arXiv:2601.06739v1 [math.AC] 11 Jan 2026

与大型图相关的随机单项式理想的概率

˜DANIEL MUNOZ GEORGE、HUMBERTOMUNOZ-GEORGE、˜和 KEVIN MUNOZ GEORGE

Abstract. 受 Erd˝os–R´enyi 模型的启发，我们提出了一种由图的边和覆盖生成的自由平方随机单项式理想的新模型。这使我们能够研究正规性的条件，并获得渐近结果。我们还探讨了其他不变量的渐近结果，例如 Krull 维数（对此我们获得了阈值函数）、正则性和 v-数。

1. Introduction

在数学中，有时理解复杂对象的一种方式是将随机性作为工具，用于研究该对象的平均行为。概率领域已有大量文献，这些研究已证明概率方法对于研究复杂对象十分有效。举几个例子，概率方法已被应用于大型结构 [1, 6]以及对大型随机矩阵的研究，以理解其特征值分布 [30, 24, 22, 20, 19, 7, 3]。在代数中，概率也被用于研究诸如随机群中的随机游走 [16, 5, 32] 和随机置换 [21, 2]等对象。在组合学中，概率已被用于研究大型随机图 [13, 12]。最后，关于随机单项式理想的研究也已有一小部分文献 [9, 25, 4, 23]。

单项式理想是交换代数中研究最为广泛的理想类别之一，这不仅是因为它们具有丰富的内在代数结构，还因为它们与组合学、几何学和优化之间存在深刻而富有成果的联系。通过组合数据研究代数不变量已成为一个核心主题。特别是，Herzog–Hibi [17]和 R. H. Villarreal [28] 所著的经典参考书凸显了这样一点：在处理单项式理想时，深度、维数、

[1]第一作者获得香港研究资助局资助项目16303922、国家自然科学基金项目NSFC12222121和国家自然科学基金项目NSFC12271475的资助。[2]第二作者获得墨西哥CONACYT奖学金资助。1

正则性和正规性通常都可以用纯粹的组合或多面体术语来解释。

在这一框架下，与给定图（或更一般地，与一个团）相关的单项式理想有两种重要类型：边理想 和覆盖理想。它们是将无平方单项式理想与图论联系起来的两种基本构造。给定一个简单图，其边理想由图中各边对应的所有二次无平方单项式生成，而覆盖理想则由对应于其极小顶点覆盖的单项式生成。这两类理想互为对偶且密切相关，已得到广泛研究，因为它们明确反映了底层图的组合结构。这一视角催生了大量文献，将正规性、无混合性、正则性以及符号幂与普通幂的性质等代数性质，与经典图论不变量联系起来。关于单项式理想一般理论的文献也日益增多，尤其是关于边理想和覆盖理想的研究 [11, 17, 28]。

受 De Loera 等人 [9] 的工作以及 Erd˝os–R´enyi 模型的启发，我们提出了一种生成随机单项式理想的新模型，这些理想由图的边和覆盖生成。前一种情形中，我们得到由二次单项式生成的理想；后一种情形中，生成元的次数则可以任意。特别地，在前一种设定下，我们能够研究理想的正规性。值得注意的是，此前尚未有人对此进行研究。这可能是因为缺乏适用于任意单项式理想的一般正规性判据；然而，对于由图的边生成的无平方单项式理想，其正规性判据已得到广泛研究[10, 15]。除了正规性之外，我们还研究理想的 Krull 维数。在我们的模型中，Krull 维数与图的独立数相同。图的独立数是最大独立顶点集的大小，也就是说，该集合中的顶点彼此不相连。基于这一事实，我们的代数问题转化为随机图问题。我们确定了 Erd˝os–R´enyi 图中，具有一个含 t 个顶点的空图作为诱导子图这一性质的阈值函数。这使我们能够找到 Krull 维数大于或等于 t 这一性质的阈值函数。这里 t 是任意正整数。最后，我们利用主要定理推导出该理想的正则性和 v-数的渐近结果。

2. Model and results

我们先介绍所用的模型。设 K 为一个域，$S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 为 n 个变量上的多项式环。我们考虑随机图 $\mathcal{G} = (V, E)$，其顶点以变量$V = \{x_1, \ldots, x_n\}$为索引，并且每条边 $\{x_i, x_j\}$ 以概率 p被选取，其中 $i \neq j$。随机图 $\mathcal{G}$ 的每个实现 $G = (V, E)$都会导出两个理想：$I(G)$ 和 $I_c(G)$，分别称为边理想和覆盖理想，定义如下。

(1) $I(G)$ 是由单项式$x_i x_j$（对每个 $\{x_i, x_j\} \in E$）生成的无平方单项式理想。(2) $I_c(G)$ 是由单项式 $x_{i_1} \cdots x_{i_r}$ 生成的无平方单项式理想，其中 $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\}$ 是该图的极小顶点覆盖。

$I(G)$ 和 $I_c(G)$ 的更详细定义及示例见定义 3.1。

根据上述定义，理想 $I(\mathcal{G})$ 和 $I_c(\mathcal{G})$ 是 S的随机理想。由于我们的模型受到 Erd˝os–R´enyi 模型的启发，我们称这些理想服从 Erd˝os–R´enyi 分布，记作 $I(\mathcal{G}) \sim IER(n, p)$ 和 $I_c(\mathcal{G}) \sim IER_c(n, p)$。

注意，若 $B \subset S$ 是二次单项式理想的一个子集，例如$B = \{x_{i_k} x_{i_l} : 1 \leq i_k, i_l \leq n\}$ 那么

$$\mathbb{P}(I(\mathcal{G}) = (B)) = p^{|B|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|B|},$$

其中 (B) 表示由 B生成的理想。

2.1. 结果。 我们的结果描述了某个性质的概率如何随参数 p 和 $q =: 1 - p$ 变化。

（*A*）正规性。设 R 是一个环，I 是 R的一个理想，元素$z \in R$ 关于 I 整 当且仅当 z 满足一个方程

$$z^l + a_1 z^{l-1} + \ldots + a_{l-1} z + a_l = 0, \qquad a_i \in I^i.$$

I 的整闭包 是所有关于 I整的元素 $z \in R$ 构成的集合。这个集合记作 $\overline{I}$

定义 2.1。 若 $I = \overline{I}$，I 称为 整闭或 完备。

定义 2.2. 若对于所有 $n \geq 1$，I^n 都是整闭的，则称 I 为正规。

我们的第一个结果给出了以下性质的渐近概率：$I(\mathcal{G})$ 是正规的，$I_c(\mathcal{G})$ 是正规的，以及 $I_c(\mathcal{G})$ 不是正规的 $\cap \beta_0(G) \leq 2$。这里，$\beta_0(G)$ 表示图 G 的独立数，其定义见第 3 节。我们将在参数满足适当条件的情况下证明，

事件（或其补集）几乎必然渐近地成立。

定理 2.3。 设 $I(\mathcal{G})$ 是一个服从 *Erd ˝os–R ´enyi* 分布的随机单项式理想，即 $I(\mathcal{G}) \sim IER(n,p)$。则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(I(\mathcal{G}) \text{ is normal}) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad p = o(\frac{1}{n}) \\ 0 & \text{if} \quad pq^{3/2} = \omega(\frac{1}{n}) \end{cases} \tag{1}$$

注 2.4。 注意到 $pq^{3/2} \leq p$。如果 $p << \frac{1}{n}$，则 *–I*(*G*) 渐近几乎必然是正规的。如果 $\frac{1}{n} << pq^{3/2}$，则 *I*(*G*) 渐近几乎必然不是正规的。仍需理解事件的行为

$$\{I(\mathcal{G}) \text{ is normal}\}$$

对于 $pq^{3/2} << \frac{1}{n} << p$。

定理 2.5。 设 $I_c(\mathcal{G})$ 是一个服从 *Erd ˝os–R ´enyi* 分布的随机单项式理想，即 $I_c(\mathcal{G}) \sim IER_c(n,p)$。如果 $p = o(\frac{1}{n})$，则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_c(\mathcal{G}) \text{ is normal}) = 1 \tag{2}$$

定理 2.6。 设 $I_c(\mathcal{G})$ 是一个服从 *Erd ˝os–R ´enyi* 分布的随机单项式理想，即 $I_c(\mathcal{G}) \sim IER_c(n,p)$。若 $q = o(\frac{1}{n})$，则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_c(\mathcal{G}) \text{ is not normal} \cap \beta_0(\mathcal{G}) \leq 2) = 0. \tag{3}$$

注 2.7。 定理 2.6 中与事件 $\beta_0(\mathcal{G}) \leq 2$ 取交集的原因是，对于覆盖的理想，如果图的独立数小于或等于 2，那么下列陈述等价；

(1) 该理想不是正规理想。
(2) 图的补图存在 Hochster 配置。

借助这一等价关系，我们可以采用与定理 2.3 证明类似的方法。详细内容留待第 5 节。

（*B*）*Krull* 维数。回顾一下，单项式理想 I 的 Krull 维数定义为 dim(S/I)。对于由图 G的边生成的单项式理想，Krull 维数与图 $\beta_0(G)$ 的独立数相同。粗略地说，独立数是图中最大独立集的大小。作为第二个结果，对于每个固定整数 t，我们得到了图的独立数大于或等于 t 的阈值函数。作为推论，我们证明，在参数 q 满足适当条件时，Krull 维数渐近几乎必然等于 t。

定理 2.8。设 $I(\mathcal{G})$ 是一个服从 *Erd˝os–R´enyi* 分布的随机单项式理想，且 $t > 1$ 是一个正整数。那么，$\frac{1}{n^{2/(t-1)}}$ 是性质 $dim(S/I(\mathcal{G})) \geq t$的阈值函数。换言之

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(dim(S/I(\mathcal{G})) \geq t) = \begin{cases} 0 & if \quad q = o(\frac{1}{n^{2/(t-1)}}) \\ 1 & if \quad q = \omega(\frac{1}{n^{2/(t-1)}}) \end{cases} \tag{4}$$

推论 2.9。设 $I(\mathcal{G})$ 是一个服从 *Erd˝os–R´enyi* 分布的随机单项式理想，并设 $t > 1$ 是一个正整数。若 $q = o(\frac{1}{n^{2/t}})$ 且$q = \omega(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$，则 $dim(S/I(\mathcal{G}))$ 渐近几乎必然等于 t。换言之

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(dim(S/I(\mathcal{G})) = t) = 1. \tag{5}$$

(C) 正则性。设 $I \subset S$ 是一个分次理想，并设 $\mathbf{F}$ 是 S/I 作为 S-模的最小分次自由分解:

$$\mathbf{F}: \quad 0 \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{b_{g,j}} \xrightarrow{\varphi_g} \cdots \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{b_{1,j}} \xrightarrow{\varphi_1} S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0.$$

若所有映射 $\varphi_i, i \geq 2$均由元素为线性形式的矩阵定义，且 φ_1 的所有元素都是次数为 d 的形式，则理想 I 具有 d-线性分解 。S/I的射影维数 记为 pd$_S(S/I)$，其值为 g。S/I 的***Castelnuovo–Mumford*** 正则性 （简称 S/I 的正则性）定义为

$$\mathrm{reg}(S/I) = \max\{j - i \mid b_{i,j} \neq 0\}.$$

根据 R.Villarreal 和 Delio 的结果 [18]，只要 I 是无平方单项式理想，正则性就是 S/I 维数的下界。

命题 2.10。 （[18, 命题 3。2]）</style}若 是 的无平方单项式理想，则 reg$(S/I$ ） $\leq \dim(S/I)$</style}。

对于我们的第三个结果，我们证明，对于任意 $t > 1$ 正整数，只要 $q = o(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$，该理想的正则性就小于或等于 $t - 1$。该结果的证明是定理 2.8 与命题 2.10 结合后得到的一个推论。

推论 2.11. 设 $I(\mathcal{G})$ 是服从 *Erd˝os–R´enyi* 分布的随机单项式理想，且 $t > 1$ 是一个正整数。如果 $q = o(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$ 那么 $reg(S/I(\mathcal{G})) \leq t - 1$ 渐近几乎必然。换言之

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(reg(S/I(\mathcal{G})) \leq t - 1) = 1.$$

(C) v-数。 分次理想 I 的 v-数 ，记作 v(I)，是 I [8, 推论 4.7] 的如下不变量:

$$\mathrm{v}(I) := \min\{d \geq 0 \mid \exists\, f \in S_d \text{ and } \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(I) \text{ with } (I\colon f) = \mathfrak{p}\}.$$

可以在 I 的每个伴随素理想 $\mathfrak{p}$ 处局部定义 I 的 v 数:

$$\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(I) := \min\{d \geq 0 \mid \exists\, f \in S_d \text{ with } (I\colon f) = \mathfrak{p}\}.$$

根据 R. Villarreal 和 Delio [18] 的一项结果，团 $\mathcal{C}$ 的边理想的 v-数是 $\mathcal{C}$ 的独立数的一个下界。

推论 2.12。 ([18,推论 3。6]) </style}如果 $\mathcal{C}$ 是一个团，那么

$$\mathrm{v}(I(\mathcal{C})) \leq \beta_0(\mathcal{C}).$$

对于最后一个结果，我们考察理想 $I(\mathcal{G})$的 v 数。与正则性类似，我们证明，对于任意 $t > 1$ 整数，只要 $q = o(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$，该理想的 v 数小于或等于 $t-1$ 。该结果的证明可由定理 2.8 与推论 2.12 合并后得到的推论推出。

推论 2.13. 设 $I(\mathcal{G})$是一个服从 *Erd ˝os–R ´enyi* 分布的随机单项式理想，且 $t > 1$ 是一个正整数。若 $q = o(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$ 则$v(I(\mathcal{G})) \leq t-1$ 渐近~~几乎~~必然成立。换言之

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(v(I(\mathcal{G})) \leq t-1) = 1.$$

2.2. **证明策略**。 下面介绍我们的证明技巧。在定理 2.3 中，我们使用事件的等式

$$\{\mathcal{G} \text{ is not normal}\} = \{\mathcal{G} \text{ has a Hochster configuration}\}.$$

粗略地说，Hochster 配置由两个大小为奇数的环组成，它们的顶点之间没有边。接下来，我们关注第二个事件的概率，并利用以下事件包含关系得到其上界和下界。

$$\{\mathcal{G} \text{ 含有 } T \text{ 作为诱导子图}\} \subset \{\mathcal{G} \text{ 含有 Hochster 配置}\} \subset \{\mathcal{G} \text{ has a cycle}\}.$$

这里 T 是最小的 Hochster 配置，由两个不连通的三角形组成。为了证明我们的极限定理，我们只需证明

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{G} \text{ has } T \text{ as induced subgraph}\}) \to 1,$$

给定 $pq^{3/2} = \omega(\frac{1}{n})$ 和

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{G} \text{ has a cycle}\}) \to 0,$$

给定 $p = o(\frac{1}{n})$。第二个极限众所周知，不过为求完备，我们仍给出证明（命题 4.9）。第一个极限可通过为 $\mathbb{P}(\{\mathcal{G}$ 含有 T 作为诱导子图$\})$ 提供下界来计算。我们给出的下界形式如下

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{G} \text{ has } T \text{ as induced subgraph}\}) \geq 1 - \frac{Var(Y_T(n,p))}{\mathbb{E}(Y_T(n,p))^2},$$

其中，$Y_T(n, p)$ 是一个随机变量，用于统计 T 作为 $\mathcal{G}$ 的诱导子图出现的次数。我们计算了 $Y_T(n, p)$ 的方差上界，并据此给出 $\mathbb{P}(\{\mathcal{G}$ 以 T 为诱导子图$\})$ 的一个显式下界；我们证明，当 $n \to \infty$ 时，该下界趋于 1，前提是 $pq^{3/2} = \omega(\frac{1}{n})$。

为证明定理 2.5，我们利用以下事件之间的包含关系

$$\{\mathcal{G} \text{ 没有环}\} \subset \{\mathcal{G} \text{ 是二部图}\} \subset \{I_c(\mathcal{G}) \text{ 是正规}\}$$

这里我们利用了这样一个事实：二分图的顶点覆盖理想是正规理想，因为它们是完美图（例如参见 [29]）。左侧事件的概率在 $p = o(\frac{1}{n})$（命题 4.9）条件下趋于 1，这使得右侧事件的概率也趋于 1。为证明定理 2.6，我们使用对偶性判据 [10,定理 5.11]，它给出了以下集合之间的包含关系

$$\{I_c(\mathcal{G}) \text{ is not normal}, \beta_0(\mathcal{G}) \leq 2\}$$
$$\subset \{\bar{\mathcal{G}} \text{ has a Hochster configuration}\} \subset \{\bar{\mathcal{G}} \text{ has a cycle}\}.$$

这里，$\mathcal{G}$ 是图 $\mathcal{G}$ 的补图，定义为满足 $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}$ 是完全图的图。于是，我们只需证明 $\mathbb{P}$（$\mathcal{G}$ 含有一个环）$\to 0$，这可由定理 2.3 同理得到。

为证明定理 2.8，我们利用事件等式

$$\{dim(S/I(\mathcal{G})) \geq t\} = \{\mathcal{G} \text{ has } E_t \text{ as induced subgraph}\}.$$

这里，E_t 是含有 t 个顶点的空图（无边）。证明的其余部分 consiste 在证明：$q = \frac{1}{n^{2/(t-1)}}$ 是关于性质 $\mathcal{G}$ 含有 E_t 作为诱导子图的阈值函数。为证明这一点，只需对事件的概率给出上界和下界

$$\{\mathcal{G} \text{ has } E_t \text{ as an induced subgraph}\}.$$

该事件等同于 $\{Y_{E_t}(n, p) > 0\}$，其概率的上界为 $\mathbb{E}(Y_{E_t}(n, p))$，下界为

$$1 - \frac{Var_{E_t}(n,p)}{\mathbb{E}(Y_{E_t}(n,p))^2}.$$

这里， $Y_{E_t}(n,\ p)$ 是一个随机变量，用于计数 E_t 作为 $\mathcal{G}$ 的诱导子图出现的次数。我们求出了期望的显式表达式以及方差的界，由此得出，当 $q = o(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$ 和$q = \omega(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$ 分别成立时，这些界分别收敛于 0 和 1。

最后，推论 2.9、2.11 和 2.13 可由定理 2.8 推出。

2.3. **论文结构**。除第 1 节和第 2 节介绍背景、引入模型并陈述结果外，本文结构如下。第 3 节简要介绍本文所需的代数背景。我们引入由图生成的单项式理想集合，并详细阐述其若干性质。第 4 节介绍 Erd˝os–R´enyi 模型。本节完全围绕该模型展开，探讨一些阈值函数，并求出若干事件的明确概率。最后，在第 5 节中，我们借助此前在第 3 节和第 4 节中得到的结果证明本文的结论。

3. Monomial ideals

令 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 为域 K 上的多项式环，令 $\mathcal{C}$为一个顶点集为 $V(\mathcal{C}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$的团，也就是说， $\mathcal{C}$ 是 $V(\mathcal{C})$ 的一个子集族，称为边，其中没有任何一个包含于另一个之中。 $\mathcal{C}$ 的边集记作 $E(\mathcal{C})$。团的基本例子是简单图 G。 S 的单项式记作

$$x^a := x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n},\ a = (a_1, \ldots, a_n).$$

$V(\mathcal{C})$的子集 A 称为独立集或稳定集，如果对于任意$e \in E(\mathcal{C})$, $e \not\subset A$ 成立。稳定顶点集的对偶概念是顶点覆盖，即， $V(\mathcal{C})$的子集 C 是顶点覆盖，当且仅当 $V(\mathcal{C}) \setminus C$ 是一个稳定顶点集。极小顶点覆盖是指相对于包含关系极小的顶点覆盖。如果 A 是 $\mathcal{C}$的一个稳定顶点集，则 A的邻集记作 $N_{\mathcal{C}}(A)$，它是所有满足以下条件的顶点 x_i 的集合： $\{x_i\} \cup A$ 包含 $\mathcal{C}$的一条边。 $\mathcal{C}$的任一最小顶点覆盖中的顶点数记作 $\alpha_0(\mathcal{C})$，称为 $\mathcal{C}$的顶点覆盖数。 $\mathcal{C}$的最大稳定顶点集中的顶点数记作 $\beta_0(\mathcal{C})$，称为 $\mathcal{C}$的独立数。 $S/I(\mathcal{C})$ 的 Krull 维数记作 $\dim(S/I(\mathcal{C}))$，等于 $\beta_0(\mathcal{C})$； $I(\mathcal{C})$ 的高度记作 $\mathrm{ht}(I(\mathcal{C}))$，等于 $\alpha_0(C)$。

设 $C_1, \ldots, C_r$ 是图 G 的极小顶点覆盖，其对应的单项式为 $x_{c_1}, \ldots, x_{c_r}$，也就是说， $x_{c_j} = \prod_{x_i \in C_j} x_i$

对应于 $j = 1,\ldots,r$。以下无平方单项式理想与 G 相关联。

定义 3.1. 设 $G = (V, E)$ 是一个图，其顶点由变量 $x_1,\ldots,x_n$ 编号。G 的边理想 记为 $I(G)$，是理想 [27]:

$$I(G) := (\{x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G)\}) \subset S.$$

G 的覆盖理想 记为 $I_c(G)$，是理想 [14]:

$$I_c(G) := (x_{c_1}, \ldots, x_{c_r}) \subset S.$$

任何无平方单项式理想都是某个团的边理想 [28,第 220–221] 页。

例 3.2. 设 G 为图1所示的图。G 的边理想 是理想:

$$I(G) = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_1, x_2x_5, x_3x_5)$$

The覆盖理想of G, is the ideal:

$$I_c(G) = (x_1x_2x_3x_4, x_1x_3x_5, x_2x_3x_5, x_2x_4x_5).$$

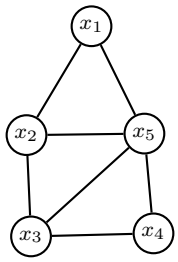

FIGURE 1. 例 3.2 的图。

A 素理想 $\mathfrak{p}$ of S is an 伴随素理想of I if $(I : f) = \mathfrak{p}$ for some $f \in S_d$, where $(I : f)$ is the set of all $g \in S$ such that $gf \in I$. The set of 关联素理想 of I is denoted by Ass(I). The following result gives an important relation between the 极小顶点覆盖 of a 团 and its 关联素理想 of $I(\mathcal{C})$.

引理 3.3。 [28, 引理 6.3。37] *Let C be a set of* 顶点 *of a* 团$\mathcal{C}$*. Then, C is a* 极小顶点覆盖 *of $\mathcal{C}$ if and only if the ideal of Sgenerated by C is an* 伴随素理想 *of $I(\mathcal{C})$.*

图 G 的 ***Hochster*** 配置由 G 的两个奇圈 C_1、C_2 组成，并满足以下两个条件:

(i) $C_1 \cap N_G(C_2) = \emptyset$，其中 $N_G(C_2)$ 是 C_2的邻集。(ii) C_i、 $i = 1$, 2 的任何弦都不是 G的一条边；也就是说， C_i 是 G的导出圈。

Hochster 配置的一个例子见图 2。

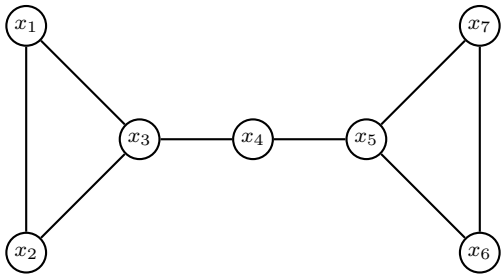

FIGURE 2. 一个 Hochster 配置。

以下结果给出了边理想正规性的组合描述。

定理 3.4。 ([15, 推论 5.8。10]) 图G 的边理想 $I(G)$ 是正规当且仅当 G 不含 *Hochster* 配置。

注 3.5。 借助定理 3.4，我们将能够求出该事件的概率

$$\{I(\mathcal{G}) \text{ is not normal}\}$$

通过考察该事件发生的概率

$$\{\mathcal{G} \text{ has a Hochster configuration}\}.$$

我们将能够分别用这些事件发生的概率给出该概率的下界和上界

$$\{\mathcal{G} \text{ has } T \text{ as induced subgraph}\},$$

and

$$\{\mathcal{G} \text{ has a cycle}\},$$

这里， T 是一个由两个不连通三角形组成的图。随后我们将证明，在 p和 q满足适当条件时，这些事件的概率分别收敛于 0 和 1。

图 G的补图（记作G）是一个具有相同顶点集的图，并且 G 中的两个不同顶点相邻，当且仅当它们在 G中不相邻。图 3 展示了一个图及其补图的示例。

以下结果 [10] 给出了独立数至多为二的图的覆盖理想正规性的组合描述。

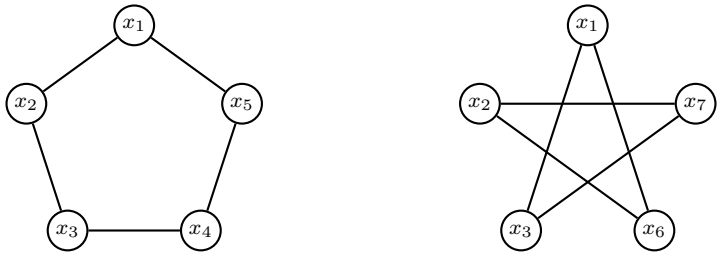

FIGURE 3. 图 C_5 （左）及其补图 $\overline{G}$ （右）。

定理 3.6. ([10, 定理 5.11])（对偶性判据）设 G 是一个具有 $\beta_0(G) \leq 2$ 的图。以下结论成立。

（a） $I_c(G)$ 是正规的，当且仅当 $\overline{I}(G)$ 是正规的。（b） $I_c(G)$ 是正规当且仅当 G 没有 *Hochster* 配置。

4. ERDŐS–RÉNYI GRAPHS AND THRESHOLD FUNCTIONS

本节介绍 Erd˝os–R´enyi 随机图模型。进一步地，我们研究 Erd˝os–R´enyi 图的一些性质的阈值函数。

我们首先简要介绍本文中有关图的定义和记号。图 是一个二元组 $G = (V, E)$，其中 V 是顶点集， $E \subset V \times V$ 是图的边。给定一个图 $G = (V, E)$ 和 V的子集 $V' \subset V$，我们将$G_{V'}$ 定义为 G 在 V' 上的限制，即顶点集为 V'、边集为 $\{u, v\}$ 的图，其中所有满足 $u, v \in V'$ 的 $\{u, v\} \in E$ 都对应一条边。若对于所有 $u, v \in V'$，$V' \subset V$且当且仅当 $\{u, v\} \in E$，则称$G' = (V', E')$ 是 G 的诱导子图。图 4 展示了一个图及其诱导子图的示例。

如果两个图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 同构，则认为它们相同；也就是说，存在一个双射 $f : V_1 \to V_2$，且 $(u, v) \in E_1$ 当且仅当 $(f(u) f(v)) \in E_2$ 对所有 $u, v \in V_1$ 都成立。

记号 4.1. 设 $t > 1$ 是一个整数。我们如下定义图 T 和 E_t 。

(1) T 是顶点集为 $V = \{1, \ldots, 6\}$、边为 $E =\{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 6), (6, 3)\}$ 的图。(2) E_t 是顶点集为 $V = \{1, \ldots, t\}$、边为 $E = \emptyset$ 的图。图 T 和 E_t 的示例见图 5。

现在我们可以介绍 Erd˝os–R´enyi 模型了。我们称随机图 $\mathcal{G}$ 服从参数为 $n \in \mathbb{N}$和 $0 \leq p \leq 1$的 Erd˝os–R´enyi 分布，记作 $\mathcal{G} \sim ER(n, p)$，如果 $V = [n] := \{1, \ldots, n\}$

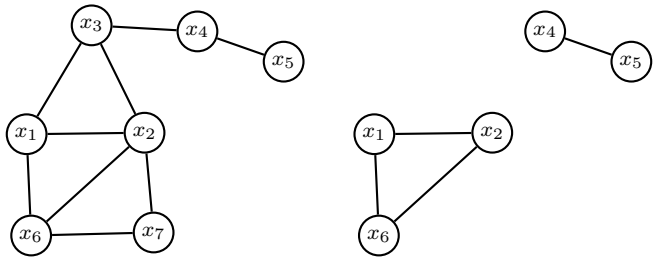

FIGURE 4. 一个图 G （左）及其诱导子图（右）。这里 $V' = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}$。注意，右侧的图也是 G 对 V'，$G_{V'}$的限制。

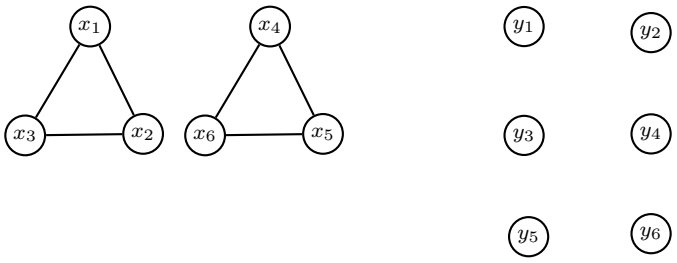

FIGURE 5. 图 T （左）以及满足 $t = 6$的图 E_t （右）。

并且对于所有满足 $u \neq v$ 的 $1 \leq u, v \leq n$，每条边 $\{u, v\}$ 均以概率 p 被选中。

定义4.2。设 $n \in \mathbb{N}$、$0 \leq p \leq 1$ 和 $\mathcal{G} \sim ER(n, p)$。设 G 为一个图，我们定义随机变量 $Y_G(n, p)$：

$$Y_G(n, p) = \sum_{V \subset [n]} \mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_V = G\}}.$$

$Y_G(n, p)$ 统计 G 作为诱导子图出现在 $\mathcal{G}$中的次数。

命题 4.3. 设 $n \in \mathbb{N}$，其中 $n \geq 6$、$0 \leq p \leq 1$ 和 $\mathcal{G} \sim ER(n、\ p)$。设 T 为记号 *4.1* 中定义的图。则

$$\mathbb{E}(Y_T(n, p)) = \binom{n}{6}\binom{6}{3}p^6(1-p)^9 \tag{6}$$

and,

$$\begin{aligned} Var(Y_T(n, p)) \leq\ & n^{10}p^{11}q^{18} + n^{10}p^{12}q^{17} + n^9p^{11}q^{16} + n^9p^9q^{18} \\ & + n^8p^{10}q^{14} + n^8p^9q^{15} + n^7p^8q^{12} + n^6p^6q^9 \end{aligned} \tag{7}$$

证明。我们有

$$\mathbb{E}(Y_T(n,p)) = \sum_{V\subset[n]} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_V=T\}}) = \sum_{V\subset[n]} \mathbb{P}(\mathcal{G}_V = T).$$

仅当 $|V| = 6$ 时，该概率才非零；在此情况下，概率为 $\binom{6}{3}p^6q^9$。我们首先选择三个顶点，使其构成 T 的一个三角形，然后乘以存在 6 条边（对应于 T 的两个三角形）的概率，再乘以所有其他可能的边均为空的概率。最后，选择 V 有 $\binom{n}{6}$ 种方式，这就证明了（6）。现在我们证明（7）。注意到

$$\begin{aligned} & Var(Y_T(n,p)) = \mathbb{E}(Y_T(n,p)^2) - \mathbb{E}(Y_T(n,p))^2 \\ = \ & \mathbb{E}\left[\sum_{V\subset[n]}\sum_{W\subset[n]} \mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_V=T\}}\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_W=T\}}\right] - \sum_{V\subset[n]}\sum_{W\subset[n]} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_V=T\}})\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_W=T\}}) \\ = \ & \sum_{V\subset[n]}\sum_{W\subset[n]} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_V=T\}}\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_W=T\}}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_V=T\}})\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_W=T\}}) \end{aligned}$$

注意，当 V 和 W 至多共有一个顶点时，$\{\mathcal{G}_V = T\}$ 和 $\{\mathcal{G}_W = T\}$ 是独立事件，因此

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_V=T\}}\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_W=T\}}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_V=T\}})\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_W=T\}}) = 0.$$

Thus

$$\begin{aligned} Var(Y_T(n,p)) &= \sum_{\substack{V,W\subset[n]\\|V\cap W|\geq 2}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_V=T\}}\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_W=T\}}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_V=T\}})\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_W=T\}}) \\ &\leq \sum_{\substack{V,W\subset[n]\\|V\cap W|\geq 2}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_V=T\}}\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_W=T\}}) \\ &= \sum_{\substack{V,W\subset[n]\\|V\cap W|\geq 2}} \mathbb{P}(\mathcal{G}_V = T, \mathcal{G}_W = T) \end{aligned} \tag{8}$$

现在我们计算 $\mathbb{P}(\mathcal{G}_V = T,\ \mathcal{G}_W = T)$ 对于 $|V \cap W|$ =1、.....、6 的概率。若 $|V \cap W| = 2$ 有两种可能的情形：共享顶点之间有一条边，或者它们彼此不连通。在第一种情形下，我们断言概率为 $16p^{11}q^{18}$。具体来说，我们先从 V 中选择一个顶点，使其与两条共享边构成一个三角形（见图 6）。这有 4 种选法；同样地，选择 W中的顶点也有 4 种选法。由此得到 16。其次，顶点对有 3 种可能类型：必须相连的、必须断开的，以及两者皆可的

或断开。 $V \cup W$ 中有 11 条边必须出现在图中，由此得到 p^{11}；这对应于必须相连的顶点对（见图 6 中的黑色边）。因此，我们要求 $\mathcal{G}_V = T$ 必须有 9 条边缺失，这些对应于必须断开的顶点对（例如图 6 中的绿色边）。同样地， $\mathcal{G}_W$ 中必须有 9 条边缺失，由此得到 q^{18}。最后，有些顶点对可以相连也可以断开，而在这两种情况下，事件 $\{\mathcal{G}_V = T, \mathcal{G}_W = T\}$ 都成立（这些对应于图 6 中蓝色边所示的边）。因此，我们乘以 1，对应于 $p+q$。这给出的总概率为 $16p^{11}q^{18}$。

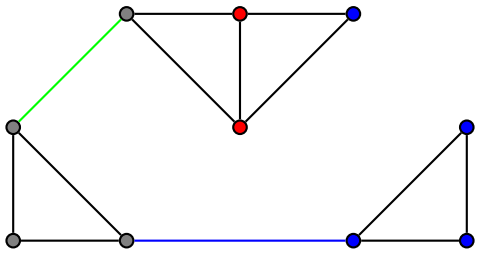

FIGURE 6. 集合 V （灰色和红色顶点）以及 W（蓝色和红色顶点）。红色部分是 V和 W的共享顶点。

在第二种情形中，我们采用类似的方法，此时概率由 $36p^{12}q^{17}$给出。注意，在这种情况下，我们得到的是 q^{17} 而不是 q^{18} ，因为两个共享顶点在两张图中都必须不连通（$\mathcal{G}_V$ 和 $\mathcal{G}_W$），因此图中必须为空的边总数为 $9+9-1$。最后注意，选择 V 和 W 的方法数为

$$\binom{n}{6}\binom{6}{2}\binom{n-6}{4}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{V,W\subset[n]\\|V\cap W|=2}} \mathbb{P}(\mathcal{G}_V = T, \mathcal{G}_W = T) &= \binom{n}{6}\binom{6}{2}\binom{n-6}{4}(16p^{11}q^{18} + 36p^{12}q^{17}) \\ &\leq n^{10}p^{11}q^{18} + n^{10}p^{12}q^{17}.\end{aligned}$$

对于 $|V \cap W| = 2, \ldots, 6$ 这些情形，我们同样可以进行处理，从而得到

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{V,W\subset[n]\\|V\cap W|=3}} \mathbb{P}(\mathcal{G}_V = T, \mathcal{G}_W = T) &= \binom{n}{6}\binom{6}{3}\binom{n-6}{3}(27p^{11}q^{18} + p^9q^{18}) \\ &\leq n^9p^{11}q^{16} + n^9p^9q^{18},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{V,W\subset[n]\\|V\cap W|=4}} \mathbb{P}(\mathcal{G}_V = T, \mathcal{G}_W = T) &= \binom{n}{6}\binom{6}{4}\binom{n-6}{2}(24p^{10}q^{14} + 4p^9q^{15}) \\ &\leq n^8p^{10}q^{14} + n^8p^9q^{15},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{V,W\subset[n]\\|V\cap W|=5}} \mathbb{P}(\mathcal{G}_V = T, \mathcal{G}_W = T) &= \binom{n}{6}\binom{6}{5}\binom{n-6}{1}(10p^8q^{12}) \\ &\leq n^7p^8q^{12},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{V,W\subset[n]\\|V\cap W|=6}} \mathbb{P}(\mathcal{G}_V = T, \mathcal{G}_W = T) &= \binom{n}{6}(20p^6q^9) \\ &\leq n^6p^6q^9.\end{aligned}$$

将这些不等式与不等式（8）结合，即得证。□

推论 4.4。设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq 6$、$0 \leq p \leq 1$ 和 $\mathcal{G} \sim ER(n, p)$。设 T 为记号 *4.1* 中定义的图。则

(9)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_T(n,p) > 0) \geq 1 - \frac{1}{400\binom{n}{6}^2 p^{12}q^{18}}&(n^{10}p^{11}q^{18} + n^{10}p^{12}q^{17} + n^9p^{11}q^{16} \\ &+ n^9p^9q^{18} + n^8p^{10}q^{14} + n^8p^9q^{15} + n^7p^8q^{12} + n^6p^6q^9)\end{aligned}$$

证明。注意，如果 $\mathbb{E}(Y_T(n, p)) > |Y_T(n, p) - \mathbb{E}(Y_T(n, p))|$，那么 $Y_T(n, p) > 0$，因此

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_T(n,p) > 0) &\geq \mathbb{P}(\mathbb{E}(Y_T(n,p)) > |Y_T(n,p) - \mathbb{E}(Y_T(n,p))|) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|Y_T(n,p) - \mathbb{E}(Y_T(n,p))| \geq \mathbb{E}(Y_T(n,p))) \\ &\geq 1 - \frac{Var(Y_T(n,p))}{\mathbb{E}(Y_T(n,p))^2}.\end{aligned}$$

最后一个不等式由切比雪夫不等式推出。利用方程（6）和不等式（7）即可得出结论。□

借助命题 4.3 和推论 4.4，我们得到以下阈值函数。

推论 4.5. 令 T 为记号 ***4.1*** 中定义的图。令 $n \in \mathbb{N}$满足 $n \geq 6$、$0 \leq p \leq 1$ 和 $\mathcal{G} \sim ER(n,p)$。则 $\frac{1}{n}$ 是关于性质“ $\bar{p}q^{3/2}$ 含有 $\mathcal{G}$ T 作为诱导子图”的阈值函数。换言之

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{G}\ has\ T\ as\ an\ induced\ subgraph) = \begin{cases} 0 & if \quad pq^{3/2} = o(\frac{1}{n}) \\ 1 & if \quad pq^{3/2} = \omega(\frac{1}{n}) \end{cases}$$

证明。 注意， $\{\mathcal{G}$ 含有 T作为诱导子图$\} = \{Y_T(n,p) > 0\}$因此，

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{G}\text{含有 } T\text{作为诱导子图}\}) = \mathbb{P}(\{Y_T(n,p) > 0\}) \leq \mathbb{E}(Y_T(n,p))。$$

根据命题 4.3，在给定 $pq^{3/2} = o(\frac{1}{n})$ 的条件下，右侧的极限趋于 0，这就证明了第一部分。第二部分的证明与定理 2.3 的证明完全相同，因此我们省略。□

命题 4.6. 设 $t > 1$ 为整数， E_t 为记号 ***4.1*** 中定义的图。设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq t$、 $0 \leq p \leq 1$ 和 $\mathcal{G} \sim ER$（n， p）。那么

$$\mathbb{E}(Y_{E_t}(n,p)) = \binom{n}{t}(1-p)^{\binom{t}{2}} \tag{10}$$

and,

$$V(Y_{E_t}(n,p)) \leq n^{2t}(1-p)^{2\binom{t}{2}} \sum_{j=2}^{t} \frac{1}{n^j(1-p)^{\binom{j}{2}}}. \tag{11}$$

证明。 我们采用与命题 4.3 类似的方法。我们有

$$\mathbb{E}(Y_{E_t}(n,p)) = \sum_{V\subset[n]} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_V = C_t\}}) = \sum_{V\subset[n]} \mathbb{P}(\mathcal{G}_V = C_t).$$

仅当 $|V| = t$ 时，该概率才非零；此外，在这种情况下，由于我们要求图为空图，该概率为 $q^{\binom{t}{2}}$。最后，选择 V 有 $\binom{n}{t}$ 种方法，这就证明了 (10)。为证明 (11)，我们使用方程 (8)：

$$Var(Y_{E_t}(n,p)) \leq \sum_{\substack{V,W\subset[n] \\ |V\cap W|\geq 2}} \mathbb{P}(\mathcal{G}_V = C_t, \mathcal{G}_W = C_t) \tag{12}$$

在这种情况下，我们需要考虑 $|V \cap W| = 2$、.....、t，其中所有 V 和 W 均满足 $|V| = |W| = t$。令 $2 \leq j \leq t$ 和 $|V \cap W| = j$，则

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}_V = C_T, \mathcal{G}_W = C_t) = q^{2\binom{t}{2}-\binom{j}{2}},$$

因为我们要求 $\mathcal{G}_V$是空图，其出现的概率为 $q^{\binom{t}{2}}$。同样的推理适用于 $\mathcal{G}_W$；然而，由于 $|V \cap W| = j$，我们把必须为空且其顶点属于 $V \cap W$的边重复计算了两次，这样的边共有 $\binom{j}{2}$ 条。因此，我们乘以概率 $q^{-\binom{j}{2}}$。最后有

$$\binom{n}{t}\binom{t}{j}\binom{n-t}{t-j}$$

种选择 V和 W的方式。因此，由不等式 (12) 得

$$\begin{aligned} Var(T_{E_t}(n,p)) &\leq \sum_{j=2}^{t} \binom{n}{t}\binom{t}{j}\binom{n-t}{t-j} q^{2\binom{t}{2}-\binom{j}{2}} \\ &\leq \sum_{j=2}^{t} n^{2t-j} q^{2\binom{t}{2}-\binom{j}{2}} \end{aligned}$$

这证明了 (11)。 □

推论 4.7。设 $t > 1$ 是一个整数，E_t 是记号 *4.1* 中定义的图。设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq t$、$0 \leq p \leq 1$ 和 $\mathcal{G} \sim ER(n,p)$。则

$$\mathbb{P}(Y_{E_t}(n,p) > 0) \geq 1 - \frac{n^{2t}}{\binom{n}{t}^2} \sum_{j=2}^{t} \frac{1}{n^j (1-p)^{\binom{j}{2}}}. \tag{13}$$

证明。按照推论 4.4 中的方法

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{E_t}(n,p) > 0) &\geq 1 - \frac{Var(T_{E_t}(n,p))}{\mathbb{E}(Y_{E_t}(n,p))^2} \\ &\geq 1 - \frac{n^{2t}(1-p)^{2\binom{t}{2}} \sum_{j=2}^{t} \frac{1}{n^j (1-p)^{\binom{j}{2}}}}{\binom{n}{t}^2 (1-p)^{2\binom{t}{2}}} \\ &= 1 - \frac{n^{2t}}{\binom{n}{t}^2} \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{n^j (1-p)^{\binom{j}{2}}}, \end{aligned}$$

其中第二个不等式由命题 4.6 得出。 □

作为推论，我们得到以下阈值函数。

推论 4.8。设 $t > 1$ 为一个整数，E_t 为记号 *4.1* 中定义的图。令 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n \geq t$、$0 \leq p \leq 1$ 和 $\mathcal{G} \sim ER$（n、p）。则 $\frac{1}{n^{2/(t-1)}}$ 是关于 q 的阈值函数，对于性质 $\mathcal{G}$ 具有 E_t 作为诱导子图。换言之

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{G} \textit{ has } E_t \textit{ as an induced subgraph}) = \begin{cases} 0 & \textit{if} \quad q = o(\frac{1}{n^{2/(t-1)}}) \\ \\ 1 & \textit{if} \quad q = \omega(\frac{1}{n^{2/(t-1)}}) \end{cases}$$

证明从略，因为这与我们证明主要结果定理 2.8 时所用的论证完全相同。

为结束本节，我们证明：如果 $p = o(\frac{1}{n})$，那么 $\mathcal{G} \sim ER(n,\ p)$ 渐近几乎必然没有环。

命题 4.9。设 $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq p \leq 1$ 和 $\mathcal{G} \sim ER(n,\ p)$。若$p = o(\frac{1}{n})$ 则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\mathcal{G} \textit{ has a cycle}\}) = 0.$$

证明。设 X_n 为计数$\mathcal{G}$中环的数量的随机变量。因此

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{G} \text{ has a cycle}\}) = \mathbb{P}(X_n > 0) \leq \mathbb{E}(X_n),$$

其中最后一个不等式由马尔可夫不等式得出。因此，只需证明 $\mathbb{E}(X_n) \to 0$。设 $S_k \subset [n]$ 为 $[n]$ 中大小为 k的子集，则

$$X_n = \sum_{k=3}^{n} \sum_{S \subset S_k} \mathbb{1}_{\{\mathcal{G}_{S_k} \text{ is a cycle of length } k\}}.$$

因此

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=3}^{n} \sum_{S \subset S_k} \mathbb{P}(\{\mathcal{G}_{S_k} \text{ is a cycle of length } k\}).$$

对于固定的 $S \subset S_k$，注意到至多有 $\binom{n}{k}k!$ 个环，因为这正是有序顶点集的数量，而每个有序顶点集通过连接相邻顶点都会形成一个环。我们可能对环进行了重复计数；无论如何，环的数量都不超过 $\binom{n}{k}k!$。给定一个有序顶点集，形成一个环的概率为 p^k，因此

$$\mathbb{E}(X_n) \leq \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} k! p^k \leq \sum_{k\geq 3} n^k p^k = (np)^3 \sum_{k\geq 0} (np)^k = \frac{(np)^3}{1-np}.$$

由于右侧趋于 0，证明完成。 □

5. Proof of main results

本节旨在给出我们所有结果的证明。提醒一下，我们的思路是借助第 4 节，为所需的概率找到上界和下界。

定理 *2.3* 的证明。由 [18, 定理 5.8]，我们得到以下事件等式

$$\{I(\mathcal{G}) \text{ is not normal}\} = \{\mathcal{G} \text{ has a Hochster configuration}\}.$$

首先，我们证明，如果 $p = o(\frac{1}{n})$，那么

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{G} \text{ has a Hochster configuration}\}) \to 0.$$

这很容易由以下事实得出

$$0 \leq \mathbb{P}(\{\mathcal{G} \text{ has a Hochster configuration}\}) \leq \mathbb{P}(\{\mathcal{G} \text{ has a cycle}\})$$

其中，右侧因命题 4.9 而趋于 0。其次，我们证明，如果 $pq^{3/2} = \omega(\frac{1}{n})$，那么

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{G} \text{ has a Hochster configuration}\}) \to 1.$$

确实

$$1 \geq \mathbb{P}(\{\mathcal{G}\text{具有 Hochster 配置}\}) \geq \mathbb{P}(Y_T(n,\ p) > 0), \tag{14}$$

其中，最后一个不等式成立是因为 T 是该图的 Hochster 配置。由推论 4.4 可知

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_T(n,p) > 0) \geq 1 - \frac{1}{400\binom{n}{6}^2 p^{12}q^{18}}(&n^{10}p^{11}q^{18} + n^{10}p^{12}q^{17} + n^9p^{11}q^{16} \\ &+ n^9p^9q^{18} + n^8p^{10}q^{14} + n^8p^9q^{15} + n^7p^8q^{12} + n^6p^6q^9)\end{aligned}$$

利用 $\binom{n}{6} \leq \frac{n^6}{6!}$ 以及前一个不等式可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_T(n,p) > 0) &\geq \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{6!^2}{400n^{12}p^{12}q^{18}}(n^{10}p^{11}q^{18} + n^{10}p^{12}q^{17} \\ &+ n^9p^{11}q^{16} + n^9p^9q^{18} + n^8p^{10}q^{14} + n^8p^9q^{15} + n^7p^8q^{12} + n^6p^6q^9) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1296}{n^2p + n^2q + n^3pq^2 + n^3p^3 + n^4p^2q^4 + n^4p^3q^3 + n^5p^4q^6 + n^6p^6q^9} \\ &= 1\end{aligned} \tag{15}$$

其中极限等于 1，因为

$$\begin{aligned}
&n^2p \geq n^2p^2q^3 = (npq^{3/2})^2 \to \infty \\
&n^2q \geq n^2p^2q^3 = (npq^{3/2})^2 \to \infty \\
&n^3pq^2 \geq n^3p^3q^{9/2} = (npq^{3/2})^3 \to \infty \\
&n^3p^3 \geq n^3p^3q^{9/2} = (npq^{3/2})^3 \to \infty \\
&n^4p^2q^4 \geq n^4p^4q^6 = (npq^{3/2})^4 \to \infty \\
&n^4p^3q^3 \geq n^3p^3q^{9/2} = (npq^{3/2})^3 \to \infty \\
&n^5p^4q^6 \geq n^4p^4q^6 = (npq^{3/2})^4 \to \infty \\
&n^6p^6q^9 = (npq^{3/2})^6 \to \infty.
\end{aligned}$$

结合不等式 (14) 和 (15)，可得所需结果。 □

定理 *2.5* 的证明。 在 [29] 中已证明，完美图的覆盖理想是正规的。由于二分图是完美图，因此有以下事件包含关系

$$\{\mathcal{G} \text{ has no cycles}\} \subset \{\mathcal{G} \text{ is bipartite}\} \subset \{I_c(\mathcal{G}) \text{ is normal}\}.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\mathcal{G} \text{ has no cycles}\}) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(I_c(\mathcal{G}) \text{ is normal}) \leq 1.$$

根据命题 4.9，左侧的极限等于 1，因此右侧的极限也必须等于 1。□

定理 *2.6* 的证明。 根据对偶性判据（定理 3.6），我们有

$$\{I_c(\mathcal{G}) \text{不是正规 } \beta_0(\mathcal{G}) \leq 2\} \subset \{\mathcal{G} \text{ 具有 Hochster 配置}\},$$

因此

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{I_c(\mathcal{G}) \text{ is not normal}, \beta_0(\mathcal{G}) \leq 2\}) \\
&\qquad \leq \mathbb{P}(\{\bar{\mathcal{G}} \text{ has a Hochster configuration}\}) \leq \mathbb{P}(\bar{\mathcal{G}} \text{ has a cycle})
\end{aligned}$$

因此，只需证明 $\mathbb{P}(\{\mathcal{G} \text{ 存在一个环}\}) \to 0$。为证明这一点，注意到在 $\mathcal{G}$ 中存在一条边的概率，与在 $\mathcal{G}$ 中不存在这样一条边的概率相同 q，反之亦然。因此，我们可以重复命题 4.9 的证明，只需将 $\mathcal{G}$ 与 p 和 q 互换，即可得出

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\bar{\mathcal{G}} \text{ has a cycle}\}) = 0,$$

给定 $q = o\left(\frac{1}{n}\right)$。 □

定理 *2.8* 的证明。 提醒一下，$\dim(S/I(\mathcal{G}))$ 与该图的独立数一致，这意味着以下事件相同

$$\{dim(S/I(\mathcal{G})) \geq t\} = \{\mathcal{G} \text{ contains } E_t \text{ as a subgraph}\},$$

其中 E_t 的定义见记号 4.1。因此

$$\mathbb{P}(dim(S/I(\mathcal{G})) \geq t) = \mathbb{P}(Y_{E_t}(n,p) > 0). \tag{16}$$

因此，我们只需为 $\mathbb{P}(Y_{E_t}(n,\ p)\ >0)$ 求出上界和下界。利用马尔可夫不等式和方程 (10) 可以得到一个上界，即

$$\mathbb{P}(Y_{E_t}(n,p) > 0) \leq \mathbb{E}(Y_{E_t}(n,p)) = \binom{n}{t}(1-p)^{\binom{t}{2}}.$$

对于固定的 t, $\binom{n}{t} \leq n^t/t!\ \leq n^t$，因此

$\mathbb{P}(Y_{E_t}(n,\ p)\ > 0)\ \leq n^t(1-p)^{\binom{t}{2}} = [n^{2/(t-1)}(1-p)]^{\frac{t(t-1)}{2}} \to 0$，只要 $n^{2/(t-1)}(1-p)$ 在 $n \to \infty$ 时收敛到 0，$n \to \infty$。结合这一事实与方程（16），得到

$$\mathbb{P}(dim(S/I(\mathcal{G}) \geq t) \to 0, \text{ as } n \to \infty,$$

在 $q = o(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$ 的条件下。现在我们利用推论 4.7 给出一个下界

$$\mathbb{P}(Y_{E_t}(n,p) > 0) \geq 1 - \frac{n^{2t}}{\binom{n}{t}^2}\sum_{j=2}^{t}\frac{1}{n^j(1-p)^{\binom{j}{2}}}. \tag{17}$$

注意到，对于 $2 \leq j \leq t$,

$$n^j q^{\binom{j}{2}} = [n^{2/(j-1)}q]^{\binom{j}{2}} \geq [n^{2/(t-1)}q]^{\binom{j}{2}} \to \infty, \text{ as } n \to \infty,$$

只要 $n^{2/(t-1)}q$ 随着 $n \to \infty$ 发散即可。这意味着，不等式（17）中求和的每一项在 $n \to \infty$ 满足 $q = \omega(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$ 时都趋于 0。此外，项 $\frac{n^{2t}}{\binom{n}{t}^2}$ 收敛到一个常数（取决于 t），因此由（17）和（16）可得

$$\mathbb{P}(dim(S/I(\mathcal{G})) \geq t) \to 1, \text{ as } n \to \infty,$$

只要 $q = \omega(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$ 即可。证毕。 □

推论 *2.9* 的证明。注意到

$$\mathbb{P}(dim(S/I(\mathcal{G})) = t) = \mathbb{P}(dim(S/I(\mathcal{G})) \geq t) - \mathbb{P}(dim(S/I(\mathcal{G})) \geq t+1).$$

若 $q = o(\frac{1}{n^2/t})$ 且 $q = \omega(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$，则由定理 2.8 可知，第一项收敛于 1，而第二项收敛于 0，从而得到所需结果。 □

推论 *2.11* 的证明。 由 [18, 命题 3.2] 可得

$$reg(S/I(\mathcal{G})) \leq dim(S/I(\mathcal{G})),$$

thus

$$1 \geq \mathbb{P}(reg(S/I(\mathcal{G})) \leq t-1) \geq \mathbb{P}(dim(S/I(\mathcal{G})) \leq t-1),$$

由此，根据定理 2.8，我们得出结论：只要 $q = o(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$，右侧就收敛于 1。□

推论 *2.13* 的证明。由 [18, 推论 3.6]可知

$$v(I(\mathcal{G})) \leq \beta_0(\mathcal{G}) = dim(S/I(\mathcal{G})),$$

thus

$$1 \geq \mathbb{P}(v(I(\mathcal{G})) \leq t-1) \geq \mathbb{P}(dim(S/I(\mathcal{G})) \leq t-1),$$

由此，根据定理 2.8，我们得出结论：只要 $q = o(\frac{1}{n^{2/(t-1)}})$，右侧就收敛于 1。□

Acknowledgments

我们感谢 Fiona Skerman 教授分享关于随机图的在线笔记，我们从中获得了一些证明思路。

References

[1] N. Alon, J. H. Spencer，《概率方法》，Wiley，第 4 版，2016 年。[2] J. C. Baez，群胚基数与随机置换。范畴论及其应用,**44**,（2025），论文第 14 号，410–419。[3] Z. Bao, D. Munoz George，随机矩阵多项式的超高阶累积量与定量中心极限定理，概率理论与相关领域，1–51。[4] C. Booms-Peot, D. Erman, J. Yang，随机单项式理想叙关系的特征依赖性。*SIAM* 离散数学杂志, **36**,（2022），第 1 期，682–701。[5] Y. Chang, Q. Chen, Q. Meng, X. Peng，群上瞬态随机游走局部时间函数的强大数定律。理论概率杂志,**39**,（2026），第 1 期，7。[6] G. Cho, G. Wei, G. Yang，球面基本间隙问题的概率方法。美国数学会汇刊, **378**,（2025），第 1 期，317–337。[7] G. Cipolloni, L. Erd˝os, D. Schr¨oder，Wigner 矩阵的函数型中心极限定理。应用概率年刊, **33(1)**,（2023），447–89。[8] S. M. Cooper, A. Seceleanu, S. O. Toh˘aneanu, M. Vaz Pinto 和 R. H. Vil- larreal，Geramita 理想的广义最小距离函数与代数不变量，应用数学进展**112**,（2020），101940。[9] J. A. De Loera, S. Petrovi´c, L. Silverstein, D. Stasi, D. Wilburne，随机单项式理想。代数杂志 **519**,（2019），440–473。[10] L. A. Dupont, H. Mu˜noz George 和 R. H. Villarreal，单项式理想的正规性判据，数学研究成果, **78**,（2023），第 1 期，论文第 34 号，共 31 页。[11] D. Eisenbud，《交换代数：以代数几何为视角》，数学研究生教材, **150**,（1995），施普林格出版社，纽约。

[12] P. Erdos, A. R´enyi，关于随机图，德布勒森数学出版物，6，（1959），第 290–297 页。[13] E. Gilbert，随机图，数学统计年刊，30，（1959），第 1141–1144 页。[14] I. Gitler, E. Reyes 和 R. H. Villarreal，二分图顶点覆盖理想的膨胀代数，当代数学，376，（2005），273–279。[15] I. Gitler 和 R. H. Villarreal，《图、环与多面体》，数学贡献丛书，35，墨西哥数学学会，M´exico，2011。[16] M. Gromov，随机群中的随机游走，几何与泛函分析，13，（2003），73–146[17] J. Herzog, T. Hibi，《单项式理想》，数学研究生教材，第 260 卷，施普林格（2011）。[18] D. Jaramillo 和 R. H. Villarreal，边理想的 v 数，组合理论杂志 A 辑，177，（2021），论文 105310，共 35 页。[19] A. M. Khorunzhy, B. A. Khoruzhenko 和 L. A. Pastur，具有独立元素的大型随机矩阵的渐近性质。数学物理杂志，37，（1996），5033–5060。[20] Y. Li, K. Schnelli, Y. Xu，变形 Wigner 矩阵与样本协方差矩阵介观特征值统计的中心极限定理。普朗卡雷研究所概率与统计年刊，57(1),（2021），506–546[21] S. Liu, N. Wang, N. Wang，随机置换集的多重分形。统计学通讯：理论与方法，54，（2025），第 20 期，6562–6591。[22] A. Lytova, L. Pastur，具有独立元素的随机矩阵线性特征值统计的中心极限定理。概率年刊，37，第 5 期（2009），1778–1840。[23] S. Petrovi´c, D. Stasi, D. Wilburne，随机单项式理想：Macaulay2 软件包。软件、代数与几何杂志，textbf9，（2019），第 1 期，65–70。[24] M. Shcherbina，Wigner 矩阵与样本协方差随机矩阵线性特征值统计的中心极限定理。数学物理分析与几何杂志，7(2),（2011），176–192。[25] L. Silverstein, D. Wilburne, J. Yang，随机单项式理想的渐近次数。交换代数杂志，15，（2023），第 1 期，99–114。[26] A. Simis, W. Vasconcelos, R. H. Villarreal, R.：关于图的理想理论。代数杂志 167，（1994）389–416。[27] R. H. Villarreal，Cohen–Macaulay 图，数学手稿，66，（1990），277–293。[28] R. H. Villarreal，《单项式代数》，第二版，数学专著与研究笔记，Chapman and Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2015。[29] R. H. Villarreal，完美图顶点覆盖理想的 Rees 代数与多面锥。代数组合杂志，27，（2008），293–305。[30] D. Voiculescu，随机矩阵与自由积的极限定律，数学创刊，104，（1991），201–220。[31] D. V. Voiculescu, K. J. Dykema 和 A. Nica。《自由随机变量》。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1992。[32] H. M. Zhylinskyi，有限群上的随机辫群与随机游走。随机过程理论 29，（2025），第 1 期，129–138。

Department of Mathematics and Statistics, University of Hong Kong, Pok Fu Lam, Hong Kong
电子邮箱地址：dmunozgeorge@gmail.com

Department of Mathematics, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Apartado Postal 14–740, Ciudad de México,México, CP 07000.
电子邮箱地址：humbertomgeorge@gmail.com

Faculty of Sciences, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México, CP 04510.电子邮箱地址：
kevinmunozgeorge@gmail.com