arXiv:2601.06744v1 [math.AG] 11 Jan 2026

经典情形中的极小约化类型

BIN WANG、XUEQING WEN 和 YAOXIONG WEN

Abstract. 我们证明了 Yun 关于所有经典群的极小约化猜想。更确切地说，对于任意拓扑幂零正则半单元 γ，我们证明相应的极小约化集 $\mathrm{RT}_{\min}(\gamma)$ 由单个幂零轨道组成。这一结果证实并推广了 Yun 先前在 A 型和 C 型中的工作，并解决了 B 型和 D 型中的其余情形。此外，我们给出了确定 $\mathrm{RT}_{\min}(\gamma)$ 的显式且有效的步骤。

Contents

1. 引言 1
1.1. Kazhdan–Lusztig 映射与极小约化映射 1
1.2. 主要结果 3
1.3. 论文结构 4
致谢 4
2. 预备知识 4
2.1. 极小约化映射 4
2.2. 幂零轨道 5
2.3. 牛顿多边形 6
2.4. B、C、D 型中的配对与李代数 6
2.5. 伴随矩阵与配对 6
3. 极小约化的构造：A 型和 C 型 8
3.1. 通过骨架构造 8
3.2. 通过牛顿多边形构造 10
4. 极小约化的构造：B 型和 D 型 13
4.1 寻找最小约化 14
4.2. 单斜率牛顿多边形 18
4.3. 配对的修正 24
参考文献 30

1. Introduction

设 G 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的连通约化群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。固定一个包含极大环面 T 的博雷尔子群 $B \subset G$，并令 $\mathrm{W} = \mathrm{W}(G, T)$ 为魏尔群，W 表示其共轭类的集合。令 $\mathcal{N}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中幂零元的集合，$\mathcal{N}$ 表示幂零轨道的集合。一个典型的幂零轨道记作 $\mathbf{O}$。

1.1. Kazhdan–Lusztig 映射与极小约化映射。

令 $L\mathfrak{g} = \mathfrak{g}((t))$ 为 $\mathfrak{g}$ 的环代数，并令 $L^+\mathfrak{g} = \mathfrak{g}[\![t]\!]$ 为其整部分。我们用 $L^\heartsuit\mathfrak{g} \subset L\mathfrak{g}$ 表示拓扑幂零正则半单元的集合。

1.1.1. *Kazhdan–Lusztig* 映射。 在 [KL88],Kazhdan 和 Lusztig 引入了一种映 p

$$\mathrm{KL} : \underline{\mathcal{N}} \longrightarrow \underline{\mathrm{W}},$$

定义如下。

给定一个幂零轨道 $\mathbf{O}$ 及其代表元 $\gamma_0 \in \mathbf{O}$，选取一个一般提升 $\gamma \in \gamma_0 + tL^+\mathfrak{g}$，使得 $\gamma \in L^\heartsuit\mathfrak{g}$。中心化子 LG_γ 随后在环群 LG中构成一个极大环面。Kazhdan 和 Lusztig 证明， LG_γ 的有理共轭类与一般提升的选取无关。此外， LG 中极大环面的有理共轭类与魏尔群 W 中的共轭类构成双射，从而得到映射 KL。

Kazhdan–Lusztig 映射长期以来一直被猜想是单射。Spaltenstein 计算了经典群 [Spa88,Spa90a] 以及大多数例外群 [Spa90b]中的这一映射。

近来，Yun [Yun21]通过另一种方法确立了 Kazhdan–Lusztig 映射的单射性：他构造了极小约化映射，该映射是 Kazhdan–Lusztig 映射的一个截面，从而证实了 Spaltenstein 对剩余例外情形的预言 [Spa90b] 。

1.1.2. 极小约化映射。由仿射 *Springer* 纤维定义的极小约化映射

$$\mathrm{RT}_{\min} : \underline{\mathrm{W}} \longrightarrow \underline{\mathcal{N}},$$

使用仿射 Springer 纤维定义。

令 $\mathrm{Gr} := LG/L^+G$ 为仿射格拉斯曼空间，它是 $\mathbb{C}$上的归纳射影归纳概形。对于 $\gamma \in L^\heartsuit\mathfrak{g}$，相应的仿射Springer纤维为

$$\mathrm{Gr}_\gamma := \{gL^+G \in \mathrm{Gr} \mid g^{-1}\gamma g \in L^+\mathfrak{g}\}.$$

存在一个自然的求值态射

$$\begin{aligned} ev_\gamma : \mathrm{Gr}_\gamma &\longrightarrow \underline{\mathcal{N}}, \\ gL^+G &\longmapsto g^{-1}\gamma g \pmod{t}. \end{aligned}$$

对于幂零轨道$\mathbf{O}$，令 $\mathrm{Gr}_{\gamma,\mathbf{O}}$ 表示ev_γ 在$\mathbf{O}$上的纤维，它是 Grγ的一个局部闭子概形。

定义 1.1 （最小约化）。 令 RT(γ) 为满足 $\mathrm{Gr}_{\gamma,\mathbf{O}}$非空的幂零轨道$\mathbf{O}$的集合。我们将 $\mathrm{RT}_{\min}(\gamma)$ 定义为 RT(γ) 中关于闭包序的极小元集合。

根据 [KL88，§4，推论 1], 正则幂零轨道总是包含于 RT(γ) 中，因此 $\mathrm{RT}_{\min}(\gamma)$ 非空。然而，由于幂零轨道上的闭包序仅为偏序，最小约化原则上未必唯一。

对于共轭类 $[w] \in$W，令 $(\underline{L^\heartsuit\mathfrak{g}})_{[w]}$ 表示 Kazhdan–Lusztig对应下类型为 $[w]$ 的元素子集。Yun 证明，存在浅元素的一个 Zariski开子集，记为 $(L^\heartsuit\mathfrak{g})^{sh}_{[w]}$，使得对于该子集中的任意 γ，$\mathrm{RT}_{\min}(\gamma)$ 总是由唯一的公共幂零轨道组成。此轨道记为 $\mathrm{RT}_{\min}([w])$，并定义一个映射

$$\mathrm{RT}_{\min} : \underline{\mathrm{W}} \longrightarrow \underline{\mathcal{N}},$$

Yun 证明，该映射是 Kazhdan–Lusztig 映射的一个截面。

与此同时，Yun [Yun21] 还表明，极小约化映射与 Lusztig 在 [Lus11], 中定义的一个映射一致，其定义不涉及仿射Springer纤维。最近，Shan、Yan 和 Zhao [SYZ25] 定义了两个与 Lusztig 的映射相容的分圆层映射，因此也与极小约化映射相容。

对于更一般的元素，Yun 提出了以下猜想。

猜想 1.2 (Yun [Yun21，猜想 1.15])。对于任意 $\gamma \in L^{\heartsuit}\mathfrak{g}$，最小约化集 $\mathrm{RT}_{\min}(\gamma)$ 由单个幂零轨道组成。

Yun 证明了 A 型、C 型和 G_2 中的这一猜想，[Yun21]，使用了其中引入的骨架概念（见定义 3.1）。他还根据魏尔群的共轭类，有条件地证明了这一结论对一般约化群成立。特别地，他证明了这一结论对所有经典群中的浅元素成立，并且 G_2。

1.2. **主要结果**。在本文中，我们使用不同于 [Yun21]的方法，证实了 Yun 关于所有经典群的猜想。

定理 1.3。设 G 是一个经典群。对于任意 $\gamma \in L^{\heartsuit}\mathfrak{g}$，极小约化集 $\mathrm{RT}_{\min}(\gamma)$ 由单个幂零轨道组成。此外，该轨道可以根据特征多项式 $\chi(\gamma) \in L^{+}\mathfrak{c}$显式确定。

现在我们简要概述我们的构造。关于唯一性和存在性的证明，尤其是 B 型和 D 型的情形，请参阅第4节开头的内容；在那里我们还会更明确地解释我们的策略。首先，我们引入以下概念。

定义 1.4。给定正整数 $(n,\ m)$，记 $n = mk + l$，其中 $0 \le l < m$。m-平衡分拆 定义为 n 的

$$[(k+1)^l,\ k^{m-l}],$$

其中，记号 a^b 表示部分 a 以重数 b出现。

对于任意 $\gamma \in L^{\heartsuit}\mathfrak{g}$，我们首先根据其牛顿多边形分解其特征多项式 $\chi(\gamma)$。对于每个因子 f_i，令 n_i 为其次数，令 m_i 为其常数项的阶。我们将 f_i 与 m_i-平衡分拆 n_i相关联。这些平衡分拆的集合记为 $\mathrm{RT}^{\mathrm{A}}_{\min}(\gamma)$。

对于 A 型和 C 型群，分拆 $\mathrm{RT}^{\mathrm{A}}_{\min}(\gamma)$ 与 γ的最小约化重合。特别地，当 $\gamma \in L^{\heartsuit}\mathfrak{sp}_{2n}$时，多项式 $\chi(\gamma)$ 是自对偶的，因此 $\mathrm{RT}^{\mathrm{A}}_{\min}(\gamma)$ 自动定义了一个 C 型分拆。

对于 B 型或 D 型群，情况更加微妙。一般而言，$\mathrm{RT}^{\mathrm{A}}_{\min}(\gamma)$ 不定义 B 型或 D 型分拆。此外，在 B 型或 D 型中，在所有大于 $\mathrm{RT}^{\mathrm{A}}_{\min}(\gamma)$ 的分拆中，极小元未必唯一（先验地）。

根据 Spaltenstein 的一项结果（见命题4.3），我们引入与 γ相关的可容许分拆 这一概念。随后我们证明，在所有支配 RT 的 B 型或 D 型可容许分拆中，$^{\mathrm{A}}_{\min}(\gamma$存在唯一一个极小者。我们证明，这个分拆恰好是 γ的最小约化的分拆。

极小约化的唯一性有若干重要推论。

自 Kazhdan–Lusztig [KL88] 的开创性工作以来，仿射 Springer 纤维在表示论和几何学中一直发挥着核心作用。Bezrukavnikov [Bez96]通过研究 $\mathrm{Gr}_{\gamma,\mathbf{O}^{\mathrm{reg}}}$ 的维数，证明了 [KL88] 中提出的仿射 Springer 纤维维数公式。对于各种幂零轨道 $\mathbf{O}$，分层 $\mathrm{Gr}_{\gamma,\mathbf{O}}$ 构成仿射 Springer 纤维 Gr_{γ} 的一个分层，其中 $\mathrm{Gr}_{\gamma,\mathbf{O}^{\mathrm{reg}}}$ 是开稠密分层。

因此，自然会问闭分层是什么。猜想 1.2 预言，存在唯一一个与最小约化相对应的闭分层。

定理1.3还有进一步的应用。根据 [Yun21，引理 11，6]，若猜想1.2成立，则$L^{\heartsuit}\mathfrak{c}$ 存在一种分层，其各个层可视为幂零锥中特殊片的仿射类比物 $\mathcal{N}$。

在 [JY23], 中，Jakob 和 Yun 研究了等斜 Deligne–Simpson 问题，并将其归结为齐次元素的猜想1.2 适用于 $L^{\heartsuit}\mathfrak{g}$。他们验证了齐次元素在经典情形下的猜想，并明确确定了极小约化。定理 1.3 中的构造与他们的结果相容，并可重现这些结果。

1.3. **论文结构**。 本文的结构安排如下。

在第 2 节中，我们回顾约化映射、幂零轨道和牛顿多边形的基本事实。第 2.5 小节介绍线性代数预备知识，讨论配备非退化配对及（反）自伴算子的向量空间。其中建立的结果将在分析 B 型和 D 型时反复使用。

在第 3 节中，我们讨论 A 型和 C 型的情形。首先，我们沿用 [Yun21] 的方法构造最小约化。作为下一节的预热，随后我们介绍一种基于牛顿多边形的替代构造，其关键步骤是将有理标准形共轭变换为具有最小约化的形式。对于 C 型，这种构造还需要显式构造一个非退化配对。

第 4 节专门讨论最棘手的情形，即 B 型和 D 型。在第 4.1 小节中，我们引入可容许分拆的概念，并证明在所有支配 A 型最小约化的可容许分拆中，存在一个唯一的候选分拆；如果它作为约化出现，则必定是极小约化。在第 4.2 和 4.3 小节中，我们证明该分拆确实是 γ 的约化。结合推论 4.8，这就完成了 B 型和 D 型中极小约化唯一性的证明。

记号。本文中，我们采用以下记号。

- 符号 $\equiv$ 始终表示模 2 同余，即 $\equiv$ (模 2)。
- 我们用 $\mathcal{O} = \mathbb{C}[\![t]\!]$ 表示关于一个变量 t 的形式幂级数环，并用 $\mathcal{K}$ 表示其分式域。
- 对于一个元素 $a \in \mathcal{O}$，我们用 $(a)_i$ 表示 a 中 t^i 的系数。

Acknowledgments

我们谨向 Yun 教授致谢，感谢他给予的许多有益讨论。本研究的部分工作是在王彬于香港中文大学从事博士后研究期间完成的，他谨此感谢 Michael McBreen 的支持。本研究的部分工作是在温雪晴访问高等研究院期间完成的，她衷心感谢高等研究院的热情接待。温耀雄感谢 Woonam Lim 在作者于延世大学逗留期间给予的支持，本研究的这部分工作即是在那里完成的。

2. 预备知识

2.1. **极小约化映射**。 我们将 γ 在 LG 中的中心化子记为 LG_γ，它也可以视为 Spec $\mathcal{K}$ 上的环面。

引理 2.1。 对于任意 $\mathbf{O} \in \mathrm{RT}(\gamma)$，环中心化子 LG_γ 在 $\mathrm{Gr}_{\gamma,\,\mathbf{O}}$ 上作用。

证明。 LG_γ 在 Gr_γ 上有自然作用：

$$gL^+G \mapsto hgL^+G,\ h \in LG_\gamma$$

通过左乘。注意，我们有以下交换图 :

$$\begin{array}{ccc} gL^+G & \xrightarrow{ev_\gamma} & \frac{\mathcal{N}}{G} \\ \downarrow{\scriptstyle h\cdot} & & \downarrow{\scriptstyle Id} \\ hgL^+G & \xrightarrow{ev_\gamma} & \frac{\mathcal{N}}{G} \end{array}$$

因为 $h \in LG_\gamma$. □

引理 2.2. 若 γ, γ' 属于 LG 的同一个共轭类，则 $\mathrm{RT}_{\min}(\gamma) = \mathrm{RT}_{\min}(\gamma')$。

证明。取 $h \in LG$ 使得 $h^{-1}\gamma' h = \gamma$，则 $g^{-1}\gamma g = (gh)^{-1}\gamma' gh \in L^+\mathfrak{g}$。我们有一个同构:

$$\mathrm{Gr}_\gamma \to \mathrm{Gr}_{\gamma'}, \quad gL^+G \mapsto hgL^+G$$

~它诱导出如下同构：对于每个幂零轨道 $\mathbf{O}$，$\mathbf{Gr}_{\gamma,\ \mathbf{O}} \xrightarrow[h\cdot]{=} \mathbf{Gr}_{\gamma',\ \mathbf{O}}$。 □

引理 2.3. 对于 γ, $\gamma' \in L^\heartsuit\mathfrak{g}$，若 $\chi(\gamma) = \chi(\gamma')$，则它们在 LG 下共轭，即在 $\mathcal{K}$ 上共轭。

证明。 由于 $\chi(\gamma) = \chi(\gamma')$ 且它们是正则半单的，存在 $g \in G(\mathcal{K})$ 使得 $\gamma' = g\gamma g^{-1}$。对于任意 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathcal{K}/\mathcal{K})$，我们有:

$$\sigma(g)\gamma\sigma(g)^{-1} = g\gamma g^{-1}$$

因此 $g^{-1}\sigma(g) \in LG_\gamma(\mathcal{K})$。这里我们将 LG_γ 视为 $\mathcal{K}$ 上的环面。

我们可以定义一个 1-余循环:

$$\sigma \mapsto g^{-1}\sigma(g) \in LG_\gamma(\overline{\mathcal{K}}).$$

由于 $\mathcal{K}$ 是一个剩余域代数闭的完备亨泽尔域，且 LG_γ 是 $\mathcal{K}$ 上的环面， $H^1(\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/\mathcal{K})\ LG_\gamma) = 0$。因此，对于任意$\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathcal{K}/\mathcal{K})$，存在 $\exists h \in LG_\gamma(\mathcal{K})$ 使得 $g^{-1}\sigma(g) = h^{-1}\sigma(h)$。注意， $\gamma' = (gh^{-1})\gamma(hg^{-1})$ 且 $gh^{-1} \in LG_\gamma(\mathcal{K})$。引理得证。□

结合引理2.2，我们得到以下推论。

推论 2.4. 约化类型 $\mathrm{RT}(\gamma)$ 仅取决于 $\chi(\gamma)$。

2.2. **幂零轨道**。 经典李代数的幂零轨道由满足适当奇偶性条件的分拆参数化；详细说明见 [CM 93] 。在本文中，我们始终将幂零轨道与标记它的分拆等同看待。

令 $\mathcal{P}(N)$ 表示 N 的分拆$\mathbf{d} = [d_1 \geq d_2 \geq \cdots]$集合。对于 $\varepsilon = \pm 1$，定义

$$\mathcal{P}_\varepsilon(N) = \left\{ \mathbf{d} \in \mathcal{P}(N) \;\middle|\; \#\{j \mid d_j = i\} \equiv 0 \text{ for all } i \text{ with } (-1)^i = \varepsilon \right\}.$$

众所周知， $\mathfrak{sl}_N$、 $\mathfrak{so}_{2n+1}$ 和 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 中的幂零轨道分别与 $\mathcal{P}(N)$、 $\mathcal{P}_1(2n+1)$ 和 $\mathcal{P}_{-1}(2n)$ 存在双射。

对于 $\mathfrak{so}_{2n}$，参数化由 $\mathcal{P}_1(2n)$ 给出，但所有部分均为偶数的分拆对应于两个不同的 SO_{2n}-轨道（所谓的非常偶 轨道），记作 $\mathbf{O}^{\mathrm{I}} \sqcup \mathbf{O}^{\mathrm{II}}$。

分拆上的支配序,

$$\mathbf{d} \geq \mathbf{f} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{k} d_j \geq \sum_{j=1}^{k} f_j \quad \text{for all } k,$$

在幂零轨道上诱导出一个偏序，该偏序与闭包序一致：$\mathbf{O}^{\mathbf{d}} = \bigsqcup_{\mathbf{f} \leq \mathbf{d}} \mathbf{O}_{\mathbf{f}}$。

2.3. **牛顿多边形**。对于 $G =$ 一般线性群$_n$，SL$_n$，Sp$_{2n}$，SO$_{2n}$ 和 $\gamma \in L^{\heartsuit}\mathfrak{g}$，我们定义 ：

$$\chi_\gamma(\lambda) = \det(\lambda - \gamma) \in \mathcal{O}[\lambda]$$

但在情形 e $G =$SO$_{2n}$ 中，我们跟踪的是 γ 的 Pfaffian，而不是其行列式。
对于 $G =$SO$_{2n+1}$，我们定义：

$$\chi_\gamma(\lambda) = \det(\lambda - \gamma)/\lambda \in \mathcal{O}[\lambda].$$

我们用 NP(γ) 表示 $\chi(\lambda)$ 的牛顿多边形。例如，当

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

此时，NP(γ) 定义为 $\{(\mathrm{ord}(a_i)\ n-i)\}_{i=0}^n$ 的凸包，其中 $a_0 = 1$，且 ord(0) $= +\infty$。

引理 2.5. 若牛顿多边形 NP(γ) 由斜率为 $\mu_1 > \cdots > \mu_r$ 的边组成，则有如下分解：

$$\chi_\gamma(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} f_i(\lambda)$$

其中， $f_i(\lambda)$ 的牛顿多边形仅由一条斜率为 μ_i 的边组成。

2.4. **B、C、D 型中的配对与李代数**。 本小节旨在阐明我们构造最小约化的具体方法。本文通过在 $\mathcal{O}^N$ 上固定一个非退化（斜）对称配对，将 $L^+\mathfrak{sp}_N$ 和 $L^+\mathfrak{so}_N$ 视为 $L^+\mathfrak{gl}_N$ 的子代数。因此，$L^+\mathfrak{sp}_N$ 或 $L^+\mathfrak{so}_N$ 中的元素可视为 $\mathfrak{gl}_N$ 中关于该配对反自伴的元素。

然而，为了便于构造最小约化，我们需要用不一定属于 L^+ Sp$_N$ 或 L^+ SO$_N$ 的元素对元素 γ 进行共轭。换言之，我们改变配对，以找到相对简单的矩阵表达式。现在说明这样做为何仍然可行。首先注意到：

引理 2.6。 所有非退化的对称（分别地，斜对称）配对在 $\mathcal{O}^N$ 上都等价，即只差一个基的选取。

更确切地说，记原先固定的配对为 g （稍后会明确给出）。假设我们找到一个元素 $h \in L$ GL$_N$，使得 $h\gamma h^{-1}$ 实现“最小约化”，并且与 $\mathcal{O}^N$上的新配对 g' 相容（稍后会明确给出）。根据上述引理，我们可以找到 $y \in L^+$GL$_N$，使得 $y^t g' y = g$。于是， $yh\gamma$（yh）$^{-1}$ 与 g相容。

对于 Sp$_N$，由于 $yh\gamma(yh)^{-1}$ 与 γ具有相同的特征多项式，因此根据推论 2.4，它在 γ中与其共轭 L Sp$_N$，由此得到最小约化。
对于 SO$_N$， $yh\gamma(yh)^{-1}$在 LO_N中与 γ共轭。当最小约化不是非常偶情形时，通过 LO_N 共轭就足以确定最小约化。对于非常偶情形，我们将留待推论 4.8讨论。

2.5. **伴随矩阵与配对**。 本节中，我们考虑域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间 V。假设我们有一个定义在 V 上的非退化对称配对 g，以及一个正则 可逆线性变换 $\Phi: V \to V$。若 $g(\Phi u, v) = g(u, \Phi v)$，则称 Φ 是自伴的（相对于 g）；若 $g(\Phi u, v) = -g(u, \Phi v)$，则称 Φ 是反自伴的。我们用 $\alpha(X)$ 表示 Φ 的特征多项式。

引理 2.7. 设 Φ 是自伴的，且 dim $V = 2n$。存在 V的一个极大各向同性子空间 W，使得 $\Phi(W) = W$ 当且仅当对某个多项式 $\beta(X)$，有 $\alpha(X) = \beta(X)^2$。若存在，则它是唯一的。

证明. 设存在这样一个极大各向同性子空间 W。非退化配对 g诱导出一个同构:

$$(V/W, \Phi) \to (W^*, \Phi^\vee)$$

因此， Φ 在 V 上的特征多项式应为$(\Phi|_W)^2$。

反过来，假设 $\alpha(X) = \beta(X)^2$。由于 Φ 是自伴的，像 $\beta(\Phi)V \subset V$ 是各向同性的。注意， Φ 是正则变换，因此其最小多项式与 $\alpha(X)$相同。由于 $\alpha(X) = \beta(X)^2$。考察其约当标准形可得，$\mathrm{rk}\ \beta(\Phi) = 1/2 \dim V$。

现在我们证明 $\beta(\Phi)V$是唯一选择。事实上，对于任意这样的 W，由于它在 Φ作用下保持不变，$\Phi|_W$的特征多项式只能是 $\beta(x)$。特别地， $W \subset \ker \beta(\Phi) = \beta(\Phi)V$。□

下面的引理可用类似方法证明。

引理 2.8。 设 Φ 是反自伴的，且$\dim V = 2n$。存在 V 的一个极大各向同性子空间 W ，使得 $\Phi(W) = W$ ，当且仅当对于某个多项式 $\beta(X)$，有 $\alpha(X) = \beta(X)\beta(-X)$。

我们将 Φ 的约当标准形记为 $\mathrm{diag}(J_i)$，其中 J_i 的特征值记为λ_i ，且 J_i 的大小为 m_i。特别地， λ_i 两两不同，并且我们将 $V = \oplus_i V_i$ 分解为，其中每个 V_i 都是广义 λ_i-特征子空间。

引理 2.9. 设 U 是一个维数为 m 的向量空间，且 $J \in \in \mathrm{End}(U)$ 只有一个约当块。设 U上有一个非退化对称配对 $g(Ju, v) = g(u, Jv)$。那么存在一个基 $\{e_i\}$，使得 $J(e_i) = \lambda_i e_i + e_{i-1}$，且 $g(e_i, e_{m+1-i}) = 1$，并且 $g(e_i, e_j) = 0, j \neq m + 1 - i$。

证明。 显然，我们可以找到一个满足第一个条件的基，记为 $\{f_i\}$。由于 $g(Ju, v) = g(u, Jv)$，我们可以验证

(1) $g(f_i, f_j) = g(f_l, f_k)$ if $i + j = l + k > m$,
(2) $g(f_i, f_j) = 0$ if $i + j \leq m$.

不失一般性，我们可以假设 $g(f_i, f_{m+1-i}) = 1$。现在只需解出关于 $\{a_i\}$的下列方程:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\dots & 1 & * \\ & & \dots & & \\ 0 & 1 & *\dots & * & * \\ 1 & * & *\dots & * & * \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\dots & 1 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 1 & 0\dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\dots & 0 & 0 \end{pmatrix} A$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{m-1} & a_m \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} \\ & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

显然可以验证，它有（有限多个）解。 □

我们将配对记作 g_0，其中 $g_0(e_i, e_{m-i}) = 1$且 $g_0(e_i, e_j) = 0, j \neq m - i$。下面的推论是显然的。

推论 2.10 。 假设 Φ 是自伴的，则存在一组基，使得 :

$$(V, \Phi, g) = \oplus(V_i, J_i, g_{0,i})$$

现在我们可以证明以下命题。

命题 2.11。 设 Φ 是自伴的，且 $\dim V = 2n$。存在 V的一个极大各向同性子空间 W，使得 $\operatorname{codim}_W \Phi(W) \cap W = 1$。

证明。 根据推论 2.10 和引理 2.7，只需为以下情形构造这样的极大各向同性子空间：

$$\oplus_{\dim V_i \equiv 1}(V_i, J_i, g_{0,i}).$$

对于每个 V_i，显然存在一个维数为 $(\dim V_i - 1)/2$ 的各向同性子空间 W_i，且它在 J_i 作用下保持不变。现在考虑以下构造：

$$(\oplus W_i^{\perp}/W_i, J_i = \lambda_i, g_{0,i} = 1)$$

只需构造一个 $\oplus W_i^{\perp}/W_i$ 的极大各向同性子空间 V，使得 $\operatorname{codim}_V(\operatorname{diag}(\lambda_i)(V) \cap V) = 1$。

由于 λ_i 两两不同，根据引理 2.7，不存在非零的各向同性子空间$\oplus W_i^{\perp}/W_i$在 ψ作用下保持不变：$= \operatorname{diag}(\lambda_i)$。令 $\dim \oplus W_i^{\perp}/W_i = 2\delta$。要构造这样的 V，只需找到 $v \in \oplus W_i^{\perp}/W_i$使得 $\langle v, \psi v, \ldots\ldots, \psi^{\delta-1} v\rangle$是各向同性的，而这样的对象确实存在。□

引理 2.12。 假设 Φ 是自伴的，且 $\dim V = 2n$。那么存在一个维数为 $n-1$ 的各向同性子空间 V_0，以及两个向量 v^- 和 v^+，满足以下条件：

(1) $v^{\pm}$ 与 V_0 的配对为零，且 $g(v^{\pm}, v^{\pm}) = 1$， $g(v^{\pm}, v^{\mp}) = 0$；(2) $\langle v^-\rangle + V_0 = \Phi(V_0 + \langle v^+\rangle)$。

证明。假设所有 V_i 的维数均为偶数，那么可以找到一个维数为 $n-1$ 且在 Φ 作用下稳定的各向同性子空间。记其为 V_0，并将 V_0 的正交补记为 $V_0^{\perp}$。特别地， $v^{\pm} \in V_0^{\perp}$ 且 $\dim V_0^{\perp}/V = 2$。由于 Φ 可逆，要满足条件 2，只需证明 $v^- \in \Phi(V_0 + \langle v^+\rangle)$。由于 V_0 是各向同性的，且在 Φ 作用下不变，只需为 $(V_0^{\perp}/V_0, \Phi)$ 构造 $v^{\pm}$，也就是二维情形，而这很容易做到。

假设结论不成立。对于引理 2.9 中分解里的每个 V_i，我们都可以找到一个维数为 $\lfloor \dim V_i / 2 \rfloor$ 的各向同性子空间V_i,0，它在 Φ 作用下保持不变。因此，只需对 $(\oplus_i V_0^{\perp}, V_0, , \oplus(\lambda_i))$ 构造，其中 λ_i是 Φ 的特征值。于是我们可以假设 $(V, \Phi) = \oplus_{i=2n}(V_i, \lambda_i)$，其中每个 $\dim V_i$ =1。只需找到一个向量 v_+，使得我们所需的三元组为 $(v^+, V_0 = \langle \Phi v^+, \ldots, \Phi^{n-1} v^+\rangle, \Phi^n v^+)$。注意， $g(v^+, V_0) = g(v^-, V_0) = g(V_0, V_0) = 0$ 已唯一确定了 $\langle v_0\rangle$，而对于这样的 v_0，它自动满足 $g(v^+, v^+) \neq 0, g(\Phi^n v^+, \Phi^n v^+) \neq 0$。□

以下引理的证明和构造与前一个引理第二部分类似。

引理 2.13. 设 Φ 是自伴的，且 $\dim V = 2n + 1$。那么存在一个维数为 n 的各向同性子空间 V_0，以及两个向量 $v^{\pm}$，满足以下条件：

(1) $v^{\pm}$ 与 V_0 的配对为零，且 $g(v^{\pm}, v^{\pm}) = 1$；(2) $V_0 \subset \Phi(V_0 + \langle v^+\rangle)$；(3) $\Phi(V_0) \subset \langle v^-\rangle + V_0$。

3. Construction of Minimal Reduction: Type A and C

3.1. **通过骨架构造**。 我们首先遵循 Yun 的思路，给出 A 型和 C 型中最小约化的构造 [Yun21]。一个密切相关的论证已在 [JY23],中出现过，不过该处仅限于牛顿多边形具有单斜率的元素。在后续小节中，我们将给出另一种构造，其策略也适用于特殊正交群。

定义 3.1. 对于魏尔群的每个共轭类 $[w]$，令 $LT_{[w]}$ 为 G 在 $\mathcal{K}$ 上对应于 $[w]$ 的极大环面。令 $L^+T_{[w]}$ 为 $LT_{[w]}$ 的唯一可解抛尔霍里子群。骨架定义为

$$\mathcal{X}^{[w]} := (\mathrm{Gr}_G)_{\mathrm{red}}^{L^+T_{[w]}}.$$

关系　系由以下结果给出。

引理 3.2 ([Yun21], 引理 7.3)。 对于任意 $\gamma \in L\mathfrak{g}_{[w]} \cap L^{\heartsuit}\mathfrak{g}$，我们有

$$\mathcal{X}^{[w]} \cap \mathrm{Gr}_{\gamma,\mathbf{O}} \neq \emptyset,$$

其中 $\mathbf{O} \in \mathrm{RT}_{\min}(\gamma)$.

对于 Levi 子群 M，我们有以下自然映射:

$$\iota^M : \{\text{nilpotent orbits in } M\} \to \{\text{nilpotent orbits in } G\}.$$

现在我们回顾 Yun 的以下有用引理。

引理 3.3。 [Yun21，引理 3。2] 如果 $\gamma \in L\mathfrak{m}$ 带有 $M \subset G$ 一个 Levi 子群，则 $\iota^M(\mathrm{RT}^M_{\min}(\gamma)) = \mathrm{RT}_{\min}(\gamma)$。

因此，我们有

推论 3.4。 只需考虑此类 γ的最小约化:

(1) 对于 A 型，$\chi_\gamma(\lambda)$ 是不可约的；(2) 对于 B 型、C 型、D 型，每个不可约因子 $f_i(\lambda)$ of χ_γ 都是自对偶的，即 $f_i(\lambda) = f_i(-\lambda)$。

3.1.1. *A 型。* 对于给定的 $\gamma \in L\mathfrak{t}_{[w]} \cap L^{\heartsuit}\mathfrak{g}$，假设其特征多项式可以分解为不可约因子:

$$f = \prod_i f_i$$

每个不可约的 $f_i \in \mathcal{K}[\lambda]$ 都定义了一个 $\mathcal{K}$ 的扩张 E_i，且满足 $[E_i : \mathcal{K}] = n_i$。

引理 3.5. 设 J 是大小为 n的正则若尔当标准形。那么对应于 J^m 的分拆是 n的 m-平衡分拆。

证明。 设 V 是 n维向量空间，其基为 $\{e_i\}$，满足:

$$Je_i = e_{i-1}.$$

于是 $J^m e_i = e_{i-m}$。引理得证。 □

命题 3.6. 假设 f_i 的每个常数项关于 $\mathcal{K}$的赋值为 m_i。那么，partitionof$\mathrm{RT}^{\mathrm{A}}_{\min}(\gamma)$是 n_i的 m_i-平衡分拆的集合。

证明。 首先，回顾一下，骨架 $\mathcal{X}^{[w]}$ 是 $\oplus E_i$的 $\oplus\mathcal{O}_{E_i}$-子模的集合。容易验证:

$$\mathrm{ord}_{\mathcal{O}_{E_i}} \lambda = m_i.$$

因此 $\lambda|_{\mathcal{O}_{E_i}} = \pi_i^m \varphi_i(\pi_i)$，其中 $\varphi(\pi_i)$ 是 $\mathcal{O}_{E_i}$ 中的一个单位。注意，π_i 具有分拆 $[n_i]$ 作用于$\Lambda/t\Lambda$。由引理 3.5 和引理 3.3，结论得证。 □

3.1.2. *C* 型。 对于给定的 $\gamma \in LT_{[w]} \cap L^{\heartsuit}\mathfrak{g}$，假设其特征多项式可分解为不可约因子：

$$f = \prod_i f_i$$

(1) $f_i(\lambda) = f_i(-\lambda)$，即次数 f_i 为偶数，我们称其为自对偶。
(2) 对于一对 f_i，$f_{i'}$，其中 $f_i(\lambda) = (-1)^{\deg f_i} f_{i'}(-\lambda)$。

对于每一对不可约因子（即第二种情形），我们都可以找到一个 Levi 子代数 $\mathfrak{m}$ 使得 $\gamma \in L\mathfrak{m} \cap L^{\heartsuit}\mathfrak{g}$。注意，$\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数是若干 A 型与一个 C 型的乘积。根据引理3.3，只需考虑 f 的所有不可约因子均为自对偶的情形。

因此，根据 γ，我们可以构造一个 $\mathcal{K}$ 的次数为 2n 的扩张：

$$E = \oplus E_i$$

其中 $[E_i : F_i] = 2$，$[F_i : \mathcal{K}] = n_i$。 E 具有自然的辛配对；对于每个 i，我们将 π_i 记为一致化子，将 $\mathfrak{d}_i$ 记为不同理想的生成元。然后定义一个辛配对：

$$\omega_i(x,y) = \mathrm{Tr}_{F_i/\mathcal{K}}\left(\mathfrak{d}_i \frac{x\sigma(y) - y\sigma(x)}{\pi_i}\right)$$

其在 $\oplus\mathcal{O}_{E_i}$ 上限制为非退化辛配对。Gr_G 的 $\mathbb{C}$-点是 E 中的自对偶$\mathcal{O}$-格。

命题 3.7. 假设 f_i 的每个常数项关于 $\mathcal{K}$ 的赋值均为 m_i。那么，$\mathrm{RT}^{\mathrm{C}}_{\min}(\gamma)$ 的分拆是 $2n_i$ 的 m_i-平衡分拆的集合。

证明。 首先，回忆一下，骨架 $\mathcal{X}^{[w]}$ 是一个单点 $\oplus\mathcal{O}_{E_i}$，参见 Yun [Yun21]。由于格上的非退化配对由以下给出： $\oplus\omega_i$因此只需分别求出每个 $\mathcal{O}_{E_i}$ 因子的最小约化。容易验证：

$$\mathrm{ord}_{\mathcal{O}_{E_i}}\lambda = m_i.$$

因此 $\lambda|_{\mathcal{O}_{E_i}} = \pi_i^m\varphi_i(\pi_i)$，其中 $\varphi(\pi_i)$ 是 $\mathcal{O}_{E_i}$中的一个单位。注意， π_i 在 $\mathcal{O}_{E_i}/t\mathcal{O}_{E_i}$上的作用具有分拆 $[2n_i]$ 。于是结论由引理 3.5 和引理 3.3得出。 □

3.2. **通过牛顿多边形构造。** 令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ 或 $\mathfrak{sp}_{2n}$。给定 $\gamma_0 \in L^{\heartsuit}\mathfrak{g}$，记$f(\lambda) = \chi_{\gamma_0}(\lambda)$。将其分解为若干因子，使每个因子的牛顿多边形都只有一个斜率：[1]

$$f = \prod_{i=1}^{r} f_i$$

也就是说，相应的牛顿多边形 NP_i 只有一个斜率，且各个 NP_i的斜率互不相同。我们可以验证，$\mathrm{R}(f)$与 $\mathrm{diag}\{(\mathrm{R}(f_1)\ldots,\mathrm{R}(f_r)\}$ 共轭，后者属于某个 Levi 子代数的环代数。

3.2.1. *A* 型。 根据推论 2.4、引理 2.5 和引理 3.3 ，在 A 型中，我们可以将问题约化到 f 不可约的情形；特别地， f 只有一个斜率。

现在，假设 $f = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ 且 $\mathrm{ord}_t a_n = m$。由于它只有一个斜率，因此有

$$\mathrm{ord}_t a_i \geq \left\lceil \tfrac{i\cdot m}{n} \right\rceil.$$

要证明命题 3.6，只需证明以下命题。

命题 3.8。 假设 $\chi_\gamma(\lambda) = f$ 如上所述。那么，$\mathrm{RT}^{\mathrm{A}}_{\min}(\gamma)$ 是相应的平衡分拆$[(k+1)^l,\ k^{m-l}]$。

[1]对于我们的显式共轭，我们不需要每个部分都是不可约的。

证明。 我们可以取 $\gamma = \mathrm{R}(f)$。我们定义

$$P = \operatorname{diag}\left(\{t^{m-1}\}^k, \cdots, \{t^l\}^k, \{t^{l-1}\}^{k+1}, \cdots, \{t\}^{k+1}, \{1\}^{k+1}\right).$$

这里， $\{t^i\}^k$ 表示 t^i 出现了 k 次。通过 $\mathrm{ord} a_i \geq \left\lceil \frac{i \cdot m}{n} \right\rceil$，我们可以验证 t:

$$P^{-1}\gamma P$$

属于 $L^+\mathfrak{g}$，且具有约化 $[(k+1)^l,\ k^{m-l}]$。

反过来，对于任何比平衡分拆更小的分拆，其一般牛顿多边形都高于 $\mathrm{NP}(f)$，这是不可能的。□

3.2.2. *C* 型。假设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$。那么 $f(\lambda) = f(-\lambda)$，并且 $f_i(\lambda) = f_i(-\lambda)$。写 te

$$\deg f_i = 2n_i, \qquad \mathrm{ord}_t(f_i(0)) = m_i, \qquad 2n_i = m_i k_i + l_i,\ \ 0 \leq l_i < m_i.$$

令 $\gamma_i = R(f_i)$。我们分别处理每个因子；为使记号简洁，在下面的构造中省略指标 i。

令 $P = \mathrm{diag}(t^{p_1}, \ldots, t^{p_{2n}})$，其中

$$p_j = \begin{cases} m - \left\lceil \frac{jm}{2n} \right\rceil, & 1 \leq j \leq n, \\ \left\lceil \frac{(2n+1-j)m}{2n} \right\rceil - 1, & n+1 \leq j \leq 2n. \end{cases}$$

特别地，

$$p_j + p_{2n+1-j} = m - 1. \tag{3.1}$$

引理 3.9. $P^{-1}\gamma P$ 是整的。

证明. 首先，我们可以验证，对于 $1 \leq j \leq 2n$, $p_j \leq \mathrm{ord}_t a_{2n+1-j} - 1$，即

$$m - \left\lceil \frac{jm}{2n} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{(2n+1-j)m}{2n} \right\rceil - 1.$$

这是成立的，因为 $\left\lceil \frac{jm}{2n} \right\rceil - \left\lfloor \frac{(j-1)m}{2n} \right\rfloor \geq 1$。因此 $P^{-1}\gamma P$是整的，并且 $\gamma(0)$ 的所有元素都为 0，除了可能的那些 $\overline{\gamma(0)_{i,i-1}}, \overline{2 \leq i \leq n}$。□

引理 3.10. 约化 $(P^{-1}\gamma P)(0)$ 的分拆为 $[(k+1)^l, k^{m-l}]$。

证明。 根据前一个引理， $P^{-1}\gamma P$是整的，并且 $(P^{-1}\gamma P)(0)$ 的所有元素都为 0，除了可能的 $\gamma(0)_{i,\ i-1},\ 2 \leq i \leq n$。

我们先证明

$$\#\{j \mid \mathrm{ord} P_j = l\} = k \ \text{ or } \ k+1 \quad \text{for} \quad 0 \leq l \leq m-1. \tag{3.2}$$

由于 m 是偶数，只需对序列 $\left\{\left\lceil \frac{jm}{2n} \right\rceil\right\}_{1 \leq j \leq n}$ 验证这一点。现在假设

$\left\lceil \frac{(j-1)m}{2n} \right\rceil < \Delta = \left\lceil \frac{jm}{2n} \right\rceil = \overline{\cdots = \left\lceil \frac{(j+\delta)m}{2n} \right\rceil < \Delta = \left\lceil \frac{jm}{2n} \right\rceil}$，$2n\Delta - jm \geq 2n - m$。如果 $\delta \leq k-2$，$2n\Delta - (j+\delta+1)m \geq 2n - (\delta+1)m > 0$，便会产生矛盾。因此我们证明了（3.2）。

因此，$(P^{-1}\gamma P)(0)$ 的分拆中只出现 k 或 $k+1$。由于（ P_j 的）阶从 0 到 $m-1$ 不等，因此该分拆必为 $[(k+1)^l,\ (k)^{m-l}]$。□

现在我们来确定阶“跳跃”的位置。

引理 3.11。 当且仅当 $p_i > p_{i+1}$

$$i = jk + \left\lfloor \frac{jl}{m} \right\rfloor, \qquad 1 \le j \le \frac{m}{2},$$

or

$$i = jk + \left\lceil \frac{jl}{m} \right\rceil, \qquad \frac{m}{2} + 1 \le j \le m - 1.$$

证明。 我们首先确定 $\left\lceil \frac{im}{2n} \right\rceil < \left\lceil \frac{(i+1)m}{2n} \right\rceil$ 何时成立。我们将 $i = jk + \delta,\ 0 \le \delta < k$ 改写为。现在我们有 $\Delta = \left\lceil \frac{(jk+\delta)m}{2n} \right\rceil < \left\lceil \frac{(jk+\delta+1)m}{2n} \right\rceil = \Delta + 1$。换言之，

$$\frac{(jk+\delta)m}{2n} \le \Delta < \frac{(jk+\delta+1)m}{2n}.$$

因此，我们有

$$\delta = (\Delta - j)k + \left\lfloor \frac{\Delta l}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{jl}{m} \right\rfloor.$$

注意到 $p_n > p_{n+1}$，并且对于 $j = \frac{m}{2}$，我们有 $jk + \left\lfloor \frac{jl}{m} \right\rfloor = n$。因此，我们验证了$1 \le i \le n$ 的引理。

类似地，对于 $n+1 \le i \le 2n$，当 $1 \le j \le \frac{m}{2} - 1$ 时，我们有 $i = 2n - jk - \left\lfloor \frac{jl}{m} \right\rfloor$。引理得证。□

现在我们需要构造斜对称矩阵 g，使得 $g(P^{-1}\gamma P) = -(P^{-1}\gamma P)^{\vee} g$。

首先，我们在模 $\mathcal{E} = \mathcal{O}[\lambda]_{(f(\lambda))}$ 上定义一个配对 $\widetilde{g}$，其基为 $\{1, \lambda, \cdots, \lambda^{2n-1}\}$。因此， λ 在 $\mathcal{E}$ 上的作用矩阵为 $\mathrm{R}(f)$。并且我们定义

$$\widetilde{g}(\lambda^{\alpha}, \lambda^{\beta}) = \mathrm{Tr}\left(\frac{\lambda^{\alpha}\sigma(\lambda^{\beta})}{f'(\lambda)} \right)$$

如 [HN第 3.2 节中所述， $\sigma(\lambda^{\beta}) = (-1)^{\beta}\lambda^{\beta}$是对合。有 $\widetilde{g}\mathrm{R}(f) = -\mathrm{R}(f)^{\vee}\widetilde{g}$。此外，我们有以下估计。

引理 3.12. $\widetilde{g}$ 是 非退化斜对称，且 $\mathrm{ord}_t(\widetilde{g})_{i,j} \ge \mathrm{ord}\, t^{a_{i+j-2n-1}}$，对于 $i+j \ge 2n+1$.

证明。 注意到 $(\widetilde{g})_{i,\ j} = 0$ 对于 $i + j \le 2n$，以及 $(\widetilde{g})_{i,\ j} = \pm 1$ 对于 $i + j = 2n + 1$，因此 $\widetilde{g}$ 是非退化的。要证明 $\widetilde{g}$ 是斜对称的，只需注意到 $(\widetilde{g})_{i,\ j} = 0$ 若 $i + j \equiv 0$，因为$f(\lambda)$ 是自对偶的。

现在我们计算 $\mathrm{ord}_t(\widetilde{g})_{i,\ j}$。注意到 $(\widetilde{g})_{i,\ j} = (-1)^{j+\beta}(\widetilde{g})_{\alpha,\ \beta}$ 只要 $i + j = \alpha + \beta$。因此我们计算 $(\widetilde{g})_{2i+1,\ 2n}$ 对于 $1 \le i \le n - 1$。

通过直接计算，我们得到 $(g_0)_{3,\ 2n} = a_2$ 以及以下递推关系：

$$(g_0)_{2i+1,2n} = a_{2i} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{2j} \cdot (g_0)_{2i-2j+1,2n}.$$

为了估计$(g_0)_{2i+1,2n}$的阶，我们对 i 使用归纳法，并再次使用递推关系。当$i = 1$ 时，我们有$(g_0)_{3,\ 2n} = a_2$，因此 $\mathrm{ord}_t(g_0)_{3,2n} \ge \mathrm{ord}_t a_2$。根据递推关系，我们需要考虑 $\mathrm{ord}\, t^{a_{2j}}(g_0)_{2i-2j+1,2n}$，其中 $1 \le j \le i - 1$ 满足

$$\mathrm{ord}_t a_{2j}(g_0)_{2i-2j+1,\,2n} \ge \mathrm{ord}_t a_{2j} + \mathrm{ord}_t a_{2i-2j}$$

由归纳法可得。回顾一下，对于 $1 \le \alpha \le n$，我们有 $\mathrm{ord}_t a_{2\alpha} \ge \left\lfloor \frac{2\alpha m}{mk+l} \right\rfloor$。于是

$$\mathrm{ord}_t a_{2j}(g_0)_{2i-2j+1,2n} \ge \mathrm{ord}_t a_{2j} + \mathrm{ord}_t a_{2i-2j} \ge \mathrm{ord}_t a_{2i}$$

因此 $\mathrm{ord}_t(g_0)_{2i+1,\ 2n} \ge \mathrm{ord}_t a_{2i}$。 □

因此，我们定义 $g := P^{\vee}\tilde{g}P/t^{m-1}$，然后

引理 3.13. 配对 g 是整、非退化且斜对称的，并且满足$g(P^{-1}\gamma P) = -(P^{-1}\gamma P)^{\vee}g$。

证明。 要证明 g 是整的，我们只需证明:

$$p_i + p_j + \mathrm{ord}_t a_{i+j-2n-1} \geq m-1, i+j > 2n+1. \tag{3.3}$$

我们可以假设 $i \geq j$。因此 $p_i = \left\lceil \frac{(2n+1-i)m}{2n} \right\rceil - 1$。若 $1 \leq j \leq n$，（3.3）由下式得出

$$\left\lceil \frac{(1-i)m}{2n} \right\rceil - \left\lceil \frac{jm}{2n} \right\rceil + \left\lceil \frac{(i+j-1)m}{2n} \right\rceil \geq 0.$$

若 $n+1 \leq j \leq 2n$，（3.3）由下式得出

$$\left\lceil \frac{(1-i)m}{2n} \right\rceil + \left\lceil \frac{(1-j)m}{2n} \right\rceil + \left\lceil \frac{(i+j-1)m}{2n} \right\rceil \geq 1.$$

由于 $g_{ij} = \pm 1$ 对于 $i+j = 2n+1$，g 是非退化的。最后一点自然成立。 □

命题 3.14. $\left(\gamma = \mathrm{diag}\{P_i^{-1}\gamma_i P_i\}_{i=1}^r,\quad g = \mathrm{diag}\{g_i\}_{i=1}^r\right)$ 的约化给出了 $\gamma_0 \in L^{\heartsuit}\mathfrak{sp}_{2n}$唯一的 C 型极小约化。

证明。 这里，引理 3.3 不适用。不过我们已经看到，γ 的约化在 A 型中是极小且唯一的；现在我们构造了一个与γ相容的非退化斜对称 g，那么该约化在 C 型中必定是极小且唯一的，见小节2.4。 □

4. Construction of Minimal Reduction: Types B and D

现在我们转向经典李代数中剩余的、也是最棘手的情形，即特殊正交李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ 和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$。

给定 $\gamma_0 \in L^{\heartsuit}\mathfrak{g}$，则 $\chi_\gamma(\lambda)$ 是一个次数为 $2n$ 的自对偶多项式。绘制 $\chi_{\gamma_0}(\lambda)$ 的牛顿多边形可得到一个因式分解

$$\chi_{\gamma_0}(\lambda) = \prod_i f_i(\lambda), \tag{4.1}$$

其中每个因子 $f_i(\lambda)$ 的牛顿多边形都具有单斜率 μ_i，且这些斜率严格递减:

$$\mu_1 > \mu_2 > \cdots.$$

每个 $f_i(\lambda)$ 都是自对偶的。令 $2n_i$ 表示 $f_i(\lambda)$ 的次数，并令 m_i 表示常数项 $f_i(0)$ 的 t-进赋值。

如前几节所述，对于每个因子 $f_i(\lambda)$，我们构造一个矩阵 γ_i，其特征多项式为 $f_i(\lambda)$，且其 A 型约化是平衡的。在 B 型和 D 型中会出现两个新的困难。

（i）分拆的可容许性。收集与所有 γ_i 相关联的平衡分拆（并且在 B 型中额外加入部件 $[1]$）得到一个分拆，记为 $\mathbf{d}_A$。一般而言，对于 B 型或 D 型，$\mathbf{d}_A$ 不一定是可容许的（就偶部上的奇偶性条件而言）。

（ii）相容的非退化形式的存在性。与辛（C 型）情形不同，为每个 γ_i 构造相容的非退化对称双线性形式可能颇为微妙；在某些情况下，单个因子上不存在这样的形式。

本节安排如下。

步骤 1. 我们证明存在唯一一个可容许的B 型或 D 型分拆（见定义4.2），它在所有支配$\mathbf{d}_A$的可容许分拆中是最小的。此外，如果该分拆是 γ_0的一个约化，那么 γ_0 的最小约化是唯一的，其关联分拆恰好就是以这种方式得到的分拆。

步骤 2. 对于每个因子 $f_i(\lambda)$，我们构造一对 (γ_i, g_i)，使得 γ_i 的 A 型约化是平衡的，且 $\mathrm{ord}_t(\det g_i) = m_i$。当 $m_i \equiv 0$ 时，我们进一步将 (γ_i, g_i) 共轭为 (γ_i', g_i')，使得 γ_i' 的约化符合步骤 1 的预测，且 g_i' 非退化。

步骤 3. 当 $m_i \equiv 1$ 时，我们将连续因子 $\prod_{j=i}^{i+r} f_j$（如 §4.1.2 中的 (D2) 型情形），其中 r 的选取使两个“奇”块配对。[2] 然后，在§4.3 中，我们将这对 $\left(\bigoplus_{j=i}^{i+r}\gamma_j,\ \bigoplus_{j=i}^{i+r} g_j\right)$ 共轭为一对新对象 (γ, g)，使得 γ 的约化与步骤 1 预测的分拆一致，且 g 非退化。

由此，我们完成主定理的证明。

定理 1.3 的证明。A 型和 C 型的情形由命题 3.6 和 3.7（等价地，命题 3.8 和 3.14）得出。对于 B 型和 D 型的情形，假设$\chi_\gamma(\lambda)$按 (4.1) 分解，则我们在 §4.1.2 中构造了如 $(\star\star)$ 和 $(\star)$ 所示的分拆 $\mathbf{d}_B$ 和 $\mathbf{d}_D$。命题 4.4、推论 4.8 和命题 4.9 表明，如果 $\mathbf{d}_B$ 或 $\mathbf{d}_D$ 是 γ的约化，那么它必定是最小且唯一的。接着，在命题 4.22 和 4.21 中，我们证明了 $\mathbf{d}_B$ 和 $\mathbf{d}_D$ 可实现为 γ的约化。□

4.1. **寻找最小约化**。在本小节中，我们说明如何将分拆$\mathbf{d}_A$ 修改为 B 型或 D 型的可容许分拆，并使其具有如下性质：如果它是γ_0的一个约化，那么它就是 γ_0的唯一最小约化。

然而我们强调，最小约化不仅取决于 $\chi_{\gamma_0}(\lambda)$ 的系数赋值，也取决于这些系数之间的某些关系。这种微妙的依赖性表明，牛顿多边形本身并不总是足以确定最小约化。

4.1.1. 可容许分拆。根据 [Spa88], 我们引入如下记号。

定义 4.1。设 $d \in \mathbf{d}$ 是分拆中的一部分，且 $d \equiv 0$ 和

$$d_{i-1} > d_i = \cdots = d_{i+j-1} = d > d_{i+j}$$

对于某个 i an $\mathbf{d}$ j。记 $d_{<i} := \sum_{\alpha<i} d_\alpha$。于是我们定义伴随分次多项式

$$\mathrm{gr}_{\mathbf{d},d}(f) := \sum_{\alpha=0}^{j} \left(a_{d_{<i}+\alpha d}\right)_{i+\alpha} X^{j-\alpha} \in \mathbb{C}[X].$$

定义 4.2. 考虑 $\gamma \in L^+\mathfrak{so}_{2n}$，如果对于任意

$$d_{2i} > d_{2i+1} = d_{2i+2} = \cdots = d_{2i+2j} = d > d_{2i+2j+1}.$$

当 $d \equiv 0$ 时，多项式 $\mathrm{gr}_{\mathbf{d},\ d}$ 是 $\mathbb{C}[X]$中的一个平方。同样，我们也可以在 B 型情形中定义相同的概念。

命题 4.3。[Spa88，命题 6。4][3] 设 $\gamma \in L^+\mathfrak{g}$ 是 B 型或 D 型中的一个元素。设与 $\gamma(0)$ 相关联的分拆为 $\mathbf{d}$，则$\mathbf{d}$ 对 γ是可容许的。

[2]这里，r是满足 $m_{i+r} \equiv 1$和 $m_{i+1}, \ldots, m_{i+r-1} \equiv 0$.[3]的最小整数。在证明的断言 5 中，应改为读作 $y \in x + \mathfrak{mo}_N(\mathcal{O})$。

4.1.2. 修改分拆。对于分解 $f_i(\lambda)$ 中的每个因子，设 $f_i(\lambda)$ 的次数为 $2n_i$，$\mathrm{ord}_t a_{2n_i} = m_i$，并写作 $2n_i = m_i k_i + l_i$ 其中 $0 \le l_i < m_i$。

令 $\mathbf{d}_i$ 表示与 $f_i(\lambda)$ 相关联的 A 型最小约化分拆，即 $\mathrm{RT}^{\mathrm{A}}_{\min}(f_i)$。定义：

$$\mathbf{d}_A = \begin{cases} \mathrm{Re}\,(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots) \cup [1], & \text{in type B,} \\ \mathrm{Re}\,(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots), & \text{in type D.} \end{cases}$$

这里，Re(...) 表示将各部分重新排列为非递增顺序。注意，只有当 $(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_{i+1})$ 具有如下形式时，才会重新排序

$$\left((k_i+1)^{l_i}, k_i^{m_i-l_i}, (k_{i+1}+1)^{l_{i+1}}, k_{i+1}^{m_{i+1}-l_{i+1}}\right)$$

使得 $k_i = k_{i+1}$。

现在我们说明如何修改分拆 $\mathbf{d}_A$，以得到 D 型约化。

($\star$) **D 型构造：**.

(D1) 若 $m_1 \equiv 0$: **(D1.1)** 若 $l_1 \neq 0$ 或 $k_1 \equiv 1$之一成立，则令 $\widetilde{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{d}_1 = [(k_1+1)^{l_1}, k_1^{m_1-l_1}]$。

(D1.2) 若 $l_1 = 0$ 且 $k_1 \equiv 0$，则 $\mathbf{d}_1 = [k_1^{m_1}]$ 已经是 D 型，我们按如下方式修改：

(D1.2.1) 若 $\mathrm{gr}_{\mathbf{d}_A, k_1}(\chi_{\gamma_0}(\lambda))$ 是一个平方（即命题 4.3 所述意义下），则令 $\widetilde{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{d}_1$；**(D1.2.2)** 否则，令 $\widetilde{\mathbf{d}}_1 = [k_1+1, k_1^{m_1-2}, k_1-1]$。

(D2) 如果 $m_1 \equiv 1$:

令 $r \ge 2$ 为满足 $m_2 \equiv \cdots \equiv m_{r-1} \equiv 0$ 但 $m_r \equiv 1$ 的最小整数。然后我们修改

$$(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_r) \quad \text{to} \quad (\widetilde{\mathbf{d}}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{r-1}, \widetilde{\mathbf{d}}_r),$$

也就是说，我们保持$\mathbf{d}_i$不变，对 $i = 2, \ldots, r-1$也是如此，而只对

$$\mathbf{d}_1 = \left[(k_1+1)^{l_1}, k_1^{m_1-l_1}\right], \qquad \mathbf{d}_r = \left[(k_r+1)^{l_r}, k_r^{m_r-l_r}\right]$$

结果为：

$$\widetilde{\mathbf{d}}_1 = \left[(k_1+1)^{l_1+1}, k_1^{m_1-l_1-1}\right], \qquad \widetilde{\mathbf{d}}_r = \begin{cases} \left[(k_r+1)^{l_r-1}, k_r^{m_r-l_r+1}\right], & l_r \neq 0; \\ \left[k_r^{m_r-l_r-1}, k_r-1\right], & l_r = 0. \end{cases}$$

通过重新排序和归纳法，我们得到一个 D 型分拆$\mathbf{d}_D$。

命题 4.4. 设 $\gamma_0 \in L^{\heartsuit}\mathfrak{so}_{2n}$，并设 $\mathbf{d}_A := \mathrm{RT}^{A}_{\min}(\gamma_0)$ 是γ_0的 A 型最小约化，其中将 γ_0 视为 $L^{\heartsuit}\mathfrak{sl}_{2n}$的一个元素。设$\mathbf{d}_D$ 为上文式 ($\star$) 中的分拆。则$\mathbf{d}_D$ 是支配$\mathbf{d}_A$的唯一最小 D 型可容许分拆，即$\mathbf{d}_D \ge \mathbf{d}_A$，并且对任意满足$\mathbf{d}'_D \ge \mathbf{d}_A$的 D 型可容许分拆$\mathbf{d}'_D$，都有$\mathbf{d}'_D \ge \mathbf{d}_D$。

证明之前，我们先记录以下关于 D 型分拆的有用引理。

设$\mathbf{d}_A = \mathrm{Re}(\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_r)$ 满足上文的条件 (D2)。用 $\#\mathbf{d}_A$ 表示$\mathbf{d}_A$中的部分数。设$\mathbf{d}'$ 是一个 D 型分拆。我们在$\mathbf{d}'$ 末尾补上 0，使得 $\#\mathbf{d}' = \#\mathbf{d}_A$，并将$\mathbf{d}' = [\mathbf{d}'_1, \ldots, \mathbf{d}'_r]$ 重写，其中 $\#\mathbf{d}'_i = \#\mathbf{d}_i$。显然，$\mathbf{d}'$ 属于以下两种情形之一：

情形 1： $\mathbf{d}'_i = \mathbf{d}_i$ 对所有 $i = 2, \ldots\ldots, r-1$；**情形 2：**

存在 $2 \le j \le r-1$，使得 $\mathbf{d}'_j \neq \mathbf{d}_j$。

引理 4.5。在上述情形 1 中，与 γ_0 相容的最小 D 型分拆 $\mathbf{d}_D$ 是唯一的。此外，

$$\mathbf{d}_D = \mathrm{Re}\left(\widetilde{\mathbf{d}}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{r-1}, \widetilde{\mathbf{d}}_r\right),$$

其中，每个（$\mathbf{d}_1$,$\mathbf{d}_r$）均按上述条件 (D2) 定义。

证明。 我们只需处理 $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_r) = \left((k_1+1)^{l_1}, k_1^{m_1-l_1}, (k_r+1)^{l_r}, k_r^{m_r-l_r} \right)$。由于 $m_1 \equiv m_r \equiv 1$，可分为以下几种情况：

(1) $k_1, k_r \equiv 0$，接着是 $l_1, l_r \equiv 0$；(2) $k_1, k_r \equiv 1$，接着是 $l_1, l_r \equiv 1$；(3) $k_1 \equiv 1$、$k_r \equiv 0$，接着是 $l_1 \equiv 1$、$l_r \equiv 0$；(4) $k_1 \equiv 0$、$k_r \equiv 1$，接着是 $l_1 \equiv 0$、$l_r \equiv 1$。

我们仅证明情形 (1)，其他情形的证明类似。

首先，假设 $k_1 \neq k_r$，令 $\mathbf{d}' = [d'_1, d'_2, \ldots]$ 为一个满足 $\mathbf{d}' > [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_r]$ 的 D 型分拆。于是 $\sum_{i=1}^{m_1} d'_i \geq m_1 k_1 + l_1 = 2n_1$。

我们断言等号不可能成立。否则，

$$[d'_1, \ldots d'_{2n_1}] = [(k_1+1)^{l_1}, k_1^{m_1-l_1}].$$

由于$\mathbf{d}'$是 D 型，因此对于某个 $q \equiv 1$，有 $d'_{2n_1+1} = \ldots = d'_{2n_1+q} = k_1$。在这种情况下，我们可以计算 $\mathrm{gr}_{\widetilde{\mathbf{d}'}, k_1}$，它是一个奇次数多项式，因此这种情况不可能发生。于是，由于$\widetilde{\mathbf{d}'}$是 D 型，$[d'_1, \ldots, d'_{2n_1}] \geq \mathbf{d}_1$，，并且根据$\mathbf{d}_r$的构造，我们得出$\mathbf{d}' \geq \mathbf{d}_D = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_r]$。

若 $k_1 = k_r$，则在这种情况下，$r = 2$。于是

$$\mathrm{Re}\left((k_1+1)^{l_1}, k_1^{m_1-l_1}, (k_r+r)^{l_r}, k_r^{m_r-l_r} \right) = [(k_1+1)^{l_1+l_r}, k_1^{m_1+m_r-l_1-l_r}]$$

它自动属于 D 型。并且 $\mathrm{gr}_{\mathbf{d}_D, k_1}$ 的计算表明，它是一个次数为 0 的多项式，因此它可用于 γ_0。此外，很容易看出，它与 $\mathrm{Re}\left(\widetilde{\mathbf{d}_1}, \widetilde{\mathbf{d}_2}\right)$一致。 □

引理 4.6. 在情形 2 中，D 型分拆$\mathbf{d}'$要么严格大于情形 1 中的最小分拆，要么存在一个区块

$$d'_{2i_0} > d'_{2i_0+1} = d'_{2i_0+2} = \cdots = d'_{2i_1} > d'_{2i_1+1}, \quad \text{with } d'_{2i_1} \equiv 0,$$

落在区间 $[\mathbf{d}'_j, \mathbf{d}'_{j+1}]$ 内，其中某个 j 满足条件，但该区块不包含在 $[\mathbf{d}j, \mathbf{d}_{j+1}]$中。此外，存在一个正奇整数 k，使得

$$d'_{2i_0+1}, \ldots, d'_{2i_0+k} \in \mathbf{d}'_j, \qquad d'_{2i_0+k+1}, \ldots, d'_{2i_1} \in \mathbf{d}'_{j+1}.$$

证明。 与引理 4.5的证明类似，我们有以下几种情形：

(1) $k_1, k_r \equiv 0$，则 $l_1, l_r \equiv 0$；(2) $k_1, k_r \equiv 1$，则 $l_1, l_r \equiv 1$；(3) $k_1 \equiv 1, k_r \equiv 0$，则 $l_1 \equiv 1, l_r \equiv 0$；(4) $k_1 \equiv 0, k_r \equiv 1$，则 $l_1 \equiv 0, l_r \equiv 1$。

我们仅证明情形 (1)，其他情形可类似地推出。

令 $\mathbf{d}' = [d'_1, d'_2, \ldots]$, $\sum_{i=1}^{m_1} d'_i \geq 2n_i$，若等式成立，则对某个 $q \equiv 1$，有 $d''_{2n_1+1} = \ldots = d''_{2n_1+q} = k_1$。否则，$\sum_{i=1}^{m_1} d'_i \geq \mathbf{d}_1$，此外，由于 $\mathbf{d}_r < \mathbf{d}_r$，我们得出 $\mathbf{d}' \geq \mathbf{d}_D$。 □

命题的证明 *4.4*. 不失一般性，我们假设不存在

$$(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_{i+1}) = \left((k_i+1)^{l_i}, k_i^{m_i-l_i}, (k_{i+1}+1)^{l_{i+1}}, k_{i+1}^{m_{i+1}-l_{i+1}} \right)$$

使得 $k_i = k_{i+1}$。否则，根据引理 4.5，我们将 $(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_{i+1})$ 替换为

$$\left((k_i+1)^{l_i+l_{i+1}}, k_i^{m_i+m_{i+1}-l_i-l_{i+1}} \right).$$

于是，$\mathbf{d}_A = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots]$ 并且 $\mathbf{d}_D = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots]$。

令 $\mathbf{d}' = [d'_1, d'_2, \ldots] = [\mathbf{d}'_1, \mathbf{d}'_2, \ldots]$ 为一个比 $\mathbf{d}_A$ 更大的可容许的 D 型分拆，并在 $\mathbf{d}'$ 中填入 0，使得 $\#\mathbf{d}'_i = \#\mathbf{d}_i$。如果 $\mathbf{d}_1$ 满足条件 (D1.2.2)，即 $\mathrm{gr}_{\mathbf{d}_A, k_1}(\chi_{\gamma_0}(\lambda))$ 不是一个平方，则存在 使得 。

由于 $\mathbf{d}'$ 是 D 型且 $\widetilde{\ }\mathbf{d}_1 = [k_1^{m_1}]$，因此 $j = 1$ 且 $\mathbf{d}'_1 \geq \mathbf{d}_1$。对于其他条件 (D1.1) 和 (D1.2.1)，$\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1,$ ，于是 $\widetilde{\ }\mathbf{d}'_1 \geq \mathbf{d}_1$。

若 $\mathbf{d}_1$ 满足条件 (D2)，则已在引理 4.5,4.6中处理。注意，引理 4.6 中的第二种情况不可能发生，因为 $\mathrm{gr}_{\mathbf{d}',d'_{2i_1}}$ 是奇次数多项式，不可能是平方。因此，$\widetilde{\ }\mathbf{d}'_1 \geq \mathbf{d}_1$。由归纳法可得结论。

□

在 D 型中，两个在 O_{2n} 下共轭的极偶轨道对应于同一个分拆，因此在这种情况下，仅证明极小约化的分拆唯一还不足以确定极小约化唯一。不过，下面的引理将处理这种情况。

设 $\mathbf{O}^i$, $i = \mathrm{I,II}$ 是两个由 O_{2n}共轭的极偶轨道，并用 $\mathbf{d}$ 表示它们共同的分拆。我们考虑前面定义的 $(L^+\mathfrak{so}_{2n})_{\mathbf{O}^i}$ ，并将 $(L^+\mathfrak{so}_{2n})_{\mathbf{O}^i}$ 在 $L^+\mathfrak{c}$中的共同像记为 $L^+\mathfrak{c}_{\mathbf{d}}$。注意，$(L^+\mathfrak{so}_{2n})_{\mathbf{O}^i}$ 和 $L^+\mathfrak{c}_{\mathbf{O}}$ 是局部闭的。

引理 4.7。对于任意 $\gamma \in (L^+\mathfrak{so}_{2n})_{\mathbf{O}^{\mathrm{I}}}$ 和 $g \in L\mathrm{SO}_{2n}$，则

$$\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\gamma) \notin \left(L^+\mathfrak{so}_{2n}\right)_{\mathbf{O}^{\mathrm{II}}}.$$

证明。此证明是 [BK18] 的命题 5.3（证明中的情形 (4)）或 [WWW25] 的命题 4.24 的局部类比。特别地，若将 f 在 $L^+\mathfrak{c}_{\mathbf{d}}$ 中的元素视为特征多项式，则对于任意 $d \in \mathbf{d}$，由定义 4.1 定义的伴随多项式 $\mathrm{gr}_{\mathbf{d},d}$ 根据命题 4.3 是一个平方。现在，由于 $\mathbf{d}$ 是一个非常偶的分拆，令 $d_1 = \max\{d \in \mathbf{d}\}$ 和 $d_r = \min\{d \in \mathbf{d} \mid d \neq 0\}$，我们看到 $\mathrm{gr}_{\mathbf{d},d_1}$ 是首一多项式，而 $\mathrm{gr}_{\mathbf{d},d_r}$ 的常数项由 Pfaffian 的次数为 $\frac{|\mathbf{d}_2|}{2}$ 的项的平方给出。另一方面，若 $d_i > d_{i+1} \in \mathbf{d}$，我们看到 $\mathrm{gr}_{\mathbf{d},d_i}$ 的常数项等于 $\mathrm{gr}_{\mathbf{d},d_{i+1}}$ 的首项系数。通过与 [BK18] 的命题 5.3（证明中的情形 (4)）或 [WWW25]，的命题 4.25 类似的论证，我们看到映射

$$\left(L^+\mathfrak{so}_{2n}\right)_{\mathbf{O}^{\mathrm{I}}} \bigsqcup \left(L^+\mathfrak{so}_{2n}\right)_{\mathbf{O}^{\mathrm{II}}} \longrightarrow L^+\mathfrak{c}_{\mathbf{d}}$$

可通过 $L^+\mathfrak{c}_{\mathbf{d}}$ 的一个覆盖映射，该覆盖是不交并的两个同构空间。此外，此映射将 $(L^+\mathfrak{so}_{2n})_{\mathbf{O}^{\mathrm{I}}}$ 或 $(L^+\mathfrak{so}_{2n})_{\mathbf{O}^{\mathrm{II}}}$ 映射到不同的分支。然而， g 在 γ 上的伴随作用不会改变其在 $L^+\mathfrak{c}_{\mathbf{d}}$ 中的像，也不会改变其在该覆盖中的像，这意味着 $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\gamma) \notin (L^+\mathfrak{so}_{2n})_{\mathbf{O}^{\mathrm{II}}}$。□

推论 4.8。对于任意 $\gamma \in L^{\heartsuit}\mathfrak{so}_{2n}$，如果 $\mathrm{RT}^{\mathrm{A}}_{\min}(\gamma)$ 是一个分拆为非常偶的幂零轨道，那么 $\mathrm{RT}_{\min}(\gamma)$ 是单元素集。

(⋆⋆) B 型构造：。设 $\chi_\gamma(\lambda)$ 的常数项的阶为 m。回顾一下，在 B 型情形中，A 型最小约化为

$$\mathbf{d}_A = \mathrm{Re}\,(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots) \cup [1].$$

我们如下定义修正分拆$\mathbf{d}_B$：

(B1) 如果 $m \equiv 0$，定义

$$\mathbf{d}_B := [\mathbf{d}_D, 1],$$

其中，$\mathbf{d}_D$是通过对（$\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$，...）应用与 D 型情形相同的修改规则得到的。

(B2) 若 $m \equiv 1$，假设存在一个指标 $r > 1$，使得 $m_r \equiv 1$ 且 $m_j \equiv 0$（那么，$l_j \equiv 0$），对所有 $j > r$均成立。接着我们修改

$$(\mathbf{d}_r, \mathbf{d}_{r+1}, \ldots) \cup [1]$$

为

$$\left[\widetilde{\mathbf{d}}_r, \mathbf{d}_{r+1}, \ldots\right]$$

其中

$$\widetilde{\mathbf{d}}_r = \left[(k_r+1)^{l_r+1}, k_r^{m_r-l_r-1}\right]$$

剩余部分（$\mathbf{d}_1$，……，$\mathbf{d}_{r-1}$）以与 D 型情形相同的方式进行修改。

命题 4.9。采用上述记号，$\mathbf{d}_B$ 是支配$\mathbf{d}_A$的唯一最小 B 型可容许分拆，即$\mathbf{d}_B \geq \mathbf{d}_A$，并且对于任意满足$\mathbf{d}'_B \geq \mathbf{d}_A$的 D 型可容许分拆$\mathbf{d}'_B$，都有$\mathbf{d}'_B \geq \mathbf{d}_B$。

证明。论证与命题 4.4的证明类似。 □

4.2. **单斜率牛顿多边形**。假设

$$f(\lambda) = \lambda^{2n} + a_2\lambda^{2n-2} + \cdots + a_{2n-2}\lambda^2 + a_{2n},$$

满足 $\mathrm{ord}_t a_{2n} = m > 0$ 且

$$\mathrm{ord}_t a_{2i} \geq \left\lceil 2i \cdot \frac{m}{2n} \right\rceil \quad \text{for all} \quad 1 \leq i \leq n.$$

那么，$f(\lambda)$ 的牛顿多边形由一条线段组成。

我们首先考虑这样的情形：$\gamma_0 = \mathrm{R}(f(\lambda))$ 是 $f(\lambda)$ 的伴随矩阵，它作用于模

$$\mathcal{E}_0 := \frac{\mathcal{O}[\lambda]}{(f(\lambda))},$$

其基为 $\{1, \lambda, \ldots, \lambda^{2n-1}\}$。

定义 $\mathcal{E}_0$ 上的对合 σ，使得 $\sigma(\lambda^i) = (-1)^i\lambda^i$。然后定义 $\mathcal{E}_0$ 上的配对 g_0，其定义为

$$(g_0)_{i,j} := g_0(\lambda^{i-1}, \lambda^{j-1}) := \mathrm{Tr}\left(\frac{\lambda \cdot \lambda^{i-1} \cdot \sigma(\lambda^{j-1})}{f'(\lambda)}\right).$$

这定义了 g_0 上的对称双线性配对 $\mathcal{E}_0$，使得 $g_0\gamma_0$ 是斜对称的。不过请注意，g_0 在 $\mathcal{O}$上并非完美。

引理 4.10. $\det g_0 = a_{2n}$ 和$\mathrm{ord}_t(g_0)_{i,\ j} \geq \mathrm{ord}^t a_{i+j-2n}$ 对于 $i + j \geq 2n + 1$。

证明。要计算 g_0 的行列式，只需注意到 $g_0\,\mathrm{R}(f)^{-1}$ 满足以下条件：$(i,\ j)$ 项在 $i+j \leq 2n$时为 0，而 $(i,\ 2n-i)$ 项为 $(-1)^{i+1}$。而 $(g_0)_{i,\ j}$ 的阶的计算与引理3.12类似。 □

定义 4.11. 若对任意 $i \in I$，g的第 i行中的项都属于 $t\mathcal{O}$，且对所有 $i \in I$，将 t^{-1} 乘到每个第 i行后所得矩阵在 $\mathcal{O}$上可逆，则称对称矩阵 $g \in M_{n\times n}(\mathcal{O})$关于 $I \subset \{1, \cdots, n\}$ 是最优 的。

因此，如果 g 相对于 I 是最优的，使用 $\mathcal{O}^{\oplus n}$ 的标准基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，g 诱导出一个正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{\oplus n} \xrightarrow{g} (\mathcal{O}^{\oplus n})^\vee \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

其中 Q 是 $\mathbb{C}$上的向量空间，其基为 $\{e_i^\vee\}_{i\in I}$。

我们记作 $2n = mk + l$，使得 $0 \le l < m$。相应的平衡分拆为 $[(k+1)^l,\ k^{m-l}]$。由于我们讨论的是 B 型或 D 型，分拆中的偶部必须具有偶数重数。因此，我们区分以下三种情况：

- $m \le 2n$ 和 $l = 0$;
- $m \le 2n$ 和 $l > 0$;
- $m > 2n$。

4.2.1. 满足 $m \le 2n$ 和 $l = 0$的情形。定义

$$P = \operatorname{diag}\left(\{t^{m-1}\}^k, \cdots \{t^i\}^k, \cdots, \{1\}^k\right)$$

于是我们有一个子模 $\mathcal{E} = P^{-1}\mathcal{E}_0$，其上有一个线性变换 γ 和一个对称配对 g，其中

$$\gamma = P^{-1}\gamma_0 P \quad \text{and} \quad g = P^{\vee} g_0 P / t^{m-1}.$$

由于 $\mathbf{ord}_t a_{2i} \ge \left\lceil 2i \frac{m}{2n} \right\rceil$，$\gamma$ 是整的，即 $\gamma \in L^+\mathfrak{g}$。由引理 4.10，$g$ 关于 $\{ik\}_{1\le i\le m}$是整且最优的，因此它定义了一个正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{g} \mathcal{E}^{\vee} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

这里 Q 是一个维数为 m的 $\mathbb{C}$向量空间。

我们定义如下多项式

$$\mathrm{gr}_P(f) = X^m + \sum_{i=1}^{m} (a_{ik})_i X^{m-i} \in \mathbb{C}[X],$$

其中 $(a_{ik})_i$ 表示 a_{ik} 中 t^i的系数。注意，若 $k \equiv 1$，则 $\mathbf{gr}_P(f)$ 是自对偶的 .

配对 g 诱导出对称配对g_Q，定义在 Q上；该配对由引理 4.10可知是非退化的。对于子空间 W（属于 Q），我们考虑其在 $\mathcal{E}^{\vee}$ 中的原像 $\mathcal{E}_W$，以及诱导映射 γ_W： $\mathcal{E}_W \to \mathcal{E}_W$。我们的目标是计算 γ_W 的约化，并确保在 $\mathcal{E}_W$上存在诱导的非退化配对。

γ_W 的约化计算与 [WWW24] 中从引理 2.38 到命题 2.43 的讨论非常相似。首先，$\mathcal{E}_0$ 的基 $\{1, \lambda, \ldots, \lambda^{2n-1}\}$ 诱导出 $\mathcal{E}$的基 $\{e_1, \cdots, e_{2n}\}$，进而得到 $\mathcal{E}^{\vee}$的对偶基 $\{e_1^{\vee}, \cdots, e_{2n}^{\vee}\}$。相对于此基，矩阵 $\gamma^{\vee}$ 作用于 $\mathcal{E}^{\vee}$，因此我们可以将 $Q = \langle e_{ik}^{\vee}(0)\rangle_{1\le i\le m}$ 视为 $\mathcal{E}^{\vee}(0) = \mathcal{E}^{\vee} \otimes \mathbb{C}$的子空间。我们记 $\mathcal{E}_W = P_W \mathcal{E}^{\vee}$，其中某个 $P_W \in$属于一般线性群 $_{2n}(\mathcal{K})$。因此，在基 $P_W\{e_1^{\vee}, \cdots, e_{2n}^{\vee}\}$下，$\gamma_W$由 $P_W^{-1}\gamma^{\vee}P_W$给出。令$\mathcal{T} =$为对角矩阵 $\left(\{\{1\}^{k-1}, t\}^m\right)$。那么 $P_W^{-1}\mathcal{T}$是整的，并且 $\widetilde{\gamma^{\vee}}$: $= \mathcal{T}^{-1}\gamma^{\vee}$ 也是整的。此外，$\widetilde{\gamma^{\vee}}$ 是可逆的。

从现在起，我们不再区分整矩阵 $A \in \mathbf{Mat}(\mathcal{O})$ 与其约化 $A\mathbf{mod}\ t$。特别地，当我们提到 A 的秩、核或像 时，始终指的是 $A\mathbf{mod}\ t$ 的相应对象。

因此，$\mathbf{rk}\ P_W = 2n - \dim W$，$\mathbf{Ker}\ P_W^{-1}\mathcal{T} = W$且 的分拆 $[k^m]$为 [WWW24] 中引理 2.40 的证明里的计算给出如下结果：

引理 4.12。对于 $i \ge 1$，有

$$\mathrm{rk}(\gamma_W)^i = \mathrm{rk}(\gamma^{\vee})^i + \dim W - \dim\left(W \cap \mathrm{Ker}(\gamma^{\vee})^{i-1}\right) - \dim\left(W \cap \left(\widetilde{\gamma^{\vee}}(\mathrm{Im}(\gamma^{\vee})^i) \oplus \widetilde{\gamma^{\vee}}((\gamma^{\vee})^{i-1}W)\right)\right)$$

由 $\gamma^{\vee}$ 的显式形式可知，

引理 4.13。(1) 对于 $1 \le i \le k$, $W \cap \mathbf{Ker}(\gamma^{\vee})^{i-1} = 0$。

(2) 对于 $1 \le i \le k-1$, $W \subset Q \subset$ $\widetilde{\gamma^{\vee}}$(像$(\gamma^{\vee})^i$)。(3) 对于 $i = k$，像$(\gamma^{\vee})^k = 0$和 $\widetilde{\gamma^{\vee}}((\gamma^{\vee})^{k-1}W)$ $= \mathbf{R}(\mathrm{gr}_P(f))^{\vee}W$。

证明。第一个结论源于 $Q\cap$ 核$(\gamma^\vee)^{i-1}=0$，对于 $1\le i\le k$。

第二点是因为对于 $1\le i\le k-1$，我们有

$$\{e^\vee_{jk+1}(0)\}_{0\le j\le m-1}\subset \mathrm{Im}(\gamma^\vee)^i$$

最后一点是因为 $\widetilde{\gamma^\vee}((\gamma^\vee)^{k-1}W)$ 模 t 的特征多项式是 $\mathrm{gr}_P(f)$，也就是说，它由牛顿多边形边界上的项构成。□

因此，为了使 γ_W 的分拆为 $[k^m]$，只需找到 Q 的一个极大各向同性子空间 W，使得 $W\cap \mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))^\vee W=W$。而为了使 γ_W 的分拆为$[k+1,k^{m-2},k-1]$，只需找到 Q 的一个极大各向同性子空间 W，使得 $\dim W$ –$\dim\ W\cap \mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f)^\vee W=1$。

当且仅当 W 关于 Q 上的配对 g_Q 是各向同性子空间时，$\mathcal{E}_W$ 上存在诱导的完美配对。此外，如果 W 是极大各向同性子空间，那么诱导的配对是非退化的。现在我们来描述 Q 上的配对 g_Q 。描述其在 $Q^\vee$上的逆配对 g_Q^{-1} 更为方便。实际上，在为 Q 选定的基（因此也为 $Q^\vee$选定了对偶基）下，

$$(g_Q^{-1})_{i,j}=(g_{ik,jk})_1=\left(\mathrm{Tr}\left(\frac{\lambda\lambda^{ik-1}\sigma(\lambda^{jk-1})}{f'(\lambda)}\right)\right)_{i+j-m}.$$

由不等式 $\mathrm{ord}_t a_{2i}\ge\lceil 2i\frac{m}{2n}\rceil$ 以及迹的计算可知，$(g_Q^{-1})_{i,j}$ 恰好是环 $\mathbb{C}[X]/(\mathrm{gr}_P(f))$ 中 $(-1)^jX^{i+j}$ 的表达式里 X^{m-1} 的系数。因此，我们得到如下关系：若 $k\equiv 1$，则

$$g_Q^{-1}\,\mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))=-\,\mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))^\vee g_Q^{-1}.$$

若 $k\equiv 0$，则

$$g_Q^{-1}\,\mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))=\mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))^\vee g_Q^{-1}.$$

命题 4.14。采用上述记号，我们得到

(1) 假设 $m\equiv 0$ 且 $k\equiv 1$。则存在一种 W 的选取，使得γ_W 的约化具有分拆 $[k^m]$，且 $\mathcal{E}_W$ 上的诱导配对是非退化的。(2) 假设 $m\equiv 0$ 且 $k\equiv 0$。则存在一种 W 的选取，使得γ_W 的约化具有分拆 $[k^m]$，且 $\mathcal{E}_W$ 上的诱导配对是非退化的，当且仅当 $\mathrm{gr}_P(f)$ 是 $\mathbb{C}[X]$ 中的一个平方。若 $\mathrm{gr}_P(f)$ 不是平方，则存在一种 W 的选取，使得 γ_W 的约化具有分拆 $[k+1,k^{m-2},k-1]$，且 $\mathcal{E}_W$ 上的诱导配对是非退化的。

证明。根据上文讨论，若 $m\equiv 0$ 且 $k\equiv 1$，则 $\mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))$ 关于 g_Q^{-1} 是反自对偶的，因此由引理 2.8，存在 $Q^\vee$ 的一个极大各向同性子空间 ${}^*W$，使得 $\mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))({}^*W)={}^*W$。令 $W\subset Q$ 为 ${}^*W$ 关于 Q 与 $Q^\vee$ 之间自然配对的正交补。那么 $\mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))^\vee(W)=W$，因此 γ_W 的约化为 $[k^m]$。

若 $m\equiv 0$ 且 $k\equiv 0$，则 $\mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))$ 关于 g_Q^{-1} 是自对偶的，因此由引理 2.7，存在一个极大各向同性子空间 ${}^*W$，它属于 $Q^\vee$，使得 $\mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))({}^*W)={}^*W$当且仅当 $\mathrm{gr}_P(f)$ 是一个平方。并且，若 $\mathrm{gr}_P(f)$ 不是一个平方，由命题 2.11，存在一个极大各向同性子空间
${}^*W$使得 $Q^\vee$的 ${}_{*W}\mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))({}^*W)\cap {}^*W=1$的余维。与前面一样，令 $W\subset Q$为 ${}^*W$的正交补。根据 $\mathrm{gr}_P(f)$ 是否为平方，γ_W的约化为 $[k^m]$或 $[k+1,k^{m-2},k-1]$。□

4.2.2. 满足 $m \le 2n$ 且 $l \neq 0$的情形。我们像前面一样取 γ_0 和 g_0，并选取 P为一个对角矩阵，其第 j 个对角元为 t^{p_j}，其中

$$p_j = \begin{cases} m - \left\lceil \frac{jm}{2n} \right\rceil, & 1 \le j \le n, \\ \left\lceil \frac{(2n+1-j)m}{2n} \right\rceil - 1, & n+1 \le j \le 2n. \end{cases}$$

引理 4.15. $\gamma = P^{-1}\gamma_0 P$和 $g = P^\vee g_0 P/t^{m-1}$是整的。此外，$\gamma(0)$ 的分拆为$[(k+1)^l,\ k^{m-l}]$ 并且相对于 g 是最优的

$$I_P = \left\{ ik + \left\lfloor \frac{il}{m} \right\rfloor, jk + \left\lceil \frac{jl}{m} \right\rceil \right\}_{1 \le i \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \le j \le m}.$$

我们记作 $I_P = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m\}$。特别地，$p_{\alpha_i} = m - i$。

证明。由于 γ_0 是伴随的，并且 P 的构造与 $\mathfrak{sp}_{2n}$的相同，由引理 3.9，3.10，关于 γ 的结论同样成立。

由 (3.3)，$\mathrm{ord}_t a_{i+j-2n} + p_i + p_j - (m-1) \ge 0$。因此，$g$是整的，且 ord det g = ord det $g_0 = m$。注意，$g_{i,\ j} = 0$ 当 $i + j < 2n$ 时。

现在我们确定当 $i + j = 2n$ 时 $\mathrm{ord} g_{i,j} = 1$。我们假设 $i \ge j$,

$$\mathrm{ord} g_{i,j} = -\left\lceil \frac{jm}{2n} \right\rceil + \left\lceil \frac{(1-i)m}{2n} \right\rceil = 1$$

换句话说，$\left\lceil \frac{(j+1)m}{2n} \right\rceil - \left\lceil \frac{jm}{2n} \right\rceil = 1$，也就是当$p_j$发生跳跃时。于是该结论由引理3.11以及 g 是对称的这一事实得出。□

我们像之前一样构造 $\mathcal{E}$，并选取相同类型的基。根据 P 的选取，在当前情形下我们有 $Q = \langle e^\vee_{\alpha_i}(0) \rangle_{1 \le i \le m}$。在所选的 Q 基下，我们利用矩阵 R(gr$_P(f)$)$^\vee$ 在 Q 上定义一个线性变换 Φ，其中多项式 gr$_P(f)$ 定义为

$$\mathrm{gr}_P(f) = X^m + \sum_{i=1}^{m} (a_{\alpha_i})_i X^{m-i}.$$

我们进一步将 Q 分解如下：令 $Q^{k+1} \subset Q$ 为由以下元素生成的子空间

$$e^\vee_{\alpha_i}(0) \quad \text{such that} \quad \alpha_i - \alpha_{i-1} = k+1 \quad (\text{with } \alpha_0 := 0),$$

并令 $Q^k \subset Q$ 为由其余基元素生成的子空间。于是我们得到一个直和分解

$$Q = Q^{k+1} \oplus Q^k.$$

如前所述，我们将 Q 视为 $\mathcal{E}(0)$ 的子空间。

沿用前一种情形中的相同策略，对于子空间 W Q，我们考虑其逆像 $\mathcal{E}_W$。我们的目标是计算诱导自同态 γ_W的分拆。要使 γ_W的分拆为 $[(k+1)^l,\ k^{m-l}]$，只需选取 W，使得对所有γ_W，rk(^{i} −)$\gamma^\vee$rk(^{i} = 0)$i \ge 1$。由引理 4.13，我们有

引理 4.16。 $W \cap$核$(\gamma^\vee)^{i-1} = 0$ 对于 $1 \le i \le k$；并且对于 $1 \le i \le k-1$, $W \subset \gamma^\vee$(像$(\gamma^\vee)^i$)。

此外，

引理 4.17. 对于 $i = k$，我们有

$$W \cap \left(\widetilde{\gamma^\vee}(\mathrm{Im}(\gamma^\vee)^k) \oplus \widetilde{\gamma^\vee}((\gamma^\vee)^{k-1} W) \right) = W \cap \left(\Phi(Q^{k+1}) \oplus \Phi(W \cap Q^k) \right)$$

证明. $\gamma^\vee$ 的作用使 $e_j^\vee(0)$ 的指标减少 1，其中 j 满足 $j-1\notin I_P$。由 $\gamma^\vee$ 的显式形式可知，$\widetilde{\gamma^\vee}(e^\vee_{\alpha_j+1}(0)) = e^\vee_{\alpha_j}(0)+(a_{2n-\alpha_j})_{p_{\alpha_j+1}+1}e^\vee_{2n}(0)$。注意到 $p_{\alpha_j+1}+1=p_{\alpha_j}$，根据 Φ 的定义，我们得到

$$Q\cap\widetilde{\gamma^\vee}(\mathrm{Im}(\gamma^\vee)^k)=Q\cap\Phi(Q^{k+1})$$

同理，我们有

$$Q\cap\widetilde{\gamma^\vee}((\gamma^\vee)^{k-1}W=Q\cap\Phi(W\cap Q^k)$$

因此，我们得到等式。 □

因此，这意味着我们需要 W 满足

$$W\subset\Phi(Q^{k+1})+\Phi(W\cap Q^k).$$

现在考虑 $i=k+1$，则 $W\cap\mathrm{Ker}(\gamma^\vee)^k=W\cap Q^k$，$\mathrm{Im}(\gamma^\vee)^{k+1}=0$ 以及

$$\widetilde{\gamma^\vee}((\gamma^\vee)^kW)=\Phi(\overline{(W)_{=k+1}})$$

其中 $\overline{(W)_{=k+1}}$ 表示从 W 到 Q^{k+1}的投影。因此，我们还需要

$$\dim W=\dim W\cap Q^k+\dim W\cap\Phi(\overline{(W)_{=k+1}}).$$

与之前一样，要在 $\mathcal{E}_W$ 上诱导出配对，我们还需要 W 是各向同性的。因此，我们需要描述 Q 上的配对 g_Q。由于在 $Q^\vee$ 中描述配对 g_Q^{-1} 更容易，我们先将关于 W 的条件转化为 $Q^\vee=(Q^{k+1})^\vee\oplus(Q^k)^\vee$ 中某个子空间所满足的条件。

对于 Q 中的子空间 V，记 ${}^*V\subset Q^\vee$ 为 V 关于 Q 与 $Q^\vee$ 之间自然配对的正交补。于是有以下恒等式:

- ${}^*(Q^{k+1}+W\cap Q^k)=(Q^k)^\vee\cap{}^*(W\cap Q^k)$;
- ${}^*(W\cap Q^k)=\overline{{}^*W+(Q^{k+1})^\vee}$;
- ${}^*(\overline{(W)_{=k+1}})=(Q^k)^\vee+{}^*W\cap(Q^{k+1})^\vee$;
- 对于任意 $V\subset Q$, ${}^*(\Phi(V))=(\Phi^\vee)^{-1}({}^*V)$。

因此，为使 γ_W的约化成为 $[(k+1)^l,\ k^{m-l}]$ 并使$\mathcal{E}_W$ 上的诱导配对非退化，只需在 $Q^\vee=(Q^{k+1})^\vee\oplus(Q^k)^\vee$ 中找到一个子空间 ${}^*W$，使得

(†1) ${}^*W$ 在配对 g_Q^{-1} 下是极大各向同性的；(†2) $(Q^k)^\vee\cap({}^*W+(Q^{k+1})^\vee)\subset\Phi^\vee({}^*W)$；(†3) $\Phi^\vee({}^*W)\subset(Q^k)^\vee+{}^*W\cap(Q^{k+1})^\vee$。

回忆一下，$Q^\vee$ 有一组基

$$Q^\vee=\langle e_{\alpha_i}(0)\rangle_{1\le i\le m},$$

相对于该基，$\Phi^\vee$的作用由矩阵 $\mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))$给出。

我们定义 $Q^\vee$的以下子空间:

$$Q^\vee_{div}=\langle e_{\alpha_i}(0)\rangle_{m|il},\quad\text{and}\quad Q^\vee_{>,ndiv}=\langle e_{\alpha_i}(0)\rangle_{m\nmid il,\ i>\frac{m}{2}}.$$

引理 4.18. 以下命题成立:

(a) $Q^\vee_{div}=$的维数为$\gcd(m,l)$，且与 m奇偶性相同。g_Q^{-1} 在 $Q^\vee_{div}$上的限制的秩至少为$\gcd(m,l)-1$；(b) $Q^\vee_{div}$ 与$Q^\vee_{>,ndiv}$ 之间的配对为零，且$Q^\vee_{>,ndiv}$ 是各向同性的；(c) 对于 $e_{\alpha_i}(0)\in Q^\vee_{div}$，若 $i\le\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$，则 $e_{\alpha_i}(0)\in(Q^{k+1})^\vee$且$e_{\alpha_{i+1}}(0)\in(Q^k)^\vee$；若 $i>\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$，则$e_{\alpha_i}(0)\in(Q^k)^\vee$；若 $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor<i<m$，则$e_{\alpha_{i+1}}(0)\in(Q^{k+1})^\vee$；(d) $(Q^\vee_{div}+Q^\vee_{>,ndiv})\cap(Q^k)^\vee\subset\Phi^\vee(Q^\vee_{>,ndiv})$；

(e) $\overline{(\Phi^\vee(Q^\vee_{div}+Q^\vee_{>,\ ndiv}))_{=k+1}}\subset Q^\vee_{>,\ ndiv}\cap(Q^{k+1})^\vee$，这里我们用$\overline{(\Phi^\vee(Q^\vee_{div}+Q^\vee_{>,\ ndiv}))_{=k+1}}$表示将 $\Phi^\vee(Q^\vee_{div}+Q^\vee_{>,\ ndiv})$投影到$(Q^{k+1})^\vee$。

证明。根据 $Q^\vee_{div}$ 的定义，$\dim Q^\vee_{div}=\gcd(m,\ l)$。若 $m\equiv 0$，则 $l\equiv 0$，因此 $\gcd(m,\ l)\equiv m$。注意，当 $i\neq m$ 时，若 $e_{\alpha_i}(0)\in Q^\vee_{div}$，则 $e_{\alpha_{m-i}}(0)\in Q^\vee_{div}$。由于当 $m\mid il$ 时 $\alpha_i+\alpha_{m-i}=2n$，所以 $g_Q^{-1}(e_{\alpha_{j_1}}(0)\,e_{\alpha_{j_2}}(0))=\pm 1$，因此 (a) 得证。

对于 (b)，我们计算 $g_Q^{-1}(e_{\alpha_{j_1}}(0)\,e_{\alpha_{j_2}}(0))$，其中 $\alpha_{j_1}=j_1k+\lceil\frac{j_1l}{m}\rceil$，$\alpha_{j_2}=j_2k+\lceil\frac{j_2l}{m}\rceil$ 满足 $\frac{m}{2}\leq j_1,\ j_2\leq m$ 且 $\frac{j_1l}{m},\frac{j_2l}{m}$ 并非全为整数。根据 g_Q^{-1} 的定义，它等于

$$\Big(g(e_{\alpha_{j_1}},e_{\alpha_{j_2}})\Big)_1.$$

根据引理 4.10，由于 $\alpha_{j_1}+\alpha_{j_2}\geq 2n+1$，$g(e_{\frac{m-l}{2}k+i(k+1)}\ e_{\frac{m-l}{2}k+j(k+1)})$ 的阶大于或等于 $a_{\alpha_{j_1}+\alpha_{j_2}-2n}/t^{m-1-p_{\alpha_{j_1}}-p_{\alpha_{j_2}}}$ 的阶。现在我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_t a_{\alpha_{j_1}+\alpha_{j_2}-2n}&\geq\left\lceil\frac{m(\alpha_{j_1}+\alpha_{j_2}-2n)}{mk+l}\right\rceil\\&=\left\lceil j_1+j_2-m+\frac{m\left\lceil\frac{j_1l}{m}\right\rceil-j_1l+m\left\lceil\frac{j_2l}{m}\right\rceil-j_2l}{mk+l}\right\rceil.\end{aligned}$$

注意，若 $m\nmid jl$ for $j=j_1$ 或 j_2，则 $\mathrm{ord}_t a_{\alpha_{j_1}+\alpha_{j_2}-2n}\geq j_1+j_2-m+1$，因此 $g_Q^{-1}(e_{\alpha_{j_1}}(0)\,e_{\alpha_{j_2}}(0))=0$，因为 $p_{\alpha_j}=m-j$。若要求 $j_1\leq\frac{m}{2}$ with $m\mid j_1l$ 且 $j_2>\frac{m}{2}$ with $m\nmid j_2l$，则可得出相同的结果。

对于（c），当 $i\leq\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$ and $m\mid il$ 时，只需计算 $\alpha_i-\alpha_{i-1}=k+1$ and $\alpha_{i+1}-\alpha_i=k$。当 $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor<i<m$ and $m\mid il$ 时，只需计算 $\alpha_i-\alpha_{i-1}=k$ and $\alpha_{i+1}-\alpha_i=k+1$。

对于（d），我们首先考虑 $Q^\vee_{div}$ 中的元素。由（c）可知，我们只需考虑 e_{α_i} 使得$i>\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$。现在，若 $e_{\alpha_i}(0)\in Q^\vee_{div}$且 $i>\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$和 $m\mid il$。注意，这意味着 $m\nmid(i-1)l$ 且 $i-1>\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$，于是$e_{\alpha_{i-1}}\in Q^\vee_{>,ndiv}$，从而 $e_{\alpha_i}(0)=\Phi^\vee(e_{\alpha_{i-1}})\in\Phi^\vee(Q^\vee_{>,ndiv})$。对于任意 $e_{\alpha_i}(0)\in Q^\vee_{>,ndiv}\cap(Q^k)^\vee$，我们看到$i>\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$，因为 $\alpha_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}-\alpha_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}=k+1$。那么 $e_{\alpha_{i-1}}(0)\in Q^\vee_{>,ndiv}$，否则 $m\mid(i-l)l$，这意味着根据（c），$e_{\alpha_i}\in(Q^{k+1})^\vee$。因此$e_{\alpha_i}(0)=\Phi^\vee(e_{\alpha_{i-1}})\in\Phi^\vee(Q^\vee_{>,ndiv})$。

对于（e），取 $e_{\alpha_i}\in Q^\vee_{div}$，根据（c），如果$i\leq\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$，那么$e_{\alpha_{i+1}}(0)\in(Q^k)^\vee$；如果 $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor<i<m$，那么$e_{\alpha_{i+1}}(0)\in(Q^{k+1})^\vee\cap Q^\vee_{>,\ ndiv}$因为 $m\nmid(i+1)l$。对于 $\Phi^\vee(e_{\alpha_m}(0))$，我们断言，将 $\Phi^\vee(e_{\alpha_m}(0))$ 投影到 $\langle e_{\alpha_i}\mid i\leq\lfloor\frac{m}{2}\rfloor,\ e_{\alpha_i}\in(Q^{k+1})^\vee\rangle$ 所得为零。因此我们有

$$\overline{(\Phi^\vee(Q^\vee_{div}))_{=k+1}}\subset Q^\vee_{>,ndiv}\cap(Q^{k+1})^\vee.$$

对于 $e_{\alpha_i}(0)\in Q^\vee_{>,\ ndiv}$，要么 $\Phi^\vee(e_{\alpha_i}(0))\in(Q^k)^\vee$，要么 $\Phi^\vee(e_{\alpha_i}(0))\in(Q^{k+1})^\vee$，这意味着，根据（c）的第二部分，$\Phi^\vee(e_{\alpha_i}(0))\in Q^\vee_{>,\ ndiv}$。

现在我们需要证明这一断言。回顾一下，$\Phi^\vee$ 的作用由矩阵 $\mathrm{R}(\mathrm{gr}_P(f))$给出，因此我们需要计算 $(a_{\alpha_{m+1-i}})_{m+1-i}$，其中 $1\leq i\leq\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$ 使得 $e_{\alpha_i}(0)\in(Q^{k+1})^\vee$。回顾一下，$e_{\alpha_i}(0)\in(Q^{k+1})^\vee$ 意味着 $\alpha_i-\alpha_{i-1}=k+1$，这说明 $\lfloor\frac{il}{m}\rfloor-\left\lfloor\frac{(i-1)l}{m}\right\rfloor=1$。因此，特别地，有 $m\nmid(i-1)l$。

要计算 $\mathrm{ord}^t a_{\alpha_{m+1-i}}$，只需计算

$$m\alpha_{m+1-i}=(m+1-i)mk+m\left\lceil\frac{(m+1-i)l}{m}\right\rceil$$

由于 $m\nmid(i-1)l$，我们看到 $\mathrm{ord}_t a_{\alpha_{m+1-i}}>m+1-i$，因此断言得证。 □

引理 4.19。回忆一下，$\dim Q^\vee_{div}=$最大公约数$(m,l)\equiv m$，则有

(i) 若 $m \equiv 0$，则存在一个各向同性子空间 $(Q^\vee_{div})_0$，其维数为 $\frac{\text{最大公约数}(m,l)}{2}$.

(ii) 若 $m \equiv 1$，则存在一个 v of $Q^\vee_{div}$ 向量，以及一个各向同性子空间 $(Q^\vee_{div})_0$，使得

$$g_Q^{-1}(v,v) = 1, \quad \text{and} \quad g_Q^{-1}(v,w) = 0 \ \text{ for all } w \in (Q^\vee_{div})_0.$$

此外，$v \notin (Q^{k+1})^\vee$。

证明。当 $m \equiv 0$时，则 $\dim Q^\vee_{div} \equiv 0$，因此该结论由引理 4.18 的 (a) 得出。

当 $m \equiv 1$时，若 $\dim Q^\vee_{div} > 1$，我们很容易选取向量 v_0 和子空间 $(Q^\vee_{div})_0$，使其满足条件。当 $\dim Q^\vee_{div} = \gcd(m,l) = 1$时，我们看到 $\gcd(m,2n) = 1$，这意味着对于任意 $1 \le i < 2n$，$\mathrm{ord}_t a_i + \mathrm{ord}_t a_{2n-i} > m$。因此，根据引理 3.12 中类似的递推关系，我们有 $\mathrm{ord}_t g(e_{2n}, e_{2n}) = 1$，从而 g_Q^{-1} 在 $Q^\vee_{div} = \langle e_{2n}(0)\rangle$ 上的限制是非退化的，故结论成立。

由引理 4.18 的（c）可知，若 $v \in (Q^{k+1})^\vee$，则 v 是 $e_{\alpha_i}(0)$ 的线性组合，因此$i \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$。于是任意 $i, j \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \frac{m-1}{2}$，我们可知 $\alpha_i + \alpha_j < 2n$因此 $e_{\alpha_i}(0)$ 与 $e_{\alpha_j}(0)$ 的配对为零，从而 v 是各向同性的，这与假设矛盾。□

命题 4.20. 设 $m \equiv 0$ 和 $l \neq 0$。对于$Q^\vee_{div}$的任意极大各向同性子空间 $(Q^\vee_{div})_0$，子空间

$$^*W = (Q^\vee_{div})_0 + Q^\vee_{>,ndiv}$$

满足上述条件（†1）、（†2）和（†3）。因此，γ_W 的约化具有分拆$[(k+1)^l, k^{m-l}]$ 且 $\mathcal{E}_W$ 上的诱导配对是非退化的。

证明。W 是极大各向同性的。接下来需要证明 (a) 和 (b)，有 (2) 和 (3)。注意，$(Q^k)^\vee \cap (^*W + (Q^{k+1})^\vee)$ 等于 $^*W$ 在 $(Q^k)^\vee$ 上的投影。我们可以证明，$Q^\vee_{div} + Q^\vee_{>,ndiv}$ 在 $(Q^k)^\vee$ 上的投影（即 $(Q^\vee_{div} + Q^\vee_{>,ndiv}) \cap (Q^k)^\vee$）包含于 $\Phi^\vee(Q^\vee_{>,ndiv})$，而后者又包含于 $\Phi^\vee(^*W)$。因此由引理 4.18 的 (d) 可得结论。

对于 (3)，我们证明

$$\Phi^\vee(Q^\vee_{div} + Q^\vee_{>,ndiv}) \subset (Q^k)^\vee + Q^\vee_{>,ndiv} \cap (Q^{k+1})^\vee$$

这等价于证明 $(\Phi^\vee(Q^\vee_{div} + Q^\vee_{>,ndiv}))^{=k+1} \subset Q^\vee_{>,ndiv} \cap (Q^{k+1})^\vee$，因此由引理 4.18 的 (e) 可得。□

4.2.3. 情形 $m > 2n$。若 $m > 2n$，则记 $m = 2n\alpha + s$，其中 $0 \le s < 2n$ 且 $\alpha > 0$。接着考虑一个新的多项式

$$f'(\lambda) = \lambda^{2n} + a'_2\lambda^{2n-2} + \cdots + a'_{2n-2}\lambda^2 + a'_{2n},$$

其中 $a'_{2i} = a_{2i}/t^{2i\alpha}$。

那么，若 $s \equiv 0$，我们可以取 $\gamma'_0 \in L^+\mathfrak{so}_{2n}$，使得 $\chi(\gamma') = f'(\lambda)$，于是 $\gamma := t^\alpha\gamma'_0 \in L^+\mathfrak{so}_{2n}$ 且 $\chi(\gamma) = f(\lambda)$。因此，$\gamma$ 的约化为 $[1^{2n}]$。

若 $s \equiv 1$，则我们可以先如上取 γ'_0，再如前取与 $f'(\lambda)$ 相关联的 g'_0。接着像之前一样，将 (γ'_0, g'_0) 改为 (γ', g')，使得 g' 为最优。现在考虑 $(\gamma' := t^\alpha\gamma'_0, g')$。由于 $\alpha \ge 1$，我们可以取 P'，使得相对于 $\{1\}$，$g := (P')^\vee g' P'$ 为最优，且 $\gamma := (P')^{-1}\gamma' P'$ 的第一列可被 t^2 整除。

4.3. **配对的修改**。在上一小节中，我们在每个 $\mathcal{E}_i := \mathcal{O}[\lambda]_{(f_i(\lambda))}$ 上构造了对称配对 g_i。其中一些配对是非退化的，而另一些则是退化的。在本小节中，我们根据分拆$\mathbf{d}_A$ 的修改，归纳地修改这些配对。通过这种方式，我们最终得到一个非退化配对。

D 型情形：

- 若 $m_1 \equiv 0$: $\widetilde{\mathbf{d}}_1$ 在 § 4.1.2中的 (D1.1) 和 (D1.2) 中定义。由命题 4.14 和 4.20，可得非退化配对 g_1。于是，无需作任何修改。
- 若 $m_1 \equiv 1$: 令 $r \geq 2$ 为满足 $m_2 \equiv \cdots \equiv m_{r-1} \equiv 0$ 但 $m_r \equiv 1$的最小整数。回顾

$$\begin{aligned}&\left(\widetilde{\mathbf{d}}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{r-1}, \widetilde{\mathbf{d}}_r\right)\\ &= \begin{cases}\left((k_1+1)^{l_1+1}, k_1^{m_1-l_1-1}, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{r-1}, (k_r+1)^{l_r-1}, k_r^{m_r-l_r+1}\right), & l_r \neq 0;\\ \left((k_1+1)^{l_1+1}, k_1^{m_1-l_1-1}, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{r-1}, k_r^{m_r-l_r-1}, k_r-1\right), & l_r = 0,\end{cases}\end{aligned} \tag{4.2}$$

在 (⋆) 的 (D2) 中定义，见 §4.2。接下来，我们仿照命题 $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{E}_i$ 4.25构造一个定义在上的非退化配对。

通过归纳法，我们得到以下命题。

命题 4.21。 对于任意 $\gamma \in L^{\heartsuit}\mathfrak{so}_{2n}$，若 $\chi_\gamma(\lambda)$ 如 (4.1) 所示分解，则 γ 有一个约化，其分拆为 $\mathbf{d}_D$，如 (⋆) 在 §4.2中所示。

B 型情形： 回想

$$\mathbf{d}_A = \mathrm{Re}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots) \cup [1].$$

假设 $\mathrm{ord}^{t}\chi_\gamma(0) = m$。

- 若 $m \equiv 0$: 定义$\mathbf{d}_B := [\mathbf{d}_D, 1]$，如（B1）中（⋆⋆）所示，见§4.2。
- 若 $m \equiv 1$: 则属于 §4.2 中（⋆⋆）的（B2）。存在整数 $r > 1$，使得 $m_r \equiv 1$ ~ ~且对于所有 $j > r$都有 $m_j \equiv 0$。初始段（$\mathbf{d}_1$，.. ., $\mathbf{d}_{r-1}$）按照 D 型情形中的方式进行修改，其余部分

$$(\mathbf{d}_r, \mathbf{d}_{r+1}, \ldots) \cup [1]$$

修改为

$$[\widetilde{\mathbf{d}}_r, \mathbf{d}_{r+1}, \ldots], \qquad \widetilde{\mathbf{d}}_r = \left[(k_r+1)^{l_r+1}, k_r^{m_r-l_r-1}\right].$$

经过重排后，我们得到一个 B 型分拆$\mathbf{d}_B$。

命题 4.22。 对于任意 $\gamma \in L^{\heartsuit}\mathfrak{so}_{2n+1}$，若 $\chi_\gamma(\lambda)$ 按照（4.1）分解，则 γ ad mitsareductionwhose associatedpartitionis $\mathbf{d}_B$ （如（⋆⋆）中§4.2所述）。

证明。 若我们处于（⋆⋆）中 §4.2 的情形 (B1)，则我们首先考虑（γ_D, g_D），从而 $\chi_{\gamma_D}(\lambda) = \chi_\gamma(\lambda)$，且 γ_D 的约化为 $\mathbf{d}_D$。然后我们考虑 $\gamma = \gamma_D \oplus 0$，以及 $g = g_D \oplus 1$，因此 $\gamma \in L^{\heartsuit}\mathfrak{so}_{2n+1}$，其约化为$\mathbf{d}_B$。

若我们处于（⋆⋆）中 §4.2 的情形 (B2)，则我们加入一个秩一直和项 $\mathcal{E}' = \mathcal{O}$，并令 $\gamma' = 0$作用于 $\mathcal{E}'$。此外，我们定义 g_n 在 $\mathcal{E}'$ 上的配对为 $g'(x, y) = txy$。于是命题 4.25 证明中的论证原样适用，并得到一个元素 $\gamma \in L^{\heartsuit}\mathfrak{so}_{2n+1}$，其约化的分拆为 $\mathbf{d}_B$。 □

现在我们聚焦于 D 型的第二种情形。

根据上文的讨论，每个 γ_i 都作用在一个自由 $\mathcal{O}$-模 $\mathcal{E}_i$ 上，使得 $\gamma_i(0)$ 的分拆为 $[(k_i+1)^{l_i}, k_i^{m_i-l_i}]$。对于 $2 \leq i \leq r-1$，由于 $m_i \equiv 0$，因此我们先前构造的配对 g_i 若已非退化，且分拆仍为 $[(k_i+1)^{l_i}, k_i^{m_i-l_i}]$，那么我们可以单独处理这种 $\mathcal{E}_i$。当 $l_i \neq 0$ 或 $l_i = 0$ 但 $k_i \equiv 1$时，就会出现这种情形。因此，对于 $2 \leq i \leq r-1$，我们可以假设 $\gamma_i(0)$ 的分拆为 $[k_i^{m_i}]$。

每个 $\mathcal{E}_i$ 都带有一个对称配对 g_i，它适合于短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_i \xrightarrow{g_i} \mathcal{E}_i^\vee \longrightarrow Q_i \longrightarrow 0$$

其中 Q_i 配备了诱导的非退化配对 g_{Q_i} 和线性算子 Φ_i。现在考虑 $\oplus_{i=1}^r \mathcal{E}_i$，则有

$$0 \longrightarrow \oplus_{i=1}^r \mathcal{E}_i \xrightarrow{\oplus_{i=1}^r g_i} \oplus_{i=1}^r \mathcal{E}_i^\vee \longrightarrow \oplus_{i=1}^r Q_i \longrightarrow 0.$$

我们的目标是寻找一个极大各向同性子空间 $W \subset \oplus_{i=1}^r Q_i$，使得对于其原像 $\mathcal{E}_W \subset \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{E}_i^\vee$，诱导自同态 γ_W 具有所需的分拆。

回忆一下，对于 $i = 1, r$，我们有如下分解

$$Q_1 = Q^{k_1+1} \oplus Q^{k_1} \quad \text{and} \quad Q_r = Q^{k_r+1} \oplus Q^{k_r}.$$

此外，对于每个 $1 \leq i \leq r$，在 Q_i上都有一个线性算子 Φ_i。尽管可能出现$k_1 = k_r + 1$的情况，我们始终将 Q^{k_1} 和 Q^{k_r+1} 视为不同的直和项。

我们设

$$\Phi := \bigoplus_{i=1}^r \Phi_i, \qquad \Gamma^\vee := \bigoplus_{i=1}^r \gamma_i^\vee, \qquad \widetilde{\Gamma^\vee} := \bigoplus_{i=1}^r \widetilde{\gamma_i^\vee}.$$

为统一记号，对于 $2 \leq j \leq r-1$，我们设 $Q^{k_j} := Q_j$。因此，我们得到一个分解

$$Q = Q^{k_1+1} \oplus Q^{k_1} \oplus Q^{k_2} \oplus \cdots \oplus Q^{k_{r-1}} \oplus Q^{k_r+1} \oplus Q^{k_r}.$$

对于每个 $j \geq 0$，我们引入如下滤过：

$$F_{\geq j} := \bigoplus_{\alpha \geq j} Q^\alpha \quad \text{and} \quad F^{\leq j} := \bigoplus_{\alpha \leq j} Q^\alpha,$$

并设

- $F_{=j} := F_{\geq j} \cap F^{\leq j}$;
- for a subspace $V \subset Q$, $\overline{(V)_{\geq j}}$ denotes its projection to $F_{\geq j}$.

Fol按照与之前相同的策略，若 $m_r \leq 2n_r$，则对于任意 $j \geq 1$，我们计算 e

$$\operatorname{rk}(\gamma_W)^j = \operatorname{rk}(\Gamma^\vee)^j + \dim W - \dim\left(W \cap \operatorname{Ker}(\Gamma^\vee)^{j-1}\right) - \dim\left(W \cap \left(\widetilde{\Gamma^\vee}(\operatorname{Im}(\Gamma^\vee)^j \oplus (\Gamma^\vee)^{j-1}W)\right)\right).$$

若 $m_r > 2n_r$，在这种情况下，我们看到 $\dim Q_r = 1$ 且 $\Phi_r = 0$。注意，在这种情况下，$\Gamma^\vee$ 不再可逆，因此仿照 [WWW24], 中引理 2.40 的证明，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{rk}(\gamma_W)^j =& \operatorname{rk}(\Gamma^\vee)^j + \dim W - \dim\left(W \cap \operatorname{Ker}(\Gamma^\vee)^{j-1}\right) - \dim\left(W \cap \left(\widetilde{\Gamma^\vee}(\operatorname{Im}(\Gamma^\vee)^j \oplus (\Gamma^\vee)^{j-1}W)\right)\right) \\ & - \dim\left(\operatorname{Im}(\Gamma^\vee)^{j-1} P_W \cap \operatorname{Ker}\widetilde{\Gamma^\vee}\right).\end{aligned}$$

注意，根据 γ_r的构造，我们看到若 $j \geq 2$，则 $\operatorname{Im}(\Gamma^\vee)^{j-1} P_W \cap \operatorname{Ker}\Gamma^\vee = 0$ 且若从 W到 Q_r 的投影是满射，则 $\operatorname{Im} P_W \cap \operatorname{Ker}\Gamma^\vee = 0$。现在我们假设从 W 到 Q_r 的投影是满射，且 W 与 Q_r 的交为零。正如我们将看到的，按照命题4.25 所述选取的 W 满足这一条件。

于是我们得到

$$W \cap \operatorname{Ker}(\Gamma^\vee)^{j-1} = W \cap F^{\leq j-1},$$

and

$$W \cap \left(\widetilde{\Gamma^\vee}(\operatorname{Im}(\Gamma^\vee)^j \oplus (\Gamma^\vee)^{j-1}W)\right) = W \cap \left(\Phi(F_{\geq j+1}) \oplus \Phi(\overline{(W)_{\geq j}} \cap F_{=j})\right).$$

若 $m_r > 2n_r$，则在上述假设下，当 $j = 1$ 时，我们看到 $\overline{(W)_{\geq j} \cap F_{=j}} = \overline{0}$。

引理 4.23. 的分拆是 (4.2) 的重排，当且仅当满足以下秩条件：

(i) 若 $l_r \neq 0$，则

$$\mathrm{rk}(\gamma_W)^j - \mathrm{rk}(\Gamma^\vee)^j = \begin{cases} 1, & k_r + 1 \leq j \leq k_1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(ii) 若 $l_r = 0$，则

$$\mathrm{rk}(\gamma_W)^j - \mathrm{rk}(\Gamma^\vee)^j = \begin{cases} 1, & k_r \leq j \leq k_1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

如前所述，处理关于配对 $\oplus_{i=1}^r g_{Q_i}^{-1}$ 的 $Q^\vee$ 更为方便。我们首先分解

$$Q^\vee = (Q^{k_1+1})^\vee \oplus (Q^{k_1})^\vee \oplus (Q^{k_2})^\vee \oplus \cdots \oplus (Q^{k_{r-1}})^\vee \oplus (Q^{k_r+1})^\vee \oplus (Q^{k_r})^\vee.$$

对于任意整数 j，我们在 $Q^\vee$ 上引入如下滤过

- $G^{\leq j} = \oplus_{\alpha \leq j} (Q^\alpha)^\vee$ 则 ${}^*F_{\geq j} = G^{\leq j-1}$;
- $G_{\geq j} = \oplus_{\alpha \geq j} (Q^\alpha)^\vee$ 则 ${}^*F^{\leq j} = G_{\geq j+1}$;
- $G_{=j} = G^{\leq j} \cap G_{\geq j}$。

由此可得

$${}^*F_{=j} = {}^*F_{\geq j} + {}^*F^{\leq j} = G^{\leq j-1} + G_{\geq j+1},$$

and

$${}^*(W \cap \mathrm{Ker}(\Gamma^\vee)^{j-1}) = {}^*W + {}^*F^{\leq j-1} = {}^*W + G_{\geq j}.$$

此外，我们计算得到

$$\begin{aligned}
&\dim {}^*(W \cap \widetilde{\Gamma^\vee}(\mathrm{Im}(\Gamma^\vee)^j \oplus (\Gamma^\vee)^{j-1} W)) \\
=& \dim \left(\Phi^\vee({}^*W) + \left({}^*F_{\geq j+1} \cap ({}^*F_{=j} + {}^*(\overline{(W)_{\geq j}})) \right) \right) \\
=& \dim \left(\Phi^\vee({}^*W) + \left(G^{\leq j} \cap (G^{\leq j-1} + G_{\geq j+1} + ({}^*W_{\geq j})) \right) \right) \\
=& \dim \left(\Phi^\vee({}^*W) + \left((G^{\leq j-1} \oplus G_{=j}) \cap (G^{\leq j-1} \oplus (G_{\geq j+1} + ({}^*W_{\geq j}))) \right) \right) \\
=& \dim \left(\Phi^\vee({}^*W) + \left(G^{\leq j-1} + (G_{\geq j+1} + ({}^*W_{\geq j})) \cap G_{=j} \right) \right) \\
=& \dim \left(\Phi^\vee({}^*W) + \left(G^{\leq j-1} + \overline{({}^*W_{\geq j})_{=j}} \right) \right).
\end{aligned}$$

这里使用了以下事实：$\overline{(W)_{\geq j}} = (W + F^{\leq j-1}) \cap F_{\geq j}$，而 $\overline{({}^*W_{\geq j})_{=j}}$ 表示从 ${}^*W_{\geq j}$ 到 $G_{=j}$的投影。我们还要指出，如果 $m_r > 2n_r$，那么在上述假设下，当 $j = 1$时，有 $(W)_{\geq j} \cap F_{=j} = 0$，因此等式成立。

由此我们得到以下结果。

引理 4.24. 对于每个 $j \geq 1$，差值 $\mathrm{rk}(\gamma_W)^j - \mathrm{rk}(\Gamma^\vee)^j$ 等于

$$\dim \left(\overline{(\Phi^\vee({}^*W))_{\geq j}} + \overline{({}^*W_{\geq j})_{=j}} \right) - \dim {}^*W_{\geq j}.$$

证明。 由上述讨论以及 $\dim W = \dim {}^*W$ 这一事实可知，$\mathrm{rk}(\gamma_W)^j - \mathrm{rk}(\Gamma^\vee)^j$ 等于

$$\dim ({}^*W + G_{\geq j}) + \dim \left(\Phi^\vee({}^*W) + \left(G^{\leq j-1} + \overline{({}^*W_{\geq j})_{=j}} \right) \right) - \dim {}^*W - \dim Q^\vee.$$

首先,

$$\begin{aligned}\dim\left({}^*W+G_{\geq j}\right)-\dim{}^*W&=\dim{}^*W+\dim G_{\geq j}-\dim{}^*W_{\geq j}-\dim{}^*W\\&=\dim G_{\geq j}-\dim{}^*W_{\geq j}.\end{aligned}$$

接下来,

$$\begin{aligned}&\dim\left(\Phi^\vee({}^*W)+\left(G^{\leq j-1}+\overline{({}^*W_{\geq j})_{=j}}\right)\right)\\=&\dim\left(\Phi^\vee({}^*W)+\overline{({}^*W_{\geq j})_{=j}}\right)+\dim G^{\leq j-1}-\dim\left(\Phi^\vee({}^*W)+\overline{({}^*W_{\geq j})_{=j}}\right)^{\leq j-1}\\=&\dim\overline{\left(\Phi^\vee({}^*W)+\overline{({}^*W_{\geq j})_{=j}}\right)_{\geq j}}+\dim G^{\leq j-1}\\=&\dim\left(\overline{(\Phi^\vee({}^*W))_{\geq j}}+\overline{({}^*W_{\geq j})_{=j}}\right)+\dim G^{\leq j-1}\end{aligned}$$

注意到 $G_{\geq j}\oplus G^{\leq j-1}=Q^\vee$，那么 $\mathbf{rk}(\gamma_W)^j-\mathbf{rk}(\Gamma^\vee)^j$ 等于

$$\dim\left(\overline{(\Phi^\vee({}^*W))_{\geq j}}+\overline{({}^*W_{\geq j})_{=j}}\right)-\dim{}^*W_{\geq j}.$$

□

我们有 fi xed 基，分别对应于之前讨论中的 $(Q^{k_1+1})^\vee$、$(Q^{k_1})^\vee$、$(Q^{k_r+1})^\vee$ 和 $(Q^{k_r})^\vee$ n.

端点 $i=1$，r**：** 首先假设 $l_1\neq 0$ 且 $l_r\neq 0$。若 $m_r\leq 2n_r$，由引理 4.18，我们有子空间

$$(Q_1^\vee)_{div},\ (Q_1^\vee)_{>,ndiv}\subset Q_1^\vee,\qquad (Q_r^\vee)_{div},\ (Q_r^\vee)_{>,ndiv}\subset Q_r^\vee.$$

此外，根据引理 4.19，我们可以选取

$$v_1^+\in(Q_1^\vee)_{div},\quad((Q_1^\vee)_{div})_0\subset(Q_1^\vee)_{div},\qquad v_r^-\in(Q_r^\vee)_{div},\quad((Q_r^\vee)_{div})_0\subset(Q_r^\vee)_{div},$$

如该引理中所述。令

$$(Q_1^\vee)_\blacktriangleright:=((Q_1^\vee)_{div})_0+(Q_1^\vee)_{>,ndiv},\qquad (Q_r^\vee)_\blacktriangleright:=((Q_r^\vee)_{div})_0+(Q_r^\vee)_{>,ndiv}.$$

若 $m_r>2n_r$，回想在此情形下 $(Q_r)^\vee$ 的维数为 1，则取 v_r^-为一个向量，使得$g_{Q_r}^{-1}(v_r^-,\ v_r^-)=1$，并令 $(Q_r^\vee)_\blacktriangleright=0$。

若 $l_1=0$，则 $Q_1^\vee=(Q^{k_1})^\vee$ 并且，根据命题 4.14前的讨论，$\Phi^\vee$ 在 $Q_1^\vee$ 上的限制关于诱导配对是自伴的。因此，我们可以选取

$$v_1^+=v^+,\qquad (Q_1^\vee)_\blacktriangleright=(Q_1^\vee)_0$$

如引理2.13所述。

若 $l_r=0$，类似地，我们可以选取

$$v_r^-=v^-,\qquad (Q_r^\vee)_\blacktriangleright=(Q_r^\vee)_0$$

如引理2.13。

中间块 $2\leq i\leq r-1$**：** 对于 $2\leq i\leq r-1$，$\Phi^\vee$ 在Q^{k_i}上的限制$^\vee$相对于诱导配对是自伴的。由引理 2.12，可得一个子空间 $Q_0^{k_i\vee}\subset Q^{k_i\vee}$ 以及向量 $v_i^\pm\in Q^{k_i\vee}$。

对于 $2\leq i\leq r-1$，令

$$({}^*W)_2^i:=\bigoplus_{\alpha=2}^{i}(Q^{k_\alpha})_0^\vee\ +\ \left\langle\, v_\alpha^+\pm\sqrt{-1}\,v_{\alpha+1}^-\,\right\rangle_{2\leq\alpha\leq i-1}.$$

（这里的符号一经选定，便始终固定。）

命题 4.25. 设

$$^*W = (Q_1^\vee)_\blacktriangleright + (^*W)_2^{r-1} + (Q_r^\vee)_\blacktriangleright.$$

于是， γ_W 的约化是（4.2）的重排，并且 $\mathcal{E}_W$ 上的诱导配对是非退化的。

证明。 首先，根据引理4.18 和引理 2.12 可知， $^*W$ 是极大各向同性的。因此， $\mathcal{E}_W$ 上的诱导配对是非退化的。

根据引理4.24，为了确保 γ_W 的约化是（4.2）的重排，我们需要满足以下条件:

$$\dim\left(\overline{(\Phi^\vee(^*W))_{\geq j}} + \overline{(^*W_{\geq j})_{=j}}\right) - \dim {}^*W_{\geq j} = 1$$

当 $l_r \neq 0$ 时，适用于 $k_r + 1 \leq j \leq k_1$ ；或者当 $l_r = 0$ 时，适用于 $k_r \leq j \leq k_1$ 。并且

$$\dim\left(\overline{(\Phi^\vee(^*W))_{\geq j}} + \overline{(^*W_{\geq j})_{=j}}\right) - \dim {}^*W_{\geq j} = 0$$

对于其他情形。

对于任意满足 j 使得 $k_1 \geq k_i > j > k_{i+1} > k_r + 1$ 或 $k_{r-1} > j > k_r + 1$ 的情形，我们有

$$\begin{aligned}
\overline{(\Phi^\vee(^*W))_{\geq j}} &= \Phi^\vee(Q_1^\vee)_\blacktriangleright + \Phi^\vee(^*W)_2^{i-1} + \Phi^\vee(Q^{k_i})_0^\vee + \left\langle \Phi^\vee(v_i^+)\right\rangle \\
\overline{(^*W_{\geq j})_{=j}} &= 0 \\
{}^*W_{\geq j} &= (Q_1^\vee)_\blacktriangleright + (^*W)_2^{i-1} + (Q^{k_i})_0^\vee.
\end{aligned}$$

因此，该条件成立。

若 $j = k_i$ 满足 $k_1 > k_i > k_r + 1$，则

$$\begin{aligned}
\overline{(\Phi^\vee(^*W))_{\geq j}} &= \Phi^\vee(Q_1^\vee)_\blacktriangleright + \Phi^\vee(^*W)_2^{i-1} + \Phi^\vee(Q^{k_i})_0^\vee + \left\langle \Phi^\vee(v_i^+)\right\rangle \\
\overline{(^*W_{\geq j})_{=j}} &= \left\langle v_i^-\right\rangle + (Q^{k_i})_0^\vee \\
{}^*W_{\geq j} &= (Q_1^\vee)_\blacktriangleright + (^*W)_2^{i-1} + (Q^{k_i})_0^\vee.
\end{aligned}$$

由引理 2.12，我们可知 $\left\langle v_i^-\right\rangle + (Q^{k_i})_0^\vee = \Phi^\vee(Q^{k_i})_0^\vee + \left\langle \Phi^\vee(v_i^+)\right\rangle$ 因此该条件成立。当 $j = k_1$ 时，我们可知

$$\begin{aligned}
\overline{(\Phi^\vee(^*W))_{\geq j}} &= \Phi^\vee(Q_1^\vee)_\blacktriangleright + \left\langle \Phi^\vee(v_1^+)\right\rangle \\
\overline{(^*W_{\geq j})_{=j}} &= (Q_1^\vee)_\blacktriangleright \cap (Q^{k_1})^\vee \\
{}^*W_{\geq j} &= (Q_1^\vee)_\blacktriangleright.
\end{aligned}$$

因此我们需要 $(Q_1^\vee)_\blacktriangleright \cap (Q^{k_1})^\vee \subset \Phi^\vee(Q_1^\vee)_\blacktriangleright + \left\langle \Phi^\vee(v_1^+)\right\rangle$。当 $l_1 = 0$ 时，由引理 2.13，此结论成立。当$l_1 \neq 0$ 时，由引理 4.18 的 (d)，我们有

$$(Q_1^\vee)_\blacktriangleright \cap (Q^{k_1})^\vee \subset ((Q_1^\vee)_{div} + (Q_1^\vee)_{>,ndiv}) \cap (Q^{k_1})^\vee \subset \Phi^\vee((Q_1^\vee)_{>,ndiv}) \subset \Phi^\vee(Q_1^\vee)_\blacktriangleright + \left\langle \Phi^\vee(v_1^+)\right\rangle.$$

当 $j = k_1 + 1$ 时，我们看到

$$\begin{aligned}
\overline{(\Phi^\vee(^*W))_{\geq j}} &= \overline{(\Phi^\vee(Q_1^\vee)_\blacktriangleright + \langle\Phi^\vee(v_1)\rangle)_{=k_1+1}} \\
\overline{(^*W_{\geq j})_{=j}} &= (Q_1^\vee)_\blacktriangleright \cap (Q^{k_1+1})^\vee \\
{}^*W_{\geq j} &= (Q_1^\vee)_\blacktriangleright \cap (Q^{k_1+1})^\vee.
\end{aligned}$$

当 $l_1 = 0$时，则 $(Q^{k_1+1})^\vee = 0$ ，因此这三个空间全都为 0，故该条件得到满足。当 $l_1 \neq 0$时，根据引理 4.18中的 (e)，此情形亦可推出。

When $j = k_r + 1$ 且 $l_r \neq 0$时，根据引理 4.19，我们可知 $v_r^- \notin (Q^{k_r+1})^\vee$，因此

$$\overline{(\Phi^\vee(^*W))_{\geq j}} = \Phi^\vee\left((Q_1^\vee)_\blacktriangleright + (^*W)_2^{r-2}\right) + \Phi^\vee((Q^{k_{r-1}})_0^\vee) + \overline{(\langle \Phi^\vee(v_{r-1}^+ \pm \sqrt{-1}v_r^-)\rangle)_{=k+1}} + \overline{(\Phi^\vee(Q_r^\vee)_\blacktriangleright)_{=k_1+1}}$$
$$\overline{(^*W_{\geq j})_{=j}} = (Q_r^\vee)_\blacktriangleright \cap (Q^{k_r+1})^\vee$$
$$^*W_{\geq j} = (Q_1^\vee)_\blacktriangleright + (^*W)_2^{r-2} + (Q^{k_{r-1}})_0^\vee + (Q_r^\vee)_\blacktriangleright \cap (Q^{k_r+1})^\vee.$$

根据引理 4.18 的(e)，我们看到，如果$(\Phi^{\overline{\vee(Q_r^\vee)_\blacktriangleright)=k_1+1}} \subset (Q_r^\vee)_\blacktriangleright \cap (Q^{k_r+1})^\vee$，那么

$$\overline{(\Phi^\vee(^*W))_{\geq j}} + \overline{(^*W_{\geq j})_{=j}} = \Phi^\vee\left((Q_1^\vee)_\blacktriangleright + (^*W)_2^{r-1}\right) + (Q_r^\vee)_\blacktriangleright \cap (Q^{k_r+1})^\vee$$

因此该条件得到满足。

当 $j = k_r$ 且 $l_r \neq 0$ 时，有

$$\overline{(\Phi^\vee(^*W))_{\geq j}} = \Phi^\vee(^*W)$$
$$\overline{(^*W_{\geq j})_{=j}} = \overline{(\langle v_r^-\rangle + (Q_r^\vee)_\blacktriangleright)_{=k_r}}$$
$$^*W_{\geq j} = {}^*W.$$

因此该情形可由引理4.18的(d)推出。

当 $j = k_r + 1$ 且 $l_r = 0$ 时，有 $(Q^{k_r+1})^\vee = 0$，因此

$$\overline{(\Phi^\vee(^*W))_{\geq j}} = \Phi^\vee\left((Q_1^\vee)_\blacktriangleright + (^*W)_2^{r-2}\right) + \Phi^\vee((Q^{k_{r-1}})_0^\vee) + \left\langle \Phi^\vee(v_{r-1}^+)\right\rangle$$
$$\overline{(^*W_{\geq j})_{=j}} = 0$$
$$^*W_{\geq j} = (Q_1^\vee)_\blacktriangleright + (^*W)_2^{r-2} + (Q^{k_{r-1}})_0^\vee.$$

因此条件得到满足。

当 $j = k_r$ 和 $l_r = 0$时，则 $(Q^{k_r+1})^\vee = 0$ 和

$$\overline{(\Phi^\vee(^*W))_{\geq j}} = \Phi^\vee(^*W)$$
$$\overline{(^*W_{\geq j})_{=j}} = \left\langle v_r^-\right\rangle + (Q_r^\vee)_\blacktriangleright$$
$$^*W_{\geq j} = {}^*W.$$

回顾一下，在这种情况下，$v_r^- = v^-$，$(Q_r^\vee)_\blacktriangleright = (Q_r^\vee)_0$如引理 2.13所示，因此根据引理 2.13，我们可知

$$\dim\left(\Phi^\vee(^*W) + \left\langle v_r^-\right\rangle + (Q_r^\vee)_\blacktriangleright\right) - \dim {}^*W = 1.$$

对于 j 的其他取值，条件显然都满足。 □

References

[Bez96] Roman Bezrukavnikov. 仿射旗流形上不动点集的维数。 *Mathematical ResearchLetters*，3(2):185–189，1996。[BK18] David Baraglia 和 Masoud Kamgarpour。关于抛物 Hitchin 映射的像。 *Quarterly Journal of Mathematics*，69(2):681–708，2018。[CM93] David H. Collingwood 和 William M. McGovern。 *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*。Van Nostrand Reinhold 数学丛书。Van Nostrand Reinhold Co.，纽约，1993。[HN24] Thomas Hameister 和 Bao Chˆau Ngˆo。经典群的伴随截面。 *Internat. J. Math.*，35(9):论文编号 2441010，22，2024。[JY23] Konstantin Jakob 和 Zhiwei Yun。关于在 $\mathbb{P}^1$ 上的非规则 G-联络的 Deligne-Simpson 问题，2023。[KL88] D. Kazhdan 和 G. Lusztig。仿射旗流形上的不动点簇。 *Israel J. Math.*，62(2):129–168，1988。[Lus11] George Lusztig。从魏尔群中的共轭类到幺幂类。 *Representation Theory of the American Mathematical Society*，15(14):494–530，2011。[Spa88] N. Spaltenstein。局部域上的多项式、幂零轨道与魏尔群中的共轭类。*Astérisque*，168:191–217，1988。

[Spa90a] N Spaltenstein。偶正交李代数的 Kazhdan-Lusztig 映射札记。 *Archiv der Mathematik*，55(5):431–437，1990年。[Spa90b] N Spaltenstein。关于例外李代数的 Kazhdan-Lusztig 映射。 *Advances in Mathematics*，83(1):48–74，1990年。[SYZ25] Peng Shan、Wenbin Yan 和 Qixian Zhao。分圆层映射与单仿射顶点代数的关联簇，2025年。[WWW24] BinWang、XueqingWen 和 Yaoxiong Wen。抛物 Hitchin 系统的 Springer 对应与镜像对称。2024年。[WWW25] Bin Wang、Xueqing Wen 和 Yaoxiong Wen。关于抛物 SO_{2n}-Hitchin 系统的一般纤维与真实基底，2025年。[Yun21] Zhiwei Yun。极小约化类型与 Kazhdan-Lusztig 映射。 *Indag. Math. (N.S.)*，32(6):1240–1274，2021。

Hetao Institute of Mathematics and Interdisciplinary Sciences, Shenzhen, China
Email address: matph92@gmail.com

Chongqing University of Technology, No. 69, Hongguang Avenue, Banan District, Chongqing, 400054, China.*Email address*: wenxq@cqut.edu.cn

Zhejiang University, 866 Yuhangtang Rd, Hangzhou, 310058,
P. R. China*Email address*: y.x.wen.math@gmail.com