arXiv:2601.06760v1 [math.ST] 11 Jan 2026

关于寿命分布的 NBUE 类与 NWBUE 类

M. Z. Anis*,

印度统计研究所统计质量控制与运筹学部门,
印度加尔各答 700 108，B T 路 203 号

2026年1月13日

摘要

本文将非单调老化概念视为相应单调老化概念的扩展。具体而言，本文考察了寿命分布的期望意义下新件优于旧件（NBUE）类及其相应的非单调类——期望意义下新件先劣后优于旧件（NWBUE）类。本文还得出了关于 NBUE 类的一些补充结果。尽管 NBUE 类的许多性质以类似方式适用于 NWBUE 类，但反例表明，矩界并不适用。本文还针对 NWBUE 类的一些常见概念提出了修正结果。

关键词： 变点；矩界；寿命分布的 NBUE 族；非单调老化；弱收敛。

AMS 2000 分类： 主要分类： 62G99；次要分类： 60E99；62N05

1 引言

在可靠性理论中，最常用的分布是指数分布，这主要是因为其数学结构简单。它本质上刻画了“无老化”，但在许多情况下这可能并不正确。可选的替代方案包括单调老化或非单调老化概念。单调老化意味着相同的，即同一种老化类型，在整个单元/部件的寿命期间持续存在。这种老化可能是正向的（意味着部件/单元会随时间推移而劣化）；也可能是负向的（此时，时间会对剩余寿命产生有利影响）。这些老化概念可通过众所周知的单调老化类来刻画，例如失效率递增（IFR）、

*zafar@isical.ac.in

平均递增失效率（IFRA）、新件优于旧件（NBU）、期望意义下新件优于旧件（NBUE）、期望意义下调和新件优于旧件（HNBUE）、递减平均剩余寿命（DMRL）和递减平均失效时间（DMTTF）及其对偶类。其他重要的（但可能不太常见的）老化类包括凸序意义下新件优于旧件（NBUC）、矩母函数意义下新件优于更新件（NBRUmgf）、拉普拉斯变换序意义下新件优于更新件（NBRULC）。然而，在实际中，人们经常会遇到平均剩余寿命函数或风险率函数表现出非单调行为的生物系统和机械系统。例如，这种非单调老化常使用浴盆型失效率（BFR）函数进行建模。另一种使用平均剩余寿命函数的方法产生了先增后减平均剩余寿命（IDMRL）类，该类由 Guess 等人引入 [1]。随后，Mitra 和 Basu [2] 引入了“期望中新品劣于旧品”（NWBUE）寿命分布类，用于对非单调老化进行建模。最近，Izadi 等人 [3] 提出了先增后减平均失效时间（IDMTTF）类，用于对非单调老化进行建模。

在对现实生活中的数据进行建模时，分析人员必须检查老化是否会对所研究的特征产生影响。可以通过检验该现象能否用指数分布建模来做到这一点，因为指数分布意味着不存在老化。根据所采用的刻画方式，已有许多指数性检验。例如，Xiong 等人 [4] （源自记录值外熵）；Rajesh 和 Sajily [5]（基于相对外熵）；Cuparić 等人 [6]（运用了 V-经验拉普拉斯变换的概念）。Cuparić 和 Milošević [7]研究了针对随机删失数据的一种基于新刻画的指数性检验。Ossai 等人 [8]对指数性检验进行了有益的综述；Ebner [9] 则评述了一种基于平均剩余寿命函数的指数性检验。

文献中有大量关于检验指数性以对抗特定单调和非单调老化概念的研究。Proschan 和 Pyke [10] 或许最早提出了针对递增失效率备择的指数性检验方法，该方法利用顺序观测值之间标准化间距的秩。后来，Anis [11]及其所引文献也讨论了针对递增失效率备择的指数性检验。Ahmad 和 Mugdadi [12] 及其所引文献研究了平均递增失效率（IFRA）备择。针对新件优于旧件（NBU）备择的检验最初由 Hollander 和 Proschan [13]提出。针对新优于已用的期望备择的检验最初由 Hollander 和 Proschan [14], 研究，Anis 和 Basu [15] 、Sreelakshmi 等人 [16] 及其所引文献也对此进行了探讨。关于检验指数性以对抗调和期望意义下新件优于旧件（HNBUE）备择（该概念最早由 Klefsjö[17,18]提出），可参见 Bakr 等人 [19]及其所引文献。Lai [20]对许多此类检验方法作了很好的总结。

文献中也广泛探讨了针对近期提出、但相对不太流行的老化类进行指数性检验的问题。Mohamed [21]研究了针对 NBUC备择分布的指数性检验。Hassan 等人 [22]和 Bakr

等人[23] 关注的是针对 NBRUmgf 类进行指数性检验。Balakrishnan 等人[24] 获得了针对更新递增平均剩余寿命类进行指数性检验的精确检验。Etman 等人 [25] 探讨了针对 NBRULC 类进行指数性检验的问题。在近期的一项研究中，Etman 等人 [26] 获得了针对 EBUCL 备择假设的指数性检验。Ghosh 和 Majumder [27] 利用矩不等式研究了针对 DMTTF 替代假设的指数性检验，而 Das 和 Ghosh [28]提出了一种基于分位数的该问题检验方法。Das 和 Ghosh [29] 提出了一类针对 DMTTF 替代假设的检验。Bhattacharyya 等人 [30] 则针对删失数据提出了一组该问题的检验方法。

现在，我们将关注检验指数性、以非单调老化概念为备择的问题。文献中针对 BFR分布的指数性检验已有很多；例如，参见 Saha 和 Anis [31]及其中的参考文献。Bhattacharyya 等人 [32] 将 BFR 概念扩展到平均浴盆失效率（BFRA）类，并研究了相应的检验问题。Na 和 Lee [33] 探讨了以 IDMRL备择为对象的指数性检验问题，相关参考文献亦见其中。Sepehrifar [34]将该类扩展至近期提出的星形平均平衡寿命（SMEL）类。Anis 和 Mitra [35]首次讨论了以 NWBUE寿命分布族为对象的指数性检验问题。随后，Ghosh 和 Mitra [36] 推导了针对同一检验问题的广义 Hollander-Proschan 型统计量的小样本分布。Anis[37] 综述了截至当时针对非单调老化类的指数性检验。

在单调老化类的层级中，NBUE 类占有特殊地位。Esary 等人 [38]曾对其进行讨论。事实上，Bryson 和 Siddiqui [39]将其称为净递减平均剩余寿命类 。Marshall 和 Proschan [40]在其定理 2.2 中证明：当采用“故障替换策略”而非“年龄替换策略”时，系统在运行期间相邻两次故障之间的平均等待时间更短，当且仅当系统寿命分布 F 具有期望意义下新品优于旧品性质（即 F 属于 NBUE 类）。请注意，如果系统寿命可用指数分布建模，那么这两种策略下的平均等待时间相同。

如果相邻故障之间的预期等待时间是决定是否为某个系统采用年龄替换策略而非非计划更换策略的一项主要标准，那么一种可能的解决方法是根据该系统的寿命数据，对其寿命分布检验上述假设。拒绝 H_0 将表明支持采用年龄替换方案。

许多这类非参数分布族的矩界已经被推导出来。Basu 和 Simons [41] 给出了递增失效率分布的 $r-$阶矩下界。Sengupta 和 Deshpande [42] 给出了分布相对于某个已知分布有序时的矩界。

单调老化类与非单调老化类之间可以进行类比。BFR 类可视为 DFR-IFR 类的非单调版本。同样，IDMRL 类是 IMRL-DMRL 类相应的非单调版本。此外，I DMTTF 类可以被视为 DMTTF 类的非单调对应类。类似地，NWBUE 类是 NWUE-NBUE 类的非单调类型。因此，应当注意，NBUE 分布不过是带有变点 $x_0 = 0.$ 的 NWBUE 分布。冲击模型中的结果可以类似地从 NBUE 类推广到 NWBUE 分布类。同样，在这两个类中都可以观察到弱收敛（正如我们将要证明的那样）。

本文讨论 NBUE 类及其非单调版本 NWBUE 类，全文安排如下。第 2 节讨论 NBUE 类。具体而言，我们为该类建立了一些矩不等式，并证明其弱收敛性。接下来，第 3 节聚焦于 NWBUE 类。我们构造了一个反例，以说明（正如预期的那样），NBUE 矩界对 NWBUE 分布并不成立，而 NWBUE 类分布的矩界对 NBUE 类也不成立。我们还考察了 IDMRL 类与 NWBUE 类之间的关系，并借此纠正一个由来已久的谬误。我们指出了 Mitra 和 Basu [2]给出的一个错误的 NWBUE 类寿命分布示例，并随后予以修正。第 4 节对全文作总结。

2 NBUE 类的结果

本节将陈述并证明有关 NBUE 寿命分布族的相关结果。我们首先推导一些矩不等式及相关结果。接下来，我们将研究 NBUE 寿命分布类中的弱收敛。不过，为求完整起见，我们先给出 NBUE 类的定义。

定义 1： 设 X 是一个非负随机变量，其分布函数为 F，均值 $\mu.$ X 有限。若满足以下条件，则称其为期望意义下新件优于旧件（NBUE）：

$$\int_0^\infty \overline{F}\,(x|t)\,dx \leq \mu, \qquad \forall t \geqslant 0.$$

2.1 矩不等式与相关结果

最重要的结果见下文定理 2.3。不过，首先我们要指出以下一个有用的引理（归功于 Marshall 和 Proschan [40]），以证明完备性：

引理 2.1。 （*Marshall* 和 *Proschan [40]*）若 F 为 *NBUE* 且均值 μ 有限，则 $\int_x^\infty \bar{F}(t)dt \leqslant \mu e^{-x/\mu}, x \geqslant 0,$ 其中 $\bar{F} = 1 - F.$
现在我们陈述一个众所周知的一般定理，并给出其证明。

定理 2.2。若 F 为均值有限的 *NBUE* 分布，μ且 ϕ是定义在 $[0,\infty)$ 上的非负非递减函数，则

$$\int_0^\infty \phi(y)\,\bar{F}(y)\,dy \leqslant \int_0^\infty \phi(y)\,e^{-y/\mu}dy.$$

证明。定义"~" $f_{(1)}$的 F为 $f_{(1)}(x) = F(x)/\mu, \quad x>0$.我们有 —

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \phi(y)\,\bar{F}(y)\,dy &= \mu\int_0^\infty \phi(y)\,f_{(1)}(y)\,dy \\
&= \mu\int_0^\infty \phi(y)\,dF_{(1)}(y) \\
&= \mu E\left[\phi(Z)\right], \text{where } Z = F_{(1)} \text{ in distribution} \\
&\leqslant \mu\int_0^\infty P\left[\phi(Z) > x\right]dx \\
&= \mu\int_0^\infty P\left[Z > \phi^{-1}(x)\right]dx, \text{where } \phi^{-1} \text{ is a suitably defined inverse function of } \phi \\
&\leqslant \mu\int_0^\infty P\left[U > \phi^{-1}(x)\right]dx, \text{where } P[U>t] = e^{-t/\mu}, \text{ using Lemma 2.1} \\
&= \mu\int_0^\infty P\left[\phi(U) > x\right]dx \\
&= \mu E\left[\phi(U)\right] \\
&= \mu\int_0^\infty \phi(y)\,\frac{1}{\mu}e^{-y/\mu}dy \\
&= \int_0^\infty \phi(y)\,e^{-y/\mu}dy.
\end{aligned}$$

□

现在给出如下主要结果，即定理 2.3。

定理 2.3。若 F 是 *NBUE* 且均值 μ有限，则

$$\mu_r = E(X^r)\begin{cases} \leqslant \Gamma(r+1)\,\mu^r & \text{if } \ r \geqslant 1, \\ \geqslant \Gamma(r+1)\,\mu^r & 0<r<1. \end{cases}$$

证明。利用定理 2.2，容易得到证明，其中 $\phi(x) = x^{r-1}$.

□

2.2 NBUE 类中的弱收敛

Basu 和 Simons [41] 已证明失效率递增类的弱收敛。随后，Basu 和 Bhattcharjee [43] 对新失效率递增类的调和平均版本得出了类似结论。由于新失效率递增类的调和平均版本严格大于 NBUE 类，因此可知，若F_n，$n=1$，2，3，$\cdots$是一个收敛至 F，的 NBUE 寿命分布序列，那么

F 属于新失效率递增类的调和平均版本。然而，本文得出了一个更强的结果，即极限分布 F 确实属于 NBUE 类。我们先给出以下定理。

定理 2.4。 设 $F_n, n = 1, 2, 3, \cdots$ 为均值为 $\mu_n.$ 的 ***NBUE*** 寿命分布序列。假设

(a) $F_n \to F$ 依分布收敛，其中 F 是均值有限的连续分布函数μ;

and

(b) 序列 $\{\mu_n\}$ 有界。

则 F 是 ***NBUE*** 的。此外，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty x^r dF_n(x) = \int_0^\infty x^r dF(x) \tag{1}$$

对每个 $r > 0.$

证明。 设 $\mu_n \leqslant M, \forall n \geqslant 1.$ 由法图引理以及定理 2.4 的假设可得

$$\mu = \int_0^\infty \overline{F}(x)\, dx \leqslant M < \infty. \tag{2}$$

我们首先证明，当 $n \to \infty.$ 时， $\mu_n \to \mu$
对于任意适当选取的常数 $C > 0,$ ，我们有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\{\overline{F}_n(x) - F_n(x)\right\} dx &= \int_0^C \left\{\overline{F}_n(x) - F_n(x)\right\} dx + \int_C^\infty \overline{F}_n(x)\, dx - \int_C^\infty \overline{F}(x)\, dx \\ &= I_{1n} + I_{2n} - I_3, \end{aligned}$$

其中

$$I_{1n} = \int_0^C \left\{\overline{F}_n(x) - F_n(x)\right\} dx;$$

$$I_{2n} = \int_C^\infty \overline{F}_n(x)\, dx,$$

and

$$I_3 = \int_C^\infty \overline{F}(x)\, dx.$$

首先注意到，在给定条件下，利用控制收敛定理可得，当 $n \to \infty.$ 时， $I_{1n} \to 0$

其次，我们有:

$$\begin{aligned} I_{2n} = \int_C^\infty \overline{F}_n(x)\, dx &\leqslant \mu_n \exp(-C/\mu_n) \text{ (by Lemma 2.1)} &(3)\\ &\leqslant M \exp(-C/M) &(4) \end{aligned}$$

通过选择足够大的 C，可以使其任意接近于零。最后，由于 (2)，通过选择足够大的 C， $I_3 = \int_C^\infty F(x)\,dx$ 可以任意接近于零。因此， $\int_0^\infty \left\{F_n(x) - F_n(x)\right\} dx \to 0$，当 $n \to \infty$. 因此，换言之，

$$\mu_n \to \mu \text{ as } n \to \infty. \tag{5}$$

因此，

$$\frac{1}{\overline{F}_n(x)} \int_x^\infty \overline{F}_n(t)\,dt \leqslant \mu_n,$$

因为 F_n 是 NBUE。因此，令 $n \to \infty$,趋于极限，并利用控制收敛定理，我们得到

$$\frac{1}{\overline{F}(x)} \int_x^\infty \overline{F}(t)\,dt \leqslant \mu.$$

因此， F 是 NBUE。至此，定理第一部分的证明完成。

现在证明 (1)。注意，利用 (5)，结论对 $r = 1.$ 成立。因此（参见 Chung [44], 第 88 页），(1) 对 $r < 1$ 也成立。
对于 $r > 1$，由定理 2.3 可知

$$\mu_{n;r} = E\left(X_n^r\right) \leqslant \mu_n^r \Gamma(r+1).$$

因此，

$$\sup_n E\left(X_n^r\right) < \infty, \forall r > 1. \tag{6}$$

因此，对于每个 $r > 1.$， $\{X_n^r\}$ 都是一致可积的。这证明了 (1)。

注： 顺便提一下，证明 (1) 还有另一种简洁优雅的方法。注意，由于 X_n 属于 NBUE 类，根据定理 2.3，它具有各阶有限矩。因此，利用 Billingsley 的定理 25.12 的推论 [45],，即可得到 (1)。

□

引理 2.5。 一个属于 *NBUE* 类的分布函数由其矩序列唯一确定。

证明。 设 F 属于 NBUE 类，均值为 $\mu.$ 。根据定理 2.3 以及 Loéve 的一个结果 [46], 第 217 页，可知 NBUE 分布由其矩序列唯一确定。

□

现在给出定理 2.4 的逆命题。

定理 2.6。 设 $F_n, n = 1, 2, 3, \cdots$ 为 *NBUE* 分布序列，使得对每个整数 $r > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty x^r dF_n(x) = \int_0^\infty x^r dF(x) \tag{7}$$

对于某个寿命分布 $F.$，则 $F_n \to F$ 依分布，且 F 属于 *NBUE* 类。

证明。 由引理 2.5 可知， F 由其矩序列唯一确定。因此，根据（7）， $\{F_n\}$的每个弱收敛子列的极限分布必然为 $F.$ 。因此，结合紧性与相对紧性，并利用 NBUE 寿命分布由其矩序列唯一确定这一事实，通过常规论证即可完成定理的证明。

□

3 NWBUE 类的结果

现在我们将注意力转向 NWBUE寿命分布族。为完整起见，我们重述以下定义。

定义 2： 设 X 为一个具有累积分布函数 F 且均值有限的非负随机变量 $\mu. X$ 。若存在一点 $t_0 \geqslant 0$，使得年龄为 t时的平均剩余寿命，（记为 $e_F(t)$）

$$e_F(t) \begin{cases} \geqslant e_F(0) & for \;\; t < t_0, \\ \leqslant e_F(0) & for \;\; t \geqslant t_0. \end{cases}$$

注意，NWBUE 类可视为 NBUE 类的非单调类比。首先，我们将证明 NBUE 类的矩界不适用于 NWBUE 类，反之亦然。其次，我们将修订并更正一个涉及递减平均剩余寿命和 NWBUE 寿命分布类的结果，最后指出并更正 Mitra 和 Basu [2] 中的一个错误。

3.1 NWBUE 分布的矩界

自然可以预期，NWBUE 分布的矩界会涉及变点 $x_0.$ 。Mitra 和 Basu [2] 已经得到了这些界限。为求完整起见，我们在下文重述他们的结果。

定理 3.1。 *(Mitra & Basu [2])* 若 F是 $NWBUE(x_0)$ $x_0 < \infty$，且均值有限μ，则

(a)

$$\mu_r = E(X^r) \leq (\geqslant) \;\; re^{\frac{x_0}{\mu}} \int_{x_0}^{\infty} x^{r-1} e^{-\frac{x}{\mu}} dx \qquad for \; r \geqslant 1 \, (< 1);$$

(b)

$$\mu_r \leq x_0^r + \mu^r \Gamma(r+1) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\left(\frac{x_0}{\mu}\right)^r}{r!} \quad for \; all \; integers \; r \geq 1;$$

(c)

$$\mu_r \leq \mu^r \Gamma(r+1) \, e^{\frac{x_0}{\mu}} \quad for \; all \;\; r \geq 1.$$

我们将给出反例，说明期望中新品劣于旧品分布的矩界不适用于 NBUE 分布，反之亦然。为此，我们构造以下例子。

例 3.1： 考虑如下定义的平均剩余寿命函数：

$$e_F(x) = \begin{cases} 5+x & 0 \le x \le 1 \\ \frac{55-x}{9} & 1 \le x \le 28 \\ 3 & x \ge 28. \end{cases}$$

这里均值 $\mu = e_F(0) = 5.$ 很容易看出，上述分布是期望中新品劣于旧品，其相应的变点为 $x_0 = 10.$ 回顾一下，平均剩余寿命函数 $e_F(x)$ 唯一确定分布函数 $F(x)$；例如参见 Berilant 等人[47]。生存函数 $F(x)$ 与平均剩余寿命函数$e_F(x)$之间的关系为

$$\overline{F}(x) = \frac{e_F(0)}{e_F(x)} \exp\left[-\int_0^x \frac{1}{e_F(u)} du\right].$$

因此，利用上述逆关系可得

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} \frac{25}{(5+x)^2} & 0 \le x \le 1 \\ \frac{75}{2\times 54^9}(55-x)^8 & 1 \le x \le 28 \\ \frac{25}{9\times 2^{10}} \exp\left[\frac{1}{3}(28-x)\right] & x \ge 28. \end{cases}$$

容易验证，F确实是一个分布函数。然后通过常规计算可得 $E_F(X^2) = 54.1210$；并且 Mitra 和 Basu [2] 给出的三个界均得到满足。但是 $\Gamma(2+1)\ \mu^2 = 2\times 5^2 = 50.$ 因此显然

$$D(t) = \mu^t \Gamma(t+1) - E\left(X^t\right) < 0, \text{ for } t = 2 > 1,$$

从而表明，期望中新品劣于旧品分布的矩界并不适用于 NBUE 分布。

例 3.2: 设 X 为尺度参数为 1、形状参数为 2 的威布尔随机变量。由于选择了这样的形状参数，X 具有递增失效率，因而属于 NBUE。根据定理 2.3，对于 $r \geqslant 1$，我们有，$\mu_r = E(X^r) \leqslant \mu^r \Gamma(r+1)) > 0.$ 特别地，对于 $r = 2$，我们有 $\mu_2 = 1$，而相应的 NBUE 矩界为 $\frac{\pi}{2} = 1.57.$。期望中新品劣于旧品分布的相应界为 $\frac{\pi^{3/2}}{4} = \underline{1.392}$。因此，这个属于 NBUE 类的随机变量不满足期望中新品劣于旧品分布的矩界。

这两个例子表明，NBUE 类关于矩的界并不会延续到相应的非单调 NWBUE 类。

3.2 与 IDMRL 类的关系

Mitra 和 Basu [2]在他们的研究中证明，在满足适当的正则性条件时，所有 BFR 分布都是 NWBUE 分布。他们在命题2.3 中错误地考察了其与 IDMRL 类的联系；为求完整，下面重述该命题。

命题2.3 （Mitra 和 Basu [2]）。若 F是 $IDMRL$（t_0），则 F是 $NWBUE$（$t_0^\star$），且 $t_0^\star \geqslant t_0$.

Mitra 和 Basu [2] 省略了证明，“因为这显而易见”。遗憾的是，认为 NWBUE 类包含所有IDMRL 分布这一观点在统计学文献中相当普遍。例如，Lai 和 Xie [48] 以及 Anis [49]均有论述。然而，下面我们给出一个并非*NWBUE*的 IDMRL 分布的例子。

例3.3： 设 G是如下定义的生存函数：

$$\overline{G}(x)=\begin{cases}\frac{4}{(x+2)^2} & 0\leqslant x\leqslant 2\\ \frac{10-x}{32} & 2\leqslant x\leqslant 4\\ \frac{3}{16}\exp\left(\frac{4-x}{3}\right) & x\geqslant 4.\end{cases}$$

其对应的平均剩余寿命函数为

$$e_G(x)=\begin{cases}x+2 & 0\leqslant x\leqslant 2\\ \frac{10-x}{2} & 2\leqslant x\leqslant 4\\ 3 & x\geqslant 4.\end{cases}$$

容易证明， G是变点为 $\tau_0=2$.的 IDMRL。 G 的均值显然为 $\mu=2$；因此，平均剩余寿命函数始终大于均值，且从不与其相交。因此， G 是 IDMRL，但不是 NWBUE。我们通过给出以下定理，修正 Mitra 和 Basu [2] 的命题2.3。

定理3.2。 设 F 是一个变点为 τ_0的递减平均剩余寿命（*DIMRL*）分布，$F^{-1}(0)\leqslant\tau_0\leqslant F^{-1}(1)$。若存在一个 $x^\star\in(\tau_0,F^{-1}(1))$使得 $e_F(x^\star)=\mu$，则 F 是变点为 $x^\star$. 的期望中新品劣于旧品（*NBWUE*）；若不存在这样的$x^\star$，则 F 是*NWUE*（*NBUE*）。

证明。 假设 F 是变点为 τ_0. 的递减平均剩余寿命分布。由于 $e_F(0)=\mu$ 且 $e_F(x)$在$(F^{-1}(0)\ \tau_0)$上递增，显然，对于每个 $x\in[F^{-1}(0)\ \tau_0)$， $e_F(x)\geqslant\mu$。由于 $e_F(x)$在$(\tau_0,F^{-1}(1))$上递减，函数 $e_F(x)-\mu$在$(\tau_0,F^{-1}(1))$上至多从‘+’变为‘-’一次。若发生这种变化，则 F是期望中新品劣于旧品；若不发生，则 F 是NWUE。
对偶的证明类似。 □

3.3 一个正确的例子

我们将通过给出一个正确的期望中新品劣于旧品分布的例子来结束本节，从而纠正 Mitra 和 Basu [2] 给出的例子。

Mitra 和 Basu [2] 给出的第一个期望中新品劣于旧品分布的例子（其例 1.4）是错误的，因为 F 不是累积分布函数。注意,_ 他们的 F 对于 $x \in \left[1, \sqrt{3}\right)$ 在 $\underline{x}$ 上递增；但生存函数（ F 本应表示生存函数）不可能是递增函数。因此，他们的 e_F（x）并不表示平均剩余寿命函数。函数若要成为有效的平均剩余寿命函数，必须满足某些必要条件。Gupta 和 Kiramni [50], 、Bhattacharjee [51] 以及 Guess 和 Proschan [52] 给出了这些必要条件。容易验证，Mitra 和 Basu [2] 给出的相应 e_F（x）不满足 Gupta 和 Kiramni [50], 所列的条件，因而无法表示在 0 处非退化的随机变量的平均剩余寿命函数，这也证实了它不是有效的平均剩余寿命函数。因此，我们将他们的例子修正如下。

Ex例 3.4： 考虑生存函数给定为 b 的寿命分布 y

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} \frac{4}{(2+x)^2} & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{2}{27}(7-x) & 1 \leqslant x < 3 \\ \frac{2x(3+x)^2}{729}\exp(3-x) & 3 \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

相应的平均剩余寿命函数为

$$e_F(x) = \begin{cases} 2+x & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{7-x}{2} & 1 \leqslant x < 3 \\ 1+\frac{3}{x} & 3 \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

¯容易验证， $F(x)$ 确实是一个生存函数；而且 $e_F(x)$ 是一个满足 Gupta 和 Kiramni [50] 中所述全部条件的平均剩余寿命函数。此外，很容易看出， F 是具有变点 $x_0 = 3.$ 的期望中新品劣于旧品分布

4 结论

在 NBUE 族的背景下，我们证明了其弱收敛性。NWBUE 分布类是 NBUE 分布类的非单调类比。尽管与冲击模型理论相关的结果能够以适当的方式从单调类推广到非单调类，但通过一个反例可以证明，矩界并不具有同样的性质。我们还纠正了一个长期存在的关于 IDMRL 类与 NWBUE 类之间关系的错误观点。

参考文献

1. Guess, F., Hollander, M. & Proschan, F. (1986年). 检验指数性与平均剩余寿命的趋势变化. 统计年鉴. 14; 1388-98. 2. Mitra, M. & Basu, S. K. (1994). 关于一个非参数寿命分布族及其对偶. 统计规划与推断杂志。39; 385-397.

3. Izadi, M., Sharafi, M. and Khaledi, B.E., (2018). 年龄更换中以平均失效时间为依据的新非参数分布类.《应用概率杂志》,55(4), 1238-1248. 4. Xiong, P., Zhuang, W., & Qiu, G. (2022). 基于记录值外熵的指数性检验. 应用统计学杂志, 49(4), 782-802. 5. Rajesh, G., Sajily, V.S. 基于相对外熵的指数性检验 . 统计论文 66, 108 (2025). https://doi.org/10.1007/s00362-025-01726-6 6. Cuparić, M., Milošević, B., & Obradović, M. (2022). 基于 V-经验拉普拉斯变换的新一致指数性检验及效率比较. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Natu- rales. Serie A. Matemáticas, 116(1), 42. 7. Cuparić, M., & Milošević, B. (2022). 针对随机删失数据的新型基于刻画的指数性检验. Test, 31(2), 461-487. 8. Ossai, E. O.; Madukaife, M. S. and Oladugba, A. V. (2022). 指数性检验综述及蒙特卡洛比较. 应用统计学杂志。49(5), 1277-1304. doi.org/10.1080/02664763.2020.1854202 9. Ebner, B. (2023). 基于平均剩余寿命函数的指数性检验再探. 非参数统计学杂志, 35(3), 601-621. 10. Proschan, F.,& Pyke, R. (1967). 单调失效率检验. 第五届伯克利概率与数理统计研讨会论文集 3, 293–312. 11. Anis, M. Z. (2013). 针对递增失效率备择的指数性检验族.统计规划与推断杂志. 143; 1409-1415. 12. Ahmad, I. A. & Mugdadi, A. R. (2004). 寿命分布的进一步矩不等式及其在假设检验中的应用：递增失效率平均、新优于已用的凸性和递减平均剩余寿命类. 统计规划与推断杂志. 120; 1-12. 13. Hollander, M. & Proschan, F. (1972). 检验新产品是否新优于已用.数理统计年刊。43; 1136-1146. 14. Hollander, M. & Proschan, F. (1975). 平均剩余寿命检验. *Biometrika*.62; 583-593. 15. Anis, M. Z. & Basu, K. (2011). 针对新优于已用的期望备择的广义 Hollander–Proschan 型检验的精确零分布. 统计与概率快报。81(11); 1733-1737. 16. Sreelakshmi, N., Kattumannil, S. K., & Asha, G. (2018). 针对递减失效率分位数和新优于已用的期望备择的基于分位数的指数性检验. Journal of the Ko- rean Statistical Society, 47(2), 185-200. 17. Klefsjö, B. (1983a). 基于总检验时间变换的老化检验. 统计学通讯：理论与方法. 12; 907-927.

18. Klefsjö, B. (1983b). 对 HNBUE 的指数性检验。*Scandinavian Journal of Statistics*。10; 67-75. 19. Bakr, M. E., Kibria, B. G., & Gadallah, A. M. (2023). 一种新的非参数假设检验及其在可靠性分析中的应用，用于拟合一些真实数据。Journal of Radiation Research and Applied Sciences, 16(4), 100724. 20. Lai, C. D. (1994). 单变量与双变量随机老化检验。*IEEE Transactions on Reliability*。43; 233–240. 21. Mohamed, N. M. (2024). 针对 NBUC 类的指数性检验及其在健康与工程领域中的应用。Frontiers in Scientific Research and Technology, 8(1). 22. Hassan, N. A., Said, M. M., Attwa, R. A. E. W., & Radwan, T. (2024). 应用拉普拉斯变换方法，检验指数性对 NBRUmgf 类。Mathematics, 12(13), 2045. https://doi.org/10.3390/math1213 23. Bakr, M. E., El-Atfy, E. S., Balogun, O. S., Tashkandy, Y. A., & Gadallah, A. M. (2024). 统计洞见：分析冲击模型、可靠性操作，并对 NBRUmgf 寿命分布类进行指数性检验。Maintenance & Reliability/Eksploatacja i Niezawodność, 26(2). 24. Balakrishnan, N., Mathew, D. C., & Kattumannil, S. K. (2022). 针对更新递增平均剩余寿命类的指数性精确检验。Statistics, 56(1), 164-181. 25. Etman, W. B. H., EL-Sagheer, R. M., Abu-Youssef, S. E., & Sadek, A. (2022). 关于 NBRULC 类的一些特征刻画及其假设检验应用。Appl. Math. Inf. Sci, 16, 139-148. 26. Etman, W. B., Abouelenein, M. F., Eliwa, M. S., El-Morshedy, M., Roushdy, N., & EL-Sagheer, R. M. (2025). 一种新颖的 U 统计量检验，用于检验指数性对 EBUCL 可靠性类，并应用于不同风险特征下的完整数据和删失数据。European Journal of Pure and Applied Mathematics, 18(3), 6376-6376. 27. Ghosh, S., & Majumder, P. (2022). 递减平均失效时间分布的一个矩不等式及其假设检验应用。Journal of Statistical Computation and Simulation, 92(14), 2875–2890. https://doi.org/10.1080/00949655.2022.2051172 28. Das, K. and Ghosh, S.(2025)一种基于分位数的方法，用于检验指数性对 DMTTF 替代假设。IEEE Transactions on Reliability, doi: 10.1109/TR.2025.3560678. 29. Das, K., & Ghosh, S. (2025). 一类基于矩不等式、用于 DMTTF 替代假设的非参数检验。Statistical Papers, 66(2), 47 https://doi.org/10.1007/s00362-025-01670-5

2045

30. Bhattacharyya, D., Khan, R. A., & Mitra, M. (2023). 完整样本和删失样本条件下针对 DMTTF 替代假设的一族新检验。Communications in Statistics-Simulation and Computation, 52(10), 4603-4620.DMTTF 31. Saha, A., & Anis, M. Z. (2023). 基于右删失数据的失效率函数趋势变化检验族。*Journal of Statistical Computation andSimulation*。94(6), 1191–1203. https://doi.org/10.1080/00949655.2023.2282740 32. Bhattacharyya, D., Ghosh, S., & Mitra, M. (2022). 基于平均失效率的非单调老化类。Communications in Statistics-Theory and Methods, 51(14), 4807-4826. 33. Na, M. H. & Lee, S. (2003). 转折点未知时的一族 IDMRL 检验。*Statistics*。37(5); 457-462. 34. Sepehrifar, M. (2025). 一种基于 U 统计量、利用寿命分布星形均衡类进行指数性检验的方法。Statistical Papers, 66(6), 1-19. 35. Anis, M. Z. & Mitra, M. (2005). 针对 NWBUE 寿命分布族的简单指数性检验。《商业与工业中的应用随机模型》.21; 45-53. 36. Ghosh, S., & Mitra, M. (2022). 广义 Hollander-Proschan 型统计量的精确分布。Communications in Statistics-Simulation and Computation, 51(9), 5051-5067. 37. Anis, M. Z. (2014). 可靠性理论中非单调随机老化概念的检验。*Statistical Papers*。55; 691–714. 38. Esary, J. D., Marshall, A. W., & Proschan, F. (1970). 风险变换在可靠性方面的一些应用。《*SIAM* 应用数学杂志》。18(4); 849-860. 39. Bryson, M. C. & Siddiqui, M. M. (1969). 关于老化的一些判据。《美国统计学会杂志》。64(328); 1472-1483. 40. Marshall, A.W. & Proschan, F. (1972). 更新理论含义下适用于更换的分布类。载于：LeCam, L., Neyman, J., Scott, E.L. (编)，第六届伯克利数学统计与概率研讨会论文集，第 I 卷。加利福尼亚大学出版社，伯克利，加利福尼亚州，395-415. 41. Basu, S. K. & Simons, G. D. (1982). IFR 分布的矩空间、应用及相关材料。技术报告。北卡罗来纳大学。42. Sengupta, D. & Deshpande, J . V. (1994). 关于两个寿命分布相对老化的一些结果。《应用概率杂志》。31 (4); 991-1003.

43. Basu, S. K. & Bhattacharjee, M. C. (1984年). 关于HNBUE寿命分布族内的弱收敛。《应用概率杂志》。 21; 654-660. 44. Chung, K. L. (1968年). 概率论课程。Harcourt, Brace and World. 纽约。45. Billingsley, P. (1986 年). 《概率与测度》， 第二版。约翰·威立父子出版公司，纽约。46. Loéve, M. (1963年). 《概率论》， 第三版。Van Nostrand。纽约。47. Berilant, J.; Broniatowski, M.; Teugels, J. L. &Vynckier, P. (1995年). 高龄时的平均剩余寿命函数：尾部估计的应用。统计规划与推断杂志。45; 21-48. 48. Lai, C. D. & Xie, M. (2006年). 可靠性中的随机老化与依赖性。施普林格。纽约。49. Anis, M. Z. (2012年). 关于IDMRL类寿命分布的一些性质。统计规划与推断杂志，142(11), 3047-3055. 50. Gupta, R.C., Kirmani, S.N.U.A. (1998年). 可靠性研究中的剩余寿命函数。载于：《可靠性前沿》；编者：A. P. Basu；S. K. Basu & S. P. Mukherjee；世界科技出版公司，新泽西州，第175–190页。51. Bhattacharjee, M. C. (1982年) 平均剩余寿命类及其若干推论。《SIAM代数与离散方法杂志》3, 56-65. 52. Guess, F. & Proschan, F. (1988 年). 平均剩余寿命：理论与应用。载于《统计学手册》。 第7卷，编者：P. R. Krishnaiah 和 C. R. Rao，爱思唯尔，阿姆斯特丹，第215-224页。