^{-2\lambda}$由形如下列元素的 $\mathbb{C}$-线性张成

$$\mathrm{ad}'(x_1 \dots x_n)K^{-2\lambda} \ \text{ with } \ \lambda \in 2P^* \text{ and } x_j = \tilde{E}_i^{(\ell_i)} \text{ or } \tilde{F}_i^{(\ell_i)} \ \text{ for } 1 \le i \le r,$$

但这些元素都包含在 $\mathcal{P}$ 中。

c) 令 $v_{\tilde{E}_i}, v_{\tilde{F}_i}, v_{K^\lambda}$为 Spec$Z_{Fr} \cong G_0^d$上的向量场，由导子 $\{\tilde{E}_i^{\ell_i}, -\}$,$\{\tilde{F}_i^{\ell_i}, -\}$, $\{K^\lambda, -\}$分别生成。令 e_i, f_i, λ为 G_0^d上的向量场，它们来自 G^d 在自身上的伴随作用。因此，由 (10.7) 和 (10.8)，可得

$$v_{\tilde{E}_i} = \frac{\mathsf{p}_i}{\epsilon_i^*} K^{-\ell_i \zeta_i^>} e_i, \qquad v_{\tilde{F}_i} = \mathsf{p}_i K^{\ell_i \zeta_i^<} f_i, \qquad v_{K^\lambda} = \frac{\theta}{\ell} K^\lambda \lambda.$$

由于 Z_{Fr}是由 $\{\tilde{E}_i^{\ell_i}, \tilde{F}_i^{\ell_i}, K^\lambda\}_{1 \le i \le r}^{\lambda \in 2P^*}$生成的 Poisson 代数，我们可以看出，Spec$Z_{Fr} \cong G_0^d$ 的哈密顿向量场所构成的分布包含于由 $\mathfrak{g}^d$ 在 G_0^d上的伴随作用产生的向量场分布中。

另一方面，对于任意函数 f, g 以及定义在 G_0^d 上的向量场 v_1, v_2，我们有

$$[fv_1, gv_2] = fg[v_1, v_2] + fv_1(g)v_2 - gv_2(f)v_1.$$

因此，我们有

$$[\upsilon_{\tilde{E}_{i_1}}, \cdots [\upsilon_{\tilde{E}_{i_{k-1}}}, \upsilon_{\tilde{E}_{i_k}}] \cdots] = aK^b[e_{i_1}, \cdots [e_{i_{k-1}}, e_{i_k}] \cdots] + f$$

对于某些 $b \in 2P^*$, $a \in \mathbb{C}^\times$，其中 f 是与附着于根 $\alpha \in \Delta_+$ 的根向量相对应的向量场的 $\mathbb{C}[G_0^d]$-线性组合，并且满足 $\mathrm{ht}(\alpha) < \mathrm{ht}(\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k})$。对于 $\upsilon_{\tilde{F}_i}$，也有类似的公式。由此可见，由 $\mathfrak{g}^d$ 在 $\mathrm{Spec} Z_{Fr} \cong G_0^d$ 上的伴随作用所产生的向量场分布包含于（因而等于）哈密顿向量场的分布。这就证明了 (c) 部分。□

现在我们选取 Z_{Fr} 的一个 $\mathbb{C}$-基 $\{z_j\}$，并将其提升为元素 $\{\hat{z}_j\}$，使得 $\hat{z}_j \in \varphi_\epsilon^{-1}(z_j)$。考虑以下 $\mathbb{C}$-线性映射

$$D\colon Z_{Fr} \to \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}))$$

由 $z_j \mapsto \{\hat{z}_j$ 确定，$-\}$ 对所有 j 均成立。这使得 $(Z_{Fr}, U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g}))$ 成为泊松序，定义见 [BG1, §2.2]。根据 [BG1],中的定理 4.2，我们有：

命题 10.4。 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 在谱(Z_{Fr})中任意两个属于同一 G^d-共轭类的点上的纤维，等价地，属于同一辛叶的点上的纤维，作为 $\mathbb{C}$-代数彼此同构。

10.2. $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$**的退化。**

让我们回顾一 下在 (中定义的两个线性映射 κ, $\gamma\colon \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$4.1)。

DCKP 中的一个主要工具是量子群的一种显著退化。我们将为 [DCKP2] 建立类似的退化，针对 U_q^{ev} (g), $q \in$ 谱$(\mathcal{A}')$，其中 $\mathcal{A}'$ 定义见 (10.1)。

按照第 2.1 节，我们固定最长元 $w_0 = s_{i_1} \ldots s_{i_N}$ 的一个约化表达式。这定义了 Δ_+ 上的凸序（“凸”是指，若 $\alpha < \beta \in \Delta_+$ 和 $\alpha + \beta \in \Delta_+$，则 $\alpha < \alpha + \beta < \beta$）：

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \qquad \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \quad \ldots \quad , \qquad \beta_N = s_{i_1} \ldots s_{i_{N-1}}(\alpha_{i_N}).$$

我们还回顾（2.13）中的根向量。

引理 10.5. ***(a)*** 对任意 $1 \le i < j \le N$，有：

$$F_{\beta_i} F_{\beta_j} - q^{(\beta_i, \beta_j)} F_{\beta_j} F_{\beta_i} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N} a_{\vec{k}} F^k,$$

其中 $a_{\vec{k}} \in \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ 和 $a_{\vec{k}} \neq 0$ 当且仅当 $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_N)$ 满足 $k_s = 0$，其中 $s \le i$ 和 $s \ge j$。

(b) 对任意 $1 \le i < j \le N$，有：

$$E_{\beta_j} E_{\beta_i} - q^{-(\beta_i, \beta_j)} E_{\beta_i} E_{\beta_j} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N} b_{\vec{k}} E^k,$$

其中 $b_{\vec{k}} \in \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ 和 $b_{\vec{k}} \neq 0$ 当且仅当 $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_N)$ 满足 $k_s = 0$，其中 $s \le i$ 和 $s \ge j$。

证明。 根据 [DCKP2，引理 4.2], , 对于 $1 \le i < j \le N$，有

$$E_{\beta_j} E_{\beta_i} - q^{-(\beta_i, \beta_j)} E_{\beta_i} E_{\beta_j} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N} c_{\vec{k}} E^{\vec{k}}, \tag{10.9}$$

其中 $c_{\vec{k}} \in \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ 且 $c_{\vec{k}} \neq 0$ 当且仅当 $\vec{k} = (k_1, \ldots\ldots, k_N)$ 满足 $k_s = 0$ 对于 $s \le i$ 且 $s \ge j$。 注意，(10.9) 的右端包含 E^k 而非 E^k。

（a）部分现在可通过应用反自同构 τ （2.11）到（10.9），并注意到 τ（E_{β_s}） $= F_{\beta_s}$ 对所有 s。

（b）部分由（10.9）以及以下观察可得：

$$E^{\vec{r}} = \sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}} d_{\vec{k}} E^k,$$

其中，对于 $\vec{r} = (0,\dots,0,r_i,\dots,r_j,0,\dots,0)$，仅当 $k = (k_1,\dots,k_N)$ 满足 $k_s = 0$ 时，才有 $d_{\vec{k}} \neq 0$ $s < i$ 和 $s > j$。□

利用 E_{β_k}, F_{β_k} 中的元素（3.28），我们立即得到：

推论 10.6。*(a)* 对任意 $1 \leq i < j \leq N$，有：

$$q^{-(\beta_j,\kappa(\beta_i))}\tilde{F}_{\beta_i}\tilde{F}_{\beta_j} - \tilde{F}_{\beta_j}\tilde{F}_{\beta_i} = \sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}} a'_{\vec{k}}\tilde{F}^k,$$

其中，当且仅当 $\vec{k} = (k_1,\dots,k_N)$ 满足 $k_s = 0$ 时，$a'_{\vec{k}} \in \mathbb{C}[q,q^{-1}]$ 和 $a'_{\vec{k}} \neq 0$ 成立。对于 $s \leq i$ 和 $s \geq j$，*(b)* 对任意 $1 \leq i < j \leq N$，有：

$$\tilde{E}_{\beta_j}\tilde{E}_{\beta_i} - q^{-(\beta_j,\kappa(\beta_i))}\tilde{E}_{\beta_i}\tilde{E}_{\beta_j} = \sum_{\vec{k}\in\mathbb{Z}^N_{\geq 0}} b'_{\vec{k}}\tilde{E}^k,$$

where $b'_{\vec{k}} \in \mathbb{C}[q,q^{-1}]$ 且仅当 $\vec{k} = (k_1 \dots\dots k_N)$ 满足 $k_s = 0$（对于 $s \leq i$ 和 $s \geq j$）.

对于任意的 $\vec{k}$，$\vec{r} \in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ 和 $u \in U_q^{ev\,0}(\mathfrak{g})$，令

$$M_{\vec{k},\vec{r},u} = \tilde{F}^k u \tilde{E}^r,$$

其中 $\tilde{F}^k = \tilde{F}^{k_N}_{\beta_N}\dots\tilde{F}^{k_1}_{\beta_1}$ 且 $\tilde{E}^r = \tilde{E}^{r_N}_{\beta_N}\dots\tilde{E}^{r_1}_{\beta_1}$。对于任意正根 $\beta = \sum_i b_i\alpha_i$，考虑其高度 $\mathrm{ht}(\beta)$：$= \sum_i b_i$。我们通过下式定义 $M_{\vec{k}、\vec{r}、u}$ 的总高度

$$\mathrm{ht}(M_{\vec{k},\vec{r},u}) = \sum_i (k_i + r_i)\mathrm{ht}(\beta_i), \tag{10.10}$$

并通过下式定义 $M_{\vec{k}、\vec{r}、u}$ 的总次数

$$\deg(M_{\vec{k},\vec{r},u}) = (r_N,\dots,r_1,k_N,\dots,k_1,\mathrm{ht}(M_{\vec{k},\vec{r},u})) \in \mathbb{Z}^{2N+1}_{\geq 0}. \tag{10.11}$$

这给出了 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$的一个 $\mathbb{Z}^{2N+1}_{\geq 0}$ -滤过。

根据推论 10.6 以及 E_i 和 F_j 在 (3.14) 中的交换子关系，我们得到 [DCKP2命题 4 的以下类似结果2]:

命题 10.7。 $\mathbb{Z}^{2N+1}_{\geq 0}$-滤过代数 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 的伴随分次代数 $\mathrm{gr}U_q^{ev}$ 是一个以如下生成元构成的 $\mathbb{C}$ 上的代数

$$X_\alpha = \tilde{E}_\alpha K^{\gamma(\alpha)}, \qquad Y_\alpha = \tilde{F}_\alpha, \qquad K^\lambda \quad (\lambda \in 2P)$$

满足以下关系：

$$\begin{aligned}
K^{\lambda_1}K^{\lambda_2} &= K^{\lambda_1+\lambda_2}, \qquad K^0 = 1,\\
K^\lambda X_\alpha &= q^{(\lambda,\alpha)}X_\alpha K^\lambda, \qquad K^\lambda Y_\alpha = q^{-(\lambda,\alpha)}Y_\alpha K^\lambda,\\
X_\alpha Y_\beta &= Y_\beta X_\alpha,\\
X_\alpha X_\beta &= q^{-(\kappa(\alpha),\beta)}X_\beta X_\alpha \qquad \textit{if } \alpha > \beta \textit{ in the convex ordering},\\
Y_\alpha Y_\beta &= q^{-(\alpha,\kappa(\beta))}Y_\beta Y_\alpha \qquad \textit{if } \alpha > \beta \textit{ in the convex ordering},
\end{aligned}$$

其中 λ_1、$\lambda_2 \in 2P$ 和 α、$\beta \in \Delta_+$。

注 10.8（参见 [DCKP2] 的注释 4.2(a)）。考虑总高度 d_0 所确定的次数，我们得到 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 的一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-滤过；令 $U_{(0)q}$ 为其伴随分次代数。令$d_1(M_{\vec{k}、\vec{r}、u}) = k_1$，我们得到 $U_{(0)q}$ 的一个 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-滤过，并令 $U_q^{(1)}$ 为其伴随分次代数。接下来，我们在代数 $U_q^{(i)}$ 上定义 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-滤过，并得到其伴随分次代数 $U_q^{(i+1)}$。显然，在最后一步，我们得到代数 $\mathrm{gr}U_q^{ev} \cong U_{(2N)q}$。

下面的推论可用与 [DCK，推论 1.8] 相同的方法证明：

推论 10.9。代数 $\mathrm{gr}U_q^{ev}$没有零因子。因此，注释 $U_{(i)q}$ 中的所有代数 *10.8* 都没有零因子，特别是 $U_q^{ev}(\mathfrak{g})$ 没有零因子。

现在我们将范围限制在 $q = \epsilon$ 是阶为 ℓ 的单位根的情形。设 A 是一个没有零因子的代数。令 Z 为 A 的中心，令 $Q(Z)$ 为 Z 的商域，并令 $Q(A) = Q(Z) \otimes_Z A$。如果对于 $Q(A)$ 的任意子环 B，只要存在某个 $z \neq 0 \in Z$ 使得 $A \subset B \subset z^{-1}A$，就有 $B = A$，则称代数 A 为整闭。以下结果由 [DP，定理 6.5] 得出：

命题 10.10. 备注 $U_\epsilon^{(i)}$中的所有代数 *10.8* 都是整闭的。特别地，$U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$和 $\mathrm{gr}U_\epsilon^{ev}$都是整闭的。

10.3. U_ϵ^{ev}**的有限维表示**$(\mathfrak{g})$。

以下关于序的所有事实均见 [DCKP2，§1]。

定义 10.11. (a) 设 R 是一个 $\mathbb{C}$ 上的诺特整环，K 是其分式域。若 A 在 R 上有限生成且无挠，且 $A_K := A \otimes_R K$是一个有限维代数 over K，则称 R-代数 A 为一个序。

(b) 一个 R-序 A 是极大序，如果不存在有限生成的 R-子代数 B 属于 A_K 严格包含 A（如果存在这样的 B，那么它就是一个 R-序）。

我们将关注满足以下条件的 R-序 A：$R = Z$ 是 A 的中心，且 A_K 是 K上的中心单代数。注意，在这种情况下，$K = Q(Z)$是 Z的分式域。我们将这样的 A 中心单代数中的序称为中心单代数中的序。令 $Q(Z)$为 $Q(Z)$的代数闭包，则$A \otimes_Z Q(Z) \cong \mathrm{Mat}_d(Q(Z))$，其中 $d \in \mathbb{N}$。

定义 10.12。设 A 是一个中心单代数中的序。如上所述，数 d 称为 A的次数 。

注 10.13。（见 [Re]）我们有所谓的约化迹映射 tr：$A \otimes_Z Q(Z) \to Q(Z)$。如果 Z 正规，则 $\mathrm{tr}(A) \subset Z$。特别地，这对极大序也成立，因为极大序的中心自动是正规的。

定理 10.14 (定理 1.1 [DCKP2])。设 A 是一个定义在 $\mathbb{C}$上的有限生成代数，且 A 是中心单代数中一个关于迹封闭的序（即，$\mathrm{tr}(A) \subset Z$），那么 ***(a)*** Z 是一个定义在 $\mathbb{C}$上的有限生成代数。

(b) $\mathrm{Spec}(Z)$ 的点参数化了 d 维半单表示的等价类，这些表示属于 A。

(c) 考虑从 A 的不可约表示集合到相应中心特征的自然映射 $\chi : \mathrm{Irr}(A) \to \mathrm{Spec}(Z)$。此映射是满射。每个纤维由相应半单表示中出现的不可约表示构成。特别地，A 的每个不可约表示的维数至多为 d。

(d) 集合

$$\Omega_A = \{a \in \text{谱} Z \mid \text{相应的半单表示是不可约的}\}$$

是谱Z 的一个非空 *Zariski*开集（由于 Z 是整环，因此它是稠密的）。*(e)* 假设 Z 是子代数 Z_0 上的有限生成模。考虑映射

$$\mathrm{Irr}(A) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Spec}Z \xrightarrow{\tau} \mathrm{Spec}Z_0.$$

那么集合

$\Omega^0_A = \{a \in \mathrm{Spec}Z_0 \mid (\tau\circ\chi)^{-1}(a)$ 包含所有维数为 $d\}$ 的不可约表示

是 $\mathrm{Spec}(Z_0)$ 的一个非空 *Zariski*开集（稠密子集）。

由于根据推论 6.4 和 10.9，$U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 没有零因子，且在 Z 上有限生成，我们看到 $U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 是一个中心单代数中的序。利用 $U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 整闭这一事实以及命题 10.10，可以很容易证明 $U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 是一个极大序，因此 $U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 在迹运算下封闭。于是，定理 10.14 可应用于三元组 $(U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})\ Z,\ Z_0 = Z_{Fr})$。结合命题 10.4，我们得到

命题 10.15。$\Omega^0_{U^{ev}_\epsilon}$是谱$Z_{Fr}$中若干辛叶的并集。

现在我们将确定 $U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的次数 d。不可约表示 U^{ev}_ϵ上 Z_{Fr}-作用的特征将称为该表示的 *Frobenius* 中心特征。我们需要以下命题，该命题将在下一节中证明。

命题 10.16。$\mathrm{gr}U^{ev}_\epsilon$的次数为 $\prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha$。

对于任意点 $p \in \mathrm{Spec}\mathbb{C}[K^{2\lambda}]_{\lambda\in P} \cong T$，我们定义对角模 $M_{p,\ 0}$ 如下 s:

$$M_{p,0} = U^{ev}_\epsilon/U^{ev}_\epsilon(\tilde{E}_i, K^{2\lambda} - p(K^{2\lambda}), \tilde{F}^{\ell_\alpha}_\alpha),$$

其中，将 $\alpha \in \Delta_+$、$1 \le i \le r$ 和 q 视为代数同态 $\mathbb{C}[K^{2\lambda}]_{\lambda\in P} \to \mathbb{C}$。

我们回顾命题6.10中的识别

$$Z_{Fr} = \mathbb{C}[\tilde{E}^{\ell_\alpha}_\alpha K^{\ell_\alpha\gamma(\alpha)}]_{\alpha\in\Delta_+} \otimes \mathbb{C}[K^{2\lambda}]_{\lambda\in P^*} \otimes \mathbb{C}[\tilde{F}^{\ell_\alpha}_\alpha K^{\ell_\alpha\kappa(\alpha)}]_{\alpha\in\Delta_+} \cong \mathbb{C}[U^d_-] \otimes \mathbb{C}[T^d] \otimes \mathbb{C}[U^d_+]$$

令 p_ℓ 表示 T^d 中由 $K^{2\lambda} \mapsto p(K^{2\lambda})$ 定义的点，其中对所有 $\lambda \in P^*$ 均成立。下面的引理显而易见:

引理 10.17。$M_{p,0}$ 的维数为 $\prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha$。$M_{p,0}$ 的 *Frobenius* 中心特征对应于点 $(1, p_\ell, 1) \in U^d_- \times T^d \times U^d_+$。

推论 10.18。对于任意点 $v \in 1 \times T^d \times 1 \subset$谱$Z_{Fr}$，存在模 $M_{p,0}$，其 *Frobenius* 中心特征对应于点 v。

现在我们可以计算 $U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 的次数。

命题 10.19。*(a)* $d = \prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha$。

(b) $_{Q(Z_{Fr}}$ 的维数$)$ $Q(Z) = \prod^r_{i=1}\ell_i$。

证明。(a)由于退化不会增加次数 [DCKP2，注 1。3], 由命题10.16，我们得到

$$d = \deg(U^{ev}_\epsilon(g)) \ge \prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha.$$

令 $G^{d,\ diag}$为 T^d的所有共轭类与 $\mathrm{Spec}Z_{Fr}$交集的并集，则$_{G^{d,\ diag}} \cap \Omega^0_{U^{ev}_\epsilon}$非空，因为这两个子集都是开集且扎里斯基稠密。由于 $\Omega^0_{U^{ev}_\epsilon}$是辛叶的并集，我们必有

$$T^d \cap \Omega^0_{U^{ev}_\epsilon} \ne \emptyset.$$

令 $v \in T^d \cap \Omega^0_{U^{ev}_\epsilon}$。由于 $v \in \Omega^0_{U^{ev}_\epsilon}$，所有具有 Frobenius 中心特征 v 的不可约表示的维数都必须为 d。另一方面，根据推论 10.18，存在一些具有 Frobenius 中心特征 v 且维数不超过$\prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha$的不可约表示。因此

$$d \le \prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha.$$

因此，$d = \prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha$。

(b) 由于 Z 是 Z_{Fr} 上的有限生成模，且两者都是整环，因此可得 $Q(Z) = Z\otimes_{Z_{Fr}} Q(Z_{Fr})$，从而 $Q(U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})) = U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})\otimes_{Z_{Fr}} Q(Z_{Fr})$。于是，借助以下等式，结论 (b) 成立

$$\dim_{Q(Z)} Q(U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})) = d^2 = \Big(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha\Big)^2$$

$$\dim_{Q(Z_{Fr})} Q(U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})) = \Big(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha\Big)^2\cdot\prod_{1\le i\le r}\ell_i$$

$$\dim_{Q(Z_{Fr})} Q(U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})) = \dim_{Q(Z_{Fr})}Q(Z)\cdot\dim_{Q(Z)}Q(U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})).$$

第一个等式由定义10.12 应用于 $U^{ev}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 得出。第二个等式由推论6.4得出。□

10.4. $\mathrm{gr}U^{ev}_\epsilon$ **的次数。**

代数 $\mathrm{gr}U^{ev}_\epsilon$是一个扭（*Laurent*）多项式代数，其含义见 [DCKP2， §2]。我们来回顾后者的定义。设 $q\in\mathbb{C}^\times$。给定一个 $n\times n$ 反对称矩阵$H=(h_{ij})$，其元素取自 $\mathbb{Z}$，扭多项式代数 $\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]$ 是由以下生成元x_1，…， x_n 及定义关系构成的代数：

$$x_ix_j = q^{h_{ij}}x_jx_i \qquad (i,j=1,\dots,n).$$

扭 Laurent 多项式代数 $\mathbb{C}_H[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]$ 的定义类似。

引理 10.20 (引理 2.2 [DCKP2])。 在任意不可约 $\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]$-模中，每个元素$x_i$ 的作用不是0，就是可逆算子。

设 $q=\epsilon$ 是一个阶为 ℓ的单位根。矩阵 H 定义了一个同态

$$\underline{H}:\mathbb{Z}^n\to(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n.$$

设 h 为同态 H的像的基数。设 K 为 H的核。我们将在 [DCKP2， 命题 2] (关于扭多项式环及其模的更多讨论，参见 [DCKP2， §2])。

命题 10.21。 *(a)* 元素 $\mathrm{x}^a = x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}$满足 $a\in K\cap\mathbb{Z}^n_{\ge0}$（分别为 $a\in K$）时，构成 $\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]$（分别为 $\mathbb{C}_H[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]$）中心的一个基。
(b) 次数$\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]$ =次数$\mathbb{C}_H[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]=\sqrt{h}$. *(c)* 代数 $\mathbb{C}_H[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]$是其中心上的阿祖马亚代数。

设 $S\subset\{1,\dots,n\}$和 H_S是由 H得到的矩阵，方法是删除所有标记为不属于 S的指标的行和列。

引理 10.22. 设 Z为 $\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]$的中心。假设 Z是子代数 Z_0 上的有限生成模，且对某个 $m_i\neq0$有 $\{x_i^{m_i}|1\le i\le n\}\subset Z_0$。令 $\mathscr{O}_0$ 为谱Z_0中满足方程 $x_i^{m_i}=0$、$i\notin S$的解的子集。假设度 $\mathbb{C}_{H_S}[x_i]_{i\in S}$ =度 $\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]$，那么

$$\Omega^0_{\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]}\cap\mathscr{O}_0 \text{ is a nonempty Zariski open subset in } \mathscr{O}_0. \tag{10.12}$$

证明。 由于 $\Omega^0_{\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]}$ 是谱Z_0的 Zariski开集，只需证明 t

$$\Omega^0_{\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]} \cap \mathscr{O}_0 \neq \emptyset.$$

令 $Z_0[x_j^{-m_j}]_{j\in S}$ 为 Z_0 在 $\{x_j^{m_j}|j \in S\}$处的局部化，则 Spec($Z_0[x_j^{-m_j}]_{j\in S}$) 是 SpecZ_0 中的一个非空开子集。在任何中心特征包含于 Spec($Z_0[x_j^{-m_j}]_{j\in S}$) 的不可约 $\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]$-模上， x_j、 $j \in S$和 的作用都是可逆算子，这是由引理 10.20所致。因此，中心特征包含于 Spec($Z_0[x_j^{-m_j}]_{j\in S}$) 的不可约 $\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]$-模与不可约 $\mathbb{C}_H[x_i, x_j^{\pm}]_{i\notin S, j\in S}$-模之间存在双射。

由于 $\{x_i^{m_i}|1 \leq i \leq n\} \subset Z_0$，交集 $\mathscr{O}_0 \cap$Spec($Z_0[x_j^{-m_j}]_{j\in S}$) 非空。根据引理 10.20，元素 $x_i, i \notin S$ 在任何中心特征属于 $\mathscr{O}_0$ 的不可约 $\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]$-模上都作用为 0。因此，中心特征属于 $\mathscr{O}_0 \cap$ Spec($Z_0[x_j^{-m_j}]_{j\in S}$) 的 $\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]$ 的不可约模与 $\mathbb{C}_{H_S}[x_j^{\pm}]_{j\in S}$-模的不可约模之间存在双射。接着，由于假设 deg $\mathbb{C}_{H_S}[x_j]_{j\in S}$ =deg $\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]$，再结合引理 10.21(c)，可知所有中心特征包含于 $\mathscr{O}_0 \cap$Spec$Z_0[x_j^{-m_j}]_{j\in S}$ 的不可约 $\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]$-模都具有最大可能维数。因此， $\emptyset \neq \mathscr{O}_0 \cap$Spec($Z_0[x_j^{-m_j}]_{j\in S} \subset \mathscr{O}_0 \cap \Omega^0_{\mathbb{C}_H[x_1,\dots,x_n]}$。 证明完毕。□

根据命题 10.7，grU_ϵ^{ev}是代数

$$\mathbb{C}_H[K^{\pm 2\omega_1},\dots,K^{\pm 2\omega_r}, X_{\beta_1},\dots,X_{\beta_N}, Y_{\beta_1},\dots,Y_{\beta_N}]$$

其中反对称矩阵 H 具有如下形式:

$$H = \begin{bmatrix} B & 0 & -A^T \\ 0 & C & A^T \\ A & -A & 0 \end{bmatrix} \tag{10.13}$$

我们来描述 H:

- 列从左到右标记为 $X_{\beta_1},\dots,X_{\beta_N}, Y_{\beta_1},\dots,Y_{\beta_N}, K^{2\omega_1},\dots,K^{2\omega_r}$. 行从上到下也标记为同一组元素。
- 矩阵 $B = (b_{ij})$ 是一个 $N \times N$ 反对称矩阵，其中 $b_{ij} = (\beta_i, \kappa(\beta_j))$ 对于$i < j$。
- 矩阵 $C = (c_{ij})$ 是一个 $N \times N$ 反对称矩阵，满足 $c_{ij} = (\kappa(\beta_i)\ \beta_j)$，其中$i < j$
- 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的大小为 $r \times N$，且满足 $a_{ij} = (2\omega_i,\ \beta_j)$。

为了计算 H<style id='4'} 的像的基数，我们需要一些关于[DCKP2中的根系 §3]的结果。给定一个单根 α，令

$$I_\alpha = \{1 \leq j \leq N | s_{i_j} = s_\alpha\}, \qquad \mathcal{I}_\alpha = \{\beta_{k_1},\dots,\beta_{k_t}|k_j \in I_\alpha\}, \tag{10.14}$$

引理 10.23 (引理 3.2, [DCKP2])。 固定一个单根 α ，并令 ω 为相应的基本权。令 $k_1 < \dots < k_r$ 为集合 I_α的所有元素。对于 $t \in \mathbb{Z}$， $1 \leq t \leq r$，令

$$\lambda_t = s_{\beta_{k_t}} \dots s_{\beta_{k_1}}(\omega), \qquad \mu_t = -s_{\beta_{k_{r-t+1}}} \dots s_{\beta_{k_r}}(\omega^*),$$

此处 $\omega^* = -w_0(\omega)$。令 $\beta_j^\vee$: $= 2\beta_j/(\beta_j, \beta_j)$ 对所有 $1 \leq j \leq N$ 均成立。于是:

(a) $\lambda_t = s_{i_1} \dots s_{i_{k_t}}(\omega)$; 特别是 $\lambda_r = -$ ω^*.
(b) 若 $k_t < j < k_{t+1}$，则 $(\lambda_t, \beta_j^\vee) = 0$。
(c) $(\lambda_t, \beta_{k_{t+1}}^\vee) = 1$。*(d)*
$\lambda_t = \omega - \sum_{i=1}^t \beta_{k_i}$.同理:

(a') $\mu_t = \lambda_{r-t}$；特别是 $\mu_r = \omega$。*(b')* 若 $k_{r-t} < j < k_{r-t+1}$，则 $(\mu_t, \beta_j^\vee) = 0$。*(c')* $(\mu_t, \beta_{k_{r-t}}^\vee) = -1$。*(d')* ${}^{-s_{\beta_{k_1}} \cdots s_{\beta_{k_r}}}(w^*) = -\omega^* + \sum_{i=1}^r \beta_{k_i} = \omega$。

推论 10.24（推论 3.2, [DCKP2]）。（a）$(\beta_l, \omega) = \sum_{k_i<l} (\beta_l, \beta_{k_i})$，如果 $l \notin I_\alpha$。
（b）$(\beta_{k_t}, 2\omega) = (\beta_{k_t}, \beta_{k_t}) + \sum_{i<t} (2\beta_{k_t}, \beta_{k_i})$，对于 $k_t \in I_\alpha$。

对于每个集合 I_{α_i}，选取 $\beta_{m_i} \in \mathcal{I}_{\alpha_i}$。令

$$S = \begin{cases} \{K^{2\omega_1}, \dots K^{2\omega_r}, Y_{\beta_i}, X_{\beta_i}\} \setminus \{X_{\beta_{m_1}}, \dots, X_{\beta_{m_r}}\} \\ \{K^{2\omega_1}, \dots K^{2\omega_r}, Y_{\beta_i}, X_{\beta_i}\} \setminus \{Y_{\beta_{m_1}}, \dots, Y_{\beta_{m_r}}\} \end{cases} \tag{10.15}$$

令 H_S 为由集合 S标记的列和行所组成的 H 的 $2N \times 2N$ 子矩阵。因此我们有以下群同态

$$\underline{H} : \mathbb{Z}^{2N+r} \to (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2N+r}, \qquad \underline{H}_S : \mathbb{Z}^{2N} \xrightarrow{2} (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2N}. \tag{10.16}$$

命题 10.25。$\operatorname{Im} H$和$\operatorname{Im} H_S$的基数相等，均为 $\left(\prod_{\alpha\in\Delta_+} \ell_\alpha\right)^2$。

该命题证明见 [DCKP2，引理 3。3] 当 ℓ为奇数时成立，但同上文献中的论证不适用于偶数 ℓ。

证明. 注意，以下操作不会改变 $\operatorname{Im} H$ 和 $\operatorname{Im} H$ 的基数 $\underline{H}$ 和 $\underline{H}_S$：

- 交换这些矩阵的行或列。
- 将一行（分别为一列）的整数倍加到另一行（分别为另一列）。
- 将行（列）乘以 ± 1。

利用这些算子，我们将把 H 和 H_S 变换为对角矩阵，其非零项为 (β_i, β_i) $1 \le i \le N$，且每项各出现两次。由此可得该引理。事实上，

$$\operatorname{Im} \underline{H} \cong \bigoplus_{i=1}^N \left([(\beta_i, \beta_i)\mathbb{Z} + \ell\mathbb{Z}]/\ell\mathbb{Z} \right)^{\oplus 2} \cong \bigoplus_{i=1}^N \left(\gcd[(\beta_i, \beta_i), \ell]\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \right)^{\oplus 2}.$$

因此 $\sharp \operatorname{Im} \underline{H} = \left(\prod_{\alpha\in\Delta_+} \ell_\alpha\right)^2$。$H_S$的情形相同。

现在来说明如何将 H，H_S 变换为这样的对角矩阵。回顾（10.13）中的约定。

的计算。我们先讨论 H的情形。以下等式会频繁用到，同样地，κ 和 γ 在（4.1）中定义：

$$(\gamma(\alpha), \beta) = (\alpha, \kappa(\beta)), \qquad \gamma(\alpha) \pm \kappa(\alpha) = 2\alpha, \qquad (\gamma(\alpha), \alpha) = (\alpha, \kappa(\alpha)) = (\alpha, \alpha). \tag{10.17}$$

步骤 *1*：我们将说明如何利用 H 的最后 r 列变换 $\begin{bmatrix} B \\ 0 \\ A \end{bmatrix}$，以及如何利用 H 的最后 r 行变换 $\begin{bmatrix} 0 & C & A^T \end{bmatrix}$。

步骤 *1.1*：$\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$ 中以 X_{β_j} 为索引的列是

$$\begin{bmatrix} (\beta_1, \kappa(\beta_j)) & \dots & (\beta_{j-1}, \kappa(\beta_j)) & 0 & -(\kappa(\beta_{j+1}), \beta_j) & \dots & -(\kappa(\beta_N), \beta_j) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

通过添加以下向量，它是中的列的整数线性组合 $\begin{bmatrix} -A^T \\ A^T \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -(\beta_1, \kappa(\beta_j)) & \dots & -(\beta_N, \kappa(\beta_j)) & (\beta_1, \kappa(\beta_j)) & \dots & (\beta_N, \kappa(\beta_j)) \end{bmatrix}^T,$$

我们得到

(10.18) $\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & -(\beta_j,\beta_j) & -2(\beta_{j+1},\beta_j) & \cdots & -2(\beta_N,\beta_j)\end{bmatrix}$ $(\beta_1,\kappa(\beta_j)\dots(\beta_N,\kappa(\beta_j))]^T$这里出现了条目 $-2(\beta_k,\beta_j)$ 和 (β_j,β_j)，这是因为根据 (10.17)

$$-(\kappa(\beta_k),\beta_j)-(\beta_k,\kappa(\beta_j))=-(\kappa(\beta_k)+\gamma(\beta_k),\beta_j)=-2(\beta_k,\beta_j),\quad (\beta_j,\kappa(\beta_j))=(\beta_j,\beta_j).$$

步骤 *1.* 类似地，以 Y_{β_i} 为索引的 $\begin{bmatrix}0 & C\end{bmatrix}$ 行为

$$\begin{bmatrix}0 & -(\beta_i,\kappa(\beta_1)) & \dots & -(\beta_i,\kappa(\beta_{i-1})) & 0 & (\kappa(\beta_i),\beta_{i+1}) & \dots & (\kappa(\beta_i),\beta_N)\end{bmatrix}.$$

加上向量

$$\begin{bmatrix}-(\gamma(\beta_i),\beta_1) & \dots & -(\gamma(\beta_i),\beta_N) & (\gamma(\beta_i),\beta_1) & \dots & (\gamma(\beta_i),\beta_N)\end{bmatrix},$$

我们得到

(10.19) $$\begin{bmatrix}-(\gamma(\beta_i),\beta_1) & \dots & -(\gamma(\beta_i),\beta_N) & 0 & (\beta_i,\beta_i) & 2(\beta_i,\beta_{i+1}) & \dots & 2(\beta_i,\beta_N)\end{bmatrix}.$$

注意到，列（10.18）的最后几项与行（10.19）的前几项相消：$(\beta_i,\ \kappa(\beta_j))-(\gamma(\beta_i)\ \beta_j)=0$。因此，我们将 H 变换为以下形式：

$$H_1=\begin{bmatrix}B_1 & 0 & -A^T\\ 0 & C_1 & A^T\\ A & -A & 0\end{bmatrix},$$

其中：

- B_1 是一个下三角矩阵，其以 X_{β_j} 为索引的列为

$$\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & -(\beta_j,\beta_j) & -2(\beta_{j+1},\beta_j) & \dots & -2(\beta_N,\beta_j)\end{bmatrix}^T.$$

- C_1 是一个上三角矩阵，其以 Y_{β_i} 为索引的行为

$$\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & (\beta_i,\beta_i) & 2(\beta_i,\beta_{i+1}) & \dots & 2(\beta_i,\beta_N)\end{bmatrix}.$$

Let

$$v_{\beta_i}:=\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & (\beta_i,\beta_i) & 2(\beta_i,\beta_{i+1}) & \dots & 2(\beta_i,\beta_N)\end{bmatrix}$$
$$V_{\beta_j}:=\begin{bmatrix}2(\beta_1,\beta_j) & \dots & 2(\beta_{j-1},\beta_j) & (\beta_j,\beta_j) & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T.$$

Then

$$B_1=\begin{bmatrix}-v_{\beta_1}^T & \dots & -v_{\beta_N}^T\end{bmatrix},\qquad C_1=\begin{bmatrix}V_{\beta_1} & \dots & V_{\beta_N}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{\beta_1}\\ \dots\\ v_{\beta_N}\end{bmatrix}=-B_1^T.$$

步骤 *2*：回想 $\mathcal{I}_{\alpha_l}=\{\beta_{k_1}^{w_l},\dots,\beta_{k_{s_l}}^{w_l}\}$。这里，$\mathcal{I}_{\alpha_l}$的基数为 s_l，我们添加上标 w_l 以区分不同集合 $\mathcal{I}_{\alpha_l}$中的元素。于是

(10.20) $$\begin{bmatrix}(2\omega_l,\beta_1) & \dots & (2\omega_l,\beta_N)\end{bmatrix}=v_{\beta_{k_1}^{\omega_l}}+\dots v_{\beta_{k_{s_l}}^{\omega_l}}$$

(10.21) $$\begin{bmatrix}(2\omega_l^*,\beta_1) & \dots & (2\omega_l^*,\beta_N)\end{bmatrix}^T=V_{\beta_{k_1}^{\omega_l}}+\dots+V_{\beta_{k_{s_l}}^{\omega_l}}.$$

事实上，根据推论 10.24，我们有

$$(2\omega_l,\beta_j)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{t-1}2(\beta_{k_i}^{\omega_l},\beta_j), & k_{t-1}<j<k_t\\ \sum_{i=1}^{t-1}2(\beta_{k_i}^{\omega_l},\beta_{k_t})+(\beta_{k_t},\beta_{k_t}), & j=k_t\end{cases}$$

$$(2\omega_l^*,\beta_j)=(2\sum_{i=1}^{s_l}\beta_{\beta_{k_i}}^{\omega_l},\beta_j)-(2\omega_l,\beta_j)=\begin{cases}\sum_{i=t}^{s_l}2(\beta_{k_i}^{\omega_l},\beta_j), & k_{t-1}<j<k_t\\ \sum_{i=t+1}^{s_l}2(\beta_{k_i}^{\omega_l},\beta_{k_t})+(\beta_{k_t},\beta_{k_t}), & j=k_t\end{cases}$$

步骤 *3*： 利用步骤 2，我们可以用 B_1 的列消去右上角子矩阵 $-A^T$。同时，我们可以用 C_1 的行消去 H_1 最后一行中的中间子矩阵 $-A$ 。我们将得到新的矩阵

$$H_2 = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & A^T \\ A & 0 & D+E \end{bmatrix},$$

其中

- $D = (d_{ij})$ 是通过消去 $-A^T$ 得到的一个 $r \times r$ 矩阵，而 $d_{ij} = -(2\omega_i, \sum_{l=1}^{s_j} \beta_{k_l}^{\omega_j})$
- $E = (e_{ij})$ 是通过消去 $-A$ 得到的一个 $r \times r$-矩阵，而 $e_{ij} = (\sum_{l=1}^{s_i} \beta_{k_l}^{\omega_i}, 2\omega_j) = -d_{ji}$另一方面， D 是一个对称矩阵。事实上，注意到 $\omega_i + \omega_i^* = \sum_{l=1}^{s_i} \beta_{k_l}^{\omega_i}$，因此

$$d_{ij} = -2(\omega_i, \omega_j + \omega_j^*) = -2(\omega_i + \omega_i^*, \omega_j) = d_{ji}.$$

因此， $D + E = 0$

步骤 *4*： 我们注意到，在 H_2 中任何对角元非零的行或列中，这些行或列的所有其他元素都能被相应的对角元整除。因此，我们可以利用 B_1 的对角元消去 $\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ A \end{bmatrix}$ 中的其他元素，

同时也可以利用 C_1 的对角元消去 $\begin{bmatrix} 0 & C_1 & A^T \end{bmatrix}$ 中的其他元素。因此，我们可以将 H_2 化为 H，从而得到所需的对角矩阵。

对 H_S 进行计算。现在我们考虑 H_S 与

$$S = \{X_{\beta_1}, \ldots, X_{\beta_N}, Y_{\beta_1}, \ldots Y_{\beta_N}, K^{2\omega_1}, \ldots, K^{2\omega_r}\}/\{Y_{\beta_{m_1}}, \ldots Y_{\beta_{m_r}}\}.$$

我们仍按步骤 1–2 进行，但在步骤 3 中，由于 $\begin{bmatrix} 0 & C & A^T \end{bmatrix}$ 的某些行和列已被删除，我们得到如下矩阵

$$H_{S,1} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{C}_1 & \underline{A}^T \\ A & \underline{F}_1 & \underline{F}_2 \end{bmatrix},$$

其中

- $\begin{bmatrix} \underline{C}_1 & \underline{A}^T \end{bmatrix}$ 是通过删除 $\begin{bmatrix} C_1 & A^T \end{bmatrix}$ 中由 $Y_{\beta_{m_1}}, \ldots, Y_{\beta_{m_r}}$ 索引的行和列得到的。
- 中 $\begin{bmatrix} \underline{F_1} & \underline{F_2} \end{bmatrix}$ 的第 $\underline{K^{2\omega_i}}$ 行，在删除由 $Y_{\beta_{m_1}}, \ldots, Y_{\beta_{m_r}}$ 索引的列后，是 $\begin{bmatrix} C_1 & A^T \end{bmatrix}$ 中 $Y_{\beta_{m_i}}$ 的第 $-$ 行

因此，我们可以将 $\begin{bmatrix} A & F_1 & F_2 \end{bmatrix}$ 的各行乘以 -1，然后对 $H_{S,1}$ 的各行进行置换，得到

$$H_{S,2} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ * & C_2 & A^T \end{bmatrix},$$

其中， C_2 是通过删除 C_1 在 $Y_{\beta_{m_1}}, \ldots, Y_{\beta_{m_r}}$ 处的列得到的。

现在利用步骤 2 中的（10.21），我们可以用 C_2 将 A^T 变换为一个矩阵，其列全是 C_1 在 C_2中的缺失列。然后置换列和行，得到

$$H_{S,3} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ * & C_1 \end{bmatrix},$$

按照步骤 4，可以将其变换为所需的对角矩阵。 □

推论 10.26. 命题*10.16* 成立。

设 $\alpha_i^* = -w_0(\alpha_i)$ 和 $\omega_i^* = -w_0(\omega_i)$，其中 $1 \leq i \leq r$。设

$$\mathcal{I}_{\alpha_i} = \{\beta_{k_1}, \dots, \beta_{k_r}\}, \qquad \mathcal{I}_{\alpha_i^*} = \{\beta_{l_1}, \dots, \beta_{l_r}\} \quad 1 \leq i \leq r.$$

其中 $\mathcal{I}_?$ 在（10.14）中引入。以下命题与 [DCKP2，命题 5 类似。2]。为方便读者，我们针对当前设定给出证明。

命题 10.27。$\mathrm{gr}U_\epsilon^{ev}$的中心由元素 $K^{\pm 2\ell_i\omega_i}$、$X_\alpha^{\ell_\alpha}$、$Y_\alpha^{\ell_\alpha}$以及 u_i 生成，其中 $1 \leq i \leq r$、$\alpha \in \Delta_+$，其中

$$u_i = K^{-2\omega_i + \kappa(\omega_i + \omega_i^*)} \prod X_{\beta_{k_i}} \prod Y_{\beta_{l_j}}.$$

证明。将格 $\mathbb{Z}^{2N+r}$ 的标准基 $\{(\dots,1,\dots)\}$ 标记为集合

$$\{X_{\beta_N}, \dots, X_{\beta_1}, Y_{\beta_N}, \dots, Y_{\beta_1}, K^{2\omega_1}, \dots, K^{2\omega_r}\}.$$

那么，$\mathrm{gr}U_\epsilon^{ev}$中的每个单项式都对应 $\mathbb{Z}^{2N+r}$中的一个向量，参见命题 U_ϵ^{ev}中对 gr10.7的描述。

步骤 *1*. 我们证明 u_i 在 $\mathrm{gr}U_\epsilon^{ev}$中是中心的。令 $\underline{u_i}$ 表示 u_i 在格$\mathbb{Z}^{2N+r}$中的坐标。那么，只需证明 $u_iH = 0$，其中 H 由（10.13）给出。行 u_i 与列 H 中标记为 X_{β_j} 的项的乘积为

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leq k\leq r} (-2\omega_i + \kappa(\omega_i + \omega_i^*), \alpha_k^\vee/2)(2\omega_k, \beta_j) + \sum_{k_m<j} (\beta_{k_m}, \kappa(\beta_j)) - \sum_{k_m>j} (\kappa(\beta_{k_m}), \beta_j) \\
&= -(2\omega_i, \beta_j) + (\kappa(\omega_i + \omega_i^*), \beta_j) + \sum_{k_m<j} (\beta_{k_m}, \kappa(\beta_j)) - \sum_{k_m>j} (\kappa(\beta_{k_m}), \beta_j) \\
&= -(2\omega_i, \beta_j) + \sum_{k_m<j} (\beta_{k_m}, 2\beta_j) + \begin{cases} (\beta_j, \beta_j) & \text{if } j \in I_{\alpha_i} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
&= 0 \qquad \text{by Corrollary 10.24}
\end{aligned}$$

在第二个等式中，我们使用 $\omega_i + \omega_i^* = \beta_{k_1} + \dots + \beta_{k_r}$（见引理 10.23）、$(\beta_{k_m}, \kappa(\beta_j)) = (\gamma(\beta_{k_m})\ \beta_j) = (\beta_{k_m}, 2\beta_j) - (\kappa(\beta_{k_m})\ \beta_j)$ 和 $(\kappa(\beta_j)\ \beta_j) = (\beta_j, \beta_j)$。

行 u_i 与列 H 中标记为 $\underline{Y_{\beta_j}}$ 的项的乘积可用类似的方法计算。u_i 与列 H 中标记为 $K^{2\omega_j}$ 的项的乘积为

$$\sum_{k_m} (-2\omega_j, \beta_{k_m}) + \sum_{l_n} (2\omega_j, \beta_{l_n}) = (-2\omega_j, \omega_i + \omega_i^*) + (2\omega_j, \omega_i + \omega_i^*) = 0,$$

这里我们使用 $\omega_i + \omega_i^* = \beta_{k_1} + \dots + \beta_{k_r} = \beta_{l_1} + \dots + \beta_{l_r}$，见引理 10.23。

步骤 *2*. 我们将证明 $K^{\pm 2\ell_i\omega_i}, X_\alpha^{\ell_\alpha}, Y_\epsilon^{\ell_\alpha}$在 $\mathrm{gr}U_\epsilon^{ev}$ 中是中心的。我们只对 $X_\alpha^{\ell_\alpha}$ 进行证明。令 $X_\alpha^{\ell_\alpha}$表示 $X_\alpha^{\ell_\alpha}$在格 $\mathbb{Z}^{2N+r}$中的坐标。

与 X_{β_j} 在 H 中由 10.13 标记的列相乘，结果为

$$\begin{cases} \ell_\alpha(\beta_k, \kappa(\alpha)) = 2\ell_\alpha d_\alpha(\gamma(\beta_k)/2, \alpha^\vee) & \text{if } \beta_k < \alpha \\ 0 & \text{if } \beta_k = \alpha \\ -\ell_\alpha(\kappa(\beta_k), \alpha) = 2\ell_\alpha d_\alpha(\kappa(\beta_k)/2, \alpha^\vee) & \text{if } \beta_k > \alpha \end{cases}$$

此处 $d_\alpha = (\alpha, \alpha)/2$。所有这些整数值都能被 ℓ 整除，因为 $\gamma(\beta_k)\ \kappa(\beta_k) \in 2P$。对 H中的其余列向量进行相同的计算后，我们得出结论：$X_\alpha^{\ell_\alpha}$属于映射 H （10.16）的核，因此 $X_\alpha^{\ell_\alpha}$是中心的。

步骤 *3*. 令 $K^{2\ell_i\omega_i}, X_\alpha^{\ell_\alpha}, Y_\alpha^{\ell_\alpha}, u_i$ 表示相应元素在 $\mathbb{Z}^{2N+r}$ 中的坐标。令 K' 表示 $\mathbb{Z}^{2N+r}$ 中由 $K^{2\ell_i\omega_i}, X_\alpha^{\ell_\alpha}, Y_\alpha^{\ell_\alpha}, u_i$生成的子格。

对于每个集合 $\mathcal{I}_{\alpha_i}$，选取其中一个元素 β_i'，我们将与 $X_{\beta_i'}$ 对应的基向量 $(\dots,1,\dots)$ 替换为 u_i。这样我们仍然得到格 $\mathbb{Z}^{2N+r}$ 的一个基。此外，$\ell_{\beta_i'} = \ell_i$。根据这些

观察，可以很容易地证明 $\mathbb{Z}^{2N+r}/K'$ 的基数小于或等于 $(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha)^2$。另一方面， K' 包含于核 K 中，而 H 的基数为$\mathbb{Z}^{2N+r}/K$ $(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha)^2$，根据命题 10.25，因此 $K'=K$。

步骤 *4*。 该命题由命题 10.21 中对扭多项式环中心的描述得出。 □

10.5。 Z $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 的中心。

本节将 Z 用 Z_{HC} 和 Z_{Fr}来描述，参见 [DCKP1，定理 6。4] 以及 [T2，定理 5。4] 其中给出了原始 De Concini-Kac 形式的相关结果。

回顾定理 9.30中的 Harish-Chandra 同构：

$$\pi: Z_{HC}\to\mathbb{C}[K^{2\lambda}]^W_{\lambda\in P},$$

其中， $\mathbb{C}[K^{2\lambda}]_{\lambda\in P}$ 是格 $2P$的群代数。

代数自同构$\gamma_{-\rho}:\mathbb{C}[K^{2\lambda}]_{\lambda\in P}\to\mathbb{C}[K^{2\lambda}]_{\lambda\in P}$定义为 $\gamma(K^{2\lambda})=\epsilon^{(-\rho,2\lambda)}K^{2\lambda}$对所有 $\lambda\in P$ （此处固定一个元素 $\epsilon^{1/N}$）。于是，由定理 9.30，可得

$$\gamma_{-\rho}\circ\pi: Z_{HC}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}[K^{2\lambda}]^W_{\lambda\in P}, \tag{10.22}$$

其中， W-作用如下： $w(K^\mu)=K^{w(\mu)}$ 对所有 $w\in W,\mu\in 2P$。

定义

$$Z_\cap:=Z_{Fr}\cap Z_{HC}=(Z_{Fr})^{\dot U_\epsilon}$$

引理 10.28. $Z_\cap\cong\mathbb{C}[K^{2\lambda}]^W_{\lambda\in P^*}\subset\mathbb{C}[K^{2\lambda}]^W_{\lambda\in P}\cong Z_{HC}$。

证明。 回忆定理 φ: $O_\epsilon[G]\cong U_\epsilon^{fin}$中的同构 9.27。根据引理 9.11，在此同构下有 $O_\epsilon[G^d]\cong Z_{Fr}^{fin}$。因此 $O_\epsilon[G^d]^{\dot U_\epsilon}\cong(Z_{Fr})^{\dot U_\epsilon}=Z_\cap$。

U_ϵ^*)中的主伊模。令 $c_\lambda^d=\sum_i c_{v_i^d,v_i^d}^*K^{2\rho}v_i^d\in O_\epsilon[G^d]$，其中· $\{v_i^d\}$ 是 $W_\epsilon^d(\lambda)$ 的权基，并对基的指标集求和。则 $\{c_\lambda^d\}_{\lambda\in P_+^*}$ 构成 $O_\epsilon[G^d]^{\dot U_\epsilon}$ 的 $\mathbb{C}$-基，因为 Rep($\dot U_\epsilon^*$) 等价于 Rep($\dot U_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^d)$) （参见 (9.9)），因此是半单的，进而 $O_\epsilon[G^d]\cong\bigoplus_{\lambda\in P_+^*}W_\epsilon^d(\lambda)\otimes(W_\epsilon^d(\lambda))^*$。现在按照定理 9.30 的证明，计算 $\{\varphi(c_\lambda^d)\}_{\lambda\in P_+^*}$ 在 Harish-Chandra 映射 (10.22) 下的像，可以看出 $\{\gamma_{-\rho}\circ\pi\circ\varphi(c_\lambda^d)\}_{\lambda\in P_+^*}$ 构成 $\mathbb{C}[K^{2\lambda}]^W_{\lambda\in P^*}$ 的一组基。这就证明了该引理。□

注 10.29。 包含 $Z_\cap\hookrightarrow Z_{HC}$给出了一个映射 $\bullet^\ell$: $T/W\to T^d/W$。在识别 $Z_{Fr}\cong\mathbb{C}[G_0^d]$ 下，该包含对应于范畴商 $G_0^d\hookrightarrow G^d\to G^d/\!\!/G^d\cong T^d/W$。因此

$$\operatorname{Spec}Z_{Fr}\otimes_{Z_\cap}Z_{HC}\cong G_0^d\times_{T^d/W}T/W.$$

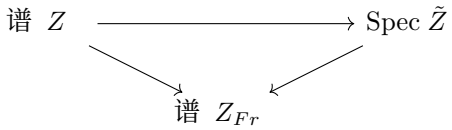
定理 10.30 （参见定理 6.4 [DCKP1]）。 自然映射 $Z_{Fr}\otimes_{Z_\cap}Z_{HC}\to Z$ 是同构。

证明。 证明与 [DCKP1，定理 64]。令 $\tilde Z:=Z_{Fr}\otimes_{Z_\cap}Z_{HC}$

步骤 *1*： 我们将证明代数 $Z_{Fr}\otimes_{Z_\cap}Z_{HC}$是正规的。根据第5.2.1节中的 P^* 构造， G^d 是一个根系的权格。特别地， W是单连通的。因此， T^d作为反射群作用于 $T^d\to T^d/W$。因此，商态射 T/W 是平坦的。另一方面， G 是光滑的，因为$T/W\to T^d/W$是单连通的。因此，态射 $G^d\times_{T^d/W}T/W\to G^d$是平坦的，因为它是光滑簇之间的有限主导态射。因此，态射 G^d是有限且平坦的。由于 $G^d\times_{T^d/W}T/W$是光滑的， $G_0^d\times_{T^d/W}T/W$是 Cohen-Macaulay 的，因而 $\tilde Z=\mathbb{C}[G_0^d\times_{T^d/W}T/W]$ 也是如此。特别是，根据 Serre 正规性判据，只需检验 $\tilde Z=\mathbb{C}[G_0^d\times_{T^d/W}T/W]$ 余维 1 正则。

由于 G^d 是单连通的，我们可以应用 [St，§3.8]中的结果。根据 [St，定理 1， §3.8]，$G_0^d = G_1 \cup G_2$，其中 G_1 是正则元素的开集，而 G_2 是余维至少为 2 的闭子簇。此外，根据 [St，定理 3， §3.8]，映射 $G_1 \to T^d/W$是光滑的，因此映射 $G_1 \times_{T^d/W} T/W \to T/W$是光滑的。同时， T/W是光滑的，因此 $G_1 \times_{T^d/W} T/W$是光滑的。另一方面， $\bullet^\ell$: $T/W \to T^d/W$是一个有限映射，因此$G_2 \times_{T^d/W} T/W$的余维至少为 2。由此，我们证明了 Z余维 1 正则。

步骤 *2*： 我们有如下图



谱 $\tilde{Z}$由以下原因可知是不可约的：映射 $G_0^d \times_{T^d/W} \to T/W$是平坦且支配的，纤维不可约，且基底 T/W 不可约。另一方面，两个对角映射都是有限且支配的。因此，水平映射是支配的，等价地，映射$\tilde{Z} \to Z$ 是单射。

步骤 3：可以看出 $\dim Q(Z_{Fr})$ $Q(\tilde{Z}) = \prod_{i=1}^r \ell_i$，因此根据命题 10.19，$\dim Q(Z_{Fr})$ $Q(\tilde{Z})Q(Z)$ $\dim Q(Z_{Fr})\tilde{}$。因此，映射 $Q(Z) \hookrightarrow Q(Z)$ 是一个同构，等价地，$\tilde{\vartheta}$: Spec$Z \to$Spec$Z$ 是双有理的。所以 ϑ 是到一个正规簇的有限双有理映射，因此 ϑ 是一个同构。证明完毕。□

本节余下内容将讨论引理中用到的技术结果10.41。这些结果与 [DCKP2 定理 52] 类似。不过，我们的设定略有不同，而且 同上中的证明相当简略。因此，为方便读者，我们给出详细证明。

命题 10.31 (参见定理 52 [DCKP2])。设 $Z^{(i)}$ 为注 *10.8* 中代数 $U_\epsilon^{(i)}$的中心。*10.8*。那么gr $Z^{(i)} = Z^{(i+1)}$。

证明。若能证明 gr$Z = Z_{\mathrm{gr}U_\epsilon^{ev}}$，命题便得证。但这只需证明命题 10.27 中的 $Z_{\mathrm{gr}U_\epsilon^{ev}}$ 的生成元 $K^{\pm 2\ell_i\omega_i}$、 $X_\alpha^{\ell_\alpha}$、 $Y_\alpha^{\ell_\alpha}$、 u_i 均包含在 gr$Z$ 中。另一方面， U_ϵ^{ev}(g) 中的元素 $K^{\pm 2\ell_i\omega_i}$、 $X_\alpha^{\ell_\alpha}$、 $Y_\alpha^{\ell_\alpha}$ 属于 Frobenius 中心 Z_{Fr}。此外，它们在 grU_ϵ^{ev} 中经符号映射所得的像分别为 $K^{\pm 2\ell_i\omega_i}$、 $X_\alpha^{\ell_\alpha}$、 $Y_\epsilon^{\ell_\alpha}$。因此， $K^{\pm 2\ell_i\omega_i}$、 $X_\alpha^{\ell_\alpha}$、 $Y_\alpha^{\ell_\alpha}$ 均包含在 gr$Z$ 中。故只剩下证明 $u_i \in$gr$Z$。这由下文的引理 10.32 得出。□

考虑基本权 ω_i 对应的韦伊模 $W_\epsilon(\omega_i)$。设 v_1、……、 v_t 是 $W_\epsilon(\omega_i)$ 的权基，满足若 wt(v_i) >wt(v_j)，则 $i > j$。特别地， v_1 是 $W_\epsilon(\omega_i)$ 的最低权向量，而 v_t 是 $W_\epsilon(\omega_i)$ 的最高权向量。元素 $c_{\omega_i} = \sum_j c_{v_j^*}$、 $K^{-2\rho v_j} \in O_\epsilon[G]$ 在 U_ϵ^{ev} 中的像属于 U_ϵ^{ev}(g) 的 Harish-Chandra 中心 Z_{HC}，见第 9.7 节。

引理 10.32. $\mathrm{gr}(c_{\omega_i}) = au_i$ 对于某个 $a \in \mathbb{C}^\times$。

为了证明引理10.32，我们需要一些技术结果。

引理 10.33。 设 $M \in$ 表示范畴$(U_\epsilon(\mathfrak{g}))$。设 $0 \neq m \in M_\lambda$。对每个 $\alpha \in \Delta_+$，令 r_α =最大$\{r | \tilde{E}_\alpha^{(r)} m \neq 0\}$ 且 s_α =最大$\{s | \tilde{F}_\alpha^{(s)} m \neq 0\}$。则 $s_\alpha - r_\alpha = (\lambda, \alpha^\vee)$，其中 $\alpha^\vee$ =2$\alpha/(\alpha, \alpha)$。

证明。 我们将证明一个类似的命题，其中 $\tilde{E}_\alpha^{(n)}, \tilde{F}_\alpha^{(n)}$被标准根生成元 $E_\alpha^{(n)}, F_\alpha^{(n)}$取代，因为我们想在有理的˙ ˙表示上使用 Lusztig 辫群作用，作用于表示范畴($\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$) ≅ 表示范畴($U_\epsilon(\mathfrak{g})$)。我们的量子群版本的结论将随之成立，因为 $\dot{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$的扭曲根生成元 $\tilde{E}_\alpha^{(n)}, \tilde{F}_\alpha^{(n)}$与标准根生成元仅相差形如 $K^?$ 的因子。

当 $\alpha = \alpha_i$ 对于某个单根 α_i时，该结论在 [APW，引理 1 中得到了证明。11]。注意，在 *loc. cit.* 中，他们是在局部化 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]_{\mathfrak{m}_0}$ 上证明该结果的，其中 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 在理想$\mathfrak{m}_0 = (p, v-1)$ 处。然而，他们的证明对任意环 R均成立，见注释 7.8。

一般而言， $\alpha = s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$，因此 $E_\alpha^{(n)} = T_{i_1} \dots T_{i_{k-1}}(E_{i_k}^{(n)})$ $F_\alpha^n = T_{i_1} \dots T_{i_{k-1}}(F_{i_k}^{(n)})$。˙在 Rep($\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$) [L5,§41.2]上存在相容的辫群作用。考虑 $m' = T_{i_{k-1}}^{-1} \dots T_{i_1}^{-1} m$，一个权为 $s_{i_{k-1}} \dots s_{i_1}(\lambda)$ 的权向量。那么

$$E_\alpha^{(n)} m = T_{i_1} \dots T_{i_{k-1}}(E_{i_k}^{(n)} m'), \qquad F_\alpha^{(n)} m = T_{i_1} \dots T_{i_{k-1}}(F_{i_k}^{(n)} m').$$

因此，一般 α 的情形可由 $\alpha = \alpha_i$ 为单根时的情形推出。 □

Recall the sets $\mathcal{I}_{\alpha_i} = \{\beta_{k_1}, \dots, \beta_{k_r}\}, \mathcal{I}_{\alpha_i^*} = \{\beta_{l_1}, \dots, \beta_{l_r}\}$. Let

$$\lambda_t = s_{\beta_{k_t}} \dots s_{\beta_{k_1}}(\omega_i), \qquad \lambda_t' = s_{\beta_{k_t}} \dots s_{\beta_{k_1}}(-\omega_i^*) \qquad \forall 1 \le t \le r.$$

在上文所述的 $W_\epsilon(\omega_i)$ 的权基 $v_1, \dots, v_m$ 中，令 $v_{\lambda_t}, v_{\lambda_t'}$ 分别为权为 λ_t, λ_t' 的唯一权向量。

引理 10.34. *(a)* $\tilde{E}_{\beta_j}^{(n)}(v_{\lambda_t}) = 0$ 对所有 $n \ge 1$ 和 $k_t < j \le k_{t+1}$ 均成立。

(b) 对所有 $n \ge 1$ 和 $l_t < j \le l_{t+1}$ 均有 $\tilde{F}_{\beta_j}^{(n)} v_{\lambda_t'} = 0$。

证明. 同样，我们将对标准根生成元 $E_\alpha^{(n)}, F_\alpha^{(n)}$ 证明这些结论，而不使用 $\tilde{E}_\alpha^{(n)}, \tilde{F}_\alpha^{(n)}$。

我们只证明 (a) 部分，因为 (b) 部分的证明类似。利用 Lusztig 的辫群作用，我们得到

$$E_{\beta_j}^{(n)} = T_{s_{i_1}} \dots T_{s_{i_{j-1}}}(E_{i_k}^{(n)}), \qquad v_{\lambda_t} = a T_{s_{i_1}} \dots T_{s_{i_{k_t}}}(v_{\omega_i}), \qquad a \in \mathbb{C}^\times.$$

这里我们使用 $\lambda_t = s_{i_1} \dots s_{i_{k_t}}(\omega_i)$（由引理 10.23）。因此

$$E_{\beta_j}^{(n)} v_{\lambda_t} = a T_{s_{i_1}} \dots T_{s_{i_{j-1}}}(E_{i_k}^{(n)} T_{s_{i_{j-1}}}^{-1} \dots T_{s_{i_k+1}}^{-1}(v_{\omega_i}).$$

由于对所有 $k_t < m < k_{t+1}$ 都有 $s_{i_m}(\omega_i) = \omega_i$，可知 $T_{s_{i_m}}^{-1}(v_{\omega_i})$ 是 $W_\epsilon(\omega_i)$ 中权为 w_i 的非零权向量。因此，

$$T_{s_{i_{j-1}}}^{-1} \dots T_{s_{i_k+1}}^{-1}(v_{\omega_i}) = b v_{\omega_i}, \qquad b \in \mathbb{C}^\times$$

因此

$$E_{\beta_j}^{(n)}(v_{\lambda_t}) = ab T_{s_{i_1}} \dots T_{s_{i_{j-1}}}(E_{i_k}^{(n)} v_{\omega_i}) = 0.$$

□

引理 *10.32* 的证明。 注意， $c_{\omega_i} = \sum_j \epsilon^{-(2\rho, \mathrm{wt}(v_j))} c_{v_j^*, v_j}$。我们将 c_{ω_j}视为$U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 的一个元素，这是通过嵌入 $O_\epsilon[G] \hookrightarrow U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 实现的。我们回顾 U_ϵ^{ev}在 (10.10)-(10.11) 中单项式的高度和次数定义，以及 $\mathbb{Z}_{\ge 0}^{2N+1}$ 上的 U_ϵ^{ev}-滤过。

我们需要证明， u_i 是 c_{ω_i} 的 $\mathbb{Z}_{\ge 0}^{2N+1}$ -滤过中的最高单项式。这由以下两个步骤得出。

步骤 *1*。 我们将证明，$c_{v_1^*, v_1}$ 最高次数单项式为

$$(\tilde{F}_{\beta_{l_s}} \dots \tilde{F}_{\beta_{l_1}} K^{\kappa(\omega_i + \omega_i^*)}) K^{-2\omega_i} (\tilde{E}_{\beta_{k_t}} \dots \tilde{E}_{\beta_{k_1}} K^{\gamma(\omega_i + \omega_i^*)}),$$

其等于 bu_i，其中 $b\in\mathbb{C}^\times$。该单项式的高度为 $2\omega_i+2\omega_i^*$。

由引理 9.1， $c_{v_1^*,\ v_1}$ 含有单项式

$$(\tilde{F}^r K^{\kappa(-\mathrm{wt}(\tilde{F}^r))})K^{-2\mathrm{wt}(\tilde{E}^r)-2\mathrm{wt}(v_1)}(\tilde{E}^k K^{\gamma(\mathrm{wt}(\tilde{E}^k))}) \tag{10.23}$$

当且仅当

$$v_1^*(\tilde{F}^{(k)}\tilde{E}^{(r)}v_1)\neq 0.$$

• 单项式（10.23）的高度为 $\mathrm{wt}(\tilde{E}^k)-\mathrm{wt}(\tilde{F}^r)=\mathrm{wt}(\tilde{E}^{(r)})-\mathrm{wt}(\tilde{F}^{(k)})$。只有当 $\tilde{E}^{(r)}v_1=av_t$ 和 $\tilde{F}^{(k)}v_t=bv_1$ 对某些$a,\ b\in\mathbb{C}^\times$成立时，这个高度才可能达到最大值（等于 $2\omega_i+2\omega_i^*$）。

• 为了跟踪（10.23）的次数，我们通过字典序将次数（$k_N,\ \ldots\ldots,\ k_1$）赋予 $\tilde{F}^{(k)}$，将次数（$r_N,\ \ldots\ldots,\ r_1$）赋予 $\tilde{E}^{(r)}$：$(k_N,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)<\cdots<(0,\ \ldots\ldots,\ 0,\ k_1)$ 和 $(r_N,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)<\cdots<(0,\ \ldots\ldots,\ 0,\ r_1)$

• 我们将证明，满足 $\tilde{E}(r)v_1=av_t$（其中某个~ ~$a\in\mathbb{C}^\times$）的最高次数单项式 $\tilde{E}(r)$ 是 $E_{\beta_{l_s}}\ldots E_{\beta_{l_1}}$。注意，$v_1=v_{-\omega_i^*}, v_t=v_{\omega_i}$。

对于 $1\leq j<l_1$, $\tilde{F}^{(n)}_{\beta_j}v_{-\omega_i^*}=0$ 对于所有 $n\geq 1$，且 $(-\omega_i^*,\beta_j^\vee)=0$。由引理 10.33, $\tilde{E}^{(n)}_{\beta_j}v_{-\omega_i^*}=0$ 对于所有 $n\geq 1$ 和 $1\leq j<l_1$。

此外， $\tilde{F}^{(n)}_{\beta_{l_1}}v_{-\omega_i^*}=0$ 对于所有 $n\geq 1$, 且 $(-\omega_i^*,\beta_{l_1}^\vee)=1$。由引理 10.33,

$$\begin{cases}\tilde{E}_{\beta_{l_1}}v_{-\omega_i^*}\neq 0\Rightarrow \tilde{E}_{\beta_{l_1}}v_{-\omega_i^*}=av_{\lambda_1'}, & a\neq 0\\ \tilde{E}^{(n)}_{\beta_{l_1}}v_{-\omega_i^*}=0 & \forall n\geq 2.\end{cases}$$

因此我们可以假设 $\tilde{E}^{(r)}=\tilde{E}^{(r_N)}_{\beta_N}\ldots\tilde{E}^{(r_{l_1}+1)}_{\beta_{l_1+1}}\tilde{E}_{\beta_{l_1}}$。

对于 $l_1<j<l_2$, $\tilde{F}^{(n)}_{\beta_j}v_{\lambda_1'}=0$, 以及 $(\lambda_1',\beta_j^\vee)=0$。由引理 10.33, $\tilde{E}^{(n)}_{\beta_j}\tilde{E}_{\beta_{l_1}}v_{-\omega_i^*}=0$。此外， $\tilde{E}^{(n)}_{\beta_{l_2}}v_{\lambda_1'}=0$ 对于 $n\geq 1$, 且 $(\lambda_1',\beta_{l_1}^\vee)=1$ 则由引理 10.33

$$\begin{cases}\tilde{E}_{\beta_{l_2}}\tilde{E}_{\beta_{l_1}}v_{-\omega_i^*}\neq 0\Rightarrow \tilde{E}_{\beta_{l_2}}\tilde{E}_{\beta_{l_1}}v_{-\omega_i^*}=bv_{\lambda_2'}, & b\neq 0\\ \tilde{E}^{(n)}_{\beta_{l_2}}\tilde{E}_{\beta_{l_1}}v_{-\omega_i^*}=0 & \forall n\geq 2\end{cases}$$

因此我们可以假设 $\tilde{E}^{(r)}=\tilde{E}^{(r_N)}_{\beta_N}\ldots\tilde{E}^{(r_{l_2}+1)}_{\beta_{l_2+1}}\tilde{E}_{\beta_{l_2}}\tilde{E}_{\beta_{l_1}}$。

~ ~继续进行，我们看到最高次数单项式为 $E_{\beta_{l_r}}\ldots E_{\beta_{l_1}}$。

• 类似地，最高次数单项式 $\tilde{F}(k)$ 满足 $\tilde{F}(k)v_t=bv_1$ 对某个 $b\in\mathbb{C}^\times$ 而言为~ ~ $F_{\beta_{k_t}}\ldots F_{\beta_{k_1}}$。

步骤 2. $c_{v_i^*,v_i}$ 中所有满足 $i>1$ 的单项式，其次数都低于 u_i。事实上，$c_{v_i^*,v_i}$ 中所有单项式的高度至多为 $2\omega_i-2\mathrm{wt}(v_i)<2\omega_i+2\omega_i^*$。□

10.6. $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ **在** 谱Z**上的阿祖马亚轨迹**。

回顾一下定理 10.14: 中引入的以下集合

$$\Omega_{U_\epsilon^{ev}}=\{p\in\text{谱}Z\mid\text{相应的半单表示是不可约的}\}.$$

由于 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 是一个完全素（即没有零因子）的诺特代数，根据 [BG2，命题 3。1],

$$\Omega_{U_\epsilon^{ev}}=\{p\in\mathrm{Spec}Z\mid U_\epsilon^{ev}\otimes_Z Z_{\mathfrak{m}_p}\text{ is Azumaya over }Z_{\mathfrak{m}_p}\}.$$

因此，$\Omega_{U_\epsilon^{ev}}$称为 阿祖马亚轨迹 的 $U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$。本节中，我们构造 $\Omega_{U_\epsilon^{ev}}$的一个较大的开子集。我们沿用 [DCKP2]中的论证。下面陈述两个关键引理。

对于滤过代数 A，令 $\mathrm{gr}A=\bigoplus_i A_{i+1}/A_i$ 表示伴随分次代数，$\mathscr{R}(A)=\bigoplus_i A_i t^i$ 表示 A 的 Rees 代数。

引理 10.35 (命题 1.4 [DCKP2]). 设 A 是一个交换滤过代数，并设$a_1,\dots,a_n\in A$满足 $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n$ 是 $\mathrm{gr}A$的一个正则序列。设 $I=(a_1,\dots,a_n)$ 是 A 由 $a_1,\dots,a_n$生成的理想。那么

a) $a_1,\dots,a_n$ 是 A中的一个正则序列。

{style id='1'>grI 的理想 $\mathrm{gr}A$ 由元素 $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n$生成。

引理 10.36 (引理 1.5 [DCKP2]). 设 A 是一个有限生成的代数，其上的基域为 $\mathbb{C}$，并配备了一个滤过，使得

- A, $\mathrm{gr}A$ 和 $\mathscr{R}(A)$都是中心单代数中迹封闭的序，并且
- 伴随分次A是一个与 A 次数相同的有限生成序。

令 Z_0 为 A 的中心子代数，使得 伴随分次Z_0 是 $\mathbb{C}$ 上的有限生成代数，且伴随分次A 是 伴随分次Z_0 上的有限生成模。令 I 为 Z_0 的一个理想，且伴随分次I 为 伴随分次Z_0 的关联分次理想。令 $\mathscr{O}$ （分别为 $\mathscr{O}_1$）表示 I （分别为 伴随分次I）在 谱Z_0 （分别为谱(伴随分次Z_0)）中的零点集。假设 $\mathscr{O}_1\cap\Omega^0_{\mathrm{gr}A}\neq 0$。则 $\mathscr{O}\cap\Omega^0_A\neq 0$。

注 10.37。 DCKP2 $\mathscr{R}(A)$ 中没有提到[DCKP2，引理 1。5]。但我们认为，这个条件很重要，因为根据定理$^0_{\mathscr{R}(A)}$ 10.14，集合 $\Omega\mathscr{R}(Z_0)$ 在谱10.14 中是开稠密的。$\Omega^0_{\mathscr{R}(A)}$ 的开性对于 [DCKP2，引理 1 的证明中的最后一个论证5]至关重要。

回顾 $\dot{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^d)$-等变同构 $Z_{Fr}\cong\mathbb{C}[G_0^d]$，见命题 6.10。对于任意 $\lambda\in P_+^*$，令 $V^d(\lambda)$ 表示 G^d 中最高权为 λ 的不可约表示。考虑态射

$$\pi_\lambda:\mathrm{Spec}Z_{Fr}\cong G_0^d\subset G^d\to GL(V^d(\lambda)).$$

Let

$$\phi_\lambda(u)=\mathrm{tr}_{V^d(\lambda)}(\pi_\lambda(u)),\qquad \forall\ p\in\mathrm{Spec}Z_{Fr}.$$

那么下面的引理是标准的

引理 10.38. *(a)* 元素 $\left\{\phi_\lambda|\lambda\in P_+^*\right\}$ 构成 $Z_\cap=\mathbb{C}[G_0^d]^{\dot{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}^d)}$ 的 $\mathbb{C}$-基。

(b) $Z_\cap$ 是由生成元 $\{\phi_{\omega_1^d},\dots,\phi_{w_r^d}\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上生成的多项式代数，其中 $\{\omega_i^d=\ell_i\omega_i\}_{1\le i\le r}$ 是 $\mathfrak{g}^d$ 的基本权。

集合 $\{\alpha_i^d=\ell_i\alpha_i\}_{1\le i\le r}$ 是 $\mathfrak{g}^d$的单根集合。回顾一下，G^d 的魏尔群 W^d 通过识别 $s_{\alpha_i}\mapsto s_{\alpha_i^d}$ 与 W 相同。回顾固定的约化表达式 $w_0=s_{i_1}\dots s_{i_N}$，因此我们有正根集合 $\{\beta_k^d=s_{i_1}\dots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}^d)=\ell_{i_k}\beta_k\}$。对于每个单根 α^d，令

$$I_{\alpha^d}:=\{1\le j\le N|s_{i_j}=s_{\alpha^d}\},\qquad \mathcal{I}_{\alpha^d}:=\{\beta_{k_1}^d,\dots,\beta_{k_t}^d|k_j\in I_{\alpha^d}\}. \tag{10.24}$$

不难看出 $I_{\alpha^d}=I_\alpha$，这是（10.14）中引入的集合。令

$$x_{\beta^d}=\tilde{E}_\beta^{\ell_\beta}K^{\ell_\beta\gamma(\beta)},\qquad y_{\beta^d}=\tilde{F}_\beta^{\ell_\beta}K^{\ell_\beta\kappa(\beta)},\qquad z_{\omega_i^d}=K^{2\ell_i\omega_i}.$$

其中，β 是 $\mathfrak{g}$ 的一个正根，$\beta^d=\ell_\beta\beta$ 是 $\mathfrak{g}^d$的正根。

引理 10.39 （参见引理 4.6 [DCKP2]）。回忆引理$\phi_{\omega_i^d}\in Z_{Fr}\cong\mathbb{C}[G_0^d]$ 中的元素*10.38.b*。则像 $\phi_{\omega_i^d}\in\mathrm{gr}Z_{Fr}$ 是

$$\overline{\phi}_{\omega_i^d}=z_{-\omega_i^d}x_{\beta_{k_r}^d}\dots x_{\beta_{k_1}^d}y_{\beta_{l_r}^d}\dots y_{\beta_{l_1}^d}, \tag{10.25}$$

此处 $\mathcal{I}_{\alpha_i^d}=\{\beta_{k_1}^d,\dots,\beta_{k_r}^d\}$ 以及 $\mathcal{I}_{-w_0(\alpha_i^d)}=\{\beta_{l_1}^d,\dots,\beta_{l_r}^d\}$ 如 （10.24）所示。

证明。证明与引理 10.32 的证明完全相同。我们只想作一点说明。在引理 10.32 的证明中，配对 $(\tilde{F}^k, \tilde{E}^{(r)})'$ 和 $(\tilde{F}^{(k)}, \tilde{E}^r)'$ 的正交性使我们能够通过判断 $f(\tilde{F}^{(r)}\tilde{E}^{(k)}v)$ 是否为零，来确定单项式 $\tilde{F}^k K^? \tilde{E}^r$ 是否出现在 $c_{f,v} \in U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})$ 中。在本引理中，我们使用了 $Z_{Fr}^{\leq} \times \dot{U}^{>}(\mathfrak{g}^d) \to \mathbb{C}$ 中的配对 $(\tilde{F}^k, e^{(r)})'$ 与引理 6.6 中 $\dot{U}^{<}(\mathfrak{g}^d) \times Z_{Fr}^{\geq} \to \mathbb{C}$ 中的配对 $(f^{(k)}\tilde{E}^r)'$ 的正交性。□

现在我们将构造所承诺的 $\Omega^{U_\epsilon^{ev}}$ 的开子集。考虑投影

$$\mathsf{p}_1 : \operatorname{Spec} Z \cong G_0^d \times_{T^d/W} T/W \to G_0^d \hookrightarrow G^d.$$

令 $G^{d,reg}$ 为 G^d 中正则元素的集合。

定理 10.40 (参见定理 5.1 [DCKP2])**.** 集合 $\Omega^{U_\epsilon^{ev}}$ 包含开集 $\mathsf{p}_1^{-1}(G^{d,reg})$。

在证明此定理之前，我们需要说明引理 10.36 可应用于备注 $U_\epsilon^{(i)}$ 10.8 中的滤过代数链 10.8。为此，只需证明 $\mathscr{R}(U^{(i)})$ 对所有 $0 \leq i \leq 2N$ 在迹运算下封闭。根据备注 10.13，只需证明

引理 10.41. 对于所有 i，*Rees* 代数 $\mathscr{R}(Z^{(i)})$ 都是正规的。

证明. 由于 $\mathscr{R}(Z^{(i)})/(t) = \operatorname{gr} Z^{(i)} \cong Z^{(i+1)}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的有限生成代数，$\mathscr{R}(Z^{(i)})$ 是 $\mathbb{C}$ 上的有限生成分次代数。

$\mathscr{R}(Z^{(i)})$ 在 $0 \in \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[t])$ 处的纤维是 $\operatorname{gr} Z^{(i)} \cong Z^{(i+1)}$，而在 $a \in \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])$ 处的纤维是 $Z^{(i)}$。由于根据命题 10.10，$U(i)_\epsilon$ 和 $U_\epsilon^{(i+1)}$ 都是整闭的，因此 $Z^{(i)}$ 和 $Z^{(i+1)}$ 都是正规的。因此，$\mathscr{R}(Z^{(i)})$ 在 $\mathbb{C}[t]$ 上的所有纤维都是正规的。另一方面，$\mathscr{R}(Z^{(i)})$ 在 $\mathbb{C}[t]$ 上忠实平坦，且 $\mathbb{C}[t]$ 是正规的。因此，根据 [马萨诸塞州，推论 22.E]，$\mathscr{R}(Z^{(i)})$ 是正规的。□

定理 10.40 的证明遵循 [DCKP2中定理 5 的证明策略。1]不过，部分细节有所修改。

- 在 同上文献中，他们使用了“迹过滤”的概念，见 [DCKP2中定义 5。1], 为使用引理 10.36（ [DCKP2中引理 1。5]）。然而，他们并未验证在 [DCKP2中命题 4。2] 所构造的 De Concini-Kac 形式上的滤过确实是迹过滤；事实上，这似乎很难验证。这里我们使用引理10.41来应用引理 10.36。
- 证明 [DCKP2中定理 5 时用到的一些结果1] 在我们的设定中需要作出调整或采用不同的证明，包括命题10.25 和引理 10.39等。

因此，为方便读者，我们在此给出定理 10.40 的证明。

证明。步骤 *1*：令 $\chi_0 \colon \operatorname{Irr}(U_\epsilon^{ev}(\mathfrak{g})) \to \operatorname{Spec} Z_{Fr}$ 为映射，它将 U_ϵ^{ev} 的不可约表示映射到其中心特征在 Z_{Fr} 上的限制。回顾

$$\Omega^0_{U_\epsilon^{ev}} := \{p \in \operatorname{Spec} Z_{Fr} \mid \chi_0^{-1}(p) \text{ 的所有表示都具有最大维数}\}.$$

那么只需证明 $G^{d,reg}_{\circ} := G_0^d \cap G^{d,reg} \subset \Omega^0_{U_\epsilon^{ev}}$。

令 $\mathscr{O}$ 为 G^d 中的一个正则元素共轭类，$\bar{\mathscr{O}}$ 为 $\mathscr{O}$ 在 G^d 中的扎里斯基闭包。因此，我们需要证明 $\mathscr{O} \cap G_0^d \subset \Omega^0_{U_\epsilon^{ev}}$。根据命题 10.15，$\Omega^0_{U_\epsilon^{ev}}$ 是辛叶的并。$\operatorname{Spec} Z_{Fr} = G_0^d$ 的辛叶恰好是 G^d 的共轭类与 G_0^d 的交集，根据命题 10.3。因此，只需证明 $\mathscr{O} \cap \Omega^0_{U_\epsilon^{ev}} \neq 0$。由于 $\Omega^0_{U_\epsilon^{ev}}$ 在 G_0^d 中是开集，接下来只需证明 $\bar{\mathscr{O}} \cap \Omega^0_{U_\epsilon^{ev}} \neq 0$。

步骤 *2*：众所周知，$\bar{\mathscr{O}} \subset G^d$ 由以下方程给出

$$\operatorname{tr}_{V^d(\omega_i^d)}(g) = c_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \text{ and } g \in G^d.$$

¯因此，集合 $\mathscr{O}\cap$ 谱Z_{Fr} 由以下方程给出

$$\phi_{\omega_i^d}=c_i,\qquad i=1,\dots,n.$$

我们希望将引理 10.36 应用于理想 I，该理想属于 Z_{Fr} 并由 $\{\phi_{\omega_i^d}-c_i\}$生成。首先，我们需要证明 Remark 10.8 中引入的每个代数 $U^{(j)}$ 的次数为$d=\prod_{\alpha\in\Delta_+}\ell_\alpha$。由于次数在每一步中都只能降低，因此只需证明 d是 $U_{(2N)}=\mathrm{gr}U_\epsilon^{ev}$的次数，而这由命题 10.16得出。利用引理 10.36进行简单归纳，我们只需证明：如果 $\mathrm{gr}I$ 是 I 在 $\mathrm{gr}Z_{Fr}$中的关联分次理想，且 $\mathscr{O}_1$ 是其零点集，那么

$$\mathscr{O}_1\cap\Omega^0_{\mathrm{gr}U_\epsilon^{ev}}\neq 0 \tag{10.26}$$

步骤 3：式 $\phi_{\omega_i^d}$、$i=1$、……、r 在（10.25）中构成 $\mathrm{gr}Z_{Fr}$ 的正则序列，因为它们是由互不相交的不定元集合构成的单项式。因此，根据引理10.35，$\mathrm{gr}I$ 由 $\{\phi_{\omega_i^d},i=1,\dots,r\}$生成。所以 $\mathscr{O}_1$ 是以下子簇的并集。对于每个单项式 $\phi_{\omega_i^d}$，我们从 $\{x_{\beta^d_{k_r}},\dots,x_{\beta^d_{k_1}},y_{\beta^d_{l_r}},\dots y_{\beta^d_{l_1}}\}$中选取一个因子。这些相关子簇就是这些因子的零点集。因此，只需证明其中一个子簇与 $\Omega^0_{U_\epsilon^{ev}}$ 有非平凡交集。

让我们回顾集合 $\mathcal{I}_{\alpha_i}$ 并选取 $\beta_{m_i}\in\mathcal{I}_{\alpha_i}$。如（10.15）中所示，令

$$S=\{K^{2\omega_1},\dots,K^{2\omega_r},Y_{\beta_i},X_{\beta_i}\}/\{Y_{\beta_{m_1}},\dots,Y_{\beta_{m_r}}\}.$$

那么 $Y_{\beta_{m_i}}^{\ell_{\beta_{m_i}}}\in\mathrm{gr}Z_{Fr}$。由方程 $Y_{\beta_{m_i}}^{\ell_{\beta_{m_i}}}=0$定义的闭子簇 $\mathscr{Y}$，$i=1$，……，r 是 $\mathscr{O}_1$ 的一个分支（注意 $y_{\beta^d_{m_i}}=Y_{\beta_{m_i}}^{\ell_{\beta_{m_i}}}K^{\ell_{\beta_{m_i}}\gamma\,(\beta_{m_i})}$ 和 $K^{\ell_{\beta_{m_i}}\gamma\,(\beta_{m_i})}$ 在 $\mathrm{gr}Z_{Fr}$中可逆）。根据命题 10.25，我们可以应用引理 10.22 得到 $\mathscr{Y}\cap\Omega^0_{\mathrm{gr}U_\epsilon^{ev}}\neq 0$。因此，（10.26）成立。证明完毕。□

Appendix A. Equivariant modules

本附录旨在确立具有兼容的霍普夫代数作用的代数上的（左、右或双边）模的基本性质。

A.1. H-不变量。 设 H 是域 k上的 Hopf 代数。对于任意左 H-模 V，V 的H-不变部分 定义为

$$V^H=\left\{v\in V\,|\,hv=\varepsilon(h)v\text{ for all }h\in H\right\}.$$

对于任意左 H-模 M和 N，$H\otimes H$在 $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ 上有以下两种作用：

$$(x\otimes y)(m)=xf(S(y)m),$$
$$(x\otimes y)(m)=yf(S^{-1}(x)m).$$

将这些作用与余乘法 $\Delta\colon H\to H\otimes H$复合，可得 H在 $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ 上的两种左作用，分别记为 $(H,\cdot_1)$ 和 $(H,\cdot_2)$。

引理 A.1。 $\mathrm{Hom}_H(M,N)=\mathrm{Hom}_k(M,N)_{(H,\cdot_1)}=\mathrm{Hom}_k(M,N)_{(H,\cdot_2)}$，其中上标表示我们相对于相应的 H作用取 H-不变量。

证明是标准的，参见 [J1，§3.10]。

A.2. H-**等变** A-**模**。 现在我们还假设 A 是 k 上的一个代数。我们从标准定义开始：

定义 A.2。 H-模代数 A （假设其为含单位元 1_A 的幺代数）是一个代数A，带有左 H-模结构，使得

$$h(1_A) = \varepsilon(h)1_A, \qquad h(ab) = \sum (h_{(1)}a)(h_{(2)}b) \qquad \forall\, h \in H,\, a, b \in A\,.$$

在此 设置中，自然会引入 H-等变左/右 A-模的范畴 ：

定义 A.3。 设 A 是一个 H-模代数。
(a) 一个 H-等变左 A-模 M 是一个左 A-模 M，并带有左 H-模结构，使得

$$h(am) = \sum (h_{(1)}a)(h_{(2)}m) \qquad \forall\, h \in H\,,\, a \in A,\, m \in M\,. \tag{A.1}$$

令 A-Rmod^H 表示 H-等变左 A-模构成的范畴。态射 η: $M \to N$ 在 A-Lmod^H 中是左 A-模的态射，同时也是左 H-模的态射。
(b) 一个 H-等变右 A-模 M 是一个右 A-模 M，并带有左 H-模结构，使得

$$h(mb) = \sum (h_{(1)}m)(h_{(2)}b) \qquad \forall\, h \in H,\, b \in A,\, m \in M\,. \tag{A.2}$$

令 A-Lmod^H 表示 H-等变右 A-模构成的范畴。态射 η: $M \to N$ 在 A-Rmod^H 中是右 A-模的态射，同时也是左 H-模的态射。
(c) 一个 H-等变 A-双模 M 是一个 A-双模 M，并带有左 H-模结构，使得

$$h(amb) = \sum (h_{(1)}a)(h_{(2)}m)(h_{(3)}b) \qquad \forall\, h \in H,\, a, b \in A,\, m \in M\,. \tag{A.3}$$

令 A-Bimod^H 表示 H-等变 A-双模构成的范畴。态射 η: $M \to N$ 在A-Bimod^H 中是 A-双模的态射，同时也是左 H-模的态射。

我们注意到，条件（A.3）等价于（A.1）和（A.2）的组合 .

引理 A.4。 *(a)* 对任意 $M, N \in A$-Rmod^H，空间 $\mathrm{Hom}_{A\text{-Rmod}}(M, N)$ 通过以下方式具有左 H-模的自然结构：

$$(hf)(m) = \sum h_{(1)} f(S(h_{(2)})m) \tag{A.4}$$

对于 $h \in H, f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Rmod}}(M, N)$ $m \in M$。此外，我们有

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-Rmod}^H}(M, N) = \mathrm{Hom}_{A\text{-Rmod}}(M, N)^{(H,\cdot_1)}\,.$$

(b) 对任意 $M \in A$-*Bimod*^{H} 和 $N \in A$-*Rmod*^{H}，空间 *Hom*$_{A\text{-Rmod}}(M, N)$ 自然地是 A-*Rmod*^{H} 中的一个对象，其左 H-模结构如（*A.4*）所示，右 A-模结构由 $(fa)(m) = f(am)$ 定义，对所有 $a \in A, f \in$*Hom*$_{A\text{-Rmod}}(M, N)$ $m \in M$ 均成立。
(c) 对任意 $M \in A$-*Rmod*^{H} 和 $N \in A$-*Bimod*^{H}，空间 *Hom*$_{A\text{-Rmod}}(M, N)$ 自然地是 A-*Lmod*^{H} 中的一个对象，其左 H-模结构如（*A.4*）所示，左 A-模结构由 $(af)(m) = af(m)$ 定义，对所有 $a \in A, f \in$*Hom*$_{A\text{-Rmod}}(M, N)$ $m \in M$ 均成立。

(d) 对于任意 $M, N \in A$-*Bimod*^{H}，空间 *Hom*$_{A\text{-Rmod}}(M, N)$ 自然是 A-*Bimod*^{H} 中的一个对象，其左 H-模结构如 *(A.4)* 所示，而 A-双模结构由 $(afb)(m) = af(bm)$ 定义，其中 $a, b \in A, f \in$*Hom*$_{A\text{-Rmod}}(M, N)$ $m \in M$。

证明。 这是显而易见的。 □

注 A.5。 (a) 若 A 是一个 H模代数，则 A^{op} 是一个具有相同作用的 H^{cop}模代数，而 $H^{\mathrm{cop}} \simeq H$ 作为代数。

(b) 若 $M, N \in A\text{-Lmod}^H$，则 (A.4) 一般不会赋予 $\mathrm{Hom}_{A\text{-Lmod}}(M,N)$ 一个 H-作用。不过，借助 (a)，我们注意到任意 $M \in A\text{-Lmod}^H$ 都自然是 $A^{\mathrm{op}}\text{-Rmod}^{H^{\mathrm{cop}}}$ 中的一个对象，其中 M 上的左 H^{cop}- 模结构保持不变，而右 A^{op}- 模结构与左 A- 模结构一致。因此，我们有 $\mathrm{Hom}_{A\text{-Lmod}}(M,N) = \mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}\text{-Rmod}}(M,N)$。根据引理 A.4(a)，右端具有一个左 H^{cop}-作用，其定义为 $(hf)(m) = \sum h_{(2)} f(S^{-1}(h_{(1)})m)$，其中 $h \in H^{\mathrm{cop}}, f \in \mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}\text{-Rmod}}(M,N)$ $m \in M$。这意味着对于任意 $M, N \in A\text{-Lmod}^H$，$\mathrm{Hom}_k(M,N)$ 上都有一个左 H-作用，其定义为

$$(hf)(m) = \sum h_{(2)} f(S^{-1}(h_{(1)})m) \qquad \forall h \in H,\ f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Lmod}}(M,N),\ m \in M\,. \tag{A.5}$$

以下结果由引理 A.4 和注记A.5推出

引理 A.6。 *(a)* 对任意 M， $N \in A\text{-Lmod}^H$，空间 $\mathrm{Hom}_{A\text{-Lmod}}(M,\ N)$ 带有左 H-模的自然结构，其定义为 (A.5)。此外，我们有

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-Lmod}^H}(M,N) = \mathrm{Hom}_{A\text{-Lmod}}(M,N)^{(H,\cdot_2)}\,.$$

(b) 对任意 $M \in A\text{-}$*Bimod*^{H} 和 $N \in A\text{-}$*Lmod*^{H}，空间 *Hom*$_{A\text{-Lmod}}(M,N)$ 自然是 $A\text{-}$*Lmod*^{H} 中的一个对象，其左 H-模结构如 *(A.5)* 所示，而左 A-模结构定义为 $(af)(m) = f(ma)$，其中 $a \in A, f \in$ *Hom*$_{A\text{-Lmod}}(M,N)$ $m \in M$。

(c) 对任意 $M \in A\text{-}$*Lmod*^{H} 和 $N \in A\text{-}$*Bimod*^{H}，空间 *Hom*$_{A\text{-Lmod}}(M,N)$ 自然是 $A\text{-}$*Rmod*^{H} 中的一个对象，其左 H-模结构如 *(A.5)* 所示，而右 A-模结构定义为 $(fa)(m) = f(m)a$，其中 $a \in A$, $f \in$ *Hom*$_{A\text{-Lmod}}(M,N)$ $m \in M$。

(d) 对于任意 $M, N \in A\text{-}$*Bimod*^{H}，空间 *Hom*$_{A\text{-Lmod}}(M,N)$ 自然是一个 $A\text{-}$*Bimod*^{H} 中的对象，其左 H-模结构如 *(A.5)* 所示，而 A-双模结构定义为 $(afb)(m) = f(ma)b$，其中 $a, b \in A, f \in$ *Hom*$_{A\text{-Lmod}}(M,N)$ $m \in M$。

在下一个引理中，我们将通过 ($_{A\text{-Rmod}}(\cdot,\cdot)$ 给 Hom 配备左 H-作用，具体方式见 (A.4)；而 $\mathrm{Hom}_{A\text{-Lmod}}(\cdot,\cdot)$ 将通过 (H-作用，具体方式见 (A.5)。

引理 A.7 (张量-同态伴随)。 *(a)* 对于任意 $M, N \in A\text{-Rmod}^H$ 和 $P \in A\text{-Bimod}^H$，有左 H-模之间的一个自然同构：

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-Rmod}}(N \otimes_A P, M) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-Rmod}}(N, \mathrm{Hom}_{A\text{-Rmod}}(P,M))\,. \tag{A.6}$$

这里，$\mathrm{Hom}_{A\text{-Rmod}}(P,M) \in A\text{-Rmod}^H$，根据引理 *A.4(b)*；而 $N \otimes_A P$自然地属于 $A\text{-Rmod}^H$。

(b) 设 $P, M \in A\text{-Rmod}^H$ 满足： P 是有限生成射影右 A-模。注意， A 自然是 $A\text{-Bimod}^H$ 中的一个对象。因此，我们有一个左 H-模的同构：

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-Rmod}}(P,M) \simeq M \otimes_A \mathrm{Hom}_{A\text{-Rmod}}(P,A)\,. \tag{A.7}$$

如果进一步假设 $P \in A\text{-Bimod}^H$，那么 (A.7) 是 $A\text{-Rmod}^H$中的一个同构 .

(c) 对任意 $P \in A\text{-Lmod}^H$， $\mathrm{Hom}_{A\text{-Lmod}}(P,A)$ 根据引理 $A\text{-Rmod}^H$ *by Lemma A.5(c)*，是一个对象；而 $\mathrm{Hom}_{A\text{-Rmod}}(\mathrm{Hom}_{A\text{-Lmod}}(P,A)\ A))$ 根据引理 $A\text{-Lmod}^H$ *by Lemma A.4(c)*，是一个对象。定义映射

$$\pi\colon P \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{-Rmod}}(\mathrm{Hom}_{A\text{-Lmod}}(P,A),A)) \tag{A.8}$$

经由 $\pi(p)(f) = f(p)$对于 $p \in P, f \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Lmod}}(P,A)$。那么 π 是 $A\text{-Lmod}^H$ 中的一个态射。此外，如果 P 是有限生成射影左 A-模，那么 π 是一个同构。

证明。 证明很直接。 □

References

[AP] H. Andersen, J. Paradowski, *Fusion categories arising from semisimple Lie algebras*, Comm. Math. Phys. 169 (1995), no. 3, 563–588. [APW] *Representations of quantum algebras* **104** 1991 1, H. 1 59 Andersen, P. Polo, K. Wen, , Invent. Math. ( ), no. – .[AW] H. Andersen, K. Wen, *Representations of quantum algebras. The mixed case*, J. Reine Angew. Math. 427 (1992), 35–50. [B] J. Beck, *Representations of quantum groups at even roots of unity*, J. Algebra 167 (1994), no. 1, 29–56. [BBJ] *Integrating quantum groups over surfaces* **11** 2018 4, D. 874 917 Ben-Zvi, A. Brochier, D. Jordan, , J. Topol. ( ), no. – .[BG1] K. Brown, I. Gordon, *Poisson orders, symplectic reflection algebras and representation theory*, J. Reine Angew. Math. 559 (2003), 193–216. [BG2] K. Brown, K. Goodearl, *Homological aspects of Noetherian PI Hopf algebras and irreducible modules of maximal dimension* **198** 1997 1, 240 265 , J. Algebra ( ), no. – . [CP] V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups*, 剑桥大学出版社，剑桥（1994）。[DCK] C. De Concini, V. Kac, *Representations of quantum groups at roots of* 1, 算子代数、酉表示、包络代数与不变理论（巴黎，1989），471–506，数学进展丛书第92卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，MA（1990）。[DCKP 1] *Quantum coadjoint action* **5** 1992 1, C. 151 189 De Concini, V. Kac, C. Procesi, , J. Amer. Math. Soc. ( ), no. – .[DCKP2] C. De Concini, V. Kac, C. Procesi, *Some remarkable degenerations of quantum groups*, Comm. Math. Phys. 157 (1993), no. 2, 405–427. [DP] C. De Concini, C. Procesi, *Quantum group*, D-模、表示论与量子群（威尼斯，1992），31–140。数学讲义第1565卷，施普林格出版社，柏林（1993）。[Dr] V. Drinfeld, *Quantum groups*, 国际数学家大会论文集，第1–2卷（加利福尼亚州伯克利，1986），798–820。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（1987）。[GJV] S. Gunningham, D. Jordan, M. Vazirani, *Quantum Character Theory*, arχiv:2309.03117. [H] J. Humphreys, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category* $\mathcal{O}$, 数学研究生丛书第94卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（2008）。[J1] J. Jantzen, *Lectures on quantum groups*, 数学研究生丛书，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（1996）。[J2] J. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, 数学调查与专著第107卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（2003）。[Ji] M. Jimbo, *A q-difference analogue of* $U(\mathfrak{g})$ *and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. 10 (1985), no. 1, 63–69. [Jo] D. Jordan, *Quantum D-modules, elliptic braid groups, and double affine Hecke algebras*, Int. Math. Res. Not. (2009), no. 11, 2081–2105. [JL1] A. Joseph, G. Letzter, *Local finiteness of the adjoint action for quantized enveloping algebras*, J. Algebra 153 (1992), no. 2, 289–318. [JL2] A. Joseph, G. Letzter, *Separation of variables for quantized enveloping algebras*, Amer. J. Math. 116 (1994), no. 1, 127–177. [JL3] A. Joseph, G. Letzter, *Rosso's form and quantized Kac Moody algebras* **222** 1996 4, , 543 571 Math. Z. ( ), no. – .[Ka] C. Kassel, *Quantum groups*, 数学研究生教材第155卷，施普林格出版社，纽约（1995）。[Ko1] B. Kostant, *Groups over* $\mathbb{Z}$, 代数群与离散子群（纯数学专题讨论会论文集，科罗拉多州博尔德，1965），90–98。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（1966）。[Ko2] B. Kostant, *On Whittaker vectors and representation theory*, Invent. Math. 48 (1978), no. 2, 101–184. [KS] S. Kolb, J. Stokman, *Reflection equation algebras, coideal subalgebras, and their centres*, Selecta Math. (N.S.) 15 (2009), no. 4, 621–664. [KSc] A. Klimyk, K. Schmudgen, *Quantum groups and their representations*, 物理学文本与专著丛书，施普林格出版社，柏林（1997）。[L1] G. Lusztig, *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv. Math. 70 (1988), no. 2, 237–249. [L2] G. Lusztig, *Modular representations and quantum groups*, 经典群及相关主题（北京，1987），59–77，当代数学第82卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（1989）。[L3] G. Lusztig, *Quantum groups at roots of* 1, Geom. Dedicata 35 (1990), no. 1-3, 89–113.

[L4] G. Lusztig, *Finite-dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebra*, 美国数学会杂志 3 (1990), 第 1 期, 257–296。[L5] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progr. Math. 110, Birkh¨auser Boston, Inc., 波士顿, 马萨诸塞州 (1993)。[Ma] H. Matsumura, *Commutative algebra*, Math. Lecture Note Ser. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., 雷丁, 马萨诸塞州 (1980)。[Mo] S. Montgomery, *Hopf algebras and their action on rings*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 82, 由数学科学会议委员会出版, 华盛顿哥伦比亚特区, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州 (1993)。[N] C. Negron, *Revisiting the Steinberg representation at arbitrary roots of* 1, Represent. Theory 29 (2025), 394–442。[Pa] J. Paradowski, *Filtrations of modules over the quantum algebra*, 《代数群及其推广：量子与无限维方法》（宾夕法尼亚州大学公园市, 1991）, 93–108, Proc. Sympos. Pure Math., 56, Part 2, Amer. Math. Soc., 普罗维登斯, 罗得岛州 (1994)。[Pr] A. Premet, *Irreducible representations of Lie algebras of reductive groups and the Kac-Weisfeiler conjecture* **121** 1995 1, 79 117 ,

Invent. Math. ( ), 第 – 期。[R] N. Reshetikhin, *Multiparameter quantum groups and twisted quasitriangular Hopf algebras*, Lett. Math. Phys. 20 (1990), 第 4 期, 331–335。[Re] I. Reiner, *Maximal orders*, London Math. Soc. Monogr. 5, Academic Press, 伦敦-纽约 (1975)。[RH] S. Ryom-Hansen, *A q-analogue of Kempf's vanishing theorem*, 莫斯科数学杂志 3 (2003), 第 1 期, 173–187。[S1] A. Sevostyanov, *Regular nilpotent elements and quantum groups* **204** 1999 1, , 1 16

Comm. Math. Phys. ( ), 第 – 期。[S2] A. Sevostyanov, *Quantum deformation of Whittaker modules and the Toda lattice*, 杜克数学杂志 105 (2000), 第 2 期, 211–238。[St] R. Steinberg, *Conjugacy classes in algebraic groups*, Lecture Notes in Math. 366, 施普林格出版社, 柏林-纽约 (1974)。[SV] P. Shan, E. Vasserot, *Heisenberg algebras and rational double affine Hecke algebras*, 美国数学会杂志 25 (2012), 第 4 期, 959–1031。[T1] T. Tanisaki, *Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R-matrices for quantum algebras*, 《无限分析》, A、B 部（京都, 1991）, 941–961, Adv. Ser. Math. Phys. 16, World Sci. Publ., 里弗埃奇, 新泽西州 (1992)。[T2] T. Tanisaki, *The center of a quantized enveloping algebra at an even root of unity*, 大阪数学杂志 53 (2016), 第 1 期, 47–81。[V] F. Veldkamp, *The center of the universal enveloping algebra of a Lie algebra in characteristic p*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 5 (1972), 217–240。