arXiv:2601.06756v1 [math.DG] 11 Jan 2026

定义在 $\mathbb{C}^{N+1}$上的新型Taub–NUT型卡拉比–丘度量

马腾飞

摘要。对于每个 $N \geq 3$，我们在$\mathbb{C}^{N+1}$ 上构造了一类完备非平坦Calabi–Yau度量。这些度量推广了 $\mathbb{C}^2$ 和$\mathbb{C}^3$ 上的Taub–NUT度量，其无穷远处切锥为 $\mathbb{R}^N$。构造依赖于广义Gibbons–Hawking拟设。一个关键障碍是，该拟设的体积形式缺陷在判别式轨迹的某些分支附近并不衰减，从而产生了比三维情形更严重的奇点。我们通过拼接过程解决了这一问题。

目录

1. 引言 2 1.1. 研究动机与历史 2 1.2. 主定理 3 1.3. 障碍与策略 4 1.4. 本文概要 4 1.5. 致谢 5 2. 预备知识 5 2.1. 广义Gibbons–Hawking拟设 5 2.2. 平坦例子 7 2.3. 紧化与分布方程 8 3. 线性化方法 9 3.1. 无穷远处的一阶渐近度量 9 3.2. 判别式轨迹的几何 13 3.3. $g^{(1)}$ 15的渐近性质4. 归纳假设 18 4.1. 轨迹上的光滑结构 20 5. 全纯视角 24 5.1. 模型空间上的Gibbons–Hawking结构 24 5.2. 从模型空间出发的全纯映射 27 5.3. 光滑与对数增长 30 5.4. 全纯映射的像 33 6. 判别式轨迹附近的手术 35 6.1. g_1 35的光滑延拓6.2. g_I 38的渐近性质6.3. 拼接卡拉比–丘度量 42 6.4. 求解偏微分方程 48 参考文献 57

关键词与短语。Calabi–Yau度量、Taub–NUT度量、广义Gibbons–Hawking拟设、拼接方法。

1. 引言

1.1. 研究动机与历史。卡拉比–丘度量的研究源于卡拉比极值度量纲领 [2]以及丘随后对紧凯勒流形上的卡拉比猜想的证明 [25]。此后，完备非紧卡拉比–丘度量的存在性已成为Kähler 几何中的一个核心主题。田—丘 [22, 23, 24], 取得了开创性成果，他们在射影流形中光滑反典范除子的补集上构造了此类度量。读者还可参阅 [9, 3, 4] 及其中的参考文献，了解更多相关进展。

本文聚焦于复仿射空间 $\mathbb{C}^{N+1}$ 上的完备卡拉比–丘度量。平坦的欧几里得度量是一个平凡的例子。当 $N=1$ 时，即在复维数为二的情形下，Taub–NUT度量提供了一个显著的例子。它最初出现在陶布1951年宇宙学模型 [21], 中，后来由纽曼–坦布里诺–翁蒂 [16] 加以扩展，以纳入如今所谓的纽特荷；吉本斯–霍金 [7] 则将其重新诠释为一种 ALF引力瞬子。勒布伦 [11] 注意到，这些度量的底层流形与 $\mathbb{C}^2$ 微分同胚，因此 Taub–NUT度量是 $\mathbb{C}^2$ 上的完备卡拉比–丘度量。特别地，这些度量在无穷远处的切锥为 $\mathbb{R}^3$，且其测地球的体积增长并非最大体积增长。

$$\mathrm{Vol}\big(B_p(R)\big) \sim R^3.$$

最近，李 [14] 构造了一族新的完备卡拉比–丘度量，定义在 $\mathbb{C}^3$ 上，其无穷远处切锥为 $\mathbb{R}^4$，且其体积增长率仍然非最大:

$$\mathrm{Vol}\big(B_p(R)\big) \sim R^4.$$

这些度量自然可视为经典 Taub–NUT 度量的高维类比。李的策略是在无穷远处的一个模型奇异 $\mathbb{T}^2$-丛上构造一个拟设，然后利用 Tian–Yau–Hein 理论体系 [23, 9] 将其变形为真正的 Calabi–Yau 度量。主要困难在于，靠近判别轨迹时，拟设的体积形式误差相对于距离函数仅以 1 阶衰减；而 [9] 理论要求衰减率严格快于二次。

本文的主要结果（定理 1.1）将这种 Taub–NUT 型构造推广到 $\mathbb{C}^{N+1}$，适用于每个 $N \geq 3$, 从而得到一族完备卡拉比–丘度量，其无穷远处切锥为平坦的 $\mathbb{R}^{N+2}$，且体积增长为

$$\mathrm{Vol}\big(B_p(R)\big) \sim R^{N+2},$$

因此再次成为非极大情形。与 [14], 中处理的 $\mathbb{C}^3$ 情形相比，高维情况下的主要困难在于，体积形式误差的衰减行为明显更差。事实上，在判别式轨迹的某些分支附近，它甚至可能完全不衰减（参见定理 1.1 后的讨论）。我们通过精细的粘合技术克服了这一障碍。我们的度量具有有界曲率（$\|\mathrm{Rm}\|_{L^\infty} < \infty$），但它们不是 L^2-可积的。

我们强调，此处构造的度量并未表现出最大体积增长。目前已知有两族具有非最大体积增长的完备卡拉比–丘度量。首先，Apostolov–Cifarelli [1] 最近构造了一些例子，其体积的变化规律如同

$$\mathrm{Vol}\big(B_p(R)\big) \sim R^{2N+1}.$$

当 $N = 1$ 时，他们的构造得到了经典的 $\mathbb{C}^2$ 上的 Taub–NUT度量，但对于 $N \geq 2$ ，其增长率既不同于李的例子 [14]，也不同于我们的例子。其次，在偶数维情形下，所谓的 $\mathbb{C}^{2N}$ （$N \geq 1$）上的 Taubian–Calabi度量最初于 [12] 构造，并在 [15] 得到推广。据 [8]，所述，这一术语由 Roček [19] 提出。这些度量满足

$$\mathrm{Vol}\big(B_p(R)\big) \sim R^{4N-1},$$

因此，只有当 $N = 1$ 时，它们才与当前的增长率一致。

最后，我们指出，李 [13], Conlon–Rochon [5], Székelyhidi [20], 以及最近的 Firester [6], 在 $\mathbb{C}^{N+1}$ 上构造了完备卡拉比–丘度量，其切锥具有如下形式：$V \times \mathbb{C}$，其中 V 是一个具有光滑截面的 N 维 Calabi–Yau锥。所有这些例子都具有最大体积增长，因此不同于本文构造的度量。

1.2. **主定理**。我们在 $\mathbb{C}^{N+1}$ 上引入一种全纯李群作用，称为对角 $\mathbb{T}^N$-作用，定义如下：

$$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}) \cdot (z_0, z_1, \dots, z_N) = \big(e^{-i\theta_\Sigma} z_0,\, e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_N} z_N\big),$$

其中 $\theta_\Sigma \coloneqq \sum_{j=1}^{N} \theta_j$。显然，此作用保持标准的全纯体积形式

$$\sqrt{-1}^{\,N}\, \mathrm{d}z_0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_N.$$

如果一个张量在此作用下不变，就称该张量为 $\mathbb{T}^N$-不变。本文的主结果如下：

定理 1.1。*存在一族完备、非平坦且具有 $\mathbb{T}^N$不变性的 Calabi–Yau 度量，定义在 $\mathbb{C}^{N+1}$ 上，其无穷远处切锥为 $\mathbb{R}^{N+2}$。*

这些度量的环面对称性通过相应的动量映射和 Kähler 商坐标产生 $\mathbb{T}^N$纤维化。每个纤维化的基底为$\mathbb{R}^N \times \mathbb{C}$，而判别式轨迹 $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{C}$（见定义 2.3）是一个无界的（$N-1$）维子集。

这些度量由秩为 N的正定实对称矩阵$A = (A_{ij})$ 参数化。远离 $\mathfrak{D}$的管状邻域时，该度量渐近于 $\mathbb{R}^{N+2}$的某个开子集上的平坦 $\mathbb{T}^N$纤维化。横截于 $\mathfrak{D}$时，它由 $\mathbb{C}^{n+1}$ （$1 \leq n < N$）上的 Taub–NUT 型度量纤维化建模，其中 n 可能沿轨迹的不同分支发生变化。

测地球的体积增长满足

$$\mathrm{Vol}\big(B_p(R)\big) \sim R^{N+2} \quad \text{as } R \to \infty,$$

因此，这些度量不具有最大体积增长。曲率相对于到 $\mathfrak{D}$ 的距离呈三次衰减。特别地，曲率是有界的，但在 $\mathfrak{D}$ 附近不衰减。

当 $N = 1$ 或 2 时，定理 1.1 中的卡拉比–丘度量分别对应于经典的 Taub–NUT度量以及在[14], 中构造的 $\mathbb{C}^3$ 上的 Taub–NUT 型度量。因此，定理 1.1 将 Taub–NUT度量推广到了更高维。

1.3. 障碍与策略。 与 [14], 中 $\mathbb{C}^3$ 上的 Taub–NUT度量的构造相比，证明定理 1.1 的主要困难在于：随着维数升高，一阶渐近度量的体积形式误差衰减会恶化。这一现象本质上是因为，随着维数增加，判别式轨迹 $\mathfrak{D}$ 呈现出更复杂的拓扑特征。

事实上，利用广义 Gibbons–Hawking拟设，可以构造一个一阶渐近度量 $g^{(1)}$，类似于 [14]的第2.1节；参见第3.1小节。在 [14] 中，沿判别式轨迹的体积形式误差至少以一阶衰减，而在我们的情形中，沿判别式轨迹的某些部分，该误差可能完全不以任何正阶衰减；参见第3.1小节末尾的讨论。需要注意的是，在完备非紧 Kähler 流形的经典理论中，复蒙日–安培方程的可解性通常要求体积形式误差以超过二阶的速率衰减；参见 Tian–Yau–Hein 理论体系 [9]。

为克服衰减不足的问题，我们采用拼接技术。粗略地说，我们的主要思路是用一个模型度量沿判别式轨迹逼近一阶渐近度量 $g^{(1)}$。该模型度量被定义为某个乘积空间上的乘积度量；参见第 5.1 节。我们将证明，这个乘积空间同构于 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{2(N-n)}$，其中所有拓扑缺陷都集中在 $\mathbb{C}^n$ 因子中。

接下来，我们在 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{2(N-n)}$ 的一个锥形区域内应用拼接技术，将$g^{(1)}$ 变形为一个 Calabi–Yau度量；见第 6.3 小节。之后，我们补回使用模型度量近似 $g^{(1)}$时产生的误差。这个过程称为手术。我们证明，手术后所得度量的体积形式误差沿该轨迹至少以 1 阶衰减；见第 6.4 小节。随后，我们按照 [14], 第 2.9 节的方法，通过求解一个 Laplace型方程进一步提高这一衰减速率，最后应用 Tian–Yau–Hein 理论体系求解复 Monge–Ampère 方程，从而构造所需的卡拉比–丘度量；见第 6.4 小节。

在 $\mathbb{C}^{N+1}$ 上构造带有 $N \geq 4$的 Taub–NUT度量时，至少需要进行两次手术。由于一次手术的结果会影响下一次手术，分析过程变得错综复杂。为此，我们对定理 1.1 的证明采用数学归纳法。粗略地说，在第 4 节中，我们假设经过某次手术后，所得的 Gibbons–Hawking 系数满足所需性质。与 $g^{(1)}$对应的系数满足这些假设。接着，我们利用这些性质进行下一次手术，并验证新的系数仍满足相同的假设。经过有限次这样的步骤后，我们便得到了定理 1.1 的证明。请注意，每次手术后所得的 Gibbons–Hawking 系数并未定义在整个底空间上，但归纳过程仍然有效。

1.4. 本文提纲。 本文组织如下。

第2节按照 [26]回顾广义Gibbons–Hawking拟设。在第2.2小节中，我们为适用于本文情形的判别式轨迹固定记号；在第2.3小节中，我们记录使主 $\mathbb{T}^N$-丛紧化的分布方程。该方程已在 [26] 中以更一般的形式出现；此处我们将其专门化为主定理所需的情形。

第3节构造了由 [14] 得到的一阶渐近度量 $g^{(1)}$，并指出其体积形式误差沿判别轨迹的某些分支并未衰减。第3.2小节利用该轨迹的对称性，简化后续

论证；第 3.3 小节则推导了附近 $g^{(1)}$ 的渐近行为。引理 3.3 为拼接过程提供了关键估计。

第 4 节提出了证明定理 1.1 所需的归纳假设（命题 4.1）。第 4.1 小节中的命题 4.5 和 4.6 对这些假设作了澄清和补充：前者说明 GH 系数如何在判别式轨迹附近诱导出光滑结构，后者则对由此得到的 GH 度量施加了额外的几何约束。初始度量 $g^{(1)}$ 满足所有假设。例 4.4 定义了模型几何，它作为沿该轨迹构造高维 Taub–NUT 度量的局部模型。

第 5 节在归纳假设下利用吉本斯–霍金拟设构造凯勒结构。第 5.2–5.4 小节证明，该结构与例 4.4 中的模型度量双全纯。我们的度量在某种意义上仅定义在“紧集之外”，证明遵循 [14, 第2节。4], 不过，先前的手术带来了额外的技术难题。我们仔细分析了轨迹上已有的复结构与归纳假设所诱导的复结构之间的关系（第 5.3 小节）。引理 5.3 对后续的粘合至关重要。

第 6 节进行粘合。第 6.1 小节利用环面对称性和引理 5.3，将第 5 节中的凯勒度量光滑地延拓到整个模型空间。第 6.2 小节研究延拓度量的渐近行为，并引入 Tian–Yau–Hein 理论体系所需的全局加权 Sobolev 范数。第 6.3 小节沿着轨迹的锥形区域，逐纤维粘合 Calabi–Yau度量，得到满足第 4 节所有假设的新 GH 系数；随后通过归纳得到定理 1.1。最后，第 6.4 小节通过逐区域逼近格林核、求解拉普拉斯方程并改善体积形式误差的衰减，按照 [14, 第2节.8], 以精确估计求解复蒙日–安培方程（定理 6.7）。

1.5. **致谢**。 作者感谢他的导师 Gang Tian 教授一直以来的指导，并感谢他建议研究 Kähler 几何中的度量问题，这一建议促成了本文的工作。

2. 预备知识

2.1. **广义Gibbons–Hawking拟设**。 Gibbons–Hawking拟设于1978 年被引入，用于构造圆不变 ALF 引力瞬子[7]。Pedersen–Poon 将四维吉本斯–霍金单极子方程重新表述为三哈密顿圆作用 [18] 的矩映射条件；在一篇配套论文中，他们又将这一拟设推广至任意 $4n$ 维，并引入一个带有 m 环面纤维的结构，从而得到由广义阿贝尔单极子方程支配的环面超 Kähler 度量 [17]。Zharkov [26] 随后将这一框架应用于局部 Calabi–Yau 几何，将其诠释为半平坦 SYZ 模型，并分析了其大复结构极限。

我们沿用 [26], 的记号，其定理 2.1以更一般的形式给出了广义Gibbons–Hawking拟设。这里只记录本文所需的特殊形式。设 M 是一个复（$N+1$）维 Kähler 流形，带有一个处处不为零的全纯体积形式，并允许一个全纯、等距且自由的 T^N作用。广义*Gibbons–Hawking*拟设 用 N 动量映射坐标以及凯勒商上的全纯坐标来表达Kähler和卡拉比–丘条件。

令 $\mathfrak{t}^N$表示 T^N的李代数，令 $\mathfrak{t}^N_{\mathbb{Z}}$表示$\mathfrak{t}^N$中的自然整数格。为 $\mathfrak{t}^N_{\mathbb{Z}}$选取一组基，在对偶空间（$\mathfrak{t}^N$）$^*\simeq\mathbb{R}^N$上定义线性坐标 μ_i。令 Y 为 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{C}^*$，并令 η 表示 $\mathbb{C}$ 上的标准复坐标，或表示 $\mathbb{C}^*$ 上周期为 1 的对数坐标（因此 $\mathbb{C}^*$上的标准坐标为 $e^{2\pi\sqrt{-1}\eta}$ ）。我们考虑一个主 T^N-丛 π： $M\to\mathcal{B}^0$，其定义在（$\mathfrak{t}^N$）$^*\times Y$的开子集 $\mathcal{B}^0$ 上，且其第一陈类是 $c_1\in H^2(\mathcal{B}^0,\ \mathfrak{t}^N_{\mathbb{Z}})$ 中的一个元素。稍后我们将把 M部分紧化为一个奇异的 T^N-丛。全文均采用求和约定。

定理 2.1. （参见 [26]中的定理 *2.1*）设 V_{ij} 为光滑实对称正定矩阵函数， W 为定义在 $\mathcal{B}^0$上的光滑正函数，且局部由势函数 Φ给出：

$$V_{ij}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j},\quad W=-4\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta\partial\bar{\eta}},\quad 1\le i,j\le N. \tag{2.1}$$

那么，下述取值于 $\mathfrak{t}^N$ 的实2形式是闭的：

$$F_j=\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial\mu_j}\mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}\bar{\eta}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial\eta}\mathrm{d}\mu_i\wedge\mathrm{d}\eta-\frac{\partial V_{ij}}{\partial\bar{\eta}}\mathrm{d}\mu_i\wedge\mathrm{d}\bar{\eta}\right). \tag{2.2}$$

进一步假设 $\frac{1}{2\pi}(F_1,\dots,F_N)$属于上同调类 $c_1\in H^2(\mathcal{B}^0,\mathfrak{t}^N_{\mathbb{Z}})$。那么，在主丛 $M\to\mathcal{B}^0$ 上存在一个联络 ϑ ，其曲率为$\mathrm{d}\vartheta_i=F_i$，对应于 $i=1,\dots,N$，使得 M成为一个带有度量张量的 ***Kähler*** 流形

$$h=V^{-1}_{ij}\zeta_i\otimes\bar{\zeta}_j+W\,\mathrm{d}\eta\otimes\mathrm{d}\bar{\eta},\quad \omega=\mathrm{d}\mu_j\wedge\vartheta_j+\frac{\sqrt{-1}}{2}W\,\mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}\bar{\eta}, \tag{2.3}$$

其中 $\zeta_j=V_{ij}\,\mathrm{d}\mu_i+\sqrt{-1}\,\vartheta_j$和$\mathrm{d}\eta$构成一组基，张成定义可积复结构的$(1,0)$形式。在 M上存在一个处处不为零的全纯形式：

$$\Omega=\wedge_{j=1}^N(-\sqrt{-1}\zeta_j)\wedge\mathrm{d}\eta. \tag{2.4}$$

卡拉比–丘条件 $\omega^N=\frac{N!}{2^N}\sqrt{-1}^{N^2}\Omega\wedge\bar{\Omega}$ 等价于

$$\det(V_{ij})=\det(W). \tag{2.5}$$

注 2.2. 根据弗罗贝尼乌斯定理，(2.1) 等价于以下系统，我们称之为可积性条件：

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial\mu_k}=\frac{\partial V_{ik}}{\partial\mu_j},\quad \frac{\partial^2W}{\partial\mu_i\partial\mu_j}+4\frac{\partial^2V_{ij}}{\partial\eta\partial\bar{\eta}}=0. \tag{2.6}$$

为方便读者，我们简要回顾 [26, 14], 中给出的证明；它也可视为对该定理的补充说明。

证明。 利用 (2.2) 和可积性条件 (2.6),

$$\mathrm{d}F_j=\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\partial^2W}{\partial\mu_i\partial\mu_j}+4\frac{\partial^2V_{ij}}{\partial\eta\partial\bar{\eta}}\right)\mathrm{d}\mu_i\wedge\mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}\bar{\eta}, \tag{2.7}$$

因此， F_j 的闭性等价于 (2.6)。由于 $\frac{1}{2\pi}F$ 表示相应的第一陈类， F必定是 T^N-联络 ϑ的曲率。此外，若 θ_j表示环面纤维上的坐标，且 X_j 为哈密顿向量场，则

联络 1-形式可用局部势 Φ表示，差一个 $\mathcal{B}^0$上的恰当形式：

$$\vartheta_j = \mathrm{d}\theta_j + \sqrt{-1}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu_j\partial\eta}\,\mathrm{d}\eta - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu_j\partial\bar{\eta}}\,\mathrm{d}\bar{\eta}\right). \tag{2.8}$$

直接验证可得 $F_j = \mathrm{d}\vartheta_j$。规范等价的选择所对应的联络在 M 上定义的结构彼此全纯等距。

复结构的可积性源于以下事实：由 (1,0)-形式生成的微分理想是闭的：

$$\mathrm{d}\zeta_j = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial\mu_j}\,\mathrm{d}\bar{\eta} - 2\frac{\partial V_{ij}}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\mu_i\right)\wedge\mathrm{d}\eta, \tag{2.9}$$

其中使用了 (2.6)、(2.2) 以及 ζ_j的定义。

注意到 $\mathrm{d}\eta = \Omega(X_1,\dots,X_N,\cdot)$，因此我们将 η称为全纯矩坐标。凯勒条件 $\mathrm{d}\omega = 0$由 (2.6) 和 (2.2) 得出。卡拉比–丘条件由更一般的公式得出

$$\omega^N = W\det(V_{ij})^{-1}\frac{N!}{2^N}\sqrt{-1}^{N^2}\Omega\wedge\overline{\Omega}.$$

证明完毕。 □

在本文余下部分，为简洁起见，我们将“吉本斯–霍金”简称为 GH。我们将定理中出现的函数 V_{ij} 和 W 称为*GH* 系数。因此，广义 Gibbons–Hawking拟设断言：给定满足正性假设、可积性条件 (2.6)，且由 (2.2) 定义的曲率属于主丛的上同调类$2\pi c_1$ 的 GH 系数，便可得到一个 GH 结构（即一个可积复结构、一个全纯体积形式和一个度量）。特别地，如果 GH 系数还满足卡拉比–丘条件 (2.5)，那么诱导的GH度量就是卡拉比–丘度量。

2.2. **平坦例子**。 本节将写出 $\mathbb{C}^{N+1}$ 上的平坦度量的动量映射及其相应的 GH 系数。我们的目标是描述判别式轨迹的形状，并引入全文中将使用的记号。

其动机源自定理 1.1：在相应的动量映射下，将其中构造于 $\mathbb{C}^{N+1}$ 上的 Taub–NUT度量和欧几里得度量视为奇异主 $\mathbb{T}^N$-丛时，二者具有相同的判别式轨迹。更一般地，对于赋有标准全纯体积形式的 $\mathbb{C}^{N+1}$ 上任意完备的 $\mathbb{T}^N$-不变 Kähler 度量，其判别式轨迹都是余维3仿射半空间的并。然而，并非每个度量都能产生延伸至无穷远的轨迹。

带有标准欧几里得度量的仿射空间 $\mathbb{C}^{N+1}$

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=0}^{N}\mathrm{d}z_i\wedge d\bar{z}_i$$

和全纯体积形式

$$\Omega = \sqrt{-1}^N\,\mathrm{d}z_0\wedge\mathrm{d}z_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z_N$$

允许对角 $\mathbb{T}^N$ 作用，其中第 k 个圆因子按如下方式作用

$$e^{\sqrt{-1}\theta_k}\cdot(z_0,z_1,\dots,z_N) = \left(e^{-\sqrt{-1}\theta_k}z_0, z_1,\dots,e^{\sqrt{-1}\theta_k}z_k, z_{k+1},\dots,z_N\right).$$

相应的动量坐标为

$$\mu_i = \frac{1}{2}\big(|z_i|^2 - |z_0|^2\big), \quad i = 1, \dots, N, \qquad \eta = z_0 z_1 \cdots z_N.$$

这定义了一个远离奇异轨迹 $\bigcup_{i<j}\{z_i = z_j = 0\}$ 的 $\mathbb{T}^N$-丛。用动量坐标表示，我们有

$$V_{ij}^{-1} = |z_0|^2 + \delta_{ij}|z_i|^2, \qquad W^{-1} = |z_0 z_1 \cdots z_N|^2\Big(\frac{1}{|z_0|^2} + \cdots + \frac{1}{|z_N|^2}\Big),$$

视为 μ_i 和 η 的函数。（注意，一旦全纯体积形式固定，坐标 η 就与度量无关。）

接下来我们描述判别式轨迹。

定义 2.3. 定义奇异的 $\mathbb{T}^N$-丛

$$\pi\colon \mathbb{C}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{C},$$
$$(z_0, z_1, \dots, z_N) \longmapsto \Big(\tfrac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_0|^2), \dots, \tfrac{1}{2}(|z_N|^2 - |z_0|^2), z_0 z_1 \cdots z_N\Big).$$

对于任意子集

$$I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{0, 1, \dots, N\} \quad (k \geq 2)$$

定义

$$\mathfrak{D}_I = \pi\big(\{z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0 \ and \ z_j \neq 0 \ if \ j \notin I\}\big).$$

判别式轨迹为 $\bigcup_{|I|\geq 2}\mathfrak{D}_I$。

注意， $\mathfrak{D}_I$ 是 $\mathbb{R}^N \times \mathbb{C}$的一个（$N+1-k$）维豪斯多夫开子集，我们记

$$\partial\mathfrak{D}_I = \bigcup_{I \subsetneq J} \mathfrak{D}_J,$$

其拓扑边界。

集合 $\mathfrak{D}$ 包含于 $\{\eta = 0\}$ 中，区域 $\mathfrak{D}_I$ 无界。例如，

$$\mathfrak{D}_{01} = \{\mu_1 = 0,\ \mu_j > 0,\ \eta = 0\}, \qquad \mathfrak{D}_{12} = \{\mu_1 = \mu_2 = s < 0,\ \mu_j > s,\ \eta = 0\}.$$

2.3. 紧化与分布方程。 在 GH Ansatz (2.1) 中，由 (2.2) 定义的曲率 F 要求属于上同调类 $2\pi c_1$。这一约束揭示了 GH 结构存在的拓扑障碍，即第一陈类的非平凡性。

Zharkov [26] 将这一要求转化为一个分布方程，这种形式更便于我们使用。尽管 [26] 中的讨论适用于更一般的情形，我们仍将范围限定于定义 2.3 中的映射 π，并记 $\mathcal{B}$ 为基底 $\mathbb{R}^N \times \mathbb{C}$， $\mathcal{B}^0$ 为 $\mathbb{R}^N \times \mathbb{C} \setminus \mathfrak{D}$。回顾一下，定义 2.3 中引入的轨迹 $\mathfrak{D}_{ij}$是 $\mathcal{B}$中的（$N-1$）维豪斯多夫开子集。用流的语言，这个方程写作

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}\sum_{1\leq i,j\leq N}\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial\mu_i\partial\mu_j} + 4\frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial\eta\partial\bar{\eta}}\Big)\,\mathrm{d}\mu_i \wedge \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta} \otimes e_j \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{N}\mathfrak{D}_{0i} \otimes e_i + \sum_{1\leq i<j\leq N}\mathfrak{D}_{ij} \otimes (e_j - e_i). \end{aligned} \tag{2.10}$$

这里 $\mathfrak{D}_{ij}$ 表示与轨迹 $\mathfrak{D}_{ij}$相关联的流，具体而言，按流的意义，

$$\mathfrak{D}_{0i} = -\mathcal{H}^{N-1}|_{\mathfrak{D}_{0i}}\, \mathrm{d}\mu_i \wedge \mathrm{d}\,\mathrm{Re}\,\eta \wedge \mathrm{d}\,\mathrm{Im}\,\eta,$$

其中测度 $\mathcal{H}^{N-1}|_{\mathfrak{D}_{0i}}$ 由下式给出

$$\mathcal{H}^{N-1}|_{\mathfrak{D}_{0i}}(f) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{N-1}_+} f(t_1, \ldots, \widehat{t_i}, \ldots, t_N, 0)\, \mathrm{d}t_1 \cdots \widehat{\mathrm{d}t_i} \cdots \mathrm{d}t_N.$$

其中 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{C})$。类似地，

$$\mathfrak{D}_{ij} = -\mathcal{H}^{N-1}|_{\mathfrak{D}_{ij}}\, (\mathrm{d}\mu_j - \mathrm{d}\mu_i) \wedge \mathrm{d}\,\mathrm{Re}\,\eta \wedge \mathrm{d}\,\mathrm{Im}\,\eta$$

with

$$\mathcal{H}^{N-1}|_{\mathfrak{D}_{ij}}(f) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{N-1}_+} f(t_1, \ldots, \widehat{t_i}, \ldots, \widehat{t_j}, \ldots, t_N, 0)\, \mathrm{d}t_1 \cdots \widehat{\mathrm{d}t_i}\widehat{\mathrm{d}t_j} \cdots \mathrm{d}t_N.$$

每当 GH 系数 V_{ij} 和 W 以流的意义满足方程（2.10）时，底空间上的主 $\mathbb{T}^N$-丛便可通过允许环面纤维退化，紧化为底空间上的奇异 $\mathbb{T}^N$-丛。此后，我们将方程（2.10）称为 GH Ansatz 的陈类条件 。

3. 线性化方法

3.1. 无穷远处的一阶渐近度量。 显然，直接通过 GH Ansatz 构造卡拉比–丘度量极其困难。卡拉比–丘条件（2.5）不仅对 GH 系数施加了一个非线性方程，还必须满足（2.6）和（2.10）。同时求解这些关于系数 V_{ij} 和 W 的方程，等同于解决一个奇异的全非线性系统——这是一项难以完成的工作。

因此，沿用 [14, 第2节1], 的策略，我们围绕一个常数解将问题线性化。我们扰动 GH 系数，使所得偏差满足由 (2.5) 导出的线性化卡拉比–丘方程；在线性化过程中，我们还可以进一步要求该扰动同时满足 (2.6) 和 (2.10)。扰动后的系数给出一个一阶渐近度量 $g^{(1)}$，本节最后我们将分析其体积形式误差的衰减。

此后，我们固定 $\pi\colon\ M \to \mathcal{B} \setminus \mathfrak{D}$ 为一个主 $\mathbb{T}^N$丛，其拓扑构型与例 2.2 中所述丛的拓扑构型一致。这里，$\mathcal{B} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{C}$ 和 $\mathfrak{D}$ 是定义 2.3 中引入的判别式轨迹。

基本思路是以一种能够体现底层拓扑的方式扰动常数解。常数解为

$$g_A = A_{ij}\, \mathrm{d}\mu_i \otimes \mathrm{d}\mu_j + \det A\, |d\eta|^2.$$

其对应的体积形式为

$$\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}_A = (\det A)^{3/2}\, \mathrm{d}\mu_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\mu_N \wedge \mathrm{d}\,\mathrm{Re}\,\eta \wedge d\,\mathrm{Im}\,\eta.$$

对于点 $\vec{\mu} =$（μ_1，.....，μ_N，η）$\in \mathbb{R}^N \times \mathbb{C}$，我们令

$$|\vec{\mu}|_A = \sqrt{A_{ij}\mu_i\mu_j + \det A\,|\eta|^2}.$$

用局部势 Φ表示时，卡拉比–丘条件 (2.5) 变为

$$\det\Big(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}\Big) = -4\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta\partial\bar{\eta}},$$

其在常数解处的线性化为拉普拉斯方程

$$\Delta_A\phi = A^{-1}_{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j} + 4(\det A)^{-1}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial\bar\eta} = 0.$$

这里 Δ_A 表示度量 g_A的拉普拉斯算子。在判别式轨迹之外，一阶修正

$$v_{ij} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\mu_i\partial\mu_j}, \qquad w = -4\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial\bar\eta} \tag{3.1}$$

因此应当分别是 V_{ij} 和 W 的 Δ_A-调和函数，即

$$\Delta_A v_{ij} = 0, \qquad \Delta_A w = 0, \qquad \det A\, A^{-1}_{ij} v_{ij} = w. \tag{3.2}$$

为编码拓扑，我们回顾V_{ij} 和 W所满足的分布方程（2.10）。线性化得到流方程

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\mu_i\partial\mu_j} + 4\frac{\partial^2 v_{ij}}{\partial\eta\partial\bar\eta}\right)\mathrm{d}\mu_i\wedge\mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}\bar\eta\otimes e_j\\ &\quad= \sum_{i=1}^N \mathfrak{D}_{0i}\otimes e_i + \sum_{1\le i<j\le N}\mathfrak{D}_{ij}\otimes(e_j - e_i),\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 v_{ij} 和 w 是在全局定义的，而 ϕ仅是一个局部势。将v_{ij} 和 w 视为未知量，则存在满足（3.1）的局部函数 ϕ等价于满足可积性条件

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial\mu_k} = \frac{\partial v_{ik}}{\partial\mu_j}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial\mu_i\partial\mu_j} = -4\frac{\partial^2 v_{ij}}{\partial\eta\partial\bar\eta} \tag{3.4}$$

在 $\mathfrak{D}$之外。这些条件直接转化为（2.6）中对V_{ij} 和 W 的类似约束。

引理 3.1. 令 $\alpha(N)$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中单位球的体积。对于 $1\le i<j\le N$，定义

$$\alpha_{0i} = \frac{2\pi\sqrt{\det A}}{N(N+2)\alpha(N+2)}\int\cdots\int_{\mathbb{R}^{N-1}_+}\frac{1}{|\vec\mu - \vec t^{(i)}|^N_A}\,\mathrm{d}t_1\cdots\widehat{\mathrm{d}t_i}\cdots\mathrm{d}t_N,$$

其中

$$\vec t^{(i)} = (t_1,\dots,t_{i-1},\overset{i}{0},t_{i+1},\dots,t_N,0)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{C},$$

and

$$\alpha_{ij} = \frac{2\pi\sqrt{\det A}}{N(N+2)\alpha(N+2)}\int\cdots\int_{\mathbb{R}^{N-1}_+}\frac{1}{|\vec\mu - \vec t^{(ij)} + s\vec{\mathbf{1}}|^N_A}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t_1\cdots\widehat{\mathrm{d}t_i}\widehat{\mathrm{d}t_j}\cdots\mathrm{d}t_N,$$

with

$$\vec t^{(ij)} = (t_1,\dots,t_{i-1},\overset{i}{0},t_{i+1},\dots,t_{j-1},\overset{j}{0},t_{j+1},\dots,t_N,0)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{C},$$

and

$$\vec{\mathbf{1}} = (1,\dots,1,0)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{C}.$$

那么，在分布的意义下，

$$\begin{aligned}\Delta_A\alpha_{0i}\,\mathrm{dVol}_A &= -2\pi\sqrt{\det A}\,\mathcal{H}^{N-1}|_{\mathfrak{D}_{0i}},\\ \Delta_A\alpha_{ij}\,\mathrm{dVol}_A &= -2\pi\sqrt{\det A}\,\mathcal{H}^{N-1}|_{\mathfrak{D}_{ij}}.\end{aligned}$$

形式上令 $\alpha_{0i}=\alpha_{i0}$、 $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$ 和 $\alpha_{ii}=0$，还可得到

$$\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\mu_k}=\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial\mu_j},\quad \frac{\partial\alpha_{0i}}{\partial\mu_j}=\frac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\mu_i}=-\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\mu_t} \tag{3.5}$$

对于任意互不相同的指标 $1\le i$、 j、 $k\le N$。

证明。 $\mathbb{R}^{N+2}$ 上的格林函数为

$$G(x,y)=-\frac{1}{N(N+2)\alpha(N+2)}\frac{1}{|x-y|_A^N},$$

因此，系数 α_{ij} 可通过积分显式求得。

为验证交换关系，从下式开始

$$\alpha_{01}=\int_{-\infty}^{\mu_2}\cdots\int_{-\infty}^{\mu_n}\frac{1}{|(\mu_1,t_2,\ldots,t_n,\eta)|_A^N}\,\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n.$$

对 μ_2 求导，得到

$$\frac{\partial\alpha_{01}}{\partial\mu_2}=\int_{-\infty}^{\mu_3}\cdots\int_{-\infty}^{\mu_n}\frac{1}{|(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_1,\eta)|_A^N}\,\mathrm{d}t_3\cdots\mathrm{d}t_n=\frac{\partial\alpha_{02}}{\partial\mu_1}.$$

类似的论证表明

$$\frac{\partial\alpha_{0i}}{\partial\mu_j}=\frac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\mu_i}\quad\text{and}\quad\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\mu_k}=\frac{\partial\alpha_{ik}}{\partial\mu_j}$$

对于任意互异的指标 $1\le i,\ j,\ k\le N$。

接下来考虑

$$\alpha_{12}=\int_{\mu_1}^{+\infty}\int_{\mu_1-s}^{+\infty}\cdots\int_{\mu_n-s}^{+\infty}\frac{1}{|(s,\mu_2-\mu_1+s,\mu_3-t_3,\ldots,\mu_n-t_n,\eta)|_A^N}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t_3\cdots\mathrm{d}t_n.$$

对 μ_1 求导可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha_{12}}{\partial\mu_1}&=-\frac{\partial\alpha_{12}}{\partial\mu_2}+\int_{\mathbb{R}_+^{N-2}}\cdots\int\frac{1}{\left|\vec{\mu}-\vec{t}^{\,(12)}\right|_A^N}\,\mathrm{d}t_3\cdots\mathrm{d}t_N\\&\quad-\sum_{i=3}^{N}\int_{\mathbb{R}_+^{N-2}}\cdots\int\frac{1}{\left|\vec{\mu}-\vec{t}^{\,(12i)}+s\mathbf{1}\right|_A^N}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t_3\cdots\widehat{\mathrm{d}t_i}\cdots\mathrm{d}t_N\\&=-\frac{\partial\alpha_{12}}{\partial\mu_2}-\frac{\partial\alpha_{01}}{\partial\mu_2}-\sum_{i=3}^{N}\frac{\partial\alpha_{12}}{\partial\mu_i}.\end{aligned}$$

类似的计算可得

$$\frac{\partial\alpha_{0i}}{\partial\mu_j}=\frac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\mu_i}=-\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\mu_t}\quad\text{for } i\ne j.$$

证明至此完成。 □

基于前述引理，我们很容易得到以下命题，其可积性条件由方程（3.5）给出。

命题 3.2. 由下式定义的量

$$v_{ii} = \alpha_{0i} + \sum_{k\neq i} \alpha_{ik}, \qquad v_{ij} = -\alpha_{ij} \quad (i \neq j), \qquad w = \det A \; A^{-1}_{ij} v_{ij}$$

在 $\mathfrak{D}$ 之外满足可积性条件 (3.4) 和调和性条件 (3.2)，并在全局上满足分布方程 (3.3)。

现在，我们通过广义 Gibbons–Hawking 构造引入凯勒拟设 $(g^{(1)}, \omega^{(1)}, J^{(1)}, \Omega^{(1)})$，定义如下：

$$V^{(1)}_{ij} = A_{ij} + v_{ij}, \qquad W^{(1)} = \det A + w.$$

上标“(1)”表示一阶渐近度量，意味着尚未进行手术。矩阵 $\big(V^{(1)}_{ij}\big)$ 的正定性由逐点不等式 $\alpha_{ij} > 0$ 保证，这可从显式积分公式中直接看出。需要注意的是，度量在判别式轨迹 $\mathfrak{D}$ 上的光滑性并非先验得到保证；这一问题将在构造的下一阶段处理。

对卡拉比–丘条件的近似程度由体积形式误差衡量

$$E^{(1)} = \frac{W^{(1)}}{\det\big(V^{(1)}_{ij}\big)} - 1.$$

展开行列式可得

$$E^{(1)} = \frac{\det A + w}{\det A + w + \sum_{k=2}^{N} \sigma_k\big(A^{-1}(v_{ij})\big)} - 1$$

$$= -\frac{(\det A)\sum_{k=2}^{N} \sigma_k\big(A^{-1}(v_{ij})\big)}{\det A + w + (\det A)\sum_{k=2}^{N} \sigma_k\big(A^{-1}(v_{ij})\big)},$$

其中，$\sigma_k\big(A^{-1}(v_{ij})\big)$ 表示特征值 $A^{-1}(v_{ij})$ 中的 k 次初等对称多项式。项 σ_k 可视为变量 α_{ij} 的 k 次多项式，而 w 可视为 α_{ij} 的线性组合。因此，沿着满足 $|I| \geq 3$ 的分层 $\mathfrak{D}_I$，分子不会衰减，所以$E^{(1)}$ 仍为 $O(1)$。这是一个新的障碍，在 [14]中讨论的三维情形里并不存在。

总之，在判别式轨迹之外，我们有

$$E^{(1)} = O\!\left(\frac{1}{|\vec{\mu}|^2_A}\right) \qquad \text{as } |\vec{\mu}|_A \to \infty,$$

而沿着 $\mathfrak{D}$ 的简单交叉区域（余维一分层），衰减降为

$$E^{(1)} = O\!\left(\frac{1}{|\vec{\mu}|_A}\right),$$

而沿着深交叉区域（即交叉重数至少为三），误差为

$$E^{(1)} = O(1)\,.$$

从近似解构造里奇平坦度量的标准解析方法，要求体积形式误差衰减严格快于二次。我们的拟设不满足这一要求，因此在应用这些工具之前必须先修正误差

才能应用。在 [14] ，Yang Li 通过利用不同区域中 $g^{(1)}$ 的 Green函数行为，克服了 $\mathbb{C}^3$ 上类似的困难。然而请注意，在原点之外， $\mathbb{C}^3$ 中的判别式轨迹至多只有简单交集；因此，在进行里奇曲率修正后，问题便可归结为求解一个 Laplace型方程。在更高维度中，体积形式误差可能沿某些方向不衰减，因此三维情形的策略无法直接推广。取而代之的是，我们将在深交层 $\mathfrak{D}_I$ 上沿着 $|I| \geq 3$ 进行手术，以促使误差按所需速率衰减。

3.2. 判别式轨迹的几何。 在下文中，每当我们分析 $\mathfrak{D}_I$附近的性质时，通常都将问题化简为 $I = \{0, 1, \dots, n\}$的情形。这种化简是由奇异 $\mathbb{T}^n$-丛 M的判别式轨迹所具有的自然对称性所保证的：

固定李代数 $\mathfrak{t}$的一组整基 $e_1, \dots, e_N$，并令 $\mathfrak{D}$ 为相应的判别式轨迹。给定 $I = \{i_1, \dots, i_n\}$，有两种情形。

(1) 若 $0 \in I$，我们重新排列基，使得 $I = \{0, 1, \dots, N\}$。(

2) 若 $0 \notin I$，我们将基替换为新的整基

$$-e_{i_1}, \qquad e_k - e_{i_1} \quad (k \neq i_1).$$

第二种变换在基底 $\mathcal{B}$上诱导出一个仿射自同构；等价地，我们得到一个新的投影 $\pi' \colon M \to \mathcal{B}'$ ，在该投影下， $\mathfrak{D}_I$ 被映射为 $\mathfrak{D}_J$ ，且$J = \{0, i_2, \dots, i_n\}$。这一仿射变换改变了 $\mathcal{B}$上的度量 g_A，也就是说，它改变了正定矩阵 A ，但使其特征值始终处于一个统一的紧集内。此外，我们的试探度量 $g^{(1)}$ 与这种 A的变化相容。

为使后续讨论更简洁，我们约定如下记号。设

$$I = \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \{0, 1, \dots, N\}$$

为一个指标集。每当使用下标 I 时，若 $0 \in I$ 且标记为 I 的对象仅在 $\{1, \dots, N\}$ 上有定义，则自动省略指标 0。例如，若 $I = \{0, 1, 2\}$，则 μ_I 表示列向量 $(\mu_1,\ \mu_2)^\top$。

下文假设 $0 \in I$，因此 $I = \{0, i_1, \dots, i_n\}$；情形 $0 \notin I$ 完全类似。我们记

$$\mu_I = (\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n})^\top, \qquad \vec{\mu}_I = (\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n}, \eta)^\top$$

为相应的列向量。

定义

$$A_I = (A_{i_t i_s})_{1 \leq t, s \leq n}$$

为 A 的主子矩阵，其行和列由 I 编号，并令

$$A_I^{-1} := (A_I)^{-1}.$$

注意，一般而言 $(A^{-1})_I \neq (A_I)^{-1}$。

如果 $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ 是与 I 不相交的另一个指标集，我们定义

$$A_{IJ} = (A_{i_t j_s})_{\substack{1 \leq t \leq n \\ 1 \leq s \leq k}}$$

使得 $A_{IJ}^\top = A_{JI}$。

对于每个指标集 I，令 $I' := \{0, 1, \dots, N\} \setminus I$。引入矩阵

$$G_I := A_I - A_{II'} A_{I'}^{-1} A_{I'I}.$$

G_I 的特征值位于区间

$$\Big[\lambda\Big(\frac{\lambda}{\Lambda}\Big)^{N-1},\ \Lambda\Big].$$

设 $I=\{0,1,\dots,n\}$。对于任意点 $p\in\mathcal{B}$，我们将其在 $\mathfrak{D}_I$ 上的投影记为 $p_I=\mathrm{pr}_I(p)$，即

$$\mathrm{dist}_A(p,p_I)=\min_{q\in\mathfrak{D}_I}\mathrm{dist}_A(p,q).$$

注意恒等式

$$\begin{aligned}\mu^\top A\mu&=\begin{pmatrix}\mu_I^\top & \mu_{I'}^\top\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_I & A_{II'}\\ A_{I'I} & A_{I'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_I\\ \mu_{I'}\end{pmatrix}\\&=\mu_I^\top G_I\mu_I+(\mu_{I'}+A_{I'}^{-1}A_{I'I}\mu_I)^\top A_{I'}(\mu_{I'}+A_{I'}^{-1}A_{I'I}\mu_I).\end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{D}_I$ 是豪斯多夫开子集，p_I 位于 $\mathfrak{D}_I$ 的内部，当且仅当

$$\nu_{I,I'}=(\nu_{I,i})_{n+1\le i\le N}=\mu_{I'}+A_{I'}^{-1}A_{I'I}\mu_I$$

的每一项都严格为正。在这种情况下，$p_I=(0,\ \dots\dots,\ 0,\ \nu_I^\top,\ 0)$ 并且

$$\mathrm{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_I)=\mu_I^\top G_I\mu_I+\det A\,|\eta|^2.$$

一般而言，p_I 可能位于 $\mathfrak{D}_I$ 的边界上，此时对于某个指标集 J，p 到 $\mathfrak{D}_I$ 的距离等于 p 到 $\mathfrak{D}_{I\cup J}$ 的距离。以下我们假设 $p_I\in\mathfrak{D}_I$，并研究投影 $\mathrm{pr}_{I\cup J}(p_I)$ 与 $\mathrm{pr}_{I\cup J}(p)$ 之间的关系。

令 J 为另一个与 I 不相交的指标集，并设 $K=\{0,1,\dots,N\}\setminus(I\cup J)$。于是

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\nu_{I,J}\\ \nu_{I,K}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\mu_J\\ \mu_K\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A_J & A_{JK}\\ A_{KJ} & A_K\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A_{JI}\\ A_{KI}\end{pmatrix}\mu_I\\&=\begin{pmatrix}\mu_J+s_J^{-1}s_{JI}\mu_I\\ \mu_K+A_K^{-1}\big(A_{KI}-A_{KJ}s_J^{-1}s_{JI}\big)\mu_I\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中

$$s_J=A_J-A_{JK}A_K^{-1}A_{KJ},\qquad s_{JI}=A_{JI}-A_{JK}A_K^{-1}A_{KI}.$$

因此，

$$\nu_{I,K}+A_K^{-1}A_{KJ}\nu_{I,J}=\mu_K+A_K^{-1}A_{KI}\mu_I=\nu_{I\cup J,K},$$

这意味着 $\mathrm{pr}_{I\cup J}(p)=\mathrm{pr}_{I\cup J}(p_I)$。因此，若两个投影都位于 $\mathfrak{D}_{I\cup J}$ 的内部，我们得到

$$\mathrm{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_{I\cup J})=\mathrm{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_I)+\mathrm{dist}_A^2(p_I,\mathfrak{D}_{I\cup J}).\tag{3.6}$$

若 $\mathrm{pr}_{I\cup J}(p_I)$ 不在 $\mathfrak{D}_{I\cup J}$ 的内部，则 $\mathrm{pr}_{I\cup J}(p)$ 也不在其中。因此，存在一个指标集 $L\supset J$，使得 $\mathrm{pr}_{I\cup J}(p_I)\in\mathfrak{D}_{I\cup L}$，进而 $\mathrm{pr}_{I\cup L}(p)\in\mathfrak{D}_{I\cup L}$。因此

$$\mathrm{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_I)+\mathrm{dist}_A^2(p_I,\mathfrak{D}_{I\cup J})=\mathrm{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_{I\cup L})\ge\mathrm{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_{I\cup J}).$$

反过来，也存在一个指标集 $L'\supset J$，使得 $\mathrm{pr}_{I\cup J}(p)\in\mathfrak{D}_{I\cup L'}$，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_{I\cup L'})=\mathrm{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_{I\cup J})&=\mathrm{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_I)+\mathrm{dist}_A^2(p_I,\mathfrak{D}_{I\cup L'})\\&\ge\mathrm{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_I)+\mathrm{dist}_A^2(p_I,\mathfrak{D}_{I\cup J}).\end{aligned}$$

因此，只要 $p_I \in \mathfrak{D}_I$，恒等式 (3.6) 就成立。此外，当 $p_I \in \partial\mathfrak{D}_I$ 时，我们有

$$\operatorname{dist}_A^2(p, \mathfrak{D}_{I\cup J}) \le \operatorname{dist}_A^2(p, \mathfrak{D}_I) + \operatorname{dist}_A^2(p_I, \mathfrak{D}_{I\cup J}).$$

3.3. 的渐近性质 $g^{(1)}$。本节分析试探度量 $g^{(1)}$ 在判别式轨迹附近的渐近行为，这等价于研究函数 α_{ij}。首先注意，对于 $i,\ j \in I$ 函数 α_{ij} 在 $\mathfrak{D}_I$ 上变得奇异，而在 $\mathfrak{D}_{ij}$之外是光滑调和函数。此外，存在一致常数 C 使得

$$0 < \alpha_{ij} < \frac{C}{\operatorname{dist}_A(\,\cdot\,, \mathfrak{D}_{ij})}.$$

对于 $2 \le |I| \le N$，我们在 $\mathcal{B}$中引入以下区域:

$$\mathcal{B}_I := \big\{ p \in \mathcal{B} \;\big|\; C_0 \operatorname{dist}_A(p, \mathfrak{D}_I) < \operatorname{dist}_A(p, \partial\mathfrak{D}_I) \big\}, \tag{3.7}$$

其中 $C_0 \gg 1$ 为一致常数。

$$\mathcal{B}_a = \big\{ p \in \mathcal{B} \;\big|\; 2C_0^{N-1} \operatorname{dist}_A(p, \mathfrak{D}) > \operatorname{dist}_A(p, O) \big\},$$

不难验证

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_a \cup \bigcup_{2\le|I|\le N} \mathcal{B}_I.$$

当 $i,\ j \in I$ 我们将 α_{ij} 在 $\mathcal{B}_I$ 上分解为一个奇异的首项和一个光滑的衰减项；这一分解将成为后续章节中手术构造的基石。

引理 3.3。设 $2 \le |I| \le N+1$ 和 i、$j \in I$。则有如下分解:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{I,ij} + \beta_{I,ij},$$

其中 $\alpha_{I,\ ij}$ 仅取决于 μ_I 和 η，而 $\beta_{I,\ ij}$ 是在 $\mathcal{B}_I$ 中的光滑 Δ_A-调和函数，满足

$$|\beta_{I,ij}| \le \frac{C}{\operatorname{dist}(\,\cdot\,, \partial\mathfrak{D}_I)}.$$

若 $I \subset J$和 $|J| = |I| + 1$，则在 $\mathcal{B}_I$ 中有

$$|\beta_{I,ij} - \beta_{J,ij}| = |\alpha_{I,ij} - \alpha_{J,ij}| \le \frac{C}{\operatorname{dist}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}_J)}.$$

更一般地，若 $I \subset J$，则在 $\mathcal{B}_I$ 中有

$$|\beta_{I,ij} - \beta_{J,ij}| = |\alpha_{I,ij} - \alpha_{J,ij}| \le \max_{\substack{I\subset K\subset J\\ |K|=|J|+1}} \frac{C}{\operatorname{dist}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}_K)}.$$

常数 C 是一致的。为方便记号，当 $i \notin I$ 或 $j \notin I$时，我们令 $\alpha_{I,\ ij} = 0$ 和 $\beta_{I,\ ij} = \alpha_{ij}$。

证明。设 $I = \{0, 1, \dots, n\}$和 $i = 0$、$j = 1$。则

$$\alpha_{01} = \frac{2\pi\sqrt{\det A}}{N(N+2)\alpha(N+2)} \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^{N-1}} \frac{1}{\big|(\mu_1, \mu_i - t_i, \eta)\big|_A^N} \,\mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_N.$$

通过对最后的 $N-n$ 个变量积分定义 $\alpha_{I,\ 01}$：

$$\alpha_{I,01} = \frac{2\pi\sqrt{\det A}}{N(N+2)\alpha(N+2)} \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}\times\mathbb{R}^{N-n}} \frac{1}{\big|(\mu_1, \mu_i - t_i, \eta)\big|_A^N} \,\mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_N.$$

对于一个 k 阶正定矩阵 M，以及任意 $R>0$，我们有

$$\int\cdots\int_{\mathbb{R}^k}\frac{1}{\left(x^\top Mx+R^2\right)^{N/2}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k=\frac{1}{\sqrt{\det M}\,R^{N-k}}\,\frac{\alpha(N-2)}{\alpha(N-k-2)}.$$

由于

$$\frac{\alpha(N-2)}{\alpha(n-2)}=\frac{N(N+2)\alpha(N+2)}{n(n+2)\alpha(n+2)},$$

我们得到

$$\alpha_{I,01}=\frac{2\pi\sqrt{\det G_I}}{n(n+2)\alpha(n+2)}\int\cdots\int_{\mathbb{R}^{n-1}_+}\frac{1}{\left|(\mu_1,\mu_{I\setminus\{1\}}-t_{I\setminus\{1\}},\eta)\right|^n_{G_I}}\,\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n.$$

特别地，当 $n=1$ 时，

$$\alpha_{\{0,1\},01}=\frac{1}{2\sqrt{\mu_1^2+\det(A_{\{2,\dots,N\}})|\eta|^2}}.$$

显然，$\alpha_{I,\,01}$ 仅取决于 μ_I，η，并且满足

$$\Delta_A\alpha_{I,01}\,\mathrm{dVol}_A=-2\pi\sqrt{\det A}\,\mathcal{H}^{N-1}\big|_S,$$

其中 S 是 $(N-3)$ 维豪斯多夫集

$$S=\big\{p\in\mathcal{B}:\mu_1=\eta=0,\ \mu_i>0\ (2\le i\le n)\big\}.$$

Set

$$\beta_{I,01}=\alpha_{01}-\alpha_{I,01}.$$

则$\beta_{I,\,01}$ 满足

$$\Delta_A\beta_{I,01}\,\mathrm{dVol}_A=2\pi\sqrt{\det A}\,\mathcal{H}^{N-1}\big|_{S'},$$

其中 $S'=\{\mu_1=\eta=0\}\setminus S$ 的豪斯多夫维数也为 $N-3$；特别地，$\beta_{I,\,01}$在 $\mathcal{B}_I$ 上光滑。

接下来令 $J=\{0,1,\dots,n+1\}$。计算可得

$$\Delta_A(\alpha_{I,01}-\alpha_{J,01})\,\mathrm{dVol}_A=-2\pi\sqrt{\det A}\,\mathcal{H}^{N-1}\big|_Y,$$

其中

$$Y=\big\{p\in\mathcal{B}:\mu_1=\eta=0,\ \mu_i>0\ (2\le i\le n),\ \mu_{n+1}<0\big\}.$$

因此

$$|\alpha_{I,01}-\alpha_{J,01}|\le\frac{C}{\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,,Y)}.$$

现在验证，对于 $p\in\mathcal{B}_I$，

$$\mathrm{dist}_A(p,Y)\ge C\,\mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_J).\tag{3.8}$$

由于 p 在 $\mathfrak{D}_I$ 上的投影 p_I 属于 $\mathfrak{D}_I$，因此我们有

$$\mathrm{dist}_A(p,Y)\ge\mathrm{dist}_A(p_I,Y)-\mathrm{dist}_A(p,p_I).$$

记

$$p_I=(0,\dots,0,w_{n+1},\dots,w_N,0),\qquad w_i>0.$$

对于形如 $q\in Y$ 的任意对象

$$q=(0,t_2,\dots,t_n,-t_{n+1},s_{n+2},\dots,s_N,0),\qquad t_i>0,\ s_i\in\mathbb{R},$$

我们得到

$$\operatorname{dist}_A^2(p_I,q)\geq\lambda\Big(\sum_{i=2}^{n}t_i^2+(w_{n+1}+t_{n+1})^2+\sum_{j=n+2}^{N}(w_j-s_j)^2\Big),$$

从而

$$\operatorname{dist}_A^2(p_I,Y)\geq\lambda w_{n+1}^2\geq\frac{\lambda}{\Lambda}\operatorname{dist}_A^2(p_I,\mathfrak{D}_J).$$

根据 $\mathcal{B}_I$ 的定义和恒等式（3.6），

$$\operatorname{dist}_A^2(p_I,\mathfrak{D}_J)=\operatorname{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_J)-\operatorname{dist}_A^2(p,p_I)\geq\Big(1-\frac{1}{C_0^2}\Big)\operatorname{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_J).$$

Thus

$$\operatorname{dist}_A(p,Y)\geq\frac{1}{C_0}\Big(\sqrt{\frac{\lambda}{\Lambda}}\sqrt{C_0^2-1}-1\Big)\operatorname{dist}_A(p,\mathfrak{D}_J).$$

取 C_0 充分大，使得上述表达式的右端为正，因此

$$|\alpha_{I,01}-\alpha_{J,01}|\leq\frac{C}{\operatorname{dist}(\,\cdot\,,\mathfrak{D}_J)}.$$

一般情形 $I\subset J$类似可得。最后，由于$\beta_{I,\ 01}=\beta_{I,\ 01}-\beta_{\{0,1,\dots,N\},\ 01}$，我们得到

$$|\beta_{I,01}|\leq\frac{C}{\operatorname{dist}(\,\cdot\,,\partial\mathfrak{D}_I)}.$$ □

设 $I=\{0,1,\dots,n\}$。在子空间 $\mathbb{R}^n_{\mu_I}\times\mathbb{C}_\eta$上，我们引入度量

$$g_{G_I}=\sum_{i,j\in I}G_{I,ij}\,\mathrm{d}\mu_i\otimes\mathrm{d}\mu_j+\det A\,|\mathrm{d}\eta|^2$$

以及体积形式

$$\mathrm{d}\operatorname{Vol}_{G_I}=\big(\det G_I\big)^{3/2}\mathrm{d}\mu_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\mu_n.$$

记 Δ_{G_I} 为与 g_{G_I} 相关联的拉普拉斯–贝尔特拉米算子：

$$\Delta_{G_I}u=\sum_{i,j\in I}G^{-1}_{I,ij}\frac{\partial^2u}{\partial\mu_i\partial\mu_j}+4(\det A)^{-1}\frac{\partial^2u}{\partial\eta\partial\bar\eta}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{Im}\,\mathrm{d}\eta,$$

如果 $\mathcal{B}$ 上的函数 u 仅依赖于 μ_I，η，则

$$\Delta_A u=\Delta_{G_I}u.$$

将 $\mathfrak{D}_{ij}\cap(\mathbb{R}^n_{\mu_I}\times\mathbb{C}_\eta)$ 视为 $\mathbb{R}^n_{\mu_I}\times\mathbb{C}_\eta$ 的一个 $(n-3)$ 维豪斯多夫开子集，我们在分布的意义下有，

$$\Delta_{G_I}\alpha_{I,ij}\,\mathrm{d}\operatorname{Vol}_{G_I}=-2\pi\sqrt{\det G_I}\,\mathcal{H}^{n-1}\big|_{\mathfrak{D}_{ij}}.$$

命题 3.4。这些量

$$v_{I,ii}=\alpha_{I,0i}+\sum_{k\neq i}\alpha_{I,ik},\qquad v_{I,ij}=-\alpha_{I,ij}\quad(i\neq j),\qquad w_I=\det A\,A^{-1}_{ij}v_{I,ij}$$

在 $\mathfrak{D}$ 之外求解可积性条件 (3.4) 和调和性条件 (3.2)，并在 $\mathcal{B}_I$ 中满足分布方程 (3.3)。

证明。调和性显然成立，每个 $\alpha_{I,\,ij}$ 都是在 $\mathbb{R}^n_{\mu_I}\times\mathbb{C}_\eta$ 上具有常系数矩阵 G_I 的一阶线性拟设，因此所述分布方程成立。根据定义，当 $i\notin I$ 或 $j\notin I$ 时，$v_{I,\,ij}=0$，因此可积性条件 (3.4) 自动满足。□

注 3.5. 函数 $v_{I,\,ii}$ 和 w_I 实际上在更大的定义域上满足分布方程(3.3)，我们将在后续章节中利用这一事实。

类似地，我们引入 $\beta_{I,\,ij}$对应的线性组合：

定义 3.6. 令

$$h_{I,ij}=v_{ij}-v_{I,ij},\qquad h_I=w-w_I.$$

那么，$h_{I,\,ij}$ 和 h_I 在 $\mathcal{B}_I$ 上是光滑调和函数，并满足可积性条件 (3.4)。

这些量 $h_{I,\,ij}$ 和 h_I 将用于衡量判别式轨迹附近试探度量与模型度量之间的误差，并在我们的手术过程中发挥关键作用。

4. 归纳假设

现在我们考虑定义在 $\mathcal{B}\setminus\mathfrak{D}$ 上的 GH 拟设系数 $V_{(1)}{}^{ij},W^{(1)}$，它们诱导出 GH 度量 $g^{(1)}$。如第 3.1 节末尾所述，与 $g^{(1)}$ 相关的体积形式误差 $E^{(1)}$ 在我们趋近具有 $|I|\geq 3$ 的分层 $\mathfrak{D}_I$ 时并不会衰减。

为克服这一困难，我们采用归纳法，在轨迹附近进行手术，以改进吉本斯–霍金系数。首先，我们构造一组新的系数 $V_{(2)}{}^{ij},W^{(2)}$，其诱导的 GH 度量 $g^{(2)}$ 在 $\mathfrak{D}_I$ 附近具有 $|I|=3$ 的区域之外与 $g^{(1)}$ 一致，但在子集 $\mathcal{B}_I$（定义见第 3.3 节）上更接近地逼近卡拉比–丘度量。因此，与 $g^{(2)}$ 相关的体积形式误差 $E^{(2)}$ 沿着具有 $|I|\leq 3$ 的轨迹 $\mathfrak{D}_I$ 衰减。

基于 $V_{(2)}{}^{ij},W_{(2)}$，接下来我们构造 $V_{(3)}{}^{ij},W^{(3)}$，确保相应的体积形式误差 $E^{(3)}$ 沿着轨迹 $\mathfrak{D}_I$ 衰减，并满足 $|I|\leq 4$。这一过程将以归纳方式继续进行。

因此，我们的证明本质上是归纳的。我们首先针对 GH 系数 $V_{(s)}{}^{ij},W^{(s)}$建立一组归纳假设，这些假设由初始数据 $V_{(1)}{}^{ij},W^{(1)}$满足。本文余下部分将构造满足相同假设的 $V_{(s+1)}{}^{ij},W^{(s+1)}$，从而完成归纳并证明定理 1.1。我们为 $|I|\geq 2$定义 $\mathcal{B}_I$ 的以下子集：

$$\begin{aligned}\mathcal{B}'_I&:=\big\{\,p\in\mathcal{B}\;\big|\;\;2C_0\,\mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_I)<\mathrm{dist}_A(p,\partial\mathfrak{D}_I)\,\big\},\\ \mathcal{B}''_I&:=\big\{\,p\in\mathcal{B}\;\big|\;4\hat{C}C_0\,\mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_I)<\mathrm{dist}_A(p,\partial\mathfrak{D}_I)\,\big\}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

ˆ这里 $C>1$ 仅依赖于 N,λ,Λ，这个常数的意义将在引理 6.9 中阐明。现在我们陈述归纳假设。回顾一下，$h_{I,ij}$ 和 h_I 是与指标集 I 相关的误差项，该指标集在定义 3.6 中引入。

命题 4.1 (归纳假设)。对于 $1\leq s\leq N-1$，定义 $\mathcal{B}$ 的子域

$$\mathcal{F}_s:=\bigcap_{|I|=s+2}\big\{\,p\in\mathcal{B}\;\big|\;\mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_I)>C_s\big\},\tag{4.2}$$

其中常数 C_s 满足 $C_s \gg C_{s-1}$，特别是 $C_s \gg C_0$，其中 C_0 是式 (3.7) 中用于定义 $\mathcal{B}_I$ 的常数。我们假设存在光滑函数 $V_{(s)\,ij}$、$W^{(s)}$，定义在 $\mathcal{F}_s \setminus \mathfrak{D}$ 上，并满足以下条件。

(I) 在 $\mathcal{F}_s\setminus\mathfrak{D}$ 矩阵 $\big(V_{(}^{\ s}{}_{ij}{}^{)}\big)$ 是正定的，$W^{(s)} > 0$，且满足交换关系

$$\frac{\partial V_{ij}^{(s)}}{\partial \mu_k} = \frac{\partial V_{ik}^{(s)}}{\partial \mu_j}, \qquad \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \mu_i \partial \mu_j} + 4\frac{\partial^2 V_{ij}^{(s)}}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} = 0 \tag{4.3}$$

成立。此外，按照 $\mathcal{F}_s$ 上的流的意义，

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}\Big(\frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \mu_i \partial \mu_j} + 4\frac{\partial^2 V_{ij}^{(s)}}{\partial \eta \partial \bar{\eta}}\Big)\,\mathrm{d}\mu_i \wedge \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta} \otimes e_j \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{N} \mathfrak{D}_{0i} \otimes e_i + \sum_{1 \le i < j \le N} \mathfrak{D}_{ij} \otimes (e_j - e_i). \end{aligned} \tag{4.4}$$

(II) 对于任意满足 $|K| = s+1$ 的 K，在 $(\mathcal{F}_s \setminus \mathfrak{D}) \cap \mathcal{B}_K$ 内，矩阵 $(V_{ij}^{(s)} - h_{K,ij})$ 是正定的，且 $W^{(s)} - h_K > 0$；它们在$\pi^{-1}(\mathcal{B}_K)$上诱导出光滑的 ***Kähler*** 结构。详细构造将在第 ***4.1*** 小节中给出；该光滑的 ***Kähler*** 结构由命题 ***4.5*** 中的映射 F_K 诱导，并满足命题 ***4.6*** 中列出的所有附加性质。此外，若对于某个 $j \notin K$ 有 $J = K \cup \{j\}$，则在 $\mathcal{B}_J \cap \mathcal{F}_s$

$$|V_{tj}^{(s)} - h_{K,tj} - A_{tj}| \le \frac{C}{\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,, \mathfrak{D}_J)} \quad \textit{for all } t \in J,$$

其中 C 是一个一致常数。

(III) 对于任意满足 $|I| \ge s+2$ 的 I，在 $(\mathcal{F}_s \setminus \mathfrak{D}) \cap \mathcal{B}_J$ 中，矩阵 $(V_{ij}^{(s)} - h_{I,ij})$ 是正定的，且 $W^{(s)} - h_I > 0$；二者仅依赖于 μ_I 和 η。此外，$V_{(s)\,tl} - h_{I,tl} = A_{tl}$，只要 $t \notin I$ 或 $l \notin I$。另外，

$$V_{ij}^{(s)} = V_{ij}^{(s-1)}, \qquad W^{(s)} = W^{(s-1)} \quad \textit{on } (\mathcal{F}_s \cap \mathcal{F}_{s-1}) \setminus \bigcup_{|J|=s+2} \mathcal{B}'_J.$$

(IV) 在 $\mathcal{F}_s \cap \{\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,, \mathfrak{D}) > 1\}$ 上，我们有

$$\|V_{ij}^{(s)} - A_{ij}\| \le C\,\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,, \mathfrak{D})^{-1}, \qquad \|W^{(s)} - \det A\| \le C\,\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,, \mathfrak{D})^{-1},$$

$$\|\nabla^k V_{ij}^{(s)}\| \le C\,\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,, \mathfrak{D})^{-k}, \qquad \|\nabla^k W^{(s)}\| \le C\,\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,, \mathfrak{D})^{-k}, \quad k \ge 1,$$

其中仿射联络和范数由 g_A 诱导，而 $C > 0$ 是一个一致常数。

注 4.2。(II) 的精确表述将在第 ***4.1*** 节给出，因为 $V_{(s)\,ij}$，$W^{(s)}$ 诱导光滑结构的方式相当复杂，若在此处详述会使当前陈述过于冗长。

注 4.3. 令 $|I| = s+2$，令 $K \subsetneqq I$, $|K| \ge 2$，定义

$$\mathcal{H}_K = \mathcal{B}_I \cap \Big(\mathcal{B}_K \setminus \bigcup_{K \subsetneqq J \subsetneqq I} \mathcal{B}'_J\Big). \tag{4.5}$$

由上面的 (III) 项，当 $|K| = t+1 \geq 2$ 时，我们有

$$V_{ij}^{(s)} = V_{ij}^{(t)}, \qquad W^{(s)} = W^{(t)} \qquad on\ \mathcal{F}_t \cap \mathcal{H}_K.$$

因此，性质 (II) 意味着 $V_{(s)\,ij}$ 和 $W^{(s)}$ 在 $\mathcal{F}_s \cap \mathcal{F}_t \cap \mathfrak{D}_K$上诱导出一个光滑结构。

对于初始系数 $V_{(1)\,ij}, W^{(1)}$ 显然满足性质 (I)、(III) 和 (IV)。正如下一小节所示，它们还在 $\mathfrak{D}_{ij}$附近诱导出一个光滑结构，从而完成对 (II) 的验证。

4.1. **沿轨迹的光滑结构**。在本小节中，我们固定

$$K = \{0, 1, \ldots, k\}$$

并说明 $V_{(k)\,ij}$ 和 $W^{(k)}$ 如何在 $\mathfrak{D}_K$上诱导出一个光滑结构。根据第3.2小节开头所述判别式轨迹的对称性，对一般 K 的讨论完全类似。

下文提到 $\mathcal{B}_K$ 时，均指其与命题 4.1 中定义的区域 $\mathcal{F}_k$ 的交集。在 $\mathcal{B}_K$ 上定义

$$V_{K,ij} := V_{ij}^{(k)} - h_{K,ij}, \qquad W_K := W^{(k)} - h_K.$$

由于 $V_{K,\ ij}$ 和 W_K 满足奇异 $\mathbb{T}^N$-丛 π的可积性条件和陈类条件： $\pi^{-1}(\mathcal{B}_K) \to \mathcal{B}_K$，且 $h_{K,\ ij}$和 h_K是定义在 $\mathcal{B}_K$ 上的光滑调和函数，同样满足可积性条件，因此差值 $V_{K,\ ij}$ 和 W_K 也同时满足可积性条件和陈类条件。

根据命题 4.1 的条件 (II)，矩阵 $(V_{K,\ ij})$ 是正定的，并且$W_K > 0$。对于 $k = 1$（即 $|K| = 2$），第 3.3 小节中的定义给出

$$V_{K,ij} = A_{ij} + v_{K,ij}, \qquad W_K = \det A + w_K,$$

因此正定性是显然的。

根据定理 2.1，存在定义在 $\pi^{-1}(\mathcal{B}_K \setminus \mathfrak{D})$ 上的复结构 J_K，以及凯勒度量 g_K；记其凯勒形式为 ω_K，全纯体积形式为 Ω_K。因此我们得到 GH 结构

$$\big(\pi^{-1}(\mathcal{B}_K \setminus \mathfrak{D}),\, J_K,\, \Omega_K,\, g_K,\, \omega_K\big).$$

下文将证明，该 GH 结构与某个模型几何双全纯同构。为此，我们首先描述标准空间。

例 4.4（模型几何）。定义流形

$$M^n := \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{R}^{2(N-n)}$$

配备标准复结构

$$J_{\mathrm{Nor}} := J_{\mathbb{C}^{n+1}} \oplus J_{\mathbb{R}^{2(N-n)}}.$$

使用全局坐标

$$(z_0, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_{N-n}, y_1, \ldots, y_{N-n}),$$

一组全纯 (1，0)-形式的基由下式给出

$$\mathrm{d}z_0, \ldots, \mathrm{d}z_n, \quad \mathrm{d}x_j + \sqrt{-1}\,\mathrm{d}y_j \ (1 \leq j \leq N-n).$$

标准的全纯体积形式为

$$\Omega_{\mathrm{Nor}} := (\sqrt{-1})^{2N-n} \bigwedge_{i=0}^{n} \mathrm{d}z_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{N-n} (\mathrm{d}x_j + \sqrt{-1}\,\mathrm{d}y_j).$$

群 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ 在 M^n 上有一个自然的作用:

- $\mathbb{T}^n$ 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的作用为

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n) \cdot (z_0, \ldots, z_n) = (e^{-\sqrt{-1}\sum \theta_i} z_0, e^{\sqrt{-1}\theta_1} z_1, \ldots, e^{\sqrt{-1}\theta_n} z_n).$$

- $\mathbb{R}^{N-n}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的 $_{N-n}$ 因子上的作用为

$$(t_1, \ldots, t_{N-n}) \cdot \big(x_j + \sqrt{-1}\, y_j\big)_{j=1}^{N-n} = \big(x_j + \sqrt{-1}\,(y_j + t_j)\big)_{j=1}^{N-n}.$$

定义全纯投影

$$\pi_\eta^n \colon M^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \pi_\eta^n(z, x, y) := z_0 \cdots z_n.$$

此映射赋予 M^n 以全纯纤维丛结构，使其成为以 $\mathbb{C}$ 为底空间的全纯纤维丛。赋予 M^n 标准凯勒形式

$$\omega_{\mathrm{Nor}} := -\frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i=0}^{n} \mathrm{d}z_i \wedge d\bar{z}_i + \sum_{j=1}^{N-n} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}y_j.$$

上述 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$作用的动量映射 $\mu^n = (\mu_1^n, \ldots, \mu_N^n) \colon M^n \to \mathbb{R}^N$由下式给出

$$\begin{aligned} \mu_i^n &= \frac{1}{2}\big(|z_i|^2 - |z_0|^2\big), \quad i = 1, \ldots, n, \\ \mu_j^n &= x_{j-n}, \qquad\qquad\qquad j = n+1, \ldots, N. \end{aligned}$$

令 $\pi^n := (\mu_1^n, \ldots, \mu_N^n, \pi_\eta^n) \colon M^n \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{C}$，容易验证 π^n是一个到其像上的微分同胚；将该像记为

$$\mathcal{B}^n := \pi^n(M^n) = \mathbb{R}^N \times \mathbb{C}.$$

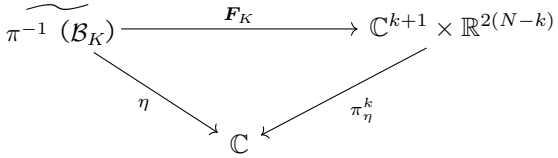
在 $\mathcal{B}^n$ 内，我们可以讨论群作用的判别式轨迹：对于任意指标集 $I \subset \{0, 1, \ldots, n\}$，令

$$\mathfrak{D}_I^n := \bigcap_{i \in I} \pi^n\big(\{z_i = 0\}\big), \qquad \mathfrak{D}^n := \bigcup_I \mathfrak{D}_I^n.$$

当 $n = N$ 时，这就化为例 2.2 中讨论的平坦例子。

作为命题 4.1 中条件 (II) 的详细表述，我们有

命题 4.5. 存在一个连续丛映射 $\boldsymbol{F}_K$，使其适合下图的交换关系



其中 $\widetilde{\pi^{-1}(\mathcal{B}_K)}$ 表示 $\pi^{-1}(\mathcal{B}_K)$的普遍覆盖，而π_η 是例 *4.4* 中定义的投影。映射 $\boldsymbol{F}_K$ 具有以下性质:

(i) $\boldsymbol{F}_K$ 在 $\pi^{-1}(\mathcal{B}_K \setminus \mathfrak{D})$上是单射且全纯，并满足

$$(\boldsymbol{F}_K)^*(\Omega_{Nor}) = \Omega_K.$$

因此，我们可以将其识别为 $\widetilde{\pi^{-1}(\mathcal{B}_K)}$ 与模型空间 $\mathbb{C}^{k+1} \times \mathbb{R}^{2(N-k)}$的一个开子集。

（*ii*）设 $\{e_i\}_{i=1}^N$ 是原始 $\mathbb{T}^N$-作用的李代数 $\mathfrak{t}^N$ 的标准基。引入仿射基

$$e_{K,K} := e_K, \qquad e_{K,K'} := e_{K'} + A_{K'}^{-1} A_{K'K} e_K. \tag{4.6}$$

则 $\boldsymbol{F}_K$ 将由（4.6）生成的 $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$ 作用与例 *4.4* 中描述的 M^k 上的标准作用交织起来。

（*iii*）推前（$\boldsymbol{F}_K$）$_*$（ω_K）可光滑地延拓穿过判别轨迹 $\mathfrak{D}_K$，因此它在 $\boldsymbol{F}_K$的像上定义了一个光滑的凯勒度量。此外，该度量在子集上是 *Calabi–Yau* 度量

$$\boldsymbol{F}_K\big(\widetilde{\pi^{-1}(\mathcal{B}''_K)}\big).$$

(iv) 根据归纳假设，已经在 $\mathcal{F}_{k-1} \cap \mathcal{B}_K$ 上构造了光滑结构。我们声称，映射 $\boldsymbol{F}_K$ 与先前定义的光滑结构相容，因此可在 $\mathfrak{D}_K$ 上赋予光滑结构。

现在我们描述映射 $\boldsymbol{F}_K$ 的显式形式。根据定理 2.1，取 $V_{K,\,ij}$ 和 W_K 为 GH 系数，存在一个联络 1-形式

$$\vartheta_K = \sum_{i=1}^N \vartheta_{K,i} \otimes e_i \quad \text{on } \pi^{-1}(\mathcal{B}_K \setminus \mathfrak{D})$$

满足

$$\mathrm{d}\vartheta_{K,i} = F_{K,i} \qquad \text{and} \qquad \vartheta_{K,i}(X_j) = \delta_{ij},$$

其中，X_j 是由 e_j 生成的光滑向量场，并且

$$F_{K,i} := \sqrt{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial W_K}{\partial \mu_i}\,\mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta} + \frac{\partial V_{K,ij}}{\partial \eta}\,\mathrm{d}\mu_j \wedge \mathrm{d}\eta - \frac{\partial V_{K,ij}}{\partial \bar{\eta}}\,\mathrm{d}\mu_j \wedge \mathrm{d}\bar{\eta}\right).$$

这里我们强调，在本文中，F 表示主丛上度量的曲率，而粗体符号 $\boldsymbol{F}$ 专用于表示向量丛之间的态射。

关于仿射基 (4.6)，令 X_i 为由 $e_{K,\,i}$ 生成的向量场。于是，联络形式的对偶基为

$$\tilde{\vartheta}_{K,K} := \vartheta_{K,K} - A_{KK'} A_{K'}^{-1} \vartheta_{K,K'}, \qquad \tilde{\vartheta}_{K,K'} := \vartheta_{K,K'},$$

使得 $\vartheta_{K,\,i}(X_j) = \delta_{ij}$ 和 $\vartheta_K = \sum_i \vartheta_{K,\,i} \otimes e_{K,\,i}$。

根据定理 2.1，复结构 J_K的一组 (1，0)-形式基为

$$\xi_{K,i} := \sum_j V_{K,ij}\,\mathrm{d}\mu_j + \sqrt{-1}\,\tilde{\vartheta}_{K,i}, \qquad \mathrm{d}\eta.$$

进行线性变换

$$\tilde{\xi}_{K,K} := \xi_{K,K} - A_{KK'} A_{K'}^{-1} \xi_{K,K'}, \qquad \tilde{\xi}_{K,K'} := \xi_{K,K'}, \qquad \mathrm{d}\eta,$$

我们得到

$$\tilde{\xi}_{K,i}(\tilde{X}_j) = \sqrt{-1}\delta_{ij}.$$

在 $\mathbb{C}^{k+1}\times\mathbb{R}^{2(N-k)}$ 这些形式上

$$dw_0,\dots,dw_k,\quad \mathrm{d}x_j+\sqrt{-1}\,\mathrm{d}y_j\ (j=1,\dots,N-k)$$

是闭的且全纯的。由于 $\boldsymbol{F}_K$ 是全纯的，它们的拉回是 $\pi^{-1}(\mathcal{B}_K\setminus\mathfrak{D})$上的闭全纯 1-形式。比较它们在向量场$X_i$ 上的取值，得到

$$\mathrm{d}x_i+\sqrt{-1}\,\mathrm{d}y_i=\tilde{\xi}_{K,i},\qquad i=k+1,\dots,N. \tag{4.7}$$

在 $w_i=0$ 之外，我们可以写成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\log w_i&=\tilde{\xi}_{K,i}+\gamma_{K,i}\,\mathrm{d}\eta, && i=1,\dots,k,\\ \mathrm{d}\log w_0&=-\sum_{i=1}^{k}\tilde{\xi}_{K,i}+\gamma_{K,0}\,\mathrm{d}\eta,\end{aligned} \tag{4.8}$$

其中选择函数 $\gamma_{K,i}$ 使右端闭合。方程 (4.7)–(4.8) 确定了 $\boldsymbol{F}_K$的局部表达式；与第 5.4小节中的论证相同，一旦我们固定初始常数使得 $\boldsymbol{F}_K$ ，它便在全局上有定义

$$w_0\cdots w_k=\eta.$$

$\mathcal{B}_K''$ 上的卡拉比–丘条件写作

$$\det(V_{K,ij})=W_K.$$

对于 $k=1$ （即 $|K|=2$），数据$V_{K,ij}$, W_K 描述了 $\mathfrak{D}_{ij}$附近一个二维 Taub–NUT 度量与一个平坦因子的乘积，因此命题 4.5 中列出的所有性质都由 $V_{(1)\,ij}$, $W^{(1)}$满足。

采用上述记号，现在我们完成对命题 4.1 (II) 的补充。首先，引入由 g_K诱导的加权 Sobolev 范数。按照 [14], 针对 $\pi^{-1}(\mathcal{B}_K)$上一个 $\mathbb{T}^k\times\mathbb{R}^{N-k}$-不变张量 T所采用的方法，我们用权函数定义其加权 Sobolev 范数

$$\ell_1=1+\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,,\mathfrak{D}).$$

对于 $0<\alpha<1$ ，定义归一化Hölder半范数

$$[T]_\alpha=\sup_p \ell_1(p)^\alpha \sup_{p'\in B_{g_K}(p,\ell_1(p)/10)}\frac{|T(p)-T(p')|_{g_K}}{d_{g_K}(p,p')^\alpha},$$

其中， $T(p)$ 和 $T(p')$ 通过沿最短测地线的平行移动进行比较。于是，对于整数 $k\ge 2$, $\pi^{-1}(\mathcal{B}_K)$ 上 T 的加权范数为

$$\|T\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}=\sum_{j=0}^{k}\|\ell_1^j\nabla_{g_K}^jT\|_{L^\infty}+[\ell_1^k\nabla_{g_K}^kT]_\alpha.$$

命题 4.6。 采用命题 *4.5* 的记号，由$V_{K,ij}$ 和 W_K 诱导的光滑*Kähler*结构满足：

(i) 令 $\{X_i\}_{i=1}^N$ 为 $\pi^{-1}(\mathcal{B}_K)$ 上对应于 $\mathbb{T}^N$-作用的基本向量场。则相对于上述加权范数，

$$\|X_i\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\le C.$$

由 *GH Ansatz* 诱导的全纯体积形式 Ω_K 也有界：

$$\|\Omega_K\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\le C.$$

(ii) g_K 的曲率张量有界：

$$\|\mathrm{Rm}_{g_K}\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}} \le C.$$

(iii) 对于命题 *4.5* 中定义的全纯映射 $(w_0, w_1, \dots, w_k)$，令

$$|w| = \Big(\sum_{i=0}^{k} |w_i|^2\Big)^{1/2},$$

$$|\vec{\mu}_K|_{G_K} = \big(|\mu_K|^2 + \det A\,|\eta|^2\big)^{1/2} = \big(\mu_K^{\mathbb{T}} G_K \mu_K + \det A\,|\eta|^2\big)^{1/2}.$$

那么，只要 $|\vec{\mu}_K|_{G_K} > R$,

$$K_1 e^{K_2|\mu_K|}\,|\vec{\mu}_K|_{G_K} \le |w| \le K_3 e^{K_4|\mu_K|}\,|\vec{\mu}_K|_{G_K}, \tag{4.9}$$

其中 $R > 0$ 和 $K_i > 0$ 仅依赖于 n、λ 和 Λ。

由于二维 Taub–NUT 度量的精细性质，很容易验证这些假设对 $|K| = 2$ 成立。对于 (iii)，取 $K = \{0, 1\}$；直接计算可得

$$|w_1|^2 = e^{C} e^{2G_{\{0,1\}}\mu_1}\big(\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + |\eta|^2}\big),\ |w_0|^2 = e^{-C} e^{-2G_{\{0,1\}}\mu_1}\big(-\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + |\eta|^2}\big).$$

(i) 将在第 6.2 小节中用于证明度量偏差估计，(ii) 确保 Tian–Yau–Hein 理论体系适用，而 (iii) 有助于引理 5.3 的证明。因此，命题 4.5 和 4.6 完成了对命题 4.1 的补充描述，而这些性质本身构成了我们的归纳假设的一部分。

5. 全纯视角

从现在起，我们固定一个指标集 I，其中 $|I| = n+1$，且 $2 \le n \le N-1$。由于第 3.2 节中讨论的判别式轨迹具有对称性，不失一般性，我们可以假设

$$I = \{0, 1, \dots, n\}.$$

根据归纳假设（命题 4.1），我们已经得到定义在 $\mathcal{F}_{n-1}$ 上的 GH 系数$V^{(n-1)}_{ij}$，$W^{(n-1)}$，它们满足该命题中列出的所有性质。接下来，我们要在 $\mathcal{B}_I$ 内对这些系数进行“手术”（见第 6 节）。本节为这项手术做准备，具体而言，我们将证明由 $V^{(n-1)}_{ij}, W^{(n-1)}$ 确定的 GH 结构具有与命题 4.5 中所确立的性质类似的性质。

5.1. 模型空间上的 Gibbons–Hawking 结构。我们的手术最终将在 $\mathcal{B}_I$ 内进行，因此我们重点研究 $\mathcal{B}_I$ 的拓扑性质，并利用 $V^{(n-1)}_{ij}$ 和 $W^{(n-1)}$，在 $\mathcal{B}_I$ 附近构造一个模型空间。

在 $\mathcal{F}_{n-1} \cap \mathcal{B}_I$ 上，我们定义

$$P_{I,ij} = A_{ij} + p_{I,ij} = V^{(n-1)}_{ij} - h_{I,ij}, \qquad Q_I = \det A + q_I = W^{(n-1)} - h_I. \tag{5.1}$$

命题 4.1 表明，$P_{I,ij}$ 和 Q_I 仅依赖于 μ_I 和 η。此外，$P_{I,ij}$ 是正定的，且 $Q_I > 0$。

固定 $p = (\mu_1, \dots, \mu_n, \eta) \in \mathcal{B}_I$，并令 p_I 为其到 $\mathfrak{D}_I$ 的投影。第3.2小节中的计算给出

$$p_I = (0, \dots, 0, \nu_{I,n+1}, \dots, \nu_{I,N}, 0),$$

其中 ν_I 是一个 $(N-n)$-向量，满足 $\nu_{I,\,j}>0$ 对于 $j\in I'$ 以及

$$\nu_{I,I'}=\mu_{I'}+A_{I'}^{-1}A_{I'I}\mu_I.$$

选取 $t_j>0$ ($j\in I'$)，并将 $P_{I,\,ij}$ 和 Q_I 视为定义在

$$\mathcal{F}_{n-1}\cap\mathcal{B}_I\cap\{\,p\in B:\nu_{I,j}=t_j\,\}.$$

由于它们仅依赖于 $(\mu_I,\ \eta)$，因此与 t_j 无关。令$t_j\to+\infty$ 将 $P_{I,\,ij}$ 和 Q_I 延拓到去掉一个紧子集后的整个空间 $\mathbb{R}^n_{\mu_I}\times\mathbb{C}_\eta$。全局延拓的障碍在于必须满足 $\operatorname{dist}_A(p,\partial\mathfrak{D}_I)>C_{n-1}$，其中 $p\in\mathcal{F}_{n-1}$。因此，作为 $(\mu_I,\ \eta)$ 的函数，它们仅定义在

$$\big\{\,q=(\mu_I,\eta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}:\operatorname{dist}_{G_I}(q,O)>C_{n-1}\,\big\}.$$

在 $\mathcal{B}_I$ 上，由 $e_{I'}$ 生成的作用是非退化的。为简化奇异丛几何，我们转到例 4.4 中的模型空间 M^n。将 $P_{I,\,ij}$和 Q_I 视为定义在基底上

$$\mathcal{B}^n=\mathbb{R}^n_{\mu_I}\times\mathbb{C}_\eta\times\mathbb{R}^{N-n}_{\mu_{I'}},$$

这对应于平凡化由 e_I生成的作用，即我们将其视为 $\mathbb{R}^{N-n}$-作用。所有后续结论均在奇异丛π^n上证明： $M^n\to\mathcal{B}^n$，然后再转回 $\mathcal{B}_I$。

在 $\mathcal{B}^n$ 上赋予度量 g_A，并令

$$\mathcal{T}_I=\{\,p\in\mathcal{B}^n:\operatorname{dist}_A(p,\mathfrak{D}_I^n)>C_{n-1}\,\}. \tag{5.2}$$

在 $\mathcal{T}_I$ 上，函数 $P_{I,ij}$ 和 Q_I 满足可积性条件以及一个类似于 (2.10) 的分布方程。因此，定理 2.1 给出一个联络形式

$$\vartheta_I=(\vartheta_{I,1},\dots,\vartheta_{I,N})$$

定义在 $(\pi^n)^{-1}(\mathcal{T}_I\setminus\mathfrak{D}^n)$ 上，满足 $\mathrm{d}\vartheta_I=F_I$，其中 $F_I=F_{I,i}\otimes e_i$ 和

$$F_{I,i}=\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial Q_I}{\partial\mu_j}\,\mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}\bar\eta+\frac{\partial P_{I,ij}}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\mu_j\wedge\mathrm{d}\eta-\frac{\partial P_{I,ij}}{\partial\bar\eta}\,\mathrm{d}\mu_j\wedge\mathrm{d}\bar\eta\right).$$

由于 $P_{I,ij}$和 Q_I仅依赖于 (μ_I,η)，并且根据命题 4.1 $P_{I,kl}=A_{kl}$，当 $k\notin I$ 或 $l\notin I$时，我们有 $F_{I,j}=0$，对 $j\in I'$成立。因此，经过一次规范变换后，我们可以假设

$$\vartheta_{I,j}=\mathrm{d}\theta_{I,j},\qquad j\in I'.$$

现在我们得到吉本斯–霍金结构

$$\big((\pi^n)^{-1}(\mathcal{T}_I\setminus\mathfrak{D}^n),J_I,\Omega_I,g_I,\omega_I\big) \tag{5.3}$$

其 GH 度量为

$$g_I=P_{I,ij}\,\mathrm{d}\mu_i\otimes\mathrm{d}\mu_j+P^{-1}_{I,ij}\,\vartheta_{I,i}\otimes\vartheta_{I,j}+Q_I|\mathrm{d}\eta|^2.$$

选择 $\mathfrak{t}^n\times\mathfrak{r}^{N-n}$ 的一个仿射基：

$$e_{I,I}:=e_I,\qquad e_{I,I'}:=e_{I'}+A_{I'}^{-1}A_{I'I}e_I$$

以及相应的动量坐标

$$\nu_{I,I}=\mu_I,\qquad \nu_{I,I'}=\mu_{I'}+A_{I'}^{-1}A_{I'I}\mu_I.$$

对偶联络形式为

$$\tilde\vartheta_{I,I}=\vartheta_{I,I}-A_{II'}A_{I'}^{-1}\vartheta_{I,I'},\qquad \tilde\vartheta_{I,I'}=\vartheta_{I,I'}.$$

在 $(\pi^n)^{-1}(\mathcal{T}_I \setminus \mathfrak{D}^n)$ 上，度量 g 正交分解为 $g = g_1 + g_2$，其中

$$g_1 = \mathrm{d}\nu_{I,I}^{\top}(G_{I,ij} + p_{I,ij})\,\mathrm{d}\nu_{I,I} + \tilde{\vartheta}_{I,I}^{\top}(G_{I,ij} + p_{I,ij})^{-1}\tilde{\vartheta}_{I,I} + \big(\det A + q_I\big)|\mathrm{d}\eta|^2$$

and

$$g_2 = \mathrm{d}\nu_{I,I'}^{\top} A_{I'}\,\mathrm{d}\nu_{I,I'} + \tilde{\vartheta}_{I,I'}^{\top} A_{I'}^{-1}\tilde{\vartheta}_{I,I'}.$$

注意到 $p_{I,\,ij}$ 和 q_I 仅依赖于 $(\mu_I,\ \eta)$。有序对 $(\nu_{I,\,I'},\ \theta_{I,\,I'})$ 给出了从 $(\pi^n)^{-1}(\mathcal{T}_I \setminus \mathfrak{D}^n)$ 到 $\mathbb{R}^{2(N-n)}$ 的同构。

接下来我们证明，(5.3) 中的模型 GH 结构可分解为一个乘积。取

$$e_{I,I},\ e_{I,I'}$$

作为李代数 $\mathfrak{t}^n \times \mathfrak{r}^{N-n}$ 的一组基，诱导出 M^n 的正交分解。第一个因子

$$\pi_1^n \colon M_1^n \to B_1^n$$

是一个位于 $\mathbb{R}^n_{\mu_I} \times \mathbb{C}_\eta$ 上的奇异 $\mathbb{T}^n$-丛，其纤维由 $e_{I,\,I}$ 生成；而第二个因子

$$\pi_2^n \colon M_2^n \to B_2^n$$

是一个位于 $\mathbb{R}^{N-n}_{\nu_{I,\,I'}}$ 上的 $\mathbb{R}^{N-n}$-丛，其纤维由 $e_{I,\,I'}$ 生成。因此，$\mathcal{T}_I$ 分解为

$$\mathcal{T}_I = \big\{p \in \mathbb{R}^n_{\mu_I} \times \mathbb{C}_\eta : \mathrm{dist}_{G_I}(p, O) > C_{n-1}\big\} \times \mathbb{R}^{N-n}_{\nu_{I,I'}} =: \mathcal{T}_{I,1} \times \mathbb{R}^{N-n}_{\nu_{I,I'}}.$$

在 $\mathcal{T}_{I,1} \subset B_1^n$ 上赋予 GH 数据

$$P_{ij} = G_{I,ij} + p_{I,ij}, \qquad Q = Q_I = \det A + q_I, \tag{5.4}$$

并选择联络形式 $\vartheta_{I,I}$。由此得到的度量正是上文给出的 g_1。

注 5.1. 对于定义在 $\mathcal{B}^n$ 上且与上述分解相容的任意几何对象，我们在其下标中添加 1，表示将其投影到第一因子上。例如，$\mathcal{T}_{I,1}$、$\mathfrak{D}_1^n$、$\mathfrak{D}_{K,1}^n$ 等。

对于全纯复结构 J_I，定理 2.1 给出了全纯 (1,0)-形式的一组基

$$\xi_{I,i} = (A_{ij} + p_{I,ij})\,\mathrm{d}\mu_j + \sqrt{-1}\,\vartheta_{I,i}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

并且 g_I 关于 J_I 是一个 Kähler 度量。

限制到第一因子并代入 GH 系数 P_{ij} 和 Q，得到复结构 J_1，其全纯 (1,0)-形式由以下形式张成

$$\tilde{\xi}_{I,i} = \sum_{j \in I}(G_{I,ij} + p_{I,ij})\,\mathrm{d}\nu_{I,j} + \tilde{\vartheta}_{I,i}, \qquad i \in I.$$

由于 $\tilde{\xi}_{I,\,I} = \xi_{I,\,I} - A_{II'}A_{I'}^{-1}\xi_{I,\,I'}$，结构 J_1 和 J_I 相容。

在第二个因子上，它们构成限制满全纯基，并在 M_2^n 上诱导出复结构 J_2。因此，

$$J_I = J_1 \oplus J_2,$$

即，J_I 与乘积分解相容。最后，每个 g_i 相对于 J_i $(i = 1,2)$ 都是 Kähler 的。

全纯体积形式 Ω_I 是

$$\Omega_I = \bigwedge_{j=1}^{N} (-\sqrt{-1}\xi_j) \wedge \mathrm{d}\eta.$$

我们在两个因子上引入相应的形式：

$$\Omega_1 = \bigwedge_{i\in I} (-\sqrt{-1}\tilde{\xi}_i) \wedge \mathrm{d}\eta, \qquad \Omega_2 = \bigwedge_{i\in I'} (-\sqrt{-1}\tilde{\xi}_i).$$

那么，Ω_1 是由 GH 数据 P_{ij} 和 Q诱导的全纯体积形式，并且

$$\Omega_I = (-1)^{N-n}\Omega_1 \wedge \Omega_2.$$

关于 J_I 的 g_I 的凯勒形式为

$$\omega_I = \mathrm{d}\mu_i \wedge \vartheta_i + \frac{\sqrt{-1}}{2} Q_I \, \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta},$$

而 g_1 和 g_2 的凯勒形式为

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{-1}}{2}\big(P_{ij}^{-1}\tilde{\xi}_i \wedge \bar{\tilde{\xi}}_j + Q \, \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta}\big) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}\mu_i \wedge \tilde{\vartheta}_i + \frac{\sqrt{-1}}{2} Q \, \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta},$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{-1}}{2} A^{-1}_{I',ij} \tilde{\xi}_i \wedge \bar{\tilde{\xi}}_j = \sum_{i=n+1}^{N} \mathrm{d}\nu_{I,i} \wedge \mathrm{d}\theta_{I,i}.$$

因此 $\omega = \omega_1 + \omega_2$。利用

$$\omega_2^{N-n} = \det(A^{-1}_{I'}) \frac{(N-n)!}{2^{N-n}} (\sqrt{-1})^{(N-n)^2} \Omega_2 \wedge \bar{\Omega}_2,$$

我们看到，如果

$$\omega_1^{n+1} = \det A_{I'} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} (\sqrt{-1})^{(n+1)^2} \Omega_1 \wedge \bar{\Omega}_1,$$

那么 ω 相对于 Ω 是卡拉比–丘流形，即

$$\begin{aligned} \omega^{N+1} = (\omega_1 + \omega_2)^{N+1} &= \frac{(N+1)!}{(n+1)!(N-n)!} \omega_1^{n+1} \wedge \omega_2^{N-n} \\ &= \frac{(N+1)!}{2^{N+1}} (\sqrt{-1})^{(N+1)^2} \Omega_I \wedge \bar{\Omega}_I. \end{aligned}$$

5.2. 从模型空间出发的全纯映射。本节研究复流形

$$\big((\pi^n)^{-1}(\mathcal{T}_I \setminus \mathfrak{D}^n), J_I\big).$$

我们的目标是证明它与

$$(\mathbb{C}^{n+1} \setminus B_R) \times \mathbb{R}^{2(N-n)}.$$

与 [14], 第 2.4 节类似，我们将构造一个从 $(\pi^n)^{-1}(\mathcal{T}_I)$ 到 $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{R}^{2(N-n)}$ 的显式全纯映射；同时必须考虑先前所做的手术。这些显式公式将在第 5.3 小节中派上用场。关于证明双全纯性的其他方法，参见 [11, 26]。

我们首先寻找闭全纯1-形式。由于对每个 $i \in I'$，$\mathrm{d}\xi_{I,\,i} = 0$，因此只需考虑 $\xi_{I,\,i}$ $(i \in I)$ 和 $\mathrm{d}\eta$。直接计算可得

$$\mathrm{d}\big(\tilde{\xi}_i + \gamma_i \, \mathrm{d}\eta\big) = \sqrt{-1}\Big[-\Big(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \bar{\eta}} + \frac{1}{2}\frac{\partial q_I}{\partial \mu_i}\Big) \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta} + \Big(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \mu_j} - 2\frac{\partial p_{I,ij}}{\partial \eta}\Big) \mathrm{d}\mu_j \wedge \mathrm{d}\eta\Big].$$

由于 $p_{I,\ ij}$ 和 q_I 仅依赖于 $(\mu_I,\ \eta)$，且在 $i \notin I$ 或 $j \notin I$ 时为零，我们可以选取函数 $\gamma_i(\mu_I,\ \eta)$，使得

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \mu_j} = 2\frac{\partial p_{I,ij}}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial \bar{\eta}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial q_I}{\partial \mu_i}, \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{5.5}$$

同样，要求 $-\sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i + \gamma_0\,\mathrm{d}\eta$ 为闭形式可得

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial \mu_j} = -2\sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{I,ij}}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \gamma_0}{\partial \bar{\eta}} = -\frac{n}{2}\frac{\partial q_I}{\partial \mu_i}. \tag{5.6}$$

两个系统的可积性条件都满足。

此后我们将范围限制在 $(n+2)$ 维区域 $\mathcal{T}_{I,1}$。固定 $i \in I$ 后，系数 $p_{I,ij}$ 在 $\mathcal{T}_{I,1} \setminus \mathfrak{D}_{i,1}^n$ 上光滑，因为由 e_i 和 $e_i - e_j$ $(j \in J)$ 生成的作用在此处非退化；出于同样的原因，和 $\sum_{j=1}^n p_{I,ij}$ 在 $\mathcal{T}_{I,1} \setminus \mathfrak{D}_{0,1}^n$ 上光滑。可以验证，$\mathfrak{D}_i^n$ 是 $\mathcal{T}_{I,1}$ 的一个开豪斯多夫-n-子集，其边界由余维 3 子集构成，并且 $\mathcal{T}_{I,1} \setminus \mathfrak{D}_{i,1}^n$ 是单连通的。因此，对于 $(\mu_I, \eta) \in \mathcal{T}_{I,1}$，我们可以定义

$$\begin{aligned}
\gamma_0(\mu_I,\eta) &= \lim_{\mu_j' \to -\infty} -2\int_{(\mu_1',\ldots,\mu_n')}^{(\mu_1,\ldots,\mu_n)} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{I,ik}}{\partial \eta}(s_1,\ldots,s_n,\eta)\,\mathrm{d}s_k, \\
\gamma_i(\mu_I,\eta) &= \lim_{\substack{\mu_i' \to +\infty \\ \mu_i' - \mu_j' \to +\infty}} 2\int_{(\mu_1',\ldots,\mu_n')}^{(\mu_1,\ldots,\mu_n)} \sum_{k=1}^n \frac{\partial p_{I,ik}}{\partial \eta}(s_1,\ldots,s_n,\eta)\,\mathrm{d}s_k.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

(5.7) 中的积分是广义积分，我们来验证其收敛性。根据命题 4.1，手术仅发生在某些 $\mathcal{B}_J$ 内。以 γ_1 为例：任何改变 $p_{I,1j}$（因而也改变 $V_{1j}^{(1)}$）取值的手术都发生在满足 $1 \in J$ 和 $|J| \geq 3$ 的 $\mathcal{B}_J$ 中。根据 $\mathcal{B}_J$ 的定义，极限

$$\mu_1 \to +\infty, \quad \mu_1 - \mu_j \to +\infty$$

远离所有此类 $\mathcal{B}_J$。因此，在与收敛性相关的区域内，我们可以用光滑函数 $v_{I,1j}$ 替换 $p_{I,1j}$；同样的论证适用于每一个 γ_i。因为

$$\|\nabla_A^k \alpha_{ij}\| \leq \frac{C}{\mathrm{dist}_A^{k+1}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}_{ij}^n)}, \qquad 0 \leq i,j \leq n,\ i \neq j,$$

定义 γ_i 的反常积分一致收敛。

因此

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \bar{\eta}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial q_I}{\partial \mu_i} + \lim_{\mu_i' - \mu_j' \to +\infty} \lim_{\mu_i' \to +\infty} \frac{1}{2}\frac{\partial q_I}{\partial \mu_i},$$

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial \bar{\eta}} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_I}{\partial \mu_i} + \lim_{\mu_j' \to -\infty} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_I}{\partial \mu_i}.$$

为计算这些极限，我们再次考虑 γ_1。P_{ij} 和 Q 在 $\mathcal{T}_I$ 上满足的分布方程给出

$$\frac{\partial^2 q_I}{\partial \mu_1 \partial \mu_j} + 4\frac{\partial^2 p_{I,1j}}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} = 0,$$

当 μ_1 和 $\mu_1-\mu_j$ 足够大时，该式成立。线积分论证表明

$$\lim_{\substack{\mu_1\to+\infty\\ \mu_1-\mu_j\to+\infty}} \frac{\partial q_I}{\partial \mu_1} \quad \text{exists and depends only on } \eta.$$

固定 η，并注意到 $\partial q_I/\partial\mu_1$ 在无手术区域中为零，我们得出结论：该极限恒等于零。因此

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \bar\eta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial q_I}{\partial \mu_i}, \qquad \frac{\partial \gamma_0}{\partial \bar\eta} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial q_I}{\partial \mu_i}.$$

˜现在我们计算 $\sum\gamma_i$ 的值。根据构造，每个 $\xi_i+\gamma_i\,\mathrm{d}\eta$ 都是闭全纯1-形式，因此它们的和也是如此

$$\Big(\sum_{i=0}^{n}\gamma_i\Big)\mathrm{d}\eta = f\,\mathrm{d}\eta.$$

因此 $f_{\mu_i}=0$ 且 $f_{\bar\eta}=0$，所以 $f=f(\eta)$ 在 η 中是全纯的。为得到 f 的显式形式，我们在 $|\eta|$ 较大时对其求值（以避开在 $|\eta|$ 较小时影响 $\mathcal{T}_I$ 的圆柱形挖除），然后利用全纯函数的唯一性。由于 f 与 μ_i 无关，我们固定 η，并将 μ_i 取为适当的极限。

固定 η，并令 $\mu_i\to-\infty$，$\mu_i-\mu_j\to-\infty\,(i<j)$。$\gamma_0$ 对极限的贡献为零。对于 $1\le k\le n$，我们考虑射线族

$$l_s(t)=s\vec{d}+t\vec{b}, \qquad b_i<0,\ b_i-b_j<0\ (i<j), \qquad d_k>0,\ d_k-d_l>0\ (l\neq k).$$

由于对于固定的 t，$\lim_{s\to+\infty}\gamma_k\circ l_s(t)=0$，我们有

$$\gamma_k\circ l_s(t_0)-\gamma_k\circ l_s(1)=\int_0^{t_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_k\circ l_s(t))\,\mathrm{d}t.$$

可以验证，当 s 足够大时，上述极限中的各项不受先前手术的影响。令 $t_0\to+\infty$ 和 $s\to+\infty$ 趋于无穷，并利用 $\sum_j \partial p_{I\text{的衰减},\,kj}/\partial\eta$ 以及 $\partial p_{I\text{的衰减},\,kj}/\partial\eta$，勒贝格控制收敛定理表明，当 $2\le k\le n$ 时，右端趋于 0。当 $k=1$ 时，有一项保留下来：

$$\lim_{s\to+\infty}\int_{-\infty}^{0} 2b_1\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_{I,1j}}{\partial\eta}\circ l_s(t)\,\mathrm{d}t.$$

当 s 足够大时，我们有 $p_{I,\,1j}=v_{I,\,1j}$，因此积分变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|b_1|\det A_{\{2,\dots,n\}}\bar\eta}{4\big((b_1\mu_1)^2+\det A_{\{2,\dots,n\}}|\eta|^2\big)^{3/2}}\,\mathrm{d}\mu_1=\frac{1}{\eta}.$$

因此

$$\sum_{i=0}^{n}\gamma_i=\frac{1}{\eta}, \qquad \text{so} \qquad \sum_{i=0}^{n}\mathrm{d}\log z_i=\mathrm{d}\log\eta.$$

适当地选取积分常数，我们得到

$$\prod_{i=0}^{n} z_i=\eta.$$

坐标 z_i 最初定义在 $\mathcal{T}_{I,\,1}\setminus\mathfrak{D}^n_{i,\,1}$ 上；上述关系使我们能够将 z_i 连续延拓至 $\mathfrak{D}^n_i$ 上的零。我们将在下一小节验证，z_i 在 $\mathfrak{D}^n_i$ 的边界上也会消失。

5.3. **光滑与对数增长**。沿用上一节的记号，我们证明

$$|z_i| \to 0 \quad \text{as we approach } \partial\mathfrak{D}_i^n.$$

根据归纳假设（命题 4.1）和命题 4.5，相关轨迹附近的光滑结构已经建立。随后，Hartogs 引理推出全纯结构 J_1 是光滑的。

固定 $K \subset I$，其中 $|K| = k+1$。利用第3.2小节中讨论的对称性，不妨设

$$K = \{0, 1, \dots, k\}.$$

引入 Gibbons–Hawking 系数

$$P_{K,ij} = A_{ij} + p_{K,ij} = P_{I,ij} + h_{I,ij} - h_{K,ij}, \qquad Q_K = \det A + q_K = Q_I + h_I - h_K.$$

根据注 4.3，在 $\mathcal{H}_K \cap \mathcal{F}_{n-1}$ 上，这些数据与第 4.1 小节中定义的 $V_{K,ij}$ 和 W_K 一致；因此，$P_{K,ij}$ 和 Q_K 诱导出一个 $\mathbb{C}^{k+1} \times \mathbb{R}^{2(N-k)}$ 型光滑结构。

注 5.2。与先前使用 $V_{K,ij}$ 和 W_K 的情形相比，这里存在一个细微差异：先前的 *GH* 结构取决于 $\mu_{I'}$，但在锥形区域 $\mathcal{B}_I$ 内，$V_{K,ij}$ 和 W_K 都与 $\mu_{I'}$ 无关。因此，由 $P_{K,ij}$ 和 Q_K 诱导的结构，是沿 $\mathcal{B}_I$ 的开口方向取“锥形极限”得到的。

在 $\mathcal{B}^n$ 上，对于满足 $|J| \geq 2$的每个 $J \subset I$，我们定义开集

$$\mathcal{B}_J^n = \big\{ p \in \mathcal{B}^n \;\big|\; C_0 \operatorname{dist}_A(p, \mathfrak{D}_J^n) < \operatorname{dist}_A(p, \partial\mathfrak{D}_J^n) \big\},$$
$$\mathcal{B}_a^n = \big\{ p \in \mathcal{B}^n \;\big|\; 2C_0^{N-1} \operatorname{dist}_A(p, \mathfrak{D}^n) > \operatorname{dist}_A(p, \mathfrak{D}_I^n) \big\},$$

并类似地引入 $(\mathcal{B}_J^n)'$、$(\mathcal{B}_J^n)''$。形式上，当 $I = \{i\}$时，对于$i = 0$，1、.....、N，我们令 $\mathcal{B}_i^n = \mathfrak{D}_i^n$。对于满足 $|K| \geq 2$的 $K \subset I$，仿照注 4.3，我们令

$$\mathcal{H}_K^n = \mathcal{T}_I \cap \big(\mathcal{B}_K^n \setminus \bigcup_{K \subsetneq J \subsetneq I} (\mathcal{B}_J^n)' \big).$$

因此，在 $\mathcal{H}_K^n$上，只要 $K \subsetneq J \subsetneq I$，就有 $\operatorname{dist}_A(\,\cdot\,, \mathfrak{D}_J^n) \sim \operatorname{dist}_A(\,\cdot\,, \mathfrak{D}_I^n)$。注意到 $\mathcal{T}_I \setminus \mathcal{B}_a^n = \bigcup_{K \subsetneq I} \mathcal{H}_K^n$。

根据归纳假设，我们有一组关于 J_K的全纯 (1，0)-形式基：

$$\xi_{K,i} = P_{K,ij}\, \mathrm{d}\mu_j + \sqrt{-1}\, \vartheta_{K,i},$$

其中联络 1-形式满足

$$\mathrm{d}\vartheta_{K,i} = F_{K,i} = \sqrt{-1}\Big(\frac{1}{2} \frac{\partial Q_K}{\partial \mu_j}\, \mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\bar{\eta} + \frac{\partial P_{K,ij}}{\partial \eta}\, \mathrm{d}\mu_j \wedge \mathrm{d}\eta - \frac{\partial P_{K,ij}}{\partial \bar{\eta}}\, \mathrm{d}\mu_j \wedge \mathrm{d}\bar{\eta} \Big).$$

因此，在 $\mathcal{H}_K^n$上，

$$\xi_{I,i} = \xi_{K,i} + \rho_i, \qquad \rho_i = (h_{I,ij} - h_{K,ij})\, \mathrm{d}\mu_j + \sqrt{-1}(\vartheta_{I,i} - \vartheta_{K,i}).$$

由于 $h_{I,\ ij} - h_{K,\ ij}$仅取决于（μ_I，η），因此它是$\mathcal{H}_K^n$上的光滑调和函数。闭形式

$$\mathrm{d}\log w_0 = \sum_{j=1}^{k} \tilde{\xi}_{K,j} + \gamma_{K,0}\, \mathrm{d}\eta, \qquad \mathrm{d}\log w_i = \tilde{\xi}_{K,i} + \gamma_{K,i}\, \mathrm{d}\eta, \quad i = 1, \dots, k,$$

由以下内容构成

$$\tilde{\xi}_{K,K} = \xi_{K,K} - A_{KK'}A_{K'}^{-1}\xi_{K,K'}, \qquad \tilde{\xi}_{K,K'} = \xi_{K,K'}.$$

对于 $i \in I'$ 两者 $\xi_{I,\,i}$ 和 $\xi_{K,\,i}$ 都是具有相同实部 $A_{ij}\mathrm{d}\mu_j$ 的闭 1-形式，它们的虚部相差一个规范变换。我们选择规范使得 $\vartheta_{I,\,i} = \vartheta_{K,\,i}$，因此 $\rho_{I'} = 0$。

令 $J = I \setminus K$。由于 $G_I = A_I - A_{II'}A_{I'}^{-1}A_{I'I}$，我们有

$$G_I = \begin{pmatrix} s_K & s_{KJ} \\ s_{JK} & s_J \end{pmatrix}.$$

其中

$$s_K = A_K - A_{KI'}A_{I'}^{-1}A_{I'K}, \qquad s_{KJ} = A_{KJ} - A_{KI'}A_{I'}^{-1}A_{I'J},$$
$$s_J = A_J - A_{JI'}A_{I'}^{-1}A_{I'J}, \qquad s_{JK} = A_{JK} - A_{JI'}A_{I'}^{-1}A_{I'K}.$$

根据定义，

$$\mathrm{d}\log z_J = \xi_{I,J} - A_{JI'}A_{I'}^{-1}\xi_{I,I'} + \gamma_{I,J}\,\mathrm{d}\eta.$$

因此，对于任意 $j \in J$，

$$\mathrm{d}\log|z_J| = s_{JK}\,\mathrm{d}\mu_K + s_J\,\mathrm{d}\mu_J + p_{I,JK}\,\mathrm{d}\mu_K + \mathrm{Re}(\gamma_{I,J}\,\mathrm{d}\eta).$$

因此，根据命题 4.1 (II)、(III) 以及 $\mathcal{H}_K^n$ 的定义，在 $\mathcal{T}_I \cap \mathcal{H}_K^n$ both$p_{I,\,jk}$ 和 $\gamma_{I,\,j}$ 上均光滑，并且满足

$$|p_{I,jk}| \le C\,\mathrm{dist}_A^{-1}(\,\cdot\,,\mathfrak{D}_I^n), \qquad |\gamma_{I,j}| \le C\,\mathrm{dist}_A^{-1}(\,\cdot\,,\mathfrak{D}_I^n).$$

对这些估计积分可得

$$|z_j| = \exp\bigl(s_{JK}\mu_K + s_J\mu_J + H_J\bigr) \qquad \text{on } \mathcal{T}_I \cap \mathcal{H}_K^n, \tag{5.8}$$

其中

$$|H_j| \le C\log\bigl(1 + \mathrm{dist}_A(\,\cdot\,,\mathfrak{D}_I^n)\bigr), \quad j \in J$$

其中一致常数为 C。

接下来我们分析 z_K。首先，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\log z_K &= \xi_{I,K} - A_{KI'}A_{I'}^{-1}\xi_{I,I'} + \gamma_{I,K}\,\mathrm{d}\eta \\ &= \xi_{K,K} - A_{KI'}A_{I'}^{-1}\xi_{K,I'} + \rho_K + (\gamma_{I,K} - \gamma_{K,K})\,\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

回忆一下

$$\mathrm{d}\log w_K = \xi_{K,K} - A_{KK'}A_{K'}^{-1}\xi_{K,K'} + \gamma_{K,K}\,\mathrm{d}\eta,$$

并观察分块分解

$$A_{KK'}A_{K'}^{-1} = \begin{pmatrix} s_{KJ}s_J^{-1} & -s_{KJ}s_J^{-1}A_{JI'}A_{I'}^{-1} + A_{KI'}A_{I'}^{-1} \end{pmatrix}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\log z_K = \mathrm{d}\log w_K &+ \rho_K + (\gamma_{I,K} - \gamma_{K,K})\,\mathrm{d}\eta \\ &+ s_{KJ}s_J^{-1}\xi_{K,J} - s_{KJ}s_J^{-1}A_{JI'}A_{I'}^{-1}\xi_{K,I'}.\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\log|z_K| = \mathrm{d}\log|w_K| &+ s_{KJ}\,\mathrm{d}\mu_J + s_{KJ}s_J^{-1}s_{JK}\,\mathrm{d}\mu_K \\ &+ \mathrm{Re}\,\rho_K + \mathrm{Re}\bigl((\gamma_{I,K} - \gamma_{K,K})\,\mathrm{d}\eta\bigr).\end{aligned}$$

右端是一个闭 1-形式，并且 ρ_K 在 $\mathcal{H}_K^n$上光滑，因此 $(\gamma_{I,\,K} - \gamma_{K,\,K})\,\mathrm{d}\eta$ 具有光滑外微分，且以与 ρ_K相同的速率衰减。因此，模去一个形如 $f\mathrm{d}\eta$ 的闭 1-形式（其中 f 在 η上全纯）后，其差

$\rho_K+(\gamma_{I,\ K}-\gamma_{K,\ K})\,\mathrm{d}\eta$是光滑的。由于 $\mathrm{d}\log\ z_K$和 $\mathrm{d}\log\ w_K$在 $\eta=0$处都仅部分定义，函数 f 在整个 η-平面上光滑且全纯。利用

$$\operatorname{Re}\rho_k=\sum_{j=1}^{n}(h_{I,kj}-h_{K,kj})\,\mathrm{d}\mu_j$$

以及估计

$$|\alpha_{I,ij}-\alpha_{K,ij}|\le\frac{C}{\operatorname{dist}_A(\,\cdot\,,\mathfrak{D}_I^n)}\qquad\text{on }\mathcal{H}_K^n.$$

像之前一样积分，对于任意 $k\in K,\,k\neq 0$，我们在 $\mathcal{T}_I\cap\mathcal{H}_K^n$ 上得到，

$$\begin{aligned}|z_K|&=|w_K|\exp\big(s_{KJ}\mu_J+s_{KJ}s_J^{-1}s_{JK}\mu_K+H_K\big),\\ |z_0|&=|w_0|\exp\Big(-\sum_{l=1}^{k}(s_{lJ}\mu_J+s_{lJ}s_J^{-1}s_{JK}\mu_K)-\sum_{l=1}^{k}H_l\Big),\end{aligned}\tag{5.9}$$

其中

$$|H_k|\le C\log\big(1+\operatorname{dist}_A(\,\cdot\,,\mathfrak{D}_I^n)\big),\quad k\in K$$

其中一致常数为 C。由于当我们趋近 $\mathfrak{D}_K^n$ 时 $|w_K|\to 0$，(5.9) 蕴含$|z_K|\to 0$。根据 Hartogs 引理，上述构造的映射相对于 $\mathcal{T}_I$ 上原有的光滑结构是光滑的，因此，全纯结构 J_1 也是光滑的。只要我们与 $\mathfrak{D}_K^n$ 保持一个确定的距离，(5.8) 和 (5.9) 中的等价常数就是一致的；这一事实将在后文用到。

下面的引理在第 6.1 小节中至关重要。

引理 5.3。令 $|z|=\left(\sum_{i=0}^{n}|z_i|^2\right)^{1/2}$ 并且

$$|\vec{\mu}_I|_{G_I}=\big(|\mu_I|^2+\det A\,|\eta|^2\big)^{1/2}=\Big(\sum_{1\le i,j\le n}G_{I,ij}\mu_i\mu_j+\det A\,|\eta|^2\Big)^{1/2}.$$

若 $|\vec{\mu}_I|_{G_I}>R$ 属于 $\mathcal{T}_{I,\ 1}$，则

$$K_1e^{K_2|\mu_I|}\,|\vec{\mu}_I|_{G_I}\le|z|\le K_3e^{K_4|\mu_I|}\,|\vec{\mu}_I|_{G_I},\tag{5.10}$$

其中 $R>0$ 和 $K_i>0$ 是仅依赖于 n、λ和 Λ的一致常数。

证明。我们先在 $\mathcal{B}_a^n$上进行讨论。固定 $p=(\mu_I,\ \eta)\in\mathcal{B}_a^n$并令$|\vec{\mu}_I|_{G_I}=R_0>0$。假设 $\sqrt{\det A\,|\eta|}\ge\epsilon R_0$，其中 $\epsilon>0$是一个稍后选定的小常数。令$x_i=\sum_{l=1}^{n}G_{I,\ il}\mu_l$，则 x_I 是一个 n维列向量。与 (5.8) 中一样，我们有

$$|z_i|\sim\exp(x_i+H_i),\quad i=0,1,\dots,n,$$

其中

$$|H_i|\le C\log\big(1+|\vec{\mu}_I|_{G_I}\big).$$

取 R_0 充分大，即可容易验证 (5.3)。

接下来假设 $\sqrt{\det A\,|\eta|}<\epsilon R_0$。那么

$$\det A\,|\eta|^2\le\frac{\epsilon^2}{1-\epsilon^2}\,\operatorname{dist}_A^2(q,\mathfrak{D}_I^n).$$

令 $q=(\mu_I,\ 0)$ 为 p 到 $\{\eta=0\}$ 的正交投影。根据 $\mathcal{B}_a^n$ 的定义，

$$4C_0^{2(N-1)}\big(\operatorname{dist}_A^2(q,\mathfrak{D}^n)+\det A\,|\eta|^2\big)>\operatorname{dist}_A(q,\mathfrak{D}_I^n)+\det A\,|\eta|^2.$$

因此，取足够小的 ϵ，我们得到

$$C\,\mathrm{dist}_A(q,\mathfrak{D}^n) > \mathrm{dist}_A(q,\mathfrak{D}_I^n) \tag{5.11}$$

取一致常数 $C>1$。因此， q 位于某个 $\mathfrak{D}_i^n$的内部；不失一般性，设 $i=0$。

由于

$$x_I^\top \mu_I = \mu_I^\top G_I \mu_I \geq (1-\epsilon^2)R_0^2,$$

且 (5.11) 在 $\mathbb{R}^n_{\mu_I}$ 中截出有限个互不相交的锥形区域，向量 x_I 位于与 $\mathfrak{D}_0^n$ 内部相对应的锥 $\mathcal{C}$ 的对偶锥 $\mathcal{C}^*$ 中。因此，单位向量 $\frac{x_I}{|x_I|}$ 的最大分量有一个一致的正下界，记为 $\frac{x_1}{|x_I|}>C>0$。注意到

$$x_I^\top x_I = \mu_I^\top G_I^2 \mu_I \geq C(\lambda,\Lambda)R_0,$$

我们得到 $x_1 > CR_0$。根据 $\mathcal{B}_a^n$ 的定义，有 $\mathrm{dist}_A(\cdot,\ \mathfrak{D}^n) \sim \mathrm{dist}_A(\cdot,\ \mathfrak{D}_I^n)$，因此在当前假设下

$$|z_i| = \exp(x_i + H_i), \quad i\in I,\ i\neq 0,$$

with

$$|H_i| \leq C\log\bigl(1+|\vec{\mu}_I|_{G_I}\bigr).$$

当 R_0 足够大时，这给出 $|z| > |z_1| \geq \exp(CR_0)$，其中一致常数为$C>0$；而当 $i\neq 0$ 时， $|z_i| \leq \exp(CR_0)$。由于 $|z_0| = \frac{|\eta|}{\prod_{i\neq 0}|z_i|}$，估计 (5.10) 立即成立。

由于 $\mathcal{T}_I \setminus \mathcal{B}_a^n = \bigcup_{K\subsetneq I}\mathcal{H}_K^n$，只需在单个 $\mathcal{H}_K^n$上证明该引理，其中 $K=\{0,1,\dots,k\}$。对于 w_K，回想命题 4.6 表明，估计 (4.9) 得出与 (5.10) 类似的结论。

令 p_K 为从 p 到 $\mathfrak{D}_K^n$的垂足。于是

$$\mathrm{dist}_A^2(p,\mathfrak{D}_I^n) = \mathrm{dist}_A^2(p,p_K) + \mathrm{dist}_A^2(p_K,\mathfrak{D}_I^n),$$

因此， $|z|$的上界可由 (5.8) 和 (5.9) 得出。令 $\mathrm{dist}_A(p,\ \mathfrak{D}_I^n) = |\vec{\mu}_I|_{G_I} = R_0 > 0$。若 $\mathrm{dist}_A(p_K,\ \mathfrak{D}_I^n) > \delta R_0$，其中小常数 $\delta>0$ 待定，则 (5.8) 给出 $|z|>|z_J| \geq \exp(CR_0)$，与 $\mathcal{B}_a^n$ 的情形完全相同。否则

$$\mathrm{dist}_A(p,p_K) > \sqrt{1-\delta^2}\,R_0 > \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\,\mathrm{dist}_A(p_K,\mathfrak{D}_I^n).$$

由 (5.9)，指数项一致地受 $|w_i|$控制，因此我们可以将 $\delta>0$ 选得足够小（一致地），并结合 (4.9) 确保$|z|>|z_K|\geq C|w_K| \geq \exp(CR_0)$。至此，引理得证。□

5.4. 全纯映射的像。 如上所述，我们构造了一个从$\mathcal{T}_I$ 到 $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}$的映射，根据 $\mathcal{T}_I$ 和$\nu_{I,\ I'}$的定义，向 $\mathbb{R}^{2(N-n)}$的投影是双射。本节将证明，向 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的投影是单射，且其像是去掉一个紧子集后的整个空间。

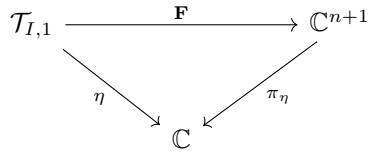
我们有全纯丛映射

$$\mathbf{F}\colon \mathcal{T}_{I,1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}, \qquad \mathbf{F}=(z_0,\dots,z_n),$$

并考虑全纯向量场

$$J(X_i) + \sqrt{-1}X_i, \qquad i\in I,$$

其中， X_i 是由 e_i生成的基本向量场。这些向量场保持 η不变，且仅沿 μ_I的纤维方向作用。因此，我们得到全纯丛图



其中 $\pi_\eta = z_0 \cdots z_n$。我们将通过研究这些向量场生成的全纯作用，证明 $\mathbf{F}$ 是一个全纯丛同构。由于 X_i 仅沿纤维作用，因此纤维上的作用显而易见。

令 $E_i(t, \cdot)$ 表示由 $-J(X_i)$ $(i \in I)$ 生成的流。本节余下部分中的所有求和均从 1 到 n。向量场 $-J_1(X_i)$ 的显式表达式为

$$-J_1(X_i) = P_{ij}^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial \mu_j} - \tilde{\vartheta}_{I,k}\Big(\frac{\partial}{\partial \mu_j}\Big)X_k\Big).$$

由于 $\vartheta_{I,j}(J_1(X_i)) = 0$，流 E_i 可下降为基底上的一个作用 $\mathcal{B}^n$。对易关系 $[J_1(X_i)\ J_1(X_j)] = 0$ 意味着流 E_i 生成一个 $\mathbb{R}^n$-作用，我们将其记为 E。在基底上，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_i \circ E_j = V_{ij}^{-1}.$$

固定 $\eta = \eta_0 \neq 0$，定义

$$G\colon \mathcal{T}_{I,1} \cap \{\eta = \eta_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \frac{\partial G_i}{\partial \mu_j} = V_{ij}(\mu_I, \eta_0).$$

V_{ij} 的正定性和对易性保证定义域是单连通的，因此根据 Frobenius 定理， G定义良好。选择积分常数，使得

$$G \circ \mu_I \circ E = \mathrm{id},$$

我们得出 $\mu_I \circ E$ 是单射。

当 $\eta = 0$ 时，同样的论证适用于 $\mathcal{T}_{I,\ 1} \cap \mathfrak{D}_i^n$。在轨迹 $\mathfrak{D}_K^n$ 上，我们考虑由 $-J(X_j)$ 生成的作用，其中 $j \in I \setminus K$，并再次得到 $\mu_I \circ E$的单射性。

注 5.4。 G的存在本质上依赖于矩阵 V_{ij}的正定性和可交换性。

另一方面， z_i 的定义给出

$$\mathcal{L}_{X_j} z_i = \mathrm{d}z_i(X_j) = z_i\tilde{\xi}_{I,i}(X_j) = \sqrt{-1}z_i\delta_{ij}, \qquad i \neq 0,$$

$$\mathcal{L}_{X_j} z_0 = \mathrm{d}z_0(X_j) = z_0\Big(-\sum_{i=1}^{n}\tilde{\xi}_{I,i}\Big)(X_j) = -\sqrt{-1}z_0.$$

因此$\mathbf{F}$ 将由 e_I 生成的奇异 $\mathbb{T}^n$-作用与 $\mathbb{C}^{n+1}$上的标准对角 T^n-作用交织起来。因此，对应于$\mathbf{F}_*(-J(X_i))$ 的 $\mathbb{C}^n$-作用为

$$(t_1, \ldots, t_n) \cdot (z_0, \ldots, z_n) = (e^{-\sum t_i} z_0, e^{t_1} z_1, \ldots, e^{t_n} z_n).$$

因此，由 $J(X_i) + \sqrt{-1}X_i$ 生成的 $\mathbb{C}^n$作用在 $\mathbb{C}^{n+1}$中的每个纤维 $\eta = \eta_0$ 上都是传递的。这也表明，由 E_i 生成的流是完备的:

事实上，估计（5.10）表明，在任意有限时间区间内，该流都被限制在一个紧集内。注意， X_i、 $J(X_j)$ 成对交换，并且 X_i 两两正交。结合估计（5.10），这意味着 $\mathbf{F}$ 的像是 $\mathbb{C}^{n+1}$，去除了一个大球 B_R 。

我们还注意到， $\mathbf{F}$ 将全纯体积形式推前为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的标准形式。全纯体积形式 Ω 由下式唯一确定:

$$\Omega_1\Big(X_1,\dots,X_n,\cdot\Big)=\mathrm{d}\eta.$$

But

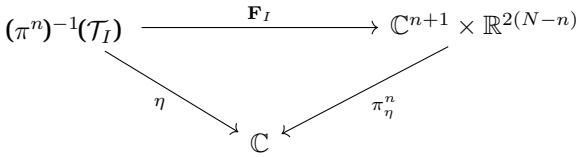
$$(\sqrt{-1})^n\mathrm{d}z_0\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z_n\Big(X_1,\dots,X_n,\cdot\Big)=\sum_{i=0}^{n}z_0\dots\widehat{z_i}\dots z_n\,\mathrm{d}z_i=\mathrm{d}\eta,$$

其中，第一个等号由函数方程 $\prod_{i=0}^{n}z_i=\eta$ 得出。因此

$$\Omega=-\mathrm{d}z_0\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z_n,$$

且 $\mathbf{F}$ 是局部双全纯的。由此得到以下结论。

命题 5.5. 存在一个光滑单射丛映射 $\mathbf{F}_I$ ，使其符合交换图



其中 π^n_η 是例 *4.4* 中定义的投影。该映射的显式表达式为

$$\mathbf{F}_I=(z_0,\dots,z_n,\nu_{I,I'},\theta_{I,I'}).$$

它在 $(\pi^n)^{-1}(\mathcal{T}_I)$ 上是全纯的，其像为

$$(\mathbb{C}^{n+1}\setminus B_R)\times\mathbb{R}^{2(N-n)},$$

其中 $B_R\subset\mathbb{C}^{n+1}$ 是以原点为中心、半径为 R 的欧几里得球。此外， $\mathbf{F}_I$ 与由 $e_{I,I}$ 和 $e_{I,I'}$ 生成的 $\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^{N-n}$ 作用相交织，并与 $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}$ 上的标准$\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^{N-n}$ 作用相对应，且满足

$$\mathbf{F}_I^*\Omega_{Nor}=\Omega_I.$$

6. 判别式轨迹附近的手术

6.1. 的光滑延拓。由命题 5.5 可知，度量 g_1 是 $\mathbb{C}^{n+1}\setminus B_R$上的光滑凯勒度量。现在我们将在整个 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上构造一个光滑凯勒度量 $\tilde{g}_1$ ，使得当位于更大的球 B_{R_1} 之外时， $g_1=\tilde{g}_1$ 与 $R_1\gg R$ 相同。

为简化记号，我们省略下标 G_I ，并记

$$|\vec{\mu}_I|=|\vec{\mu}_I|_{G_I};$$

这是 $\mathbb{C}^{n+1}\setminus B_R$ 上的一个光滑 $\mathbb{T}^n$-不变函数。通过验证一致有界性，可由第 6.2 小节中的讨论直接得到以下不等式。

$$\big|\mathrm{d}|\vec{\mu}_I|\big|_{g_1}+|\vec{\mu}_I|\cdot\big|dd^c|\vec{\mu}_I|\big|_{g_1}\le C. \tag{6.1}$$

引理 6.1. 存在一个光滑的凯勒度量 $\tilde{g}_1$ ，定义在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上，并满足 $\tilde{g}_1=g_1$，其中 $\mathbb{C}^{n+1}\setminus B_{2R_1}$ 对某个 $R_1\gg R$ 成立。

证明. 由于 ω_1 是定义在 $\mathbb{C}^{n+1}\setminus B_R$ 上的光滑 $\mathbb{T}^n$-不变凯勒形式， $\partial\bar\partial$-引理给出了同一域上的一个 $\mathbb{T}^n$-不变函数 φ，使得 $\omega_1 = dd^c\varphi$。取一个径向截断函数 $\chi' \in C_c^\infty(\mathbb{C}^{n+1})$，满足

$$\chi' \equiv 1 \text{ on } \mathbb{C}^{n+1}\setminus B_{3R}, \qquad \operatorname{supp}\chi' \subset \mathbb{C}^{n+1}\setminus B_{2R}.$$

于是，(1，1)-形式 $dd^c(\chi'\varphi)$ 的支撑集包含于 $\mathbb{C}^{n+1}\setminus B_{2R}$，并且在 B_{3R} 外与 ω_1 一致。在环带 $B_{3R}\setminus B_{2R}$ 上，正性可能会丧失，但我们仍有

$$dd^c(\chi'\varphi) \geq -\frac{K}{2}\omega_0,$$

其中 ω_0 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的标准平坦凯勒形式， $K>0$是一致常数。接下来，我们在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上构造一个光滑的、 $\mathbb{T}^n$-不变的闭 (1，1)-形式 ω，使其满足

$$\omega \geq K\omega_0 \quad \text{on } B_{3R}$$

并且对某个 $R_1 > 4R$，有 $\operatorname{supp}\omega \subset B_{2R_1}$，而

$$\omega + \omega_1 > 0 \quad \text{on } B_{2R_1}\setminus B_{4R}.$$

令

$$\tilde\omega = \omega + dd^c(\chi'\varphi),$$

我们便在 $\mathbb{C}^{n+}$ 上得到所需的 Kähler 形式[1].

令 $t=|z|^2$。对于径向对称函数 $f(t)$（因此 f 是 $\mathbb{T}^n$-不变的），计算可得

$$dd^c f = \sqrt{-1}\sum_i f'(t)\,\mathrm{d}z_i\wedge d\bar z_i + \sqrt{-1}\sum_{i,j} f''(t)\bar z_i z_j\,\mathrm{d}z_i\wedge d\bar z_j,$$

其中，上述 (1，1)-形式的特征值为 $f'(t)$ 和 $f'(t)+tf''(t)$。

令 $\eta(s)$ 为由下式定义的截断函数

$$\eta(s) = \begin{cases} 1, & s\in[0,1), \\ 0, & s\in[2,+\infty). \end{cases}$$

则 η' 和 η'' 均一致有界。令 $M=3R$ 为正常数，$R_1 > M+1$ 为待确定的参数。设 $\chi(z) = \eta\Big(\dfrac{|\vec\mu_I|}{R_1}\Big)$，并定义

$$\omega = dd^c(\chi^2 f).$$

则 ω 是 $\mathbb{T}^n$-不变的，并满足

$$\omega = \chi^2 dd^c f + f dd^c\chi^2 + \sqrt{-1}\chi\,\partial\chi\wedge\bar\partial f + \sqrt{-1}\chi\,\partial f\wedge\bar\partial\chi.$$

注意到

$$\partial\chi = \frac{1}{R_1}\eta'\Big(\frac{|\vec\mu_I|}{R_1}\Big)\partial|\vec\mu_I|, \qquad \partial f = f'(t)\bar z_i\,\mathrm{d}z_i.$$

因此，由柯西不等式可得

$$\omega \geq \chi^2\Big(dd^c f - \frac{(f'(t))^2}{R_1^{2(1-\epsilon)}} z_j\bar z_i\,\mathrm{d}z_i\wedge d\bar z_j\Big)$$

$$- \frac{\Big(\eta'\big(\frac{|\vec\mu_I|}{R_1}\big)\Big)^2}{R_1^{2\epsilon}}\sqrt{-1}\partial|\vec\mu_I|\wedge\bar\partial|\vec\mu_I| + f dd^c\chi^2.$$

在 χ 的衰减区域内，其中 $R_1 < |\vec{\mu}_I| < 2R_1$，若 f 满足增长条件

$$|\vec{\mu}_I|^{-2}|f| \ll 1, \tag{6.2}$$

于是，根据 (6.1)，只要将 R_1 选得足够大，下界中最后两项就可以由 ω_1 吸收。

为了控制第一项，我们要求 $dd^c f > 0$，更重要的是，

$$(tf')' - \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{|\vec{\mu}_I|}\Big)^{2(1-\epsilon)}(tf')^2 > 0. \tag{6.3}$$

由 (5.10) 可知，存在一致常数 C，使得

$$\log t \le C|\vec{\mu}_I|, \tag{6.4}$$

因此 (6.3) 变为

$$(tf')' - \frac{C}{t}\Big(\frac{1}{\log t}\Big)^{2(1-\epsilon)}(tf')^2 > 0.$$

令 $H = tf'$ 和 $H' = h$。我们按如下方式构造 h：

$$h(t) = \begin{cases} K, & 0 \le t < M, \\ \dfrac{2\log 2 \cdot K}{(t-M+2)\log(t-M+2)}, & t \ge M, \end{cases}$$

并且在（$M-1$，$M+1$）上光滑 h，而不影响主要结论。因此

$$H(t) = \begin{cases} Kt, & 0 \le t \le M-1, \\ KM + 2\log 2 \cdot K \log\log(t-M+2), & t \ge M+1. \end{cases}$$

由于按构造有 $dd^c f > 0$，不等式 (6.3) 等价于

$$-\frac{C}{t}\Big(\frac{1}{\log t}\Big)^{2(1-\epsilon)}\big(KM + 2\log 2 \cdot K\log\log(t-M+2)\big)^2 + \frac{2\log 2 \cdot K}{(t-M+2)\log(t-M+2)} > 0$$

在区域 $R_1 < |\vec{\mu}_I| < 2R_1$ 上。由于 t 随 $|\vec{\mu}_I|$ 至少线性增长（同样由 (5.10) 得出），当 R_1 足够大时，左侧为正。

对于 $t > M+1$，积分可得

$$f(t) = KM\log t + 2\log 2 \cdot K\log(t-M+2)\big(\log\log(t-M+2) - 1\big) + C.$$

因此，在衰减区域上，$|f|$ 受 $\log t$ 控制；当 R_1 取足够大时，(6.2) 即成立。引理得证。□

注 6.2. 度量 $\tilde{g}_1$ 的存在本身依赖于引理 *5.3*，尤其依赖估计 (5.10)。由于后者与度量无关，对于任何满足 (6.1) 的 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的 $\mathbb{T}^n$-不变 *Kähler* 度量，都可以进行同样的光滑延拓论证。

考虑 $\tilde{\omega}_1$ 的动量映射。在 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus B_{2R_1}$ 上，我们有 $\tilde{\omega}_1 = \omega_1$，因此 $\mathrm{d}\tilde{\mu}_i = \mathrm{d}\mu_i$。由于 $\mathbb{C}^{n+1}\setminus B_{2R_1}$ 是单连通的，我们可以对常数进行归一化，使得在这一区域上 $\tilde{\mu}_i = \mu_i$。我们的粘合构造不会改变全纯体积形式，因此 η 保持不变。对于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的 $\mathbb{T}^n$-作用

诱导的动量映射必然是单射，因为该作用是传递的，因此第5.4节中的论证可以直接照搬。

现在考虑连续映射 $\widetilde{MP}=(\tilde{\mu}_I,\eta)\colon \mathbb{C}^{n+1}\longrightarrow \mathbb{R}^n\times\mathbb{C}$。根据$\widetilde{\ }$前述讨论，$MP$是单射，并且在某个紧集之外，它与 MP对应的映射 ω_1 一致。由于 MP 将 $\mathbb{C}^{n+1}\setminus B_{2R_1}$ 双射到 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}$中的外部区域$\widetilde{\ }$，我们得出 MP 是双射，且其判别式轨迹与 MP的判别式轨迹重合。

注意，GH 系数由下式给出

$$\tilde{P}_{ij}^{-1}=\tilde{\omega}(X_i,JX_j)\,.$$

因此，在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}$ 中对应于 $\mathbb{C}^{n+1}\setminus B_{2R_1}$的区域上，我们有$\tilde{\ }$ $P_{ij}=P_{ij}$；同样，$Q=Q$。换言之，我们已将 GH 系数P_{ij}和 Q 从原定义域“延拓”到整个球 $\mathcal{B}_1^n=\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}$。为简便起见，我们继续用 P_{ij} 和 Q表示这些延拓后的系数。

类似地，对于 $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}$ 上的凯勒度量 $\tilde{\omega}+\omega_2$，我们得到新的系数 $P_{I,\ ij}$ 和 Q_I，它们定义在整个 $\mathcal{B}^n$ 上。由 $P_{I,\ ij}$ 和 Q_I 诱导的 GH 结构与 $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}$ 同构，这由直积性质所决定。显然，新的 GH 系数$P_{I,\ ij}$ 和 Q_I 满足交换条件 (4.3) 和分布方程 (4.4)，并且仅依赖于 μ_I 和 η。若$\widetilde{\ }$ $\mathbb{C}^{n+1}\setminus B_{2R_1}$ 在 MP 下的像包含于子集

$$\big\{q\in\mathcal{B}_1^n\mid \operatorname{dist}_{G_I}(q,O)>C\big\},$$

则该子集在映射 $(\pi^1)^{-1}$ 在 $\mathcal{B}^n$ 中的原像为

$$\big\{p\in\mathcal{B}^n\mid \operatorname{dist}_A(p,\mathfrak{D}_I)>C\big\}.$$

这表明，我们已在 $\mathcal{B}^n$ 的一个“柱状”区域内延拓了 GH 系数$P_{I,\ ij}$ 和 Q_I。

6.2. 的渐近性质 g_I 上的光滑凯勒度量 $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}$，本节将证明，在若干区域内，它可以由相应的模型度量近似。为便于后文引用偏微分方程结果，并遵循 [14]，的思路，我们还在 $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}$ 上引入全局加权 Sobolev 范数。

为简化讨论，我们将权函数设为

$$\ell_i=1+\operatorname{dist}_A\Big(\cdot\,,\ \bigcup_{\substack{J\subseteq I\\ |J|=i+1}}\mathfrak{D}_J^n\Big),\qquad 1\le i\le n.$$

使得

$$\ell_1\le\ell_2\le\cdots\le\ell_n.$$

设 $\rho>1$ 为权衰减函数。在我们的设定中，ρ 通常是 ℓ_i 的负次幂。对于任意 $\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^{N-n}$-不变张量场 T，我们按通常方式定义其在 $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}$ 上的加权索伯列夫范数 $\|\cdot\|_{C^{k,\,\alpha}}$。

在奇异丛上

$$\pi^n\colon(\pi^n)^{-1}(\mathcal{B}^n\setminus\mathfrak{D}^n)\longrightarrow\mathcal{B}^n\setminus\mathfrak{D}^n,$$

赋予 GH 参数 $P_{I,\ ij}$ 和 Q_I 后，上一节的讨论表明，所诱导的 GH 结构

$$\big((\pi^n)^{-1}(\mathcal{B}^n\setminus\mathfrak{D}^n),\ J_I,\Omega_I,g_I,\omega_I\big)$$

可以紧化为光滑的凯勒结构

$$(\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)},\ J_{\mathrm{Nor}},\Omega_{\mathrm{Nor}},g_I,\omega_I).$$

固定 $R>0$ 并定义区域

$$\mathcal{T}_R=\big\{p\in\mathcal{B}^n\mid \mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_I^n)>R\big\}.$$

根据第 6.1 小节最后的讨论，存在一个 $R_1>0$，使得在$\mathcal{T}_{2R_1}$内部，系数 $P_{I,\ ij}$和 Q_I与其光滑延拓一致。在 $\mathcal{B}^n\setminus\mathcal{T}_{3R_1}$上，度量分解为 $g_I=g_1+g_2$，其中 g_1 是定义在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的光滑度量，并且

$$g_2=A_{I',ij}\,\mathrm{d}\nu_{I,i}\otimes\mathrm{d}\nu_{I,j}+A^{-1}_{I',ij}\,\vartheta_{I,i}\otimes\vartheta_{I,j}.$$

因此，在 $\mathcal{B}^n\setminus\mathcal{T}_{3R_1}$ 上我们定义$\|\cdot\|_{C^{k,\ \alpha}}$为标准索伯列夫范数$\|\cdot\|_{C^{k,\ \alpha}\mathrm{Nor}}$。

现在我们将讨论限制在区域 $\mathcal{T}_{2R_1}$。首先，在满足$|K|=k+1$的 $\mathcal{T}_{2R_1}\cap\mathcal{H}^n_K$ 上，我们代入 GH 系数

$$P_{K,ij}=A_{ij}+p_{K,ij}=P_{I,ij}+h_{I,ij}-h_{K,ij},\quad Q_K=\det A+q_K=Q_I+h_I-h_K.$$

令 g_K 表示诱导的GH度量。命题 4.5 告诉我们，$P_{K,\ ij}$ 和 Q_K诱导出一种 $\mathbb{C}^{k+1}\times\mathbb{R}^{2(N-k)}$型光滑结构，并且 g_K 相对于该结构是光滑的。如第 4.1 小节所述，利用 $V_{(k)\,ij}-h_{K,\ ij}$和 $W^{(k)}-h_K$，实际上可以在更大的区域 $\mathcal{T}_{2R_1}\cap\mathcal{B}^n_K$ 上定义 g_K。特别地，在 $\mathcal{H}^n_K$ 上，以这种方式得到的度量与通过上述$P_{K,\ ij}$ 和 Q_K定义的度量一致。因此，以下我们将 g_K 视为定义在$\pi^{-1}(\mathcal{T}_{2R_1}\cap\mathcal{B}^n_K)$上的光滑度量。

在第 4.1 小节中，我们已经定义了由 g_K 确定的加权索伯列夫范数。我们引入关于 g_K的 ρ-加权索伯列夫范数。为简化记号，对于 $\pi^{-1}(\mathcal{T}_{2R_1}\cap\mathcal{B}^n_K)$ 上任意 $\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^{N-n}$-不变张量场 T，我们用符号表示为

$$\|T\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\le C\rho$$

表示

$$\|T\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}=\sum_{j=0}^{k}\big\|\rho^{-1}\ell_1^j\nabla^j_{g_K}T\big\|_{L^\infty}+\big[\rho^{-1}\ell_1^k\nabla^k_{g_K}T\big]_\alpha\le C.$$

在 $\mathcal{H}^n_K$ 上，联络 1-形式满足 $\mathrm{d}\vartheta_{K,I'}=\mathrm{d}\vartheta_{I,I'}=0$，因此我们可以选取$\vartheta_{K,I'}=\vartheta_{I,\ I'}$。一般而言，由于

$$\mathrm{d}(\vartheta_{I,i}-\vartheta_{K,i})=F_{I,i}-F_{K,i},$$

利用 F_I 和 F_K 的表达式（2.2），我们得到

$$\begin{aligned}F_{I,i}-F_{K,i}=\sqrt{-1}\bigg(&\frac{1}{2}\frac{\partial(h_I-h_K)}{\partial\mu_j}\,\mathrm{d}\eta\wedge\mathrm{d}\bar\eta\\&+\frac{\partial(h_{I,ij}-h_{K,ij})}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\mu_j\wedge\mathrm{d}\eta-\frac{\partial(h_{I,ij}-h_{K,ij})}{\partial\bar\eta}\,\mathrm{d}\mu_j\wedge\mathrm{d}\bar\eta\bigg).\end{aligned}$$

$h_{I,ij}-h_{K,ij}$ 和 h_I-h_K 都是 $\mathcal{H}^n_K$ 上的光滑调和函数，引理 3.3 给出了它们的大小估计。根据命题 4.6 以及关系式

$$\mathrm{d}\mu_i=-\iota_{X_i}\omega_K,\qquad \mathrm{d}\eta=(\sqrt{-1})^N\Omega_K(X_1,\dots,X_N,\cdot),$$

我们有

$$\|\mathrm{d}\mu_i\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\le C,\qquad \|\mathrm{d}\eta\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\le C.$$

注意，在 $\mathcal{H}_K^n$

$$\operatorname{dist}_A(\,\cdot\,,\partial\mathfrak{D}_K)\sim\operatorname{dist}_A(\,\cdot\,,\mathfrak{D}_I^n).$$

因此

$$\|F_{I,i}-F_{K,i}\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\leq C\ell_n^{-2}.$$

应用庞加莱引理，我们可以选择 ϑ_K，使得

$$\|\vartheta_{I,i}-\vartheta_{K,i}\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\leq C\ell_n^{-1}.$$

命题 6.3. 在 $\mathcal{T}_{2R_1}\cap\mathcal{H}_K^n$ 上，我们有如下偏差估计

$$\begin{cases}\|g_I-g_K\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\leq\ell_n^{-1}, & \|\omega_I-\omega_K\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\leq\ell_n^{-1},\\ \|J_I-J_K\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\leq\ell_n^{-1}, & \|\Omega_I-\Omega_K\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\leq\ell_n^{-1}.\end{cases}$$

特别地，如果 R_1 选得足够大，那么

$$|g_I-g_K|\ll1,\quad |\omega_I-\omega_K|\ll1,\quad |\Omega_I-\Omega_K|\ll1,\quad |J_I-J_K|\ll1.$$

证明。我们以 J_I-J_K 为例说明该估计，其余情形类似。在奇异轨迹之外，我们选取一组全纯 1-形式的基

$$P_{K,ij}\,\mathrm{d}\mu_j+\sqrt{-1}\,\vartheta_{K,i},\qquad \mathrm{d}\eta,$$

其对偶基为

$$\frac{1}{2}\big(P_{K,ij}^{-1}E_{K,\mu_j}-\sqrt{-1}\,X_i\big),\qquad E_{K,\eta},$$

其中

$$E_{K,\mu_i}=\frac{\partial}{\partial\mu_i}-\vartheta_{K,j}\Big(\frac{\partial}{\partial\mu_i}\Big)X_j,\qquad E_{K,\eta}=\frac{\partial}{\partial\eta}-\vartheta_{K,j}\Big(\frac{\partial}{\partial\eta}\Big)X_j.$$

Thus

$$J_K=\sqrt{-1}\,(\mathrm{d}\eta\otimes E_{K,\eta}-\mathrm{d}\bar\eta\otimes E_{K,\bar\eta})+P_{K,ij}\,\mathrm{d}\mu_i\otimes X_j-P_{K,ij}^{-1}\,\vartheta_{K,i}\otimes E_{K,\mu_j}.$$

用 I 替代 K可得相同的表达式。因此

$$E_{I,\eta}-E_{K,\eta}=-\big((\vartheta_{I,i}-\vartheta_{K,i})(\partial/\partial\eta)\big)X_i,$$

而且 J_I-J_K 中的前两项以所需速率衰减。对于最后一项，我们写作

$$\begin{aligned}&P_{I,ij}^{-1}\,\vartheta_{I,i}\otimes E_{I,\mu_j}-P_{K,ij}^{-1}\,\vartheta_{K,i}\otimes E_{K,\mu_j}\\&\quad=P_{K,ij}^{-1}\,\vartheta_{K,i}\otimes(E_{I,\mu_j}-E_{K,\mu_j})+(P_{I,ij}^{-1}\,\vartheta_{I,i}-P_{K,ij}^{-1}\,\vartheta_{K,i})\otimes E_{I,\mu_j}.\end{aligned}$$

注意到 $P_{K}^{-1}{}_{,\,ij}\,\vartheta_{K,\,i}=-J_K(\mathrm{d}\mu_j)$，因此最后一行满足所需的估计。对于第二项，我们有

$$\begin{aligned}&(P_{I,ij}^{-1}\,\vartheta_{I,i}-P_{K,ij}^{-1}\,\vartheta_{K,i})\otimes E_{I,\mu_j}\\&\quad=(\vartheta_{I,i}-P_{I,ij}P_{K,jt}^{-1}\,\vartheta_{K,t})\otimes P_{I,is}^{-1}E_{I,\mu_s}\\&\quad=(\vartheta_{I,i}-\vartheta_{K,i}-(h_{I,ij}-h_{K,ij})P_{K,jt}^{-1}\,\vartheta_{K,t})\otimes P_{I,is}^{-1}E_{I,\mu_s},\end{aligned}$$

所需的估计便可得出。

为估计 $\Omega_I-\Omega_K$，注意到

$$\Omega_K=\bigwedge_{j=1}^{N}(-\sqrt{-1}\,\xi_{K,j})\wedge\mathrm{d}\eta,\qquad \xi_{K,i}=P_{K,ij}\,\mathrm{d}\mu_j+\sqrt{-1}\,\vartheta_{K,i}.$$

因此，Ω_I –Ω_K 可以展开为如下形式各项的线性组合

$$\bigwedge_{j=1}^{k}(-\sqrt{-1}\,(\xi_{I,j}-\xi_{K,j}))\wedge\bigwedge_{j=k+1}^{N}(-\sqrt{-1}\,\xi_{K,j})\wedge\mathrm{d}\eta,$$

其中，第一个因子是衰减的，其余因子在权范数下有界，这由命题 4.6 得出。□

注 6.4. 在后续的粘合构造中，我们将看到，在 $\mathcal{T}_{2R_1}\cap\mathcal{B}_K^n$ 上，

$$\|g_I-g_K\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\leq\ell_1^{-\epsilon}\,\ell_{|K|}^{-1+\epsilon}$$

对于一个较小的常数 $\epsilon>0$。

接下来考虑 $\mathcal{T}_{R_1}\cap\mathcal{B}_a^n$。注意， $\mathcal{T}_{R_1}\cap\mathcal{B}_a^n$ 可以分解为有限个单连通分支，我们仍用 $\mathcal{T}_{R_1}\cap\mathcal{B}_a^n$ 表示其中之一。由于该区域在拓扑上是平凡的，我们可以输入 GH 系数 A_{ij}、$\det A$ 来构造一个 GH 度量 g_{flat}。对于 $\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^{N-n}$-不变张量场 T 在 π^{-1}（$\mathcal{T}_{2R_1}\cap\mathcal{B}_a^n$）上，我们引入归一化 Hölder 半范数

$$[T]_\alpha=\sup_p\ell_1(p)^\alpha\sup_{p'\in B_{g_{\mathrm{flat}}}(p,\ell_1(p)/10)}\frac{|T(p)-T(p')|_{g_{\mathrm{flat}}}}{d_{g_{\mathrm{flat}}}(p,p')^\alpha}.$$

我们用符号表示为

$$\|T\|_{C^{k,\alpha}_{g_{\mathrm{flat}}}}\leq C\rho$$

表示

$$\|T\|_{C^{k,\alpha}_{g_{\mathrm{flat}}}}=\sum_{j=0}^{k}\big\|\rho^{-1}\ell_1^j\nabla^j_{g_{\mathrm{flat}}}T\big\|_{L^\infty}+\big[\rho^{-1}\ell_1^k\nabla^k_{g_{\mathrm{flat}}}T\big]_\alpha\leq C.$$

在 $\mathcal{T}_{2R_1}\cap\mathcal{B}_a^n$ 上，我们有

$$\mathrm{dist}_A(\cdot\,,\partial\mathfrak{D})\sim\mathrm{dist}_A(\cdot\,,\mathfrak{D}_I^n).$$

因此，按之前的方法论证，我们可以选择 $\vartheta_{\mathrm{flat}}$，使得

$$\|\vartheta_{I,i}-\vartheta_{\mathrm{flat},i}\|_{C^{k,\alpha}_{g_{\mathrm{flat}}}}\leq C\ell_n^{-1}.$$

特别地，我们令 $\vartheta_{\mathrm{flat},\ I'}=\vartheta_{I,\ I'}$。

命题 6.5。在 $\mathcal{T}_{2R_1}\cap\mathcal{B}_a^n$ 上，我们有如下偏差估计

$$\begin{cases}\|g_I-g_{\mathrm{flat}}\|_{C^{k,\alpha}_{g_{\mathrm{flat}}}}\leq\ell_n^{-1},\quad\|\omega_I-\omega_{\mathrm{flat}}\|_{C^{k,\alpha}_{g_{\mathrm{flat}}}}\leq\ell_n^{-1},\\ \|J_I-J_{\mathrm{flat}}\|_{C^{k,\alpha}_{g_{\mathrm{flat}}}}\leq\ell_n^{-1},\quad\|\Omega_I-\Omega_{\mathrm{flat}}\|_{C^{k,\alpha}_{g_{\mathrm{flat}}}}\leq\ell_n^{-1}.\end{cases}$$

特别是，如果 R_1 取得足够大，那么

$$|g_I-g_{\mathrm{flat}}|\ll1,\quad|\omega_I-\omega_{\mathrm{flat}}|\ll1,\quad|\Omega_I-\Omega_{\mathrm{flat}}|\ll1,\quad|J_I-J_{\mathrm{flat}}|\ll1.$$

注记 6.6. 度量 g_{flat} 也可以在更大的区域上定义

$$\mathcal{T}_{2R_1}\cap\big\{\mathrm{dist}_A(\cdot\,,\mathfrak{D})>R'\big\}.$$

根据命题 *4.1* 的 *(IV)*，我们有

$$\|g_I-g_K\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\leq\ell_1^{-1},$$

因此，当 R_1 足够大时，

$$\|g_I-g_K\|_{C^{k,\alpha}_{g_K}}\ll1.$$

可以验证，在上述区域的交集上，相应的范数是等价的。因此，对于 $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}$ 上任意 $\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^{N-n}$-不变张量 T，我们赋予该空间加权索伯列夫范数 $\|T\|_{C^{k,\alpha}}$；简洁的界 $\|T\|_{C^{k,\alpha}}\leq C\rho$ 便可在此约定下明确理解。注意，在 $\mathcal{B}^n\setminus\mathcal{T}_{2R_1}$ 上，权函数 ρ 一致有下界，因此 $\|T\|_{C^{k,\alpha}}\leq C\rho$ 化为 $\|T\|_{C^{k,\alpha}_{\mathrm{Nor}}}\leq C$。根据命题 6.3 和命题 6.5 中的度量偏差估计，该范数等价于由 g_I 定义的加权范数。

我们声称，范数 $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}}$ 自然地延拓到 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的 $\mathbb{T}^n$-不变张量。这可直接由 g_I 的乘积结构推出。下面说明 g_K 和 g_{flat} 如何限制到 $(\pi^1)^{-1}(\mathcal{B}^n_1)$。取 $K=\{0,1,\dots,k\}$。在基底上，我们令 $\nu_{I,\,s}=t_s$，其中 $s\in I'$；在纤维上，我们固定标架 $e_I+A_{I'}^{-1}A_{I'I}e_{I^c}$。可以验证

$$\nu_{I,I'}=\nu_{K,I'}+A_{I'}^{-1}A_{I'J}\nu_{K,J},\qquad e_{I,I'}=e_{K,I'}+A_{I'}^{-1}A_{I'J}e_{K,J}.$$

由于 $P_{K,\,ij}$ 和 Q_K 诱导了光滑结构 $\mathbb{C}^{k+1}\times\mathbb{R}^{2(N-k)}$，限制到 H 相当于选取 $\mathbb{R}^{2(N-k)}$ 的一个截面，因此该光滑结构下降到 H，而不改变全纯部分。注意，当 $i\in I'$ 或 $j\in I'$ 时，$p_{K,\,ij}=0$，因此

$$\begin{aligned}g_K&=g_2+(G_{I,ij}+p_{K,ij})\,\mathrm{d}\mu_i\otimes\mathrm{d}\mu_j+Q_K\,|\mathrm{d}\eta|^2\\&\quad+(G_I+p_K)^{-1}_{ij}\,(\vartheta_K-A_{II'}A_{I'}^{-1}\vartheta_{K,I'})_i\otimes(\vartheta_K-A_{II'}A_{I'}^{-1}\vartheta_{K,I'})_j\\&=g_2+g_{K,1},\end{aligned}$$

其中 g_2 与分解 $g_I=g_1+g_2$ 中的相同，因为我们选择了 $\vartheta_{K,\,I'}=\vartheta_{I,\,I'}$。因此，$g_K$ 在 $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}$ 上也分解为乘积，我们只需令 $g_{K,\,1}$，即可将其限制到 $\mathbb{C}^{n+1}$。反过来，$g_{K,\,1}$ 可视为 H 上的 GH 度量，由以下对象诱导

$$P_{ij}+h_{I,ij}-h_{K,ij},\qquad Q_K+h_I-h_J.$$

根据第 5.1 小节中的上述讨论，g_K 是卡拉比–丘的，当且仅当 $g_{K,\,1}$ 是卡拉比–丘的。

对于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的 $\mathbb{T}^n$-不变张量，我们可以将它们视为定义在 $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}$ 上且仅依赖于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 因子的张量，从而使用上文定义的加权索伯列夫范数（我们可以自然地将 ℓ_i 限制到 $\mathcal{B}^n_1$）。可以验证，对于这类张量，该范数等价于由 $g_{\mathrm{flat},\,1}$ 或 $g_{K,\,1}$ 定义的类似加权索伯列夫范数，并且命题 6.3 和命题 6.5 中相应的估计仍然成立。

6.3. 拼接卡拉比–丘度量。本节中我们将进行粘合构造。首先回顾复蒙日–安培方程的可解性和先验估计。

定理 6.7。存在一个完备度量

$$\omega_{\mathbb{C}^{n+1}}=\omega_1+\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\varphi\quad on\ \mathbb{C}^{n+1}$$

满足

$$\omega^{n+1}_{\mathbb{C}^{n+1}}=\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\,\sqrt{-1}^{(n+1)^2}\Omega_{\mathrm{Nor}}\wedge\overline{\Omega}_{\mathrm{Nor}},$$

以及度量偏差估计

$$\begin{aligned} \|\mathrm{d}\varphi\|_{C^{k+1,\alpha}} &\leq C\ell_1^{-\epsilon}\ell_n^{-1+\epsilon}, \\ \|\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\varphi\|_{C^{k,\alpha}} &\leq C\ell_1^{-1-\epsilon}\ell_n^{-1+\epsilon}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

上一节已解释这些不等式的含义。这里 φ 是一个 $\mathbb{T}^n$-不变函数， $0 < \epsilon \ll 1$ 是任意给定的一个小数，常数仅依赖于 n、 α、 ϵ。这个度量继承了 ω_1的所有对称性。

我们将在第 6.4 节证明定理 6.7；此处假设其成立，并固定$0 < \epsilon \ll 1$。

引理 6.8. 上面的函数 φ 满足 C^0 估计

$$|\varphi| \leq C\ell_n^{\epsilon}.$$

证明。由定理 6.7 可知，我们对 $\mathrm{d}\varphi$有一个加权估计。由于 φ 是 $\mathbb{T}^n$-不变的，我们将 $\mathrm{d}\varphi$ 视为 $\mathcal{B}^n$ 上的一个 1-形式，并逐区域进行论证。在 $\mathcal{B}_a^n$上，加权范数给出了 $|\mathrm{d}\varphi|_{g_A}$的界，因此通过沿线积分即可得到所需估计。在 $\mathcal{H}_K^n$ 上，我们利用 g_K 的乘积分解以及以下事实：$\mathrm{dist}_A(p,\ O) \sim \mathrm{dist}_A(p_K,\ O)$，其中 p_K 是关于 g_A将 p 投影到 $\mathfrak{D}_K^n$ 上的投影。将此与命题 4.1 的 (IV) 结合，即得所述结论。□

根据第 5.1 小节中 $\mathcal{B}^n$ 的定义，我们可以自然地将 $\mathcal{B}_I \subset \mathcal{B}^n$ 视为……，且纤维化方向的几何性质相同。对于 $p \in \mathcal{B}_I$ ，我们有 $\nu_{I,\ j} > 0 (j \in I')$，由 (3.6) 得

$$\mathrm{dist}_A^2(p, \partial\mathfrak{D}_I) = \mathrm{dist}_A^2(p, \mathfrak{D}_I) + \mathrm{dist}_A^2(p_I, \partial\mathfrak{D}_I).$$

因此

$$\sqrt{1 - \frac{1}{C_0^2}}\ \mathrm{dist}_A(p, \partial\mathfrak{D}_I) \leq \mathrm{dist}_A(p_I, \partial\mathfrak{D}_I) \leq \mathrm{dist}_A(p, \partial\mathfrak{D}_I). \tag{6.6}$$

由于 $p_I = (0,\ \ldots\ldots,\ 0,\ \nu_{I,\ n+1},\ \ldots\ldots,\ \nu_{I,\ N},\ 0)$，量 $\mathrm{dist}_A(p_I,\ \partial\mathfrak{D}_I)$ 是仅关于 $\nu_{I,\ I'}$ 的利普希茨函数。我们需要下面的引理。

引理 6.9. 在 $\mathcal{B}_I$ 中，对任意 $J \supseteq I$ ，我们有

$$\rho_{I,J} \leq \mathrm{dist}_A(p_I, \mathfrak{D}_J) \leq \hat{C}\rho_{I,J}, \tag{6.7}$$

其中 $\hat{}C > 1$ 是仅依赖于 n 和 Λ/λ 的一致常数，并且

$$\rho_{I,J} = \sqrt{\nu_{I,K}^{\top}\big(A_{I',K} - A_{I',KJ'}A_{I',J'}^{-1}A_{I',J'K}\big)\nu_{I,K}} \quad with\ \ J = I \cup K.$$

证明。若 p_I 在 $\mathfrak{D}_J$ 上的投影位于 $\mathfrak{D}_J$ 的内部，则 $\rho_{I,\ J} = \mathrm{dist}_A(p_I,\ \mathfrak{D}_J)$。一般情况下，我们对 $\nu_{I,\ I'}$ 作线性坐标变换，使 $g_{A_{I'}}$ 成为标准度量。这会将无界多面锥 $\mathfrak{C} = \{\nu_{I,j} > 0\}$ 变换为另一个无界多面锥 $\mathfrak{C}'$ ，其二面角一致地严格小于 π。在新坐标中，$\rho_{I,\ J}$ 是从 $\mathfrak{C}$ 中的一个点到对应于 $\mathfrak{D}_J$ 的仿射超平面的距离。因此，我们可以得到 (6.7) □

现在进行粘合。固定一个常数 $C' > 0$（取值足够大），并在区域上进行操作

$$\mathcal{B}_I \cap \{\mathrm{dist}_A(p, \partial\mathfrak{D}_I) > C'\}.$$

选择一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，使其满足

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & |x|<\frac{3}{8},\\ 0, & |x|\geq\frac{1}{2},\end{cases}$$

从而 χ 的所有导数均一致有界。令

$$\omega_{\mathrm{glu}}=\omega_1+dd^c(f\varphi)+\omega_2, \tag{6.8}$$

其中

$$f=\prod_{I\subsetneqq J}\chi\Big(C_0\frac{|\vec{\mu}_I|}{\rho_{I,J}}\Big). \tag{6.9}$$

由（6.7）可知，函数 f 是光滑的。

如果 $p\in\mathcal{B}_I''$，则由（6.6）和（6.7）可得

$$\begin{aligned}|\vec{\mu}_I|&<\frac{1}{4CC_0}\operatorname{dist}_A(p,\partial\mathfrak{D}_I)\\ &\leq\frac{1}{4C\sqrt{C_0^2-1}}\operatorname{dist}_A(p_I,\partial\mathfrak{D}_I)\leq\frac{1}{4\sqrt{C_0^2-1}}\rho_{I,J}.\end{aligned}$$

因此，对于每个 $J\supsetneqq I$，

$$C_0\frac{|\vec{\mu}_I|}{\rho_{I,J}}<\frac{3}{8},\qquad\text{so}\quad f\equiv1\quad\text{on }\mathcal{B}_I''.$$

同样，在 $\mathcal{B}_I\setminus\mathcal{B}_I'$ 上，

$$\begin{aligned}|\vec{\mu}_I|&\geq\frac{1}{2C_0}\operatorname{dist}_A(p,\partial\mathfrak{D}_I)\\ &\geq\frac{1}{2C_0}\operatorname{dist}_A(p_I,\partial\mathfrak{D}_I)\geq\frac{1}{2C_0}\min_{I\subsetneqq J}\rho_{I,J},\end{aligned}$$

因此至少存在一个 J，使得

$$C_0\frac{|\vec{\mu}_I|}{\rho_{I,J}}>\frac{1}{2},\qquad\text{hence}\quad f\equiv0\quad\text{on }\mathcal{B}_I\setminus\mathcal{B}_I'.$$

因此，ω_{glu} 是上的光滑闭 (1，1)-形式

$$\pi^{-1}\big(\mathcal{B}_I\cap\{\operatorname{dist}_A(p,\partial\mathfrak{D}_I)>C'\}\big),$$

and

$$\omega_{\mathrm{glu}}=\omega_{\mathbb{C}^{n+1}}+\omega_2\quad\text{in }\mathcal{B}_I'',\qquad\omega_{\mathrm{glu}}=\omega_I\quad\text{in }\mathcal{B}_I\setminus\mathcal{B}_I'.$$

我们将证明，只要 C' 足够大，ω_{glu} 就是一个 Kähler 形式；只需分析 f 衰减的区域。

由 φ 的 C^2-估计 (6.5)，

$$\Big(1-\frac{C}{|\vec{\mu}_I|^{1-\epsilon}}\Big)\omega_1<\omega_1+dd^c\varphi<\Big(1+\frac{C}{|\vec{\mu}_I|^{1-\epsilon}}\Big)\omega_1.$$

在 f 衰减的区域中，存在 $J\supsetneqq I$，使得

$$\frac{C'}{4C_0}<\frac{1}{4C_0}\rho_{I,J}<|\vec{\mu}_I|<\frac{3}{4C_0}\rho_{I,J}. \tag{6.10}$$

取 $1\gg\delta>0$ 和 C' 充分大，我们得到

$$\omega_1+f\,dd^c\varphi=f(\omega_1+dd^c\varphi)+(1-f)\omega_1>(1-\delta)\omega_1. \tag{6.11}$$

接下来我们控制 $df\wedge \mathrm{d}^c\varphi$ 和 $\mathrm{d}\varphi\wedge \mathrm{d}^c f$。回顾一下,

$$\omega_2=\frac{\sqrt{-1}}{2}A_{I',ij}\xi_i\wedge\bar{\xi}_j=\sum_{i=n+1}^{N}\mathrm{d}\nu_{I,i}\wedge\mathrm{d}\theta_i,\qquad \xi_i=A^{-1}_{I',ij}\,\mathrm{d}\nu_{I,j}+\sqrt{-1}\,\mathrm{d}\theta_i.$$

因此

$$\|\mathrm{d}\nu_{I,j}\|_{g_2}=1,\qquad dd^c\nu_{I,j}=0.$$

根据 ρ_I的显式形式，J，我们有

$$|\mathrm{d}\rho_{I,J}|_{g_2}+\rho_{I,J}|dd^c\rho_{I,J}|_{g_2}\le C. \tag{6.12}$$

结合 (6.1)、 φ的 C^1-估计 (6.5) 以及柯西不等式，我们可以利用 (6.11) 吸收 $df\wedge \mathrm{d}^c\varphi$和 $\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}^c f$的负项。类似地，对于$\varphi\,dd^c f$ f 的导数会产生如下项

$$dd^c\rho_{I,J},\quad \mathrm{d}\rho_{I,J}\wedge\mathrm{d}^c|\vec{\mu}_I|,\quad \mathrm{d}^c\rho_{I,J}\wedge\mathrm{d}|\vec{\mu}_I|,\quad dd^c|\vec{\mu}_I|,$$

这些项可由 (6.12) 和引理 6.8 控制。因此

$$\omega_{\mathrm{glu}}>0\quad \text{when } C' \text{ is sufficiently large.}$$

与第 6.1 小节中一样，我们考虑动量映射

$$(MP_{\mathrm{glu}},\eta)\colon \mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}\longrightarrow\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}.$$

在外锥区域 $\mathcal{B}_I\setminus\mathcal{B}'_I$之外，形式 ω_{glu}与 ω_I重合。因此，经过适当选择常数后，它们的动量映射一致，相应的 GH 系数也相同。在 $\mathcal{B}'_I$上，映射 $(MP_{\mathrm{glu}},\ \eta)$ 由与第 6.1 小节相同的论证可知是单射，并且它映至 $\mathcal{B}'_I$，因为在 $\mathcal{B}''_I$ 上我们有 $\omega_{\mathrm{glu}}=\omega_{\mathbb{C}^{n+1}}+\omega_2$，它可分解为一个乘积，且其 ω_2因子具有线性动量映射。

由 $(MP_{\mathrm{glu}},\ \eta)$ 诱导的 GH 系数最初定义在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}_\eta\times\mathbb{R}^{N-n}$ 上，随后通过仿射变换推前至 $\mathbb{R}^N\times\mathbb{C}_\eta\cong\mathcal{B}_I$。将原始系数记为 $P_{\mathrm{glu}\,ij}$, Q^{glu}，将变换后的系数记为 $P_I^{\mathrm{glu}}{}_{,\ ij}$,$Q_I^{\mathrm{glu}}$。令

$$V^{\mathrm{glu}}_{ij}=P^{\mathrm{glu}}_{I,ij}+h_{I,ij},\qquad W^{\mathrm{glu}}=Q^{\mathrm{glu}}_I+h_I.$$

由此我们得到了定义在以下区域上的 GH 系数 $V_{\mathrm{glu}\,ij}$, W^{glu}

$$\mathcal{B}_I\cap\big\{\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,,\partial\mathfrak{D}_I)>C'\big\}.$$

剩下需要验证的是，这些系数满足命题 4.1 中列出的条件。

首先， $V_{\mathrm{glu}\,ij}$和 W^{glu}起初不一定为正。我们只知道$P_I^{\mathrm{glu}}{}_{,\ ij}$是正定的，并且 $Q_I^{\mathrm{glu}}>0$，因为 $\omega_{\mathrm{glu}}>0$，而合同变换保持正性。然而，在 $\mathcal{B}_I$上，$h_{I,\ ij}$和 h_I是光滑且一致有界的调和函数，因此这个 2-形式

$$h_{I,ij}\,\mathrm{d}\mu_i\otimes\mathrm{d}\mu_j+h_I\,|\mathrm{d}\eta|^2$$

是光滑的。根据定理 6.7 中的偏差估计 (6.5)，由 g_{glu} 定义的加权范数与由 g_I定义的加权范数等价，并且 $\|\mathrm{d}\mu_i\|_{g_{\mathrm{glu}}}$ 和 $\|\mathrm{d}\eta\|_{g_{\mathrm{glu}}}$均有界。由于$h_{I,\ ij}$和 h_I 关于 $\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,,\ \partial\mathfrak{D}_I)$线性衰减，取 C' 足够大即可得到正性。若 $I\subset J$，则在

$$\mathcal{B}_J\cap\{\mathrm{dist}_A(p,\partial\mathfrak{D}_I)>C'\}$$

结合引理 3.3，运用同样的论证可得

$$P^{\mathrm{glu}}_{I,ij}+h_{I,ij}-h_{J,ij},\qquad Q^{\mathrm{glu}}_{I}+h_I-h_J$$

当 C'充分大时为正定。

选取 $C_n>C'$，我们得出在

$$\mathcal{B}_I\cap\{\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,,\partial\mathfrak{D}_I)>C'\}$$

系数 $V_{\mathrm{glu}\,ij}$ 和 W^{glu} 满足（I）中列出的所有正性条件，以及命题 4.1 的（II）和（III）中的相关假设。可积性条件由 h 的调和性和交换关系推出，而陈类条件则继承自 P^{glu}_{ij} 、 Q^{glu} 以及 h的光滑调和性。对所有满足 $|L|=n+1$ 的 $\mathcal{B}_L$ 进行手术，并取充分大的 C_n。我们得到 GH 系数 $V_{(n)\,ij}$ 、 $W^{(n)}$ 及其定义域 $\mathcal{F}_n$；这些手术区域彼此不会干扰。因此， $V_{(n)\,ij}$ 和 $W^{(n)}$ 满足（I）、（II）和（III）中的正性假设。

（II）中所要求的映射$\mathbf{F}_I$的存在性，即命题 4.5，由 $V_{\mathrm{glu}\,ij}$ 和 W^{glu}的构造保证。正如注 6.4 所述，对于 $K\subset I$， $\mathcal{B}_I\cap\mathfrak{D}_K$ 附近的光滑结构已经具备。根据第 5.3 小节中的连续性讨论并结合 Hartogs 引理，可知$\mathbf{F}_I$关于该结构是光滑的。由 g_{glu}的偏差估计（6.5）可知，全纯体积形式 Ω_{Nor} 以及 $\mathbb{T}^n\times\mathbb{R}^{N-n}$作用的基本向量场 X_i 在加权范数下有界。曲率张量也同样有界，由此得出命题 4.6 的（i）和（ii）。

现在令 $I\subset J$，我们证明在 $\mathcal{F}_n\cap\mathcal{B}_I\cap\mathcal{B}_J$ 上，系数

$$P^{\mathrm{glu}}_{I,ij}+h_{I,ij}-h_{J,ij}\quad\text{and}\quad Q^{\mathrm{glu}}_{I}+h_I-h_J$$

仅依赖于 μ_J 和 η。由对称性，不妨设 $J=\{0,1,\dots,n,n+\mathbf{1},\dots,n+k\}$。只需证明 P^{glu}_{ij} 和 Q^{glu} 仅依赖于 μ_J 和 η，而后者由粘接函数 f 决定。具体而言，我们需要验证在 $\mathcal{B}_J\cap\mathcal{F}_{n-1}$ 上，对于任意满足 $L\subsetneq J$ 的 $I\subset L$，

$$\chi\Big(C_0\frac{|\vec{\mu}_I|}{\rho_{I,L}}\Big)=1\ \Leftrightarrow\ C_0\frac{|\vec{\mu}_I|}{\rho_{I,L}}<\frac{3}{8}.$$

由引理 6.9，

$$\rho_{I,L}\geq\frac{1}{\hat{C}}\,\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,,\mathfrak{D}_L);$$

因此只需证明在 $\mathcal{B}_J\cap\mathcal{B}_J$ 上，

$$\hat{C}C_0\frac{\mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_I)}{\mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_L)}<\frac{3}{8}.$$

$\mathcal{B}_J$ 的定义给出

$$C_0\,\mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_J)<\mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_L),$$

$\mathcal{B}_I$ 的定义给出

$$C_0\,\mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_I)<\mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_J);$$

因此，

$$\hat{C}C_0\frac{\mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_I)}{\mathrm{dist}_A(p,\mathfrak{D}_L)}<\frac{\hat{C}}{C_0}.$$

选择足够大的 C_0 ，即可一致地得到所需的不等式。

此外，对于粘合前的度量 g_I ，相应的 GH 系数满足

$$V_{kl}^{(n-1)} - h_{I,kl} = A_{kl} \quad \text{whenever } k \notin I \text{ or } l \notin I.$$

因此，要使 $P_{\mathrm{glu}\,ij}$受到 $k \notin I$或 $l \notin I$的影响，粘合项 $dd^c(f\varphi)$ 必须涉及 $\nu_{I,\,k}$，因为

$$Jd\nu_{I,k} = -A_{kl}^{-1}\vartheta_l.$$

在 $\mathcal{B}_J$附近，粘接函数 f 仅涉及 $\nu_{I,\,J}$，因此当 $dd^c(f\varphi)$ 在 e_k，e_l 上取值且满足 $k \notin J$ 或 $l \notin J$时，结果为零。在将 $P_{\mathrm{glu}\,ij}$，Q^{glu}变为 $P_I^{\mathrm{glu}}{}_{,\,ij}$，$Q_I^{\mathrm{glu}}$的仿射变换下，这一性质保持不变；并且由于只要 $k \notin J$ 或 $l \notin J$，就有$h_{I,\,kl} = h_{J,\,kl}$，最终得到

$$V_{kl}^{(n)} - h_{I,kl} = A_{kl} \quad \text{whenever } k \notin I \text{ or } l \notin I$$

在 $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{B}_J$上。此外，$dd^c(f\varphi)$ 的特殊形式意味着对于 $J = I \cup \{j\}$,

$$|V_{ij}^{(n)} - h_{I,ij} - A_{ij}| \le \frac{C}{\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,, \mathfrak{D}_J)} \quad \text{for all } i \in I$$

在 $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{B}_J$上。

现在我们验证区域上的命题 4.1 的 (IV)

$$\mathcal{F}_n \cap \{\mathrm{dist}_A(\,\cdot\,, \mathfrak{D}) > 1\} \cap \mathcal{B}_I.$$

根据归纳假设，g_I 的 GH 系数在那里已经满足所需的估计。我们首先建立 g_I 和 g_{glu} 的系数之间的关系:

$$\begin{aligned}(V^{\mathrm{glu}})_{ij}^{-1} \circ \mu^{\mathrm{glu}} &= \omega_{\mathrm{glu}}\big(JX_i, X_j\big) = \big(\omega + dd^c f\varphi\big)\big(JX_i, X_j\big)\\ &= V_{ij}^{-1} \circ \mu + H^{ij} \circ \mu = V_{ik}^{-1}(\delta_{kj} + V_{kt}H^{tj}) \circ \mu\\ &= V_{ik}^{-1}(\delta_{kj} + H_k^j) \circ \mu,\end{aligned}$$

从而

$$V_{ij}^{\mathrm{glu}} \circ \mu^{\mathrm{glu}} = V_{ik}\big(E + (H_l^t)_{N\times N}\big)_{kj}^{-1} \circ \mu, \tag{6.13}$$

其中衰减项 H_k^j 满足

$$\|H_k^j\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{-1-\epsilon}\ell_n^{-1+\epsilon}.$$

类似地,

$$\begin{aligned}W^{\mathrm{glu}} \circ \mu^{\mathrm{glu}} &= \frac{\omega_{\mathrm{glu}}^n}{\Omega \wedge \bar{\Omega}}\ \det(V_{ij}^{\mathrm{glu}}) \circ \mu^{\mathrm{glu}}\\ &= \frac{\omega^n}{\Omega \wedge \bar{\Omega}}\ \det(V_{ij})(1+H) \circ \mu\\ &= W(1+H) \circ \mu,\end{aligned} \tag{6.14}$$

with

$$\|H\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{-1-\epsilon}\ell_n^{-1+\epsilon}.$$

注意到

$$\mu_i^{\mathrm{glu}} = \mu_i + \iota_{X_i}\mathrm{d}^c f\varphi = \mu_i + h_i, \tag{6.15}$$

其中

$$\|h_i\|_{C^{k+1,\alpha}} \le C\ell_1^{-\epsilon}\ell_n^{-1+\epsilon}.$$

因此，当 C_n 足够大时，权函数 $1+|\mu^{\mathrm{glu}}|$ 和 $1+|\mu|$ 一致等价，由此可得（IV）中的所需估计。同样的论证表明，不等式（5.10）对 μ^{glu} 也成立。

由（6.15）我们还可以看到，在丛上

$$\pi^{\mathrm{glu}}\colon \mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}\longrightarrow \mathbb{R}^n\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}^{N-n}$$

由 g_{glu} 诱导的丛上，我们仍可输入原始的 GH 系数$P_{I,\ ij}$, Q_I 以得到一个满足下式的度量 g'

$$g'=\Phi_* g,$$

其中， Φ 是 $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{R}^{2(N-n)}$的一个微分同胚。在手术区域 Φ –中，id 由 h_i测量。因此

$$\|\Phi-\mathrm{id}\|_{C^{k,\alpha}}\le C\ell_1^{-\epsilon}\ell_n^{-1+\epsilon},$$

而在手术区域之外 Φ =为 id。因此

$$\|g'-g_{\mathrm{glu}}\|\le\|\Phi_* g-g\|+\|g-g_{\mathrm{glu}}\|\le C\ell_1^{-\epsilon}\ell_n^{-1+\epsilon},$$

因此在 $\mathcal{T}_{2R_1}\cap\mathcal{B}^n_K$上，

$$\|g_{\mathrm{glu}}-g_K\|\le C\ell_1^{-\epsilon}\ell_n^{-1+\epsilon}.$$

此外，命题 4.6 中的 (iii) 已在引理 5.3 中得到证明，因此第 4.1 节列出的所有假设现均已验证。请注意，在前面的讨论中，我们始终假设 $n\le N-1$。最终，我们得到定义在 $\mathcal{F}_{N-1}$ 上的 GH 系数 $V_{(N-1)\,ij}$, $W^{(N-1)}$。由于 $\mathcal{F}_{N-1}$ 是 $\mathcal{B}$中一个大球的补集，再次应用上述手术即可在 $\mathbb{C}^{N+1}$上得到一个 Taub–NUT 型度量，从而完成定理 1.1 的证明。这里，曲率有界性由第 6.2 小节给出的 g_I 的偏差估计推出，而远离轨迹处的衰减性质则由 g_{flat} 的曲率满足 $|\mathrm{Rm}_{\mathrm{flat}}|\sim O(\ell_1^{-3})$ 这一事实保证。

6.4. **求解偏微分方程**。现在我们证明定理 6.7。首先，由于当 $k\notin I$ 或 $l\notin I$ 时，$P_{I,\ kl}=0$，所以 g_1 的体积形式误差与 g的相同：

$$E=\frac{\det A+q_I}{\det(A_{ij}+p_{I,ij})}-1.$$

我们有如下引理。

引理 6.10. 度量 g_1 在 $\mathbb{C}^{k+1}$ 上的体积形式误差 E 满足

$$\|E\|_{C^{k,\alpha}}\le C\ell_1^{-1-\epsilon}\ell_n^{-1+\epsilon}$$

按第 *6.2* 小节所述的加权范数意义。

证明. 我们逐个区域进行论证。

区域 *1:* 完全不受影响的部分

$$\mathcal{B}^n\setminus\bigcup_{\substack{K\subseteq I\\ |K|\ge 3}}(\mathcal{B}^n_K)'.$$

这里 $p_{I,\ ij}=v_{I,\ ij}$ 和 $q_I=w$ 中，所有非常数项都是光滑调和函数，并朝相应轨迹线性衰减。我们对区域的选择确保

$$\mathrm{dist}_A(\cdot\,,\mathfrak{D}^n_I)\le C\,\mathrm{dist}_A(\cdot\,,\mathfrak{D}^n_K),$$

因此，我们可以认为这种衰减是相对于 ℓ_n 而言的。分母的首项是 $\det A$，而分子是分母展开式的线性部分。因此，分子呈二次衰减，并且

$$\|E\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_n^{-2}.$$

区域 *2*： 在 $\mathcal{H}_K''$ 上，我们先前的假设给出

$$\det(A_{ij} + p_{K,ij}) = \det A + q_K.$$

由于

$$p_{I,ij} = p_{K,ij} + h_{K,ij} - h_{I,ij}, \qquad q_I = q_K + h_K - h_I,$$

并且 $h_{K,ij} - h_{I,ij}$, $h_K - h_I$ 在 $\mathcal{H}_K^n$ 上是光滑调和函数，且在 ℓ_n中线性衰减，因此我们得到

$$\begin{aligned} E &= \frac{q_K + h_K - h_I}{\det\bigl(P_{K,ij} + h_{K,ij} - h_{I,ij}\bigr)} - 1 \\ &= \frac{1 + (\det P_K^{-1})(h_K - h_I)}{\det\bigl(E + P_K^{-1}(h_K - h_I)\bigr)} - 1. \end{aligned}$$

注意到 $P_K^{-1}{}_{,ij}$ 在 $\mathcal{H}_K$上是一致有界的，将此与命题 4.6 中的假设结合起来可得

$$|E| \le C\ell_1^{-1}\ell_n^{-1}.$$

区域 *3*： 在 $\mathcal{H}_K' \setminus \mathcal{H}_K''$ 上，情况类似，但我们不再有卡拉比–丘恒等式。我们在 $\mathfrak{D}_K$ 附近的手术过程与在 $\mathfrak{D}_I$附近的完全相同，因此有类似于 (6.13) 和 (6.14) 的恒等式：

$$(1 + E')\det(A_{ij} + p_{K,ij}) = \det A + q_K,$$

其中$\|E'\|_{C^{k,}\,^{\alpha}} \le C\ell_1^{-1-\epsilon}\ell_k^{-1+\epsilon}$。在 $\mathcal{H}_K' \setminus \mathcal{H}_K''$ 我们有 $\ell_n \sim \ell_k$，因此

$$\|E\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{-1-\epsilon}\ell_n^{-1+\epsilon}.$$

证明至此完成。 □

6.4.1. *Tian–Yau–Hein* 理论体系。如今称为 Tian–Yau–Hein 理论体系的分析工具，源于将丘对卡拉比猜想的解法 [25] 推广到非紧流形的努力。田–丘 [23, 24] 通过求解一个复蒙日–安培方程，在反典范除子的补集上构造出了第一批完备 Ricci 平坦凯勒度量；该方程的右端在到除子的距离意义下比任意逆多项式衰减得更快。Hein [9, 10] 将这些估计重新表述为加权霍尔德框架，证明了拉普拉斯算子在代数构造的端上的同构定理，从而将早期的存在性论证转化为定量的逆函数机器，把体积形式的任意“微小”扰动转化为具有指定渐近行为的黎奇平坦凯勒度量。

下面的论证依赖于 Hein 的工作（参见 [9]中的第 3 章和第 4 章），以及 [14, 第2节7]。我们验证度量 g_1 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上满足 Tian–Yau–Hein 理论体系的假设。

首先， g_1 必须具备所谓的 $C^{k,\,\alpha}$ 拟图册，满足 $k \ge 3$ (参见 [9, 定义 4.2])。这确保索伯列夫范数定义良好，并保证在非紧情形下最大值原理成立。以下引理来自 [23]，给出了这样的拟图册。

引理 6.11。 若 $|\mathrm{Rm}| \le C$，则存在一个拟图册，对每个α均为 $C^{1,\,\alpha}$。此外，若 $\sum_{i=1}^{k} |\nabla^i \mathrm{Scal}| \le C$，则该拟图册甚至是 $C^{k+1,\,\alpha}$。

所需的曲率界由命题 4.6 以及在第 6.2 小节中建立的 g_1 的渐近性质得到。

其次，Hein 估计依赖于一个加权 Sobolev 不等式。这里的权函数是一个光滑函数 $\rho(x) > 1$，满足 $|\nabla\rho| + \rho|\nabla^2\rho| \le C$，且在某个紧集之外与距离函数等价。在我们的情形中，取 $\rho = \sqrt{|\vec{\mu}_I|^2 + 1}$，方程 (6.1) 和第 6.2 小节中 g_1 的渐近性质保证这个 ρ 满足要求。

由于 g_1 的体积增长为 Vol$(B_R) \sim R^{n+2}$，我们有

命题 6.12. 对于 $1 \le p \le \frac{n+1}{n}$，加权 *Sobolev* 不等式

$$\Big(\int_{\mathbb{C}^{n+1}} |u|^{2p} \rho^{np-n-2} \,\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}\Big)^{1/p} \le C \int_{\mathbb{C}^{n+1}} |\nabla_{g_1} u|^2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}$$

对每个 $\mathbb{T}^n$-不变函数 u 都成立。常数仅取决于尺度不变的椭圆性界 λ、Λ。

证明。 证明与 [14,命题 2.15]的证明完全相同。 □

因此， g_1 满足 Tian–Yau–Hein 理论体系的假设，由此得到以下存在性与衰减结论：

- （泊松方程）设 $f \in C^{0,\alpha}$ 满足 $|f| \le C\rho^{-q}$，且 $n+2 > q > 2$成立。则存在唯一的 $C^{2,\alpha}$ 解满足 $\Delta_{g_1} u = f$，并且
$$|u| \le C\rho^{2-q+\epsilon}, \qquad 0 < \epsilon \ll q-2.$$
- （复蒙日–安培方程）设 $f \in C^{2,\alpha}$ 满足 $|f| \le C\rho^{-q}$，且$n+2 > q > 2$成立。则存在 $0 < \alpha' \le \alpha$ 和 $u \in C^{4,\alpha'}$，使得
$$(\omega_1 + \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial u)^{n+1} = e^f \omega_1^{n+1}$$
with
$$|u| \le C\rho^{2-q+\epsilon}, \qquad 0 < \epsilon \ll q-2.$$

为了保证可解性，右端项的衰减必须快于 ρ^{-2}，因为 Hein 的 Moser 迭代论证要求 $u = O(\rho^{2-q})$有界。因此，我们不能直接将拟设 g_1 扰动为一个 Calabi–Yau度量。Hein 方法的一个重要特点是它兼容紧群作用。应用泊松方程结果的 $\mathbb{T}^n$-等变版本，我们得到

推论 6.13。 设 $2 < q < n+2$ 和 $0 < \epsilon < q-2$。存在一个有界的格林算子，作用于 $\mathbb{T}^n$- 不变函数
$$G_{g_1} : \{f \in C^{0,\alpha} \mid f = O(|\vec{\mu}_I|^{-q})\} \longrightarrow \{u \in C^{2,\alpha} \mid u = O(|\vec{\mu}_I|^{2-q+\epsilon})\}$$
使得 $\Delta_{g_1} G_{g_1} f = f$。

回顾第 4.1 小节中 Taub– NUT 空间 $\mathbb{C}^{k+1} \times \mathbb{R}^{2(N-k)}$ 的 $\mathbb{Z}$-商空间上的模型度量 g_K。存在一个分裂 $g_K = g_{K,\,1} + g_2$，与乘积分解相容。对前述讨论稍作变形，可得 $g_{K,\,1}$ 的加权 Sobolev 不等式和格林函数估计：

推论 6.14. 设 $2 < q < n+2$ 和 $0 < \epsilon < q-2$。在带有度量 $g_{K,\,1}$ 的模型空间上，存在一个作用于 $\mathbb{T}^n$-不变函数的有界格林算子：

$$G_{K,1}\colon \{f \in C^{0,\alpha} \mid f = O(|\vec{\mu}_I|^{-q})\} \longrightarrow \{u \in C^{2,\alpha} \mid u = O(|\vec{\mu}_I|^{2-q+\epsilon})\}$$

使得 $\Delta_{g_{K,\,1}} G_{K,\,1} f = f$。

因此，$g_{K,\,1}$ 的格林核在无穷远处按 $O(|\vec{\mu}|_A^{-n+\epsilon})$衰减。

6.4.2. 关于 g_1的格林算子估计。下面我们讨论 $\mathbb{C}^{n+1}$上拉普拉斯方程的可解性

$$\Delta_{g_1} u = f,$$

其中，f 是一个以预先指定的速率衰减的光滑函数。假设

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}$$

对于待确定的指数 δ，τ。我们的方法沿用第 2.8 节；本小节仅验证，在高维情形下，第 6.10 引理中建立的体积形式误差的衰减，结合第 6.2 小节中推导出的 g_1 的渐近性质，已经足以执行相同的论证。

粗略地说，我们用各区域上标准度量的格林核来逼近 g_1 的格林核。为简化记号，我们用 $\mathrm{dist}(\cdot,\,\cdot)$ 表示由 g_{G_I} 在 $\mathcal{B}_1^n$ 上诱导的距离，并在诸如 $\mathcal{B}^n_{K,\,1}$，$\mathfrak{D}^n_{K,\,1}$ 这样的符号中省略下标 1。由于 $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}_1^n \oplus \mathcal{B}_2^n$ 且 $g_A = g_{G_I} \oplus g_{A_{I'}}$，这样不会造成混淆。读者可以将简化后的记号理解为 $\mathcal{B}^n$ 中相应区域在投影 π_1^n 下的像。

引理 6.15。 设 $-3 < \delta < 0$ 且 $\delta + \tau < 0$。设 f 是定义在$\mathbb{C}^{n+1}$ 上、具有 $\mathbb{T}^n$-不变性的函数，且支集包含于 $\{\mathrm{dist}(\,\cdot\,,\,\mathfrak{D}^n) \ge 1\}$ 中，并满足

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

那么，欧几里得势 $\Delta_{G_I}^{-1} f$ 的二阶导数满足

$$\left|\nabla^2_{G_I} \Delta_{G_I}^{-1} f\right|_{g_{G_I}} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

此外，若 $\delta < -1$ 且 $\delta + \tau < -1$，则

$$\left\|\nabla^2_{g_1} \Delta_{G_I}^{-1} f\right\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{C}^{n+1})} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

这些常数仅依赖于 k、α、δ、τ以及一致椭圆性常数 λ、Λ。

证明。 我们首先假设 f 是紧支撑的。令 w 为 f的牛顿势：

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+2}} \Gamma(x-y)\, f(y)\,\mathrm{d}y = C\int_{\mathbb{R}^{n+2}} \frac{1}{|x-y|^n_{G_I}}\, f(y)\,\mathrm{d}y.$$

取二阶导数可得

$$\begin{aligned} D_{ij} w(x) = &\int_{\mathbb{R}^{n+2}\setminus B_{r_0}(x)} D_{ij}\Gamma(x-y)\, f(y)\,\mathrm{d}y \\ &+ \int_{B_{r_0}(x)} D_{ij}\Gamma(x-y)\big(f(y) - f(x)\big)\,\mathrm{d}y - c_{ij} f(x), \end{aligned}$$

其中，c_{ij} 是普适常数，$r_0 > 0$ 取为充分小。第二个积分很容易估计。

步骤 *1*： $|y|$远离 $|x|$。令

$$2^n \le |x| < 2^{n+1}, \qquad 2^k \le |y| \le 2^{k+1}, \qquad k \le n-2 \text{ or } k \ge n+2.$$

Then

$$\begin{aligned}
&\int_{2^k \le |y| \le 2^{k+1}} \frac{1}{|x-y|^{n+2}} \, |f(y)| \, \mathrm{d}y \\
&\quad \le C \int_{2^k \le |y| \le 2^{k+1}} \ell_1^{\delta} |y|^{\tau} \, \mathrm{d}y \cdot \sup\Big\{ \frac{1}{|x-y|^{n+2}} \Big\} \\
&\quad \le C' (2^k)^{\delta+\tau+n+2} \cdot \sup\Big\{ \frac{1}{(2^k - 2^{n+1})^{n+2}}, \frac{1}{(2^n - 2^{k+1})^{n+2}} \Big\} \\
&\quad \le \begin{cases} C' 2^{(\delta+\tau)k}, & k \ge n+2, \\ C' 2^{(\delta+\tau)k} \cdot 2^{(n+2)(k-n)}, & k \le n-2, \end{cases}
\end{aligned}$$

with

$$C' = C \int_{1 \le |s| \le 2} \big(2^{-k} + \operatorname{dist}(s, \mathfrak{D}^n) \big)^{\delta} \, \mathrm{d}s.$$

该积分是有限的，因为 $\delta > -3$ （缩放到单位环后）。当$\delta + \tau < 0$ 时， k 上的求和由 $\ell_n^{\delta+\tau}$ 控制。

步骤 *2*： $|y| \sim |x|$ 但 $|x-y| > r_0$。这里

$$\begin{aligned}
&\int_{y \sim x,\, |x-y| > r_0} \frac{1}{|x-y|^{n+2}} \, \ell_1^{\delta} \ell_n^{\tau} \, \mathrm{d}y \\
&\quad \le C \ell_n^{\tau}(x) \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{t^{n+2-\delta}} \, t^{n+1} \, \mathrm{d}t \int_{S^{n+1}} \mathrm{d}^{\delta} \Big(\frac{x}{t} + \sigma, \mathfrak{D} \Big) \, \mathrm{d}\sigma \le C \ell_n^{\tau}(x) \ell_1^{\delta}(x),
\end{aligned}$$

其中，最后一个积分是有限的，因为 $\delta > -3$ 且 $\delta < 0$。

步骤 *3*：球 $B(x, r_0)$，其中 $r_0 < \frac{1}{10} \ell_1(x)$。由于 f的支集包含在 $\{\mathsf{dist}(\cdot, \mathfrak{D}) > 1\}$中，$x$ 和 y 都与 $\mathfrak{D}$保持一致的距离。根据命题 4.1（IV），在此区域内， g_1 与 g_{flat} 一致等价，因此

$$|f(y) - f(x)| \le C \ell_1(x)^{\delta-1} |x|^{\tau} \operatorname{dist}(x, y).$$

将其代入

$$\int_{|x-y| < \frac{1}{10} \ell_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+2}} \, |f(y) - f(x)| \, \mathrm{d}y$$

从而得到所需的界。

由此我们证明了

$$|\nabla^2_{g_{G_I}} \Delta_{G_I}^{-1} f|_{g_{G_I}} \le C \ell_1^{\delta} \ell_n^{\tau}.$$

从无穷远处对二阶导数积分，并利用 $\delta < -1$, $\delta + \tau < -1$，我们还得到

$$|\mathrm{d} \Delta_{G_I}^{-1} f|_{g_{G_I}} \le C \ell_1^{\delta+1} \ell_n^{\tau}.$$

为了估计关于 g_1的Hessian矩阵，我们展开

$$\nabla^2_{g_1} \Delta_{G_I}^{-1} f = \sum \frac{\partial^2 \Delta_{G_I}^{-1} f}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \nabla_{g_1} \mathrm{d}\mu_i \otimes \nabla_{g_1} \mathrm{d}\mu_j + \sum \frac{\partial \Delta_{G_I}^{-1} f}{\partial \mu_i} \nabla^2_{g_1} \mathrm{d}\mu_i$$

（以及涉及 η 导数的类似术语）。利用

$$\|\mathrm{d}\mu_i\|_{C^{k,\alpha}} \le C, \qquad \|\mathrm{d}\eta\|_{C^{k,\alpha}} \le C,$$

我们得到

$$\|\nabla^2_{g_1}\Delta_{G_I}^{-1}f\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{C}^{n+1})}\le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

通过弱拓扑中的一个逼近论证，可以去除紧支撑假设，因此 $\nabla^2_{g_1}\Delta_{G_I}^{-1}$ extendstoabounded linearoperator between theweighted Hölder spaces. □

根据命题 4.1 的 (IV)，在距离该轨迹一定距离处， g can be ap- proximated by g_{flat}。因此我们得到

引理 6.16. 在引理 *6.15* 的假设下，

$$\|\Delta_{g_1}\Delta_{G_I}^{-1}f-f\|_{C^{k,\alpha}}\le C\ell_1^{\delta-1}\ell_n^{\tau}.$$

特别地，对于充分大的常数 N_1，

$$\|\Delta_g\Delta_{G_I}^{-1}f-f\|_{C^{k,\alpha}(\{\mathrm{dist}(\,\cdot\,,\mathfrak{D}^n)>N_1\})}\le\frac{C}{N_1}\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

设 $N_0=4\hat{}CC_0$ 是定义 B_I'' 时使用的常数，使得 $p\in B_K''$当且仅当 $N_0\,\mathrm{dist}(\,\cdot\,,\mathfrak{D}^n_K)\le\mathrm{dist}(\,\cdot\,,\partial\mathfrak{D}^n_K)$。取一列常数 $\{N_i\}_{i=1}^{n+1}$，满足$N_{i+1}\gg N_i$。下面的引理依赖于推论 6.14 的结果。

引理 6.17。设 $\tau<2$ 和 $0<\epsilon\ll1$。设 f 为一个支集包含于

$$\{\mathrm{dist}(\,\cdot\,,\partial\mathfrak{D}^n_K)>2NN_k,\ \mathrm{dist}(\,\cdot\,,\mathfrak{D}^n_K)<2N_k\}$$

模型空间内部的 *{v6}*-不变函数，其中

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}}\le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau},$$

其中 $C_{k+2}\gg C_{k+1}$。则

$$\begin{cases}\|G_Kf\|_{C^{k+2,\alpha}}\le C\ell_k^{-1+\epsilon}\ell_n^{\tau}, & -1<\tau<1-\epsilon,\\ \|G_Kf\|_{C^{k+2,\alpha}}\le C\ell_n^{-2+\epsilon}, & \tau\le-1.\end{cases}$$

该常数仅依赖于 C_{k+1}、δ、ϵ、τ、k、α 以及一致椭圆性常数 λ、Λ。特别地，如果

$$\begin{cases}either\quad -1<\tau<1, \quad -3+2\epsilon<\delta\le0,\\ or\quad -2+\epsilon<\tau\le-1, \quad -4+2\epsilon<\delta+\tau,\end{cases}$$

then

$$\|\nabla^2_{g_K}G_Kf\|_{C^{k,\alpha}}\le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

证明。首先假设 f 是紧支撑的。在轨迹 $\mathfrak{D}^n_K$ 上选取一个格；该轨迹是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}$ 的一个 $(n-|K|+1)$ 维子集，且具有 $2\le|K|\le n$。将 $\mathfrak{D}^n_K$ 分解为以

$$x_{(m_i)}=(0,\dots,0,m_{k+1},\dots,m_n,0)\in\mathfrak{D}_K.$$

将 f 分解为若干个 $f_{(m_i)}$，其支集包含于柱状区域

$$\{m_j\lesssim\nu_{K,j}\lesssim m_j+1,\ k+1\le j\le n+1\}\cap\mathrm{supp}\,f.$$

取 C_{k+2} 足够大后， f 的支集包含在 $(\mathcal{B}^n_K)''$ 内，因此 g_K 分解为一个乘积。Hein 估计给出

$$|G_Kf_{(m_i)}|\lesssim\Big(\sum m_i^2\Big)^{\tau/2}\big(|x-x_{(m_i)}|+1\big)^{\epsilon-n},$$

而椭圆正则性可得

$$\|G_K f_{(m_i)}\|_{C^{k+2,\alpha}(B(x,\ell_1(x)/10))} \le C\Big(\sum_{j=k+1}^{n+1} m_j^2\Big)^{\tau/2}\big(|x-x_{(m_i)}|+1\big)^{\epsilon-n}.$$

对 (m_i) 求和并将求和替换为积分，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|G_K f\|_{C^{k+2,\alpha}(B(x,\ell_1(x)/10))}\\
&\le C\sum_{(m_i)}\Big(\sum_{j=k+1}^{n+1} m_j^2\Big)^{\tau/2}\big(|x-x_{(m_i)}|+1\big)^{\epsilon-n}\\
&\le C\int_1^\infty\cdots\int_1^\infty\Big(\sum_{i=k+1}^{n+1} y_i^2\Big)^{\tau/2}\big(\ell_k(x)^2+\sum|\nu_{K,j}(x)-y_j|^2\big)^{\frac{\epsilon-n}{2}}\,\mathrm{d}y_i\\
&\lesssim\begin{cases}(|x|_{G_I}+1)^\tau\ell_k(x)^{\epsilon-1}, & -1<\tau<1-\epsilon,\\ (|x|_{G_I}+1)^{\epsilon-2}, & \tau\le -1.\end{cases}
\end{aligned}$$

这里我们使用了极坐标，并注意到当 $|K|=2$ 时收敛性最差。因此，

$$\begin{cases}\|G_K f\|_{C^{k+2,\alpha}}\le C\ell_k^{-1+\epsilon}\ell_n^\tau, & -1<\tau<1-\epsilon,\\ \|G_K f\|_{C^{k+2,\alpha}}\le C\ell_n^{-2+\epsilon}, & \tau\le -1,\end{cases}$$

且 Hessian矩阵 满足

$$\begin{cases}\|\nabla^2_{g_K}G_K f\|_{C^{k,\alpha}}\le C\ell_1^{-2}\ell_k^{-1+\epsilon}\ell_n^\tau, & -1<\tau<1-\epsilon,\\ \|\nabla^2_{g_K}G_K f\|_{C^{k,\alpha}}\le C\ell_1^{-2}\ell_n^{-2+\epsilon}, & \tau\le -1.\end{cases}$$

通过一个逼近论证，可以在弱拓扑下去除紧支撑假设，证明即告完成。□

定义截断函数

$$\chi_K=\begin{cases}1, & \mathrm{dist}(\,\cdot\,,\partial\mathfrak{D}_K^n)>3N_0N_{k+1}\text{ and }\mathrm{dist}(\,\cdot\,,\mathfrak{D}_K^n)<N_{k+1},\\ 0, & \mathrm{dist}(\,\cdot\,,\partial\mathfrak{D}_K^n)<2N_0N_{k+1}\text{ or }\mathrm{dist}(\,\cdot\,,\mathfrak{D}_K^n)>2N_{k+1}.\end{cases}$$

引理 6.18. 在引理 *6.17* 的假设下，若 C_3 充分大，则

$$\|\Delta_g(\chi_K G_K f)-f\|_{C^{k,\alpha}(\{\mathrm{dist}(\,\cdot\,,\partial\mathfrak{D}_K^n)>3NN_{k+1}\})}\le\frac{C}{N_{k+1}^\epsilon}\ell_1^\delta\ell_n^\tau.$$

证明. 在集合 $\{\mathrm{dist}(\,\cdot\,,\partial\mathfrak{D}_K^n)>3NN_{k+1}\}$ 上，截断函数 χ_K 在 f的支集上等于 1，因此我们只需估计

$$I=\|(\Delta_g-\Delta_K)G_K f\|.$$

由注 6.4,

$$\|g_K-g\|_{C^{k,\alpha}}\le C\ell_k^{-1+\epsilon},$$

特别是在 f 的支集上,

$$\|g_K-g\|_{C^{k,\alpha}}\le\frac{C}{N_{k+1}^{1-\epsilon}}.$$

因此，误差项由 $\dfrac{C}{N_{k+1}^{1-\epsilon}}$ 控制。在集合 $\{\mathrm{d}\chi_K \neq 0\}$ 上，我们还需要估计 $\|\Delta_g(\chi_K G_K f)\|$，由于 χ_K 的缩放因子为 N_{k+1}^{-1}，所需的界由引理 6.17 得出。□

引理 6.19. 假设以下条件之一成立

$$-2 \le \delta \le 0, \quad \tau > -2, \qquad or \qquad \delta \le -2, \quad \delta + \tau > -4,$$

并令 $0 < \epsilon \ll 1$ 依赖于 δ, τ。若 f 的支集位于球

$$\{\mathrm{dist}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}_I) < 2N_{n+1}\}$$

with

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{C}^{n+1})} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau},$$

then

$$\|G_{g_1} f\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_n^{-2+\epsilon},$$

并且，特别是，

$$\|\nabla_{g_1}^2 G_{g_1} f\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

证明。 这直接由推论 6.13 得出。 □

6.4.3. 求解拉普拉斯方程。 注意，以上所有引理中的权指数范围 δ, τ 均有重叠；如 Li–Yang [14], 所示，共同的可容许区域为

$$\{-3 < \delta < -1,\ -3 < \tau < 1,\ -4 < \delta + \tau < -1\}. \tag{6.16}$$

由此我们得到拉普拉斯方程的以下可解性结论。

引理 6.20。 （ [14]中的命题 *2.23*）设(δ, τ) 属于范围(6.16)。给定f ， 满足

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau},$$

存在一个函数 u ， 它满足 $\Delta_g u = f$ 并且满足

$$\|\mathrm{d}u\|_{C^{k+1,\alpha}} \le C\ell_1^{\delta+1}\ell_n^{\tau}.$$

证明。 取一个截断函数

$$\chi' = \begin{cases} 1, & \mathrm{dist}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}^n) \ge 2, \\ 0, & \mathrm{dist}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}^n) \le 1. \end{cases}$$

则 $\chi' f$的支集包含于 $\{\mathrm{dist}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}^n) \ge 1\}$，并且满足

$$\|\chi' f\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

由引理 6.15， $u_a = \Delta_{G_I}^{-1}(\chi' f)$满足

$$\|\nabla_{g_1}^2 u_a\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau},$$

并且，对于 $N_1 \gg 1$，引理 6.16 给出

$$\|\Delta_{g_1} u_a - f\|_{C^{k,\alpha}(\{\mathrm{dist}(\,\cdot\,,\mathfrak{D}^n) > N_1\})} \le \frac{C}{N_1}\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

对于满足 $|K| = k+1$、 $k \ge 1$ 的 $K \subset I$，定义

$$\chi_K' = \begin{cases} 1, & \mathrm{dist}(\,\cdot\,, \partial\mathfrak{D}_K^n) > 3N_0N_k,\ \mathrm{dist}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}_K^n) < N_k, \\ 0, & \mathrm{dist}(\,\cdot\,, \partial\mathfrak{D}_K^n) < 2N_0N_k \text{ or } \mathrm{dist}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}_K^n) > 2N_k. \end{cases}$$

χ'_K 的缩放长度约为 N_k。令

$$f_{ij} = \chi'_{ij}(f - \Delta_{g_1} u_a),$$

使得 f_{ij} 支撑于

$$\{\mathrm{dist}(\,\cdot\,, \partial\mathfrak{D}^n_{ij}) > 2NN_1,\ \mathrm{dist}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}^n_{ij}) < 2N_1\}$$

并满足

$$\|f_{ij}\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

根据引理 6.17，存在 $G_{\{i,j\}} f_{ij}$ ，使得

$$\|\nabla^2_{g_{\{i,j\}}} G_{\{i,j\}} f_{ij}\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

令 $u_{ij} = \chi_{ij} G_{\{i,j\}} f_{ij}$，其中 χ_{ij} 是引理 6.18 之前定义的截断函数。则u_{ij} 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上全局定义，并且根据引理 6.18,

$$\|\Delta_{g_1} u_{ij} - f_{ij}\|_{C^{k,\alpha}(\{\mathrm{dist}(\,\cdot\,,\partial\mathfrak{D}^n_{ij})>3NN_2\})} \le \frac{C}{N_2^{\epsilon}}\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

对 $K \subset I$、$|K| = k+1$重复这一过程，可得到具有类似估计的 u_K。最后，令

$$\chi'_0 = \begin{cases} 1, & \mathrm{dist}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}^n_I) \le N_{n+1}, \\ 0, & \mathrm{dist}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}^n_I) > 2N_{n+1}, \end{cases}$$

并令

$$f_0 = \chi'_0\Big(f - \Delta_{g_1}\big(u_a + \sum_{|K|=2}^{n} u_K\big)\Big).$$

则 f_0的支撑集包含于 $\{\mathrm{dist}(\,\cdot\,, \mathfrak{D}^n_I) < 2N_{n+1}\}$，且满足

$$\|f_0\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

根据引理 6.19，存在 $u_0 = G_{g_1} f_0$ 使得

$$\|\nabla^2_{g_1} u_0\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}, \qquad \Delta_{g_1} u_0 = f_0.$$

Let

$$u = u_0 + u_a + \sum_{|K|=2}^{n} u_K.$$

由于 $N_{k+1} \gg N_k$，我们有

$$\|\nabla^2_{g_1} u\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}, \qquad \|\Delta_{g_1} u - f\|_{C^{k,\alpha}} \le \frac{1}{N_1^{\epsilon}}\ell_1^{\delta}\ell_n^{\tau}.$$

因此， u 是一个满足所需界的近似解。按照 Li–Yang 的命题 2.23 [14],中的相同论证进行迭代即可得到精确解，此处略去细节。□

6.4.4. 求解复蒙日–安培方程。注意到体积-形式误差 E 满足

$$\|E\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{-1+\epsilon}\ell_n^{-1-\epsilon}.$$

应用引理 6.20，我们求解泊松方程

$$\Delta_{g_1} u' = -2E, \qquad \|\mathrm{d}u'\|_{C^{k+1,\alpha}} \le C\ell_1^{-\epsilon}\ell_n^{-1+\epsilon},$$

特别是，

$$\|\partial\bar\partial u'\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{-1-\epsilon}\ell_n^{-1+\epsilon}, \qquad \|(\partial\bar\partial u')^2\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{-2-2\epsilon}\ell_n^{-2+2\epsilon}.$$

设 $\omega_1' = \omega_1 + \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial u'$。则

$$\begin{aligned}(\omega_1')^{n+1} &= (\omega_1 + \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial u')^{n+1} \\ &= (\omega_1)^{n+1}\Big(1 + \frac{1}{2}\Delta_{g_1} u' + O\big(|\partial\bar\partial u'|^2\big)\Big),\end{aligned}$$

新的体积形式误差 E' 满足

$$\|E'\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{-2}\ell_n^{-2+2\epsilon}.$$

在紧集之外，对 ω_1 的修改是 C^0-小的，因此凯勒度量的正定性得以保持。在紧区域内，我们沿用第 6.1 节中的论证，利用针对 u' 的偏差估计，通过引理 5.3 的一个类似结果来控制 g_1' 的动量映射的增长。我们仍将所得的凯勒度量记为ω_1'，它继承了 ω_1的所有解析性质。

再次应用引理 6.20，以背景度量 g_1'为基础，我们求解

$$\Delta_{g_1'} u'' = -2E', \qquad \|\mathrm{d}u''\|_{C^{k+1,\alpha}} \le C\ell_1^{-1}\ell_n^{-2+2\epsilon},$$

并令 $\omega_1'' = \omega_1' + \sqrt{-1}\overline{\partial\partial} u''$。恒等式

$$(\omega_1' + \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial u'')^{n+1} = (\omega_1')^{n+1}\Big(1 + \frac{1}{2}\Delta_{g_1'} u'' + O\big(|\partial\bar\partial u''|^2\big)\Big)$$

得到体积形式误差 E'' 满足

$$\|E''\|_{C^{k,\alpha}} \le C\ell_1^{-4}\ell_n^{-4+2\epsilon}.$$

在紧区域进一步进行手术可保持 Kähler 性质。度量ω_1'' 现在满足 Tian–Yau–Hein 理论体系所要求的全部假设。由 Hein 估计和椭圆自举可得定理 6.7。

参考文献

1. Vestislav Apostolov 和 Charles Cifarelli，哈密顿 *2*-形式与 上新的显式 *Calabi-Yau* 度量及梯度稳态 *Kähler-Ricci* 孤立子，J. Differential Geom. **130** (2025), no. 3, 517–570. MR 4918214 2. Eugenio Calabi，凯勒度量与全纯丛，Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **12**(1979), no. 2, 269–294. 3. Ronan J. Conlon 和 H.-J. Hein，渐近锥形 *Calabi-Yau* 流形 *I*，Duke Math. J. **162** (2013), no. 15, 2855–2902. 4. ，拟射影簇上的渐近锥形 *Calabi-Yau* 度量，Geom. Funct. Anal. **25** (2015), no. 2, 517–552. 5. Ronan J. Conlon 和 Frédéric Rochon， 上适用于 的完备 *Calabi-Yau* 度量新例，Ann. Sci. ~~Éc. Norm~~. Supér. **54** (2021), no. 2, 259–303. 6. Benjy J. Firester，通过平滑化 *Calabi-Yau* 完备交截构造完备 *Calabi-Yau* 度量，Geom. Dedicata **218** (2024), no. 2, 46. 7. G. W. Gibbons 和 S. W. Hawking，引力多瞬子，Phys. Lett. B **78** (1978), no. 4, 430–432。

8. G. W. Gibbons、P. Rychenkova 和 R. Goto，*BPS* 磁单极子模空间的超凯勒商构造，Comm. Math. Phys. **186** (1997), no. 3, 581–599. 9. H.-J. Hein，论引力瞬子，博士论文，普林斯顿大学，普林斯顿，新泽西州，2010. 10. ，*Ricci* 曲率下界条件下的加权 *Sobolev* 不等式，Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), no. 8, 2943–2955. 11. Claude LeBrun， 上的完备 *Ricci* 平坦凯勒度量未必是平坦的，Proc. Sympos. Pure Math. (Providence, RI), vol. 52, 1991, pp. 297–304. 12. K. Lee、E. J. Weinberg 和 P. Yi，具有非阿贝尔磁荷的有质量与无质量磁单极子，Phys. Rev. D **54** (1996), no. 10, 6351–6371. 13. Yang Li， 上一种新的完备 *Calabi-Yau* 度量，Invent. Math. **217** (2019), no. 1, 1–34. 14. ，*Calabi-Yau* 三维流形的 *SYZ* 几何：*Taub-NUT* 型与 *Ooguri–Vafa* 型度量，vol. 292, Mem. Amer. Math. Soc., no. 1453, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2023. 15. Daheng Min，高维 *ALF Calabi-Yau* 度量的构造，(2023). 16. Ezra Newman、L. Tamburino 和 Theodore Unti，*Schwarzschild* 度量在真空时空中的推广，J. Math. Phys. **4** (1963), no. 7, 915–923. 17. Henrik Pedersen 和 Y. S. Poon，超凯勒度量与 *Bogomolny* 方程的推广，Comm. Math. Phys. **117**(1988), no. 4, 569–580. 18. ，凯勒–爱因斯坦度量及常标量曲率凯勒度量的哈密顿构造，Comm. Math. Phys. **136** (1991), no. 2, 309–326. 19. Martin Roček，超对称性与非线性 σ模型，Physica D **15** (1985), no. 1–2, 75–82. 20. Gábor Székelyhidi， 的退化与 *Calabi-Yau* 度量，Duke Math. J. **168** (2019), no. 14, 2651–2700. 21. Abraham H. Taub，允许三参数运动群的真空时空，Ann. of Math.**53** (1951), no. 3, 472–490. 22. G. Tian 和 S.-T. Yau，完备凯勒流形上凯勒–爱因斯坦度量的存在性及其在代数几何中的应用，Mathematical Aspects of String Theory (Shing- Tung Yau, ed.), Adv. Ser. Math. Phys., vol. 1, World Scientific, Singapore, 1987, pp. 574–628. 23. ，*Ricci* 曲率为零的完备凯勒流形 *I*，J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 579–609. 24. ，*Ricci* 曲率为零的完备凯勒流形 *II*，Invent. Math. **106** (1991), no. 1, 27–60. 25. S.-T. Yau，紧凯勒流形的 *Ricci* 曲率与复 *Monge-Ampère* 方程 *I*，Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), no. 3, 339–411. 26. Ilia Zharkov，局部 *Calabi-Yau* 度量的极限行为，Adv. Theor. Math. Phys. **8**(2004), no. 1, 395–420。

南京大学数学学院，中华人民共和国南京市，邮编：210093电子邮箱：math_mtf@163.com