arXiv:2601.06785v1 [math.DS] 11 Jan 2026

关于有理图导向马尔可夫系统的 Julia 集的共形原像衰减指数

Tadashi Arimitsu

Abstract. 我们定义并研究有理图导向马尔可夫系统的 Julia 集的共形原像衰减指数。我们证明，该指数等于与该系统相关联的有理斜积映射的拓扑熵与上序列容量拓扑压之差 S。这里，上序列容量拓扑压是对 [Pes88]中给出的上容量拓扑压的略微推广。

Contents

1. 引言 1 1.1. 结果陈述 6 2. 预备知识 9 3. 有理斜积映射的拓扑熵 11 4. 序列容量拓扑压力 15 5. 共形原像衰减指数 20 参考文献 23

1. Introduction

首先，为了介绍有理图导向^马尔可夫系统，我们回顾一下有理半群。令 Rat 表示所有定义在 $\mathbb{C}$ 上的非恒定有理映射的集合。集合 Rat 在以其元素的复合作为二元运算时构成一个半群。Rat 的子半群称为有理半群。如果一个有理半群 G 由一个称为生成元系统 $\{g_1, \ldots, g_n\} \subset \text{Rat}$,$n \in \mathbb{N}$的有限子集生成，我们就称它是有限生成 的。我们将有限生成有理半群 G 记为 $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$。由有限个有理映射生成的动力系统研究至少可追溯至 [ZR92], , 尽管该文并未使用“有理半群”这一术语。随后， [HM96] 对半群框架下的这一主题进行了系统研究。在 [SW19], 中，Sumi 和 Watanabe 引入了有理图导向马尔可夫系统，它可以看作有理半群的一种推广。在这类新系统中，有理映射按照马尔可夫规则选取。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 37F10、37D35、37H12、37B40。

下一个例子见 [HM96, Example 1], , 它说明了将有理半群作为动力系统来研究的困难: 设 $a \in \mathbb{C}$, $|a| > 1$ 和 $G := \langle z^2, |a|^{-1}z^2 \rangle$; 那么, 该有理半群的 Julia$\widehat{\ }$集 $J(G)$ 为 $\{z \in \mathbb{C}: 1 \leq |z| \leq |a|\}$; 类似例子见 [ZR92, Example 2]。不难验证, $J(G)$ 中某点在 G 的某个元素作用下, 其像会落在 Julia 集之外。

相比之下, 有理半群的 Julia 集, 更一般地说, 有理 GDMS 的 Julia 集, 满足某种形式的逆向不变性; 见命题 2.1。非正式地说, Julia 集子集的原像仍包含于 Julia 集中。本文主要定量研究这类原像; 见第 1.1 小节。据我们所知, 这一视角尚未在有理半群或有理 GDMS 的研究中得到系统探索。

记号。 我们采用如下约定: $\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z}: n > 0\}$ 且 $\mathbb{N}_0 := \{n \in \mathbb{Z}: n \geq 0\}$。对于复平面 $\mathbb{C}$ 中的点 z, 令 $|z|$ 表示 z的模 。集合 $\mathcal{A}$ 的基数 记作 $\#\mathcal{A} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。我们用 id 表示 $\mathbb{C}$ 上的恒等映射 。对于距离为 d_Y的度量空间 Y, 我们用 $A^{Y\widehat{\ }}$表示子集 $A \subset Y$关于 d_Y的闭包 。我们总是赋予 $\mathbb{C}$ 球面距离 $d_{\widehat{\mathbb{C}}}$, 并赋予 $\mathbb{C}$ 欧几里得距离 $d_{\mathbb{C}}(z, w)$。对于乘积空间 $Y_1 \times Y_2$, 我们使用距离

$$d_{Y_1 \times Y_2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max\{d_{Y_1}(x_1, y_1), d_{Y_2}(x_2, y_2)\}.$$

有理图导向马尔可夫系统。 我们首先定义有向多重图, 它决定有理映射的哪些复合是允许的。设 V为一个有限集, 其中每个元素称为一个顶点。设 E 为一个有限集, 其中每个元素称为一条边。我们定义函数 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{t}: E \to V$, 其像 $\boldsymbol{i}(e)$和 $\boldsymbol{t}(e)$分别称为初始顶点和终端顶点。四元组$(V, E, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{t})$称为一个有向多重图。为简便起见, 我们将其简记为$(V, E) := (V, E, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{t})$, 并称之为一个图。

设 $\Gamma_e \subset$ Rat 是由有向边 $e \in E$索引的 Rat 的非空子集。三元组

$$S := (V, E, (\Gamma_e)_{e \in E})$$

称为有理图导向马尔可夫系统（有理 GDMS）。记为

$$\Gamma(S) := \bigcup_{e \in E} \Gamma_e.$$

我们称 有理 GDMS是有限生成的, 如果集合 $\Gamma(S)$是有限的。我们还记为

$$I := \{(g, e) \in \mathrm{Rat} \times E : g \in \Gamma_e\}.$$

对于 $\alpha = (g, e) \in I$, 我们记

$$g_\alpha := g, \qquad e_\alpha := e, \qquad \boldsymbol{i}(\alpha) := \boldsymbol{i}(e), \qquad \boldsymbol{t}(\alpha) := \boldsymbol{t}(e).$$

我们定义

$$X(S) := \left\{(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}: \boldsymbol{t}(\xi_n) = \boldsymbol{i}(\xi_{n+1}) \text{ for each } n \in \mathbb{N}\right\},$$

特别地, 对于 $i \in V$, 我们定义

$$X_i(S) := \{\xi \in X(S): \boldsymbol{i}(\xi_1) = i\}.$$

我们在集合 Rat 上赋予一致收敛拓扑，并在每个 $\Gamma_e \subset$ Rat 上赋予 Rat 的子空间拓扑。我们在 E 上考虑离散拓扑，并在 $X(S)$ 和 $X_i(S)$, $i \in V$ 上赋予由 $(\text{Rat} \times E)^{\mathbb{N}}$ 上的积拓扑诱导的子空间拓扑。当一个有理 GDMS S 是有限生成时， $X(S)$ 上的该拓扑可由下面给出的距离度量。我们将 $d_{X(S)}(\xi, \tau)$ 上的距离 $X(S)$ 定义为

$$d_{X(S)}(\xi, \tau) := 2^{-\min\{n \in \mathbb{N}:\ \xi_n \neq \tau_n\}}$$

对于任意不同的 $\xi, \tau \in X(S)$；若 $\xi = \tau$，则令 $d_{X(S)}(\xi, \tau) := 0$。

对于 $\xi := (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in X(S)$ 和 $n \in \mathbb{N}$，记作 $\xi|n := \xi|_n := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $X^n(S) := \{\xi|n:\ \xi \in X(S)\}$ 和 $X^*(S) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n(S)$。对于 $i \in V$和 $n \in \mathbb{N}$，记作 $X_i^n(S) := \{\xi \in X^n(S):\ \boldsymbol{i}(\xi_1) = i\}$。给定一个元素 $\xi \in X^*(S) \cup X(S)$，记 $|\xi|$ 为唯一满足以下条件的 $n \in \mathbb{N}$：若 $\xi \in X^*(S)$，则 $\xi \in X^n(S)$；若 $\xi \in X(S)$，则令 $|\xi| = \infty$。对于 $i, j \in V$，我们也记作 $X_{i,j}(S) := \{\xi \in X^*(S) : \boldsymbol{i}(e_{\xi,1}) = i,\ \boldsymbol{t}(e_{\xi,|\xi|}) = j\}$。此外，对于元素 $\xi \in X^*(S) \cup X(S)$，以及满足 $1 \leq k \leq |\xi|$ 的 $k \in \mathbb{N}$，我们用 ξ_k 或 $(g_{\xi,k}, e_{\xi,k})$ 表示 ξ 的第 k 个分量。对于 $\xi \in X^*(S)$，令

$$g_\xi := g_{\xi,|\xi|} \circ \cdots \circ g_{\xi,1} \quad \text{and} \quad e_\xi := (e_{\xi,1}, \ldots, e_{\xi,|\xi|})$$

and

$$\boldsymbol{i}(\xi) := \boldsymbol{i}(e_{\xi,1}) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{t}(\xi) := \boldsymbol{t}(e_{\xi,|\xi|}).$$

对于 $\xi \in X(S)$，我们也记作 $\boldsymbol{i}(\xi) := \boldsymbol{i}(e_{\xi,\ 1})$。接下来，我们定义集合

$$H(S) := \{g_\xi \in \text{Rat} : \xi \in X^*(S)\},$$
$$H_i(S) := \{g_\xi \in \text{Rat} : \xi \in X^*(S), \boldsymbol{i}(\xi) = i\},$$
$$H^j(S) := \{g_\xi \in \text{Rat} : \xi \in X^*(S), \boldsymbol{t}(\xi) = j\} \text{ and } H_i^j(S) := H_i(S) \cap H^j(S).$$

利用这些集合，我们引入若干对本文研究至关重要的定义。我们将 S 的***Fatou*** 集 定义为

$$F(S) := \left\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{the set } H(S) \text{ is equicontinuous at } z\right\}$$

$\widehat{}$，而 S 的***Julia*** 集 定义为其补集 $J(S) := \mathbb{C} \setminus F(S)$。同样，我们定义每个顶点 i 处的以下集合。集合

$$F_i(S) := \left\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{the set } H_i(S) \text{ is equicontinuous at } z\right\}$$

$\widehat{}$称为 S 在顶点 i 处的***Fatou*** 集 。其补集 $J_i(S) := \mathbb{C} \setminus F_i(S)$ 称为 S 在顶点 i 处的 ***Julia*** 集 。根据定义，我们注意到 $F(S) = \bigcap_{i \in V} F_i(S)$ 且 $J(S) = \bigcup_{i \in V} J_i(S)$。正如上文 HM96 的例子所示，HM96，例 1]，中，Julia 集 $J(S)$ 和 $J(G)$ 均不具备类似于完全不变性的性质。本文始终假设

$$J(S) \subset \mathbb{C}. \tag{1}$$

与有理半群不同，有理 GDMS 只考虑由图所规定的有理映射复合。因此，图的类别会影响有理

GDMS。鉴于此，我们给出一些定义。设 $\mathcal{G} := (V, E)$ 是一个有向多重图。我们将 $\mathcal{G}$ 的邻接矩阵定义为 $V \times V$ 矩阵 $\mathcal{A} := (A_{i,j})_{i,j\in V}$，其中每个元素由 $A_{i,j} := \#\{e \in E\colon \boldsymbol{i}(e) = i,\ \boldsymbol{t}(e) = j\}$, $i, j \in V$ 给出。若对于任意一对 $(i, j) \in V \times V$，都存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $(\mathcal{A}^n)_{i,j} > 0$，则称该矩阵 $\mathcal{A}$ 不可约。若一个有理 GDMS S 的图的邻接矩阵不可约，则称该有理 GDMS S 不可约。

与有理 *GDMS* 相关的有理斜积映射。接下来，我们回顾用于研究有理 GDMS 的纤维有理映射。纤维有理映射最初由 [Jon99, Jon00], 提出，作者在其中研究了它们的遍历性质。当纤维有理映射与有理半群相关联时，将前者作为拓扑与复动力系统进行研究，已证明有助于理解后者的分形几何；例如， [Sum05, SU13]。这些相关联的纤维映射称为与生成元系统相关的有理斜积映射；参见 [Sum00]。

现在，我们来形式化定义与有理 GDMS 相关的有理斜积映射$S := (V,\ E,\ (\Gamma_e)_{e\in E})$。移位映射 $\sigma\colon X(S) \circlearrowleft$ 定义为 $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\xi_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$。我们$\tilde{}$ $\hat{}$定义映射 $f\colon X(S) \times \mathbb{C} \circlearrowleft$ 如下：

$$\tilde{f}(\xi, z) := (\sigma(\xi), g_{\xi,1}(z)) \tag{2}$$

$\hat{}$ $\tilde{}$对每个 $(\xi, z) \in X(S) \times \mathbb{C}$。映射 f 称为与 S 相关的有理斜积映射$\tilde{}$。注意，映射 f 是开映射；当该系统不可约时，它还是满射。本文中，我们也将其称为相关有理斜积映射。对于 $\xi \in X(S)$，我们定义集合

$$F_\xi := \left\{z \in \widehat{\mathbb{C}}\colon \text{the set } \{g_{\xi|n}\colon n \in \mathbb{N}\} \text{ is equicontinuous at } z\right\}$$

$\hat{}$和 $J_\xi := \mathbb{C} \setminus F_\xi$。集合 F_ξ 和 J_ξ 分别称为 ξ 的非自治 ***Fatou*** 集和 ξ的非自治 ***Julia*** 集。由 (1) 中给出的假设 $J(S) \subset \mathbb{C}$，可得 $J_\xi \subset J(S) \subset \mathbb{C}$。此外，我们定义集合

$$J(\tilde{f}) := \overline{\bigcup_{\xi\in X(S)} \{\xi\} \times J_\xi}^{X(S)\times\mathbb{C}} \quad \text{and} \quad F(\tilde{f}) := (X(S) \times \widehat{\mathbb{C}}) \setminus J(\tilde{f}), \tag{3}$$

$\tilde{}$它们分别称为 f 的斜积 ***Julia*** 集和斜积 ***Fatou*** 集。$\tilde{}$ $\tilde{}$集合 $J(f)$ 在 f 下完全不变；也就是说，

$$\tilde{f}^{-1}(J(\tilde{f})) = \tilde{f}(J(\tilde{f})) = J(\tilde{f}). \tag{4}$$

对于 $i \in V$，我们还将 $i \in V$ 处的扭积 ***Julia*** 集定义为

$$J_i(\tilde{f}) := \overline{\bigcup_{\xi\in X_i(S)} \{\xi\} \times J_\xi}^{X(S)\times\mathbb{C}}. \tag{5}$$

$\hat{}$对于 $\tilde{z} := (\xi,\ z) \in X(S) \times \mathbb{C}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们定义

$$(\tilde{f}^n)'(\tilde{z}) := (g_{\xi|n})'(z).$$

我们赋予 $J(f)$ 和 $J_i(f)$ 由 $X(S)\times\mathbb{C}$ 上的乘积距离$d_{X(S)\times\mathbb{C}}$ 所诱导的子空间拓扑。除非另有说明，所有导数及其范数均相对于 $\mathbb{C}$ 上的欧几里得坐标而言。

令 $\pi_1\colon X(S)\times\mathbb{C}\to X(S)$ 和 $\pi_2\colon X(S)\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 表示坐标投影。在典范识别 $\pi_2|_{\pi_1^{-1}(\{\xi\})}\colon \pi_1^{-1}(\{\xi\})\to\widehat{\mathbb{C}}$下，每个纤维 $\pi_1^{-1}(\{\xi\})$ 都自然地识别为 $\mathbb{C}$。然而，由 (1) 可知，对于所有 $\xi\in X(S)$，都有 $J_\xi\subset J(S)\subset\mathbb{C}$，因此$J(f)\subset X(S)\times\mathbb{C}$。

按照 [Sum01，定义 2.6、定义 2.7]，，现在我们引入相关有理斜积映射的重要类别的概念。相关有理斜积映射 $f\colon X(S)\times\mathbb{C}\circlearrowleft$若满足 $J(f)\neq\varnothing$，且存在$c>0$ 和 $\lambda>1$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$，则称其为沿纤维扩张

$$\inf_{\tilde{z}\in J(\tilde{f})}|(\tilde{f}^n)'(\tilde{z})|\geq c\lambda^n. \tag{6}$$

当有理半群所关联的有理斜积映射按 [Sum00]，的意义扩张时，它是开距离扩张映射的一种特殊情形；这类映射已得到深入研究，参见 [PU10, URM22a, URM22b]。有限生成有理 GDMS 所关联的有理斜积映射沿纤维扩张时，情况也相同；参见 [AJSW24]。

对于 $g\in$Rat，令 Crit(g) $\subset\widehat{\mathbb{C}}$ 表示 g 的临界点集，即 g 不局部单射的点集。我们将 CV(g) := g(Crit(g)) 记为 g 的临界值集。特别地，若 $z\in\mathbb{C}$ 且 $g(z)\in\mathbb{C}$，则 $z\in$ Crit(g) 等价于 $g'(z)=0$ 在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的欧几里得坐标。记 $C(f):=\{(\xi,\ z)\in X(S)\times\mathbb{C}\colon z\in\text{Crit}(g_{\xi,1})\}$。现在我们定义

$$P(\tilde{f}):=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\tilde{f}^n(C(\tilde{f}))}^{X(S)\times\widehat{\mathbb{C}}}.$$

集合 $P(f)$ 称为映射 f 的后临界集。如果 $P(f)\subset F(f)$，我们称映射 f沿纤维是双曲的。对于每个顶点 $i\in V$，S在顶点 i处的后临界集定义为

$$P_i(S):=\overline{\bigcup_{h\in H^i(S)}\mathrm{CV}(h)}^{\widehat{\mathbb{C}}},$$

其中，CV(h) 表示映射 $h\in H(S)$ 的临界值集合。如果对于每个 $i\in V$，$P_i(S)\subset F_i(S)$，则称有理 GDMS S 是双曲的。

用 Aut($\mathbb{C}$) 表示 $\mathbb{C}$ 的莫比乌斯变换集合，用 Lox($\mathbb{C}$) 表示 Aut($\mathbb{C}$) 中的双曲型元素集合。若 Aut($\mathbb{C}$) 中的非恒等元素 g 有两个不动点，且其乘子的模均不等于 1，则称其为双曲型的。对于元素$g\in$Rat，记 deg(g) $\in\mathbb{N}$ 表示其次数。

命题 1.1 ([AJSW24])。设 $S:=(V,\ E,\ (\Gamma_e)_{e\in E})$ 是一个有限生成、不可约的有理 GDMS。

˜(i) 若映射 f 沿纤维扩张，则其沿纤维双曲，而且$\bigcup_{i\in V} H_i^i(S) \cap$ 自同构群$(\widehat{\mathbb{C}}) \subset$ 双曲元素$(\widehat{\mathbb{C}})$。(ii) 假设存在 $g \in \Gamma(S)$，使得 $\deg(g) \geq 2$，且$\bigcup_{i\in V} H_i^i(S) \cap$ 自同构群$(\widehat{\mathbb{C}})$ $\subset\widehat{\quad}$ ˜双曲元素 $(\mathbb{C})$。若映射 f 沿纤维双曲，则其沿纤维扩张。

注 1.2. 令 $S:=(V,\ E,\ (\Gamma_e)_{e\in E})$ 为一个有限生成的不可约有理 GDMS。˜当且仅当系统 S 是双曲的时，映射 f 沿纤维双曲。

1.1. 结果陈述。 在主定理 A 之前，我们固定一个有限生成的不可约有理 GDMS，记为 $S = (V,\ E,\ (\Gamma_e)_{e\in E})$。回顾一下，

$$I := \{(g, e) \in \mathrm{Rat} \times E : g \in \Gamma_e\}.$$

对于 $\alpha = (g,\ e) \in I$，我们记作

$$g_\alpha := g, \quad e_\alpha := e, \quad \boldsymbol{i}(\alpha) := \boldsymbol{i}(e) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{t}(\alpha) := \boldsymbol{t}(e).$$

对于 $i,\ j \in V$，我们定义

$$I_{(i)} := \{\alpha \in I : \boldsymbol{i}(\alpha) = i\}, \quad I^{(j)} := \{\alpha \in I : \boldsymbol{t}(\alpha) = j\} \text{ and } I_{(i)}^{(j)} := I_{(i)} \cap I^{(j)}.$$

定义 1.3. 设 $S = (V,\ E,\ (\Gamma_e)_{e\in E})$，并设 I 为上述生成元指标集。若一个族 $a = (a_\alpha)_{\alpha\in I} \in [0, \infty)^I$ 满足对每个 $j \in V$ 都有 $\sum_{\alpha\in I^{(j)}} a_\alpha = 1$，则称其为（逐顶点）权重。我们用 $\mathcal{W}(S)$ 表示所有权重的集合。记 $\mathcal{W}^+(S) := \{a \in \mathcal{W}(S) :\ \forall \alpha \in I(a_\alpha > 0)\}$。

令 $t \in \mathbb{R}$。我们定义 $\#V \times \#V$矩阵 $M^{(t)} = (M_{(t)\,ij})_{i,j\in V}$如下：

$$M_{ij}^{(t)} := \sum_{\alpha\in I_{(i)}^{(j)}} \deg(g_\alpha)^t$$

对于 $i, j \in V$。我们称 $M^{(t)}$ 系统 S（逆温度为t）的 有理次数矩阵 。当 $t = 1$ 时，我们简写为 $M = (M_{ij}^{(1)})_{i,j\in V}$。令

$$\rho_t = \rho(M^{(t)})$$

表示 $M^{(t)}$ 的谱半径。

令 $M^{(t)}$ 为 S 的有理次数矩阵，并令 $\rho_t > 0$ 和 $u^{(t)} = (u_i^{(t)})_{i\in V} \in (0, \infty)^V$ 为左佩龙–弗罗贝尼乌斯特征对，$(u^{(t)})^\top M^{(t)} = \rho_t (u^{(t)})^\top$。对于 $\alpha \in I$，我们定义

$$a_\alpha^{(t)} := \frac{\deg(g_\alpha)^t u_{\boldsymbol{i}(\alpha)}^{(t)}}{\rho_t u_{\boldsymbol{t}(\alpha)}^{(t)}} > 0.$$

注意，$(a_\alpha^{(t)})_{\alpha\in I}$ 属于 $\mathcal{W}^+(S)$。令 $h_{\mathrm{top}}(\tilde{f})$ 表示 $\tilde{f}|_{J(\tilde{f})}$ 的拓扑熵。

[Sum01] 的作者证明了以下事实：与生成元系统 $\{g_1, \ldots, g_n\}$ 相关的有理扭乘积映射的拓扑熵等于 $\log(\sum_{j=1}^n \deg(g_j))$；参见 [Sum01，定理 6.10]。

主定理 A（见定理 3.8）。设 $S = (V, E, (\Gamma_e)_{e\in E})$ 是一个有限生成的、不可约有理 GDMS。假设其对应的斜积 f 沿纤维扩张。那么，我们有

$$h_{\mathrm{top}}(\tilde{f}) = \log \rho(M).$$

设 Y 是一个带有距离 d_Y 的紧致度量空间，并且 $T\colon Y \to Y$ 是连续的。我们称这对 (Y, T) 为一个（拓扑）动力系统。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们定义鲍恩度量 $d_n(x, y) := \max_{0\le k<n} d_Y\left(T^k x, T^k y\right)$，以及鲍恩球 $B_n(x, \varepsilon) := \{y \in Y\colon\ d_n(x, y) < \varepsilon\}$。对于定义在 Y 上的实值函数 ϕ，记 $\mathcal{S}_n\phi(y) := \sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k y)$ 表示 $y \in Y$。令 $C(Y)$ 表示定义在 Y 上的实值连续函数集合。

在主定理 B 之前，我们固定以下类别中的一个有理 GDMS。设 $S = \tilde{(V, E, (\Gamma_e)_{e\in E})}$ 是一个有限生成、不可约的有理 GDMS。假设映射 $\tilde{f}$ 沿纤维扩张。定义映射 $\tilde{\varphi}\colon J(f) \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{\varphi}(\tilde{z}) := -\log |(\tilde{f})'(\tilde{z})|$$

对于 $\tilde{z} := (\xi, z) \in J(f)$。对于 $\phi \in C(Y)$，令 $\mathrm{P}(T, \phi)$ 表示 (T, ϕ) 的拓扑压力；例如参见 [Wal82] 。对于 $u \in \mathbb{R}$，记作 $\tilde{\varphi}_u := u\tilde{\varphi}$。此外，我们定义拓扑压函数： $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，其定义为

$$\mathcal{P}(u) := \mathrm{P}\left(\tilde{f}|_{J(\tilde{f})}, \tilde{\varphi}_u\right).$$

令 $\delta \in \mathbb{R}$ 表示 S 的鲍恩参数，即函数 $\mathcal{P}$ 的唯一零点；参见 [AJSW24]。我们记 $\tilde{\pi}_2 := \pi_2|_{J(\tilde{f})}$，并记 $\tilde{\pi}_{2,i} := \pi_2|_{J_i(\tilde{f})}$，其中 $i \in V$。当映射 f 是拓扑传递的，已知存在 δ-共形测度于 $J(f)$，如命题 2.11 所述。令 ν_δ 表示 $\tilde{\nu}_\delta$ 在 $\tilde{\pi}_2$ 下的推前测度，其定义为

$$\nu_\delta(B) := \tilde{\nu}_\delta(\tilde{\pi}_2^{-1}(B))$$

对于每个博雷尔集 $B \subset J(S)$。

现在注意到，系统 S 是双曲的，因为其相关的有理斜积映射沿纤维扩张。令 $D(z,\ r)$ 表示中心为 $z \in \mathbb{C}$ 、半径为 $r > 0$ 的欧几里得圆盘 。考虑一个半径为 $R > 0$ 的族 $(D(y_i,\ R))_{i\in V}$，使得 $y_i \in J_i(S)$ 且 $D(y_i,\ 2R)^{\mathbb{C}} \cap P_i(S) = \varnothing$ 对每个 $i \in V$ 均成立。对于 $i \in V$，我们将半径为R 的逐顶点孔 定义为

$$\mathsf{H}_i(R) := D(y_i, R) \cap J_i(S). \tag{7}$$

定义 1.4。假设 S 是双曲的。令 $R > 0$。若存在点 $y_i \in J_i(S)$，使得 $D(y_i,\ \underline{2R)^{\mathbb{C}} \cap P_i(S)} = \varnothing$ 且，则称族 $(\mathsf{H}_i(R))_{i\in V}$ 为半径为 R 的逐顶点孔族

$$\mathsf{H}_i(R) = D(y_i, R) \cap J_i(S)$$

对所有 $i \in V$。

条件 $D(y_i, 2R) \overset{\mathbb{C}}{\cap} P_i(S) = \varnothing$ 保证相关的逆分支在 $D(y_i, 2R)$ 上定义良好。在本节余下部分，我们还固定逐顶点孔 $(\mathsf{H}_i(R))_{i\in V}$。对于 $n \geq 1$，我们将 n-孔的原像 定义为

$$\mathsf{HP}_n(R) := \bigcup_{\xi\in X^n(S)} g_\xi^{-1}(\mathsf{H}_{\boldsymbol{t}(\xi)}(R)). \tag{8}$$

注意，根据命题 2.1，$\mathrm{HP}_n(R) \subset J(S)$。接下来，我们定义共形原像衰减指数 为

$$e_\delta(R) := -\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\nu_\delta(\mathsf{HP}_n(R))}{N_n},$$

其中 $N_n := \sum_{\xi\in X^n(S)} \deg(g_\xi)$，对任意 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。我们在扭积 Julia 集上定义提升空洞，

$$\widetilde{\mathsf{H}}(R) := \left(\bigcup_{i\in V} (X_i(S) \times \mathsf{H}_i(R)) \right) \cap J(\tilde{f}).$$

定义 1.5。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们将 n-提升空洞原像定义为

$$\widetilde{\mathsf{HP}}_n(R) := \tilde{f}^{-n} \left(\widetilde{\mathsf{H}}(R) \right). \tag{9}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$为方便起见，我们记 $\mathrm{HP}(R) := (\mathrm{HP}_n(R))_{n\in\mathbb{N}}$。

注 1.6。许多作者研究了开放动力系统中的逃逸率和幸存集；例如参见 [PY79、DY06、KL09、DWY12、FP12]。我们强调，我们的主要研究对象 $\mathrm{HP}_n(R)$、$\mathrm{HP}_n(R)$ 和 $e_\delta(R)$ 是针对 GDMS 情形构造的，尤其涉及以 N_n 为基准的平均/归一化。据我们所知，现有关于开放系统的文献中尚未明确讨论过与之对应的概念。

我们对 [Pes88]中定义的容量拓扑压力作了略微推广。这一概念最初旨在研究不一定是不变集或闭集的子集；另见[Pes97]。

定义 1.7 ([Pes88])。对于 $Z \subset Y$, $\phi \in C(Y)$ 和 $\varepsilon > 0$，令 $\mathcal{C}_n(Z, \varepsilon)$ 为至多可数集 $E \subset Y$ 的集合，使得

$$Z \subset \bigcup_{x\in E} B_n(x, \varepsilon).$$

对于博雷尔集 $Z \subset Y$， $\phi \in C(Y)$ 和 $\varepsilon > 0$，我们定义

$$\Lambda_n(Z, \phi, \varepsilon) := \inf_{E\in\mathcal{C}_n(Z,\varepsilon)} \sum_{x\in E} \exp\left(\sup_{y\in B_n(x,\varepsilon)} \mathcal{S}_n\phi(y) \right).$$

上容量拓扑压力和下容量拓扑压力在尺度 ε定义为

$$\overline{\mathcal{CP}}(T, \phi, Z, \varepsilon) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \Lambda_n(Z, \phi, \varepsilon) \quad \text{and} \quad \underline{\mathcal{CP}}(T, \phi, Z, \varepsilon) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \Lambda_n(Z, \phi, \varepsilon).$$

上和下容量拓扑压力定义为

$$\overline{\mathcal{CP}}(T, \phi, Z) := \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\mathcal{CP}}(T, \phi, Z, \varepsilon) \quad \text{and} \quad \underline{\mathcal{CP}}(T, \phi, Z) := \lim_{\varepsilon\to 0} \underline{\mathcal{CP}}(T, \phi, Z, \varepsilon).$$

定义 1.8. 固定 $\phi \in C(Y)$、 $\varepsilon > 0$以及一个博雷尔集序列 $\mathcal{Z} := (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 Y。定义尺度为 时的上和下顺序容量拓扑压为

$$\overline{\mathcal{CP}}(T,\phi,\mathcal{Z},\varepsilon) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log \Lambda_n(Z_n,\phi,\varepsilon) \quad \text{and} \quad \underline{\mathcal{CP}}(T,\phi,\mathcal{Z},\varepsilon) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log \Lambda_n(Z_n,\phi,\varepsilon).$$

定义上和下顺序容量拓扑压为

$$\overline{\mathcal{CP}}(T,\phi,\mathcal{Z}) := \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\mathcal{CP}}(T,\phi,\mathcal{Z},\varepsilon) \quad \text{and} \quad \underline{\mathcal{CP}}(T,\phi,\mathcal{Z}) := \lim_{\varepsilon\to 0} \underline{\mathcal{CP}}(T,\phi,\mathcal{Z},\varepsilon).$$

W称有理 GDMS S 满足逐顶点分离条件（VSC），如果 f

$$g_1^{-1}\left(J_{\boldsymbol{t}(e_1)}(S)\right) \cap g_2^{-1}\left(J_{\boldsymbol{t}(e_2)}(S)\right) = \varnothing$$

对每个 $i \in V$ 以及所有满足 $\boldsymbol{i}(e_1) = \boldsymbol{i}(e_2) = i$ 且 $g_1 \in \Gamma_{e_1}$, $g_2 \in \Gamma_{e_2}$ 满足 $(g_1, e_1) \neq (g_2, e_2)$ 的 e_1, $e_2 \in E$。在有限生成有理 GDMS 是有理半群 $G = \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$ 的特殊情形下，VSC 即 [Sum00, 引理 7.1] 中给出的分离条件。VSC 最初由 [SW19] 引入，并命名为向后分离条件。

主定理 B（参见命题 4.10、5.4 和定理 5.5）。设 $S = (V, E, (\Gamma_e)_{e\in E})$ 是有限生成、不可约的有理 GDMS。假设系统 S 满足 VSC~，且相关的斜积 f 沿纤维扩张并在 $J(f)$ 上拓扑传递~。任取一族逐顶点孔 $(\mathrm{H}_i(R))_{i\in V}$，其中 S。那么，我们有

$$e_\delta(R) = h_{\mathrm{top}}(\tilde{f}) - \overline{\mathcal{CP}}\left(\tilde{f}|_{J(\tilde{f})}, \delta\tilde{\varphi}, \widetilde{\mathsf{HP}}(R)\right) > 0.$$

2. Preliminaries

本节汇集了先前研究中的相关事实，主要涉及有理 GDMS。

命题 2.1 ([SW19], 引理 2.15, 命题 2.16)。设 $S = (V, E, (\Gamma_e)_{e\in E})$ 是一个有限生成的有理 GDMS。对于每个 $e \in E$，有

$$\bigcup_{g\in\Gamma_e} g^{-1}(J_{\boldsymbol{t}(e)}(S)) = J_{\boldsymbol{i}(e)}(S).$$

定义 2.2。对于 $\xi \in X^*(S)$，我们定义 $[\xi] := \{\tau \in X(S) : \tau|_{|\xi|} = \xi\}$，称其为 ξ 的柱集。对于两个元素 $\xi := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{|\xi|}) \in X^*(S)$ 和 $\tau \in X^*(S) \cup X(S)$，若满足 $\boldsymbol{t}(\xi) = \boldsymbol{i}(\tau)$，则它们的连接记作 $\xi\tau := (\xi_1, \cdots, \xi_{|\xi|}, \tau_1, \tau_2, \ldots) \in X^*(S) \cup X(S)$。当 $\boldsymbol{t}(\xi) = \boldsymbol{i}(\xi)$ 时，我们用 ξ^n 表示 $\xi \in X^*(S)$ 与自身连接 n 次。对于 $\xi \in X^*(S)$，令 ξ^∞ 表示 $\tau \in X(S)$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\xi^n = \tau|_{n|\xi|}$。

The 下面的命题包含了关于各种 Julia 集上动力系统的重要事实 .

命题 2.3. 设 $S := (V, E, (\Gamma_e)_{e\in E})$ 是一个有理 GDMS。

(i) 对于每个 $i \in V$ 和 $\xi \in X_i(S)$，我们有 $J_\xi \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} g_{\xi|n}^{-1}(J_{\boldsymbol{t}(\xi|n)}($ $S))$。(ii) 对于每个 $\xi \in X(S)$，我们有 $J_\xi = g_{\xi 1}^{-1}, (J_{\sigma(\xi)})$。

第一条陈述见于 [SW19，引理 2.27]。第二条陈述见于 [Sum01，引理 2.4]，并在 [SW19，引理 2.30] 中重述。

命题 2.4 ([AJSW24])。假设对于有限生成、不可约、非初等的有理 GDMS S，映射 f 沿纤维扩张。那么，映射 f 在 $J(f)$ 上拓扑传递。

命题 2.5。设 $S:=(V,\ E,\ (\Gamma_e)_{e\in E})$ 是一个有限生成、不可约的有理广义马尔可夫动力系统。那么，对每个 $i\in V$，有 $\pi_2(J_i(f))=J_i(S)$，因此 $\pi_2(J(f))=J(S)$。

下面的命题是 [Sum06, Theorem 1.18] 的特例，结合命题2.5，偶尔会用到。

命题 2.6 ([AJSW24])。设 $S:=(V,\ E,\ (\Gamma_e)_{e\in E})$ 是一个有理 GDMS。假设其关联的有理斜积映射 $f\colon X(S)\times\mathbb{C}\circlearrowleft$ 沿纤维扩张。那么，我们有 $J(f)=\bigcup_{\xi\in X(S)}\{\xi\}\times J_\xi$。

接下来的结论由命题 2.5 和 2.6 得出。

推论 2.7. 设有限生成有理 GDMS $S:=(V,E,(\Gamma_e)_{e\in E})$ 不可约，且其对应的有理斜积映射 $f\colon X(S)\times\mathbb{C}\circlearrowleft$ 沿纤维扩张。那么，对于每个 $i\in V$，都有 $J_i(S)=\bigcup_{\xi\in X_i(S)}J_\xi$。

我们使用以下形式的 Koebe 畸变定理。

命题 2.8 (定理 2.7, [ASU25])**.** 存在函数 $\boldsymbol{k}\colon[0,1)\to[1,\infty)$，使得对于任意的 $z\in\mathbb{C}$、$r>0$、$t\in[0,1)$ 以及任意单叶解析函数 $g\colon D(z,r)\to\mathbb{C}$，都有

$$\sup\left\{\left|g'(w)\right|:w\in D(z,tr)\right\}\le\boldsymbol{k}(t)\inf\left\{\left|g'(w)\right|:w\in D(z,tr)\right\}.$$

命题 2.9 (定理 2.8, [ASU25])**.** 设 $U\subset\mathbb{C}$ 是一个开集，$z\in U$，且 $g\colon U\to\mathbb{C}$ 是一个解析映射，它在某个 $R>0$ 上有解析逆映射 g_z^{-1}，该逆映射定义于 $D(g(z)\ 2R)$。那么对于每个 $0\le r\le R$，

$$D\left(z,\boldsymbol{K}^{-1}r\left|g'(z)\right|^{-1}\right)\subset g_z^{-1}\left(D(g(z),r)\right)\subset D\left(z,\boldsymbol{K}r\left|g'(z)\right|^{-1}\right).$$

这里，我们令 $\boldsymbol{K}:=\boldsymbol{k}(1/2)$。

对于动力系统 $(Y,\ T)$，令 $\mathcal{M}_{<\infty}(Y)$ 表示Y上的有限博雷尔测度空间，$\mathcal{M}(Y)$ 表示 Y 上的博雷尔概率测度空间，而 $\mathcal{M}^T(Y)$ 表示 Y上 T-不变博雷尔概率测度的集合。

在本节余下部分，为简单起见，我们假设有理 GDMS S 是有限生成且不可约的，并且映射 f沿纤维扩张。令 $C(J(f))$ 表示 $J(f)$上连续实值函数构成的巴拿赫空间，其上确界范数为 $|\cdot|_\infty$。

定义 2.10. 设 $\phi\colon J(f)\to\mathbb{R}$是一个连续函数。对于 (f,ϕ)，佩龙-弗罗贝尼乌斯算子 $\mathcal{L}_\phi\colon C(J(f))\circlearrowleft$定义为

$$\mathcal{L}_\phi\psi(\tilde{y}):=\sum_{\tilde{z}\in\tilde{f}^{-1}(\tilde{y})}e^{\phi(\tilde{z})}\psi(\tilde{z})\tag{10}$$

˜ ˜对于任意 $\psi \in C(J(f))$ 和 $\tilde{y} \in J$
(f)。

˜注意，$f|_{J(\tilde{f})}$是一个开的距离扩张映射。对于每个势函数 $\phi \in C(J(f))$，正线性算子 $\mathcal{L}_\phi$ 定义良好且有界；参见 [URM22b, 引理 13.6.1]。对偶算子 $\mathcal{L}_\phi^*\colon \mathcal{M}_{<\infty}(J(\tilde{f})) \to \mathcal{M}_{<\infty}(J(\tilde{f}))$，由 $\int \psi \mathrm{d}(\mathcal{L}_\phi^* m) := \int(\mathcal{L}_\phi \psi)\mathrm{d}m$给出，定义良好；参见 [Wal82, 定理 6.2 和 6.3]。下一个命题由 [URM22b, 定理 13.6.2、命题 13.6.14、引理 13.6.15、命题 13.6.16]推出。

˜命题 2.11. </style}对于每个 $u \in \mathbb{R}$，存在 $\mathfrak{c} > 0$和 $\tilde{\nu}_u \in \mathcal{M}_{<\infty}(J(f))$，使得
˜ ˜$\mathcal{L}^*_{\tilde{\varphi}_u} \tilde{\nu}_u = \mathfrak{c}\tilde{\nu}_u$。特别地，如果映射 f在 $J(f)$ 上拓扑传递，那么存在拓扑压函数 $\mathcal{P}$ 的唯一零点 $\delta := \delta(S)$，并且有 $\mathfrak{c} = e^{\mathcal{P}(u)}$。

以下命题是 [URM22b，推论 13.6.11]的特例。

˜ ˜**命题 2.12**。假设映射 f在 $J(f)$ 上是拓扑传递的。设 $n \in \mathbb{N}$˜ ˜，并令 A为 $J(f)$ 的一个博雷尔子集，使得 $f^n|_A$是单射。那么，我们有

$$\tilde{\nu}_\delta(\tilde{f}^n(A)) = \int_A \exp(-\mathcal{S}_n\tilde{\varphi}_\delta(\tilde{z}))\mathrm{d}\tilde{\nu}_\delta(\tilde{z}) = \int_A |(\tilde{f}^n)'(\tilde{z})|^\delta \mathrm{d}\tilde{\nu}_\delta(\tilde{z}).$$

˜特别地，对于 $n = 1$，测度 $\tilde{\nu}_\delta$ 是 $e^{-\varphi_\delta}$-共形的。

3. Topological entropy of rational skew product maps

本节的目标是证明主要定理 A。我们在本节始终作出以下基本假设。

基本假设。令 $S = (V, E, (\Gamma_e)_{e\in E})$ 为一个有限生成的、不可约的有理˜广义马尔可夫动力系统。假设相应的斜积 f 沿纤维扩张。

˜在此假设下，映射 $f|_{J(\tilde{f})}$是一个开距离扩张映射，并且是满射。我们不再重复 [Sum 00], 第 4 节和第 5 节中所发展的论证，而是利用 [PU10]中关于开距离扩张动力系统的结果。

对于 $a = (a_\alpha)_{\alpha\in I} \in \mathcal{W}^+(S)$，我们定义连续函数 $\phi_a\colon J(\tilde{f}) \to \mathbb{R}$ by

$$\phi_a(\xi, z) := \log a_{\xi_1} - \log \deg(g_{\xi_1})$$

˜ ˜对于 $(\xi, z) \in J(f)$。为简便起见，记 $\mathcal{L}_a := \mathcal{L}_{\phi_a}$。注意，对于 $\varphi \in C(J(f))$, 我们有

$$(\mathcal{L}_{\phi_a}\varphi)(\xi, z) = \sum_{\alpha\in I^{(i(\xi))}} \frac{a_\alpha}{\deg(g_\alpha)} \sum_{w\in g_\alpha^{-1}(z)} \varphi(\alpha\xi, w),$$

˜ ˜其中 $(\xi, z) \in J(f)$。由于 $\mathcal{L}_a 1 = 1$，对偶算子 $\mathcal{L}_a^*$将 $\mathcal{M}(J(f))$映入其自身。以下命题与命题 2.11的证明类似。

命题 3.1。设 $a \in \mathcal{W}^+(S)$。那么，存在一个概率测度 $\tilde{\mu}_a \in \mathcal{M}(J(\tilde{f}))$˜使得 $\mathcal{L}_a^*\tilde{\mu}_a = \tilde{\mu}_a$。此外，$\tilde{\mu}_a$是 f-不变的。

我们称 $\tilde{\mu}_a$ 为与 a相关联的平稳测度 。对于 $a \in \mathcal{W}^+(S)$，我们定义测度

$$\nu_a := (\pi_1)_* \tilde{\mu}_a$$

在 $X(S)$ 上。注意，测度 ν_a 是 σ-不变的。对于每个顶点 $i \in V$，我们定义

$$c_i := \nu_a(X_i(S))$$

并且有 $\sum_{i \in V} c_i = 1$。此外，显然，对于每个 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in X^n(S)$，可通过使用命题 3.1 得到$\nu_a([\alpha_1, \dots, \alpha_n]) = c_{t(\alpha_n)} \prod_{k=1}^n a_{\alpha_k}$。

~若 $\mathfrak{P}_1$ 和 $\mathfrak{P}_2$ 是 $J(f)$ 的两个划分，我们将它们的并定义为 $\mathfrak{P}_1 \vee \mathfrak{P}_2 := \{A \cap B\colon\ A \in \mathfrak{P}_1,\ B \in \mathfrak{P}_2\}$ 以及 $\mathfrak{P}^- := \bigvee_{n=1}^{\infty} f^{-n}(\mathfrak{P})$。

注 3.2. 注意，对每个 $\tilde{y} = (\xi,\ z) \in J(\tilde{f})$，$\#\,\tilde{f}^{-1}(\tilde{y}) = \sum_{\alpha \in I^{(i(\xi))}} \deg(g_\alpha) < \infty$。~此外，由于限制映射 $f|_{J(\tilde{f})}$ 是一个开距离扩张映射，因此可以选取一个直径足够小的有限博雷尔划分，使其在每个遍历分量上都是有限熵的单侧生成元；参见 [PU10，引理 3.5.5，定理 4.1.1]。

~**定义 3.3**。设 μ是 $J(f)$ 上的一个博雷尔概率测度。令 $\tilde{\varepsilon}$表示 $J(\tilde{f})$ 的单点划分。令 $(\mu_{\tilde{y}})_{\tilde{y} \in J(\tilde{f})}$为关于 $\tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon})$ 的概率测度，使得 $\mu_{\tilde{y}}$ 对每个 μ- 几乎处处的 $\tilde{y}$ 都支撑在 $\tilde{f}^{-1}(\{\tilde{y}\})$ 上，并且

$$\mu(A) = \int_{J(\tilde{f})} \mu_{\tilde{y}}(A) \mathrm{d}\mu(\tilde{y})$$

~对于博雷尔集 $A \subset J(f)$；参见 [PU10，定理 2.6.7 和 2.6.11]。我们将给定 $\tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon})$ 时划分 $\tilde{\varepsilon}$关于 $J(\tilde{f})$ 的条件信息函数定义为 $I_\mu(\tilde{\varepsilon} \mid \tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon}))(\tilde{z}) := -\log \mu_{\tilde{f}(\tilde{z})}(\{\tilde{z}\})$，对 μ-几乎处处的 $\tilde{z} \in J(\tilde{f})$ 成立；并将条件熵定义为 $H_\mu(\tilde{\varepsilon} \mid \tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon})) := \int_{J(\tilde{f})} I_\mu(\tilde{\varepsilon} \mid \tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon}))(\tilde{z}) \mathrm{d}\mu(\tilde{z})$；参见 [PU10，定义 2.8.3]。

引理 3.4. 设 $a := (a_\alpha)_{\alpha \in I} \in \mathcal{W}^+(S)$。那么，对于几乎处处的 $\tilde{\mu}_a$，$\tilde{z} \in J(\tilde{f})$ 以及每个 $\tilde{y} = (\eta, w)$，都有 $\in \tilde{f}^{-1}(\tilde{z})$，

$$\tilde{\mu}_{a,\tilde{z}}(\{\tilde{y}\}) = \frac{a_{\eta_1}}{\deg(g_{\eta_1})},$$

其中 $(\tilde{\mu}_{a,\tilde{z}})_{\tilde{z}}$ 表示关于划分 $\tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon})$ 的罗克林条件测度。

证明。设 $\tilde{z} = (\xi, z) \in J(\tilde{f})$。在 $J(\tilde{f})$ 上定义一个支撑于 $\tilde{f}^{-1}(\tilde{z})$ 的概率测度 $\ell_{\tilde{z}}$，如下：

$$\ell_{\tilde{z}}(B) := \sum_{\tilde{y} = (\eta, w) \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{z})} \frac{a_{\eta_1}}{\deg(g_{\eta_1})} \mathbf{1}_B(\tilde{y})$$

~对于每个博雷尔集 $B \subset J(f)$。根据 $\mathcal{L}_a$ 的定义，有 $(\mathcal{L}_a \mathbf{1}_B)(\tilde{z}) = \ell_{\tilde{z}}(B)$。由于 $\mathcal{L}_a^* \tilde{\mu}_a = \tilde{\mu}_a$，可得

$$\tilde{\mu}_a(B) = \int (\mathcal{L}_a \mathbf{1}_B)(\tilde{z}) d\tilde{\mu}_a(\tilde{z}) = \int \ell_{\tilde{z}}(B) d\tilde{\mu}_a(\tilde{z}).$$

根据 $\tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon})$ [PU10 的罗克林解 disintegration 唯一性定理 2.6.7], ，我们得出 $\tilde{\mu}_{a,\ \tilde{z}} = \ell_{\tilde{z}}$ 对于 $\tilde{\mu}_a$-几乎处处的 $\tilde{z}$成立。证明完毕。□

引理 3.5. 令 $\tilde{\varepsilon}$ 表示 $J(\tilde{f})$ 的单点划分，并令 $a:=(a_\alpha)_{\alpha\in I}\in\mathcal{W}^+(S)$。那么，我们有

$$H_{\tilde{\mu}_a}(\tilde{\varepsilon}\mid\tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon}))=\sum_{i\in V}c_i\left(-\sum_{\alpha\in I^{(i)}}a_\alpha\log a_\alpha+\sum_{\alpha\in I^{(i)}}a_\alpha\log\deg(g_\alpha)\right). \tag{11}$$

证明。根据引理 3.4，对于 $\tilde{\mu}_a$-几乎处处的 $\tilde{z}=(\xi,z)\in J(f)$，我们有

$$\tilde{\mu}_{a,\tilde{f}(\tilde{z})}(\{\tilde{z}\})=\frac{a_{\xi_1}}{\deg(g_{\xi_1})}.$$

因此，对于 μ-几乎处处的 $\tilde{z}=(\xi,z)\in J(f)$，

$$I_{\mu_a}(\tilde{\varepsilon}\mid\tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon}))(\xi,z)=-\log\mu_{\tilde{f}(\tilde{z})}(\{\tilde{z}\})=-\log a_{\xi_1}+\log\deg(g_{\xi_1}).$$

从而

$$H_{\mu_a}(\tilde{\varepsilon}\mid\tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon}))=\int_{X(S)}(-\log a_{\xi_1}+\log\deg(g_{\xi_1}))\,\mathrm{d}\nu_a(\xi).$$

接下来，由于 ν_a 的 σ-不变性，我们有

$$\nu_a(\{\boldsymbol{t}(\xi_1)=i\})=\nu_a(\{\boldsymbol{i}(\xi_2)=i\})=\nu_a(\sigma^{-1}(X_i(S)))=\nu_a(X_i(S))=c_i.$$

对每个 $i\in V$均成立。此外，对于每个 $i\in V$，给定 $\boldsymbol{t}(\xi_1)=i$ 时，ξ_1 的条件分布是概率向量 $(a_\alpha)_{\alpha\in I^{(i)}}$。因此，

$$\int_{\{\boldsymbol{t}(\xi_1)=i\}}(-\log a_{\xi_1}+\log\deg(g_{\xi_1}))\,\mathrm{d}\nu_a(\xi)=c_i\sum_{\alpha\in I^{(i)}}a_\alpha\left(-\log a_\alpha+\log\deg(g_\alpha)\right).$$

对 $i\in V$ 求和得到 (11)，证毕。 □

定义 3.6。 定义局部常值势函数 $\psi\colon X(S)\to\mathbb{R}$，使得 $\psi(\xi):=\log\deg(g_{\xi_1})$ 对 $\xi\in X(S)$ 成立。我们还令 $\psi:=\psi\circ\pi_1$。于是，对于 $\tilde{z}=(\xi,z)\in J(f)$，有 $\mathcal{S}_n\psi(\tilde{z})=\sum_{k=0}^{n-1}\psi(\sigma^k\xi)=\log\deg(g_{\xi|n})$。对于 $n\in\mathbb{N}$ 和 $t\in\mathbb{R}$，我们令

$$Z_n^{\deg}(t):=\sum_{\xi\in X^n(S)}\deg(g_\xi)^t \tag{12}$$

对于 $t\in\mathbb{R}$，记作

$$\mathrm{P}(\sigma,t\psi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Z_n^{\deg}(t).$$

特别地，回想 $N_n:=\sum_{\xi\in X^n(S)}\deg(g_\xi)=Z_n^{\deg}(1)$，我们有

$$\mathrm{P}(\sigma,\psi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n.$$

令 $\tilde{\varepsilon}$ 为 $J(f)$ 的单点划分，$\varepsilon_{X(S)}$ 为 $X(S)$ 的单点划分，且 $\hat{\varepsilon}_{\mathbb{C}}$ 为 $\mathbb{C}$ 的单点划分。令 $h_m(f)$ 表示 f 相对于 $m\in\mathcal{M}^f(J(\tilde{f}))$ 的测度论熵；例如参见 [Wal82]。

引理 3.7。令 $\mu \in \mathcal{M}^{\tilde{f}}(J(\tilde{f}))$，并设 $\nu := (\pi_1)_*\mu \in \mathcal{M}^{\sigma}(X(S))$。则有

$$h_\mu(\tilde{f}) \le h_\nu(\sigma) + \int_{X(S)} \psi \mathrm{d}\nu.$$

因此，我们得到 $h_{\mathrm{top}}(f) \le \log \rho(M)$。

证明。固定 $\mu \in \mathcal{M}^{\tilde{f}}(J(\tilde{f}))$，并令 $\nu = (\pi_1)_*\mu$。注意到 $\pi_1 \circ \tilde{f} = \sigma \circ \pi_1$。由 [LW77, 引理 3.1]，我们有 $h_\mu(f) = h_\nu(\sigma) + h_\mu(f \mid \sigma)$，其中 $h_\mu(f \mid \sigma)$ 表示 f 相对于 σ 的相对熵。我们证明不等式

$$h_\mu(\tilde{f} \mid \sigma) \le \int_{X(S)} \psi \mathrm{d}\nu.$$

由 [Sum00, 定理 6.10]，的证明中相同的论证，我们得到

$$h_\mu(\tilde{f} \mid \sigma) \le H_\mu\left(\pi_2^{-1}(\varepsilon_{\widehat{\mathbb{C}}}) \;\middle|\; \tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon}) \vee \pi_1^{-1}(\varepsilon_{X(S)})\right).$$

令 $\tilde{z} = (\xi, z) \in J(\tilde{f})$。包含 $\tilde{z}$ 的 $\tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon})$ 的划分元素为

$$E(\tilde{z}) := \left\{(\xi, w) \in J(\tilde{f}) : g_{\xi|1}(w) = g_{\xi|1}(z)\right\}.$$

由 [PU10, 定理 2.6.7]，，存在一个典范的条件测度系统

$$(\mu_E)_{E \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon}) \vee \pi_1^{-1}(\varepsilon_{X(S)})}.$$

对于 μ-几乎处处的 $\tilde{z} \in J(f)$，我们将 $\mu_{E(\tilde{z})}$ 记为支撑在划分元素 $E(\tilde{z})$ 上的条件测度。我们还记 $\pi_2^{-1}(\varepsilon_{\widehat{\mathbb{C}}})|E(\tilde{z}) := \{A \cap E(\tilde{z}) : A \in \pi_2^{-1}(\varepsilon_{\widehat{\mathbb{C}}}) \; A \cap E(\tilde{z}) \neq \varnothing\}$。由于$\pi_2^{-1}(\varepsilon_{\widehat{\mathbb{C}}})$在 $E(\tilde{z})$ 上诱导出至多包含 $\deg(g_{\xi|1})$ 个划分元素的划分，因此我们有

$$\sum_{A \in \pi_2^{-1}(\varepsilon_{\widehat{\mathbb{C}}})|E(\tilde{z})} -\mu_{E(\tilde{z})}(A) \log \mu_{E(\tilde{z})}(A) \le \log \deg(g_{\xi|1}) = \tilde{\psi}(\tilde{z})$$

对于 μ-几乎处处的 $\tilde{z} \in J(f)$。对该估计积分并利用条件熵的定义，可得

$$H_\mu\left(\pi_2^{-1}(\varepsilon_{\widehat{\mathbb{C}}}) \;\middle|\; \tilde{f}^{-1}(\tilde{\varepsilon}) \vee \pi_1^{-1}(\varepsilon_{X(S)})\right) \le \int_{J(\tilde{f})} \tilde{\psi} \mathrm{d}\mu = \int_{X(S)} \psi \mathrm{d}\nu.$$

因此，第一个断言得证。最后，由变分原理 [Wal82，定理 9.10]，

$$h_{\mathrm{top}}(\tilde{f}) \le \sup_{m \in \mathcal{M}^{\sigma}(X(S))} \left(h_m(\sigma) + \int_{X(S)} \psi \mathrm{d}m\right) = \mathrm{P}(\sigma, \psi).$$

利用定义 3.6，并仿照 [Wal82，定理 7.13(ii)], 的证明，我们得到 $\mathrm{P}(\sigma, \psi) = \log \rho(M)$。因此，我们有 $h_{\mathrm{top}}(f) \le \log \rho(M)$。□

定理 3.8。设 $t \in \mathbb{R}$ 和 $a^{(t)} := (a_\alpha^{(t)})_{\alpha \in I} \in \mathcal{W}^+(S)$。那么，我们有

$$h_{\tilde{\mu}_{a^{(t)}}}(\tilde{f}) + (t-1) \int_{J(\tilde{f})} \log \deg(g_{\xi_1}) \mathrm{d}\tilde{\mu}_{a^{(t)}}(\xi, z) = \log \rho\left(M^{(t)}\right).$$

特别地，我们有 $\mathrm{P}(\sigma, \psi) = h_{\mathrm{top}}(f) = \log \rho(M)$。

证明。令 $\mu := \tilde{\mu}_{a^{(t)}}$ 且 $a := a^{(t)}$。注意到注 3.2，我们有 $h_\mu(\tilde{f}) = \int \log J_\mu(\tilde{f})(\tilde{z}) \mathrm{d}\mu(\tilde{z})$，其中 $J_\mu(f)$ 是 f 关于 μ 的弱雅可比；参见 [PU10, 定理 2.9。7]。根据引理 3.4，对于 μ-几乎处处的 $\tilde{z} = (\xi, z) \in J(f)$，我们得到

$$\log J_\mu(\tilde{f})(\tilde{z}) = \log \rho\left(M^{(t)}\right) + \log u^{(t)}_{\boldsymbol{t}(\xi_1)} - \log u^{(t)}_{\boldsymbol{i}(\xi_1)} - (t-1)\log \deg(g_{\xi_1}).$$

对该恒等式关于 μ 积分，得到

$$\begin{aligned} h_\mu(\tilde{f}) = \log \rho\left(M^{(t)}\right) &+ \int_{J(\tilde{f})} \left(\log u^{(t)}_{\boldsymbol{t}(\xi_1)} - \log u^{(t)}_{\boldsymbol{i}(\xi_1)}\right) \mathrm{d}\mu(\xi, z) \\ &- (t-1)\int_{J(\tilde{f})} \log \deg(g_{\xi_1}) \mathrm{d}\mu(\xi, z). \end{aligned}$$

还需证明中间项等于 0。令 $\varphi := \varphi^{(t)} \colon X(S) \to \mathbb{R}$ 由 $\varphi(\zeta) := \log u^{(t)}_{\boldsymbol{i}(\zeta)}$ 给出。由于对每个 $\xi \in X(S)$，都有 $\boldsymbol{t}(\xi_1) = \boldsymbol{i}(\sigma(\xi))$，因此 $\log u^{(t)}_{\boldsymbol{t}(\xi_1)} = \varphi(\sigma(\xi))$，且 $\log u^{(t)}_{\boldsymbol{i}(\xi_1)} = \varphi(\xi)$。于是，我们有

$$\int_{J(\tilde{f})} \log u^{(t)}_{\boldsymbol{t}(\xi_1)} \mathrm{d}\mu(\xi, z) = \int_{X(S)} \varphi(\sigma(\xi)) \mathrm{d}\nu_a(\xi)$$

and

$$\int_{J(\tilde{f})} \log u^{(t)}_{\boldsymbol{i}(\xi_1)} \mathrm{d}\mu(\xi, z) = \int_{X(S)} \varphi(\xi) \mathrm{d}\nu_a(\xi).$$

由于 $\nu_a = (\pi_1)_* \mu$ 具有 σ-不变性，等式两边相同，因此中间项等于 0。由此可得

$$h_\mu(\tilde{f}) + (t-1)\int_{J(\tilde{f})} \log \deg(g_{\xi_1}) \mathrm{d}\mu(\xi, z) = \log \rho\left(M^{(t)}\right).$$

取 $t = 1$，得到 $h_{\tilde{\mu}_{a^{(1)}}}(\tilde{f}) = \log \rho(M_{(1)}) = \log \rho(M)$。由于 $h_{\mathrm{top}}(\tilde{f}) \geq h_{\tilde{\mu}_{a^{(1)}}}(\tilde{f}) = \log \rho(M)$，由变分原理 [Wal82, 定理 8.6]，，结合引理 3.7 可知 $h_{\mathrm{top}}(f) = \log \rho(M)$，从而完成证明。□

4. Sequential capacity topological pressure

本节将刻画我们设定下有理 GDMS 的序列容量拓扑压强。

基本假设。 在本节中，我们固定一个有限生成、不可约的有理 GDMS $S = (V, E, (\Gamma_e)_{e \in E})$。我们还固定 $R > 0$ 以及一族逐顶点孔 $(\mathrm{H}_i(R))_{i \in V}$。对于每个 $j \in V$，我们固定 $\kappa_j \in X_j(S)$，使得 $y_j \in J_{\kappa_j}$；参见记号 4.3。此外，我们假设相应的斜积 $f \colon X(S) \times \mathbb{C} \circlearrowleft$ 沿纤维扩张。

定义 4.1. 对于开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 和 $\xi \in X^*(S)$，令 $\mathrm{Comp}(\Omega, g_\xi)$ 表示 $g_\xi^{-1}(\Omega)$ 的连通分支集合。对于 $\xi \in X^*(S)$，设

$$\mathrm{Comp}(\xi, R) := \mathrm{Comp}(D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}, R), g_\xi).$$

对于每个 $U \in \mathrm{Comp}(\xi, R)$，令 U' 为 $g_\xi^{-1}(D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}, 2R))$ 中包含 U 的唯一连通分支，并令

$$\gamma_{\xi,U} \colon D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}, 2R) \to U'$$

是 g_ξ 的反分支，使得 $g_\xi \circ \gamma_{\xi,U}(z) = z$ 对所有 $z \in D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}, 2R)$ 均成立。对于 $\xi \in X^*(S)$ 和 $U \in \mathrm{Comp}(\xi, R)$，我们记

$$B_{\xi,U}(R) := \gamma_{\xi,U}(\mathsf{H}_{\boldsymbol{t}(\xi)}(R)) \subset J_{\boldsymbol{i}(\xi)}(S), \quad \tilde{B}_{\xi,U}(R) := \big([\xi] \times \gamma_{\xi,U}(\mathsf{H}_{\boldsymbol{t}(\xi)}(R))\big) \cap J(\tilde{f})$$

and

$$\mathrm{w}_\delta(\xi, U) := |(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|^\delta = \big|(g_\xi)'(\gamma_{\xi,U}(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}))\big|^{-\delta}.$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，我们最终定义

$$Z_n^{\mathrm{geom}}(\delta, R) := \sum_{\xi \in X^n(S)} \sum_{U \in \mathrm{Comp}(\xi, R)} \mathrm{w}_\delta(\xi, U)$$

and

$$\overline{\mathrm{P}^{\mathrm{geom}}}(\delta, R) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_n^{\mathrm{geom}}(\delta, R) \quad \text{and} \quad \underline{\mathrm{P}^{\mathrm{geom}}}(\delta, R) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_n^{\mathrm{geom}}(\delta, R).$$

注记 4.2. 注意，由命题 2.3 可知，对于 $\xi \in X^*(S)$ 和 $U \in \mathrm{Comp}(\xi, R)$，有 $\gamma_{\xi,U}(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}) \in g_\xi^{-1}(J_{\kappa_{\boldsymbol{t}(\xi)}}) = J_{\xi\kappa_{\boldsymbol{t}(\xi)}}$，因此 $\big(\xi\kappa_{\boldsymbol{t}(\xi)}, \gamma_{\xi,U}(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})\big) \in J(\tilde{f})$。

记号 4.3. 对于 $\xi \in X^*(S)$ 和 $U \in \mathrm{Comp}(\xi, R)$，我们定义

$$\tilde{z}_{\xi,U} := \big(\xi\kappa_{\boldsymbol{t}(\xi)}, \gamma_{\xi,U}(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})\big) \in J(\tilde{f})$$

and

$$\mathcal{R}_n := \{\tilde{z}_{\xi,U} : \xi \in X^n(S),\ U \in \mathrm{Comp}(\xi, R)\}.$$

Lemma 4.4. 对于 $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in X^n(S)$ 和 $U \in \mathrm{Comp}(\xi, R)$，有 $B_{\xi,U}(R) \subset \mathrm{HP}_n(R)$.

证明。设 $(\eta, z) \in B_{\xi,U}(R)$。于是，我们有 $\eta \in [\xi]$，且存在 $\tau \in X_{\boldsymbol{t}(\xi)}(S)$ 使得 $\eta = \xi\tau$。此外，由于 $z \in \gamma_{\xi,U}(\mathsf{H}_{\boldsymbol{t}(\xi)}(R))$，存在 $u \in \mathsf{H}_{\boldsymbol{t}(\xi)}(R)$ 使得 $g_\xi(z) = u$。因此，

$$\tilde{f}^n(\eta, z) = (\sigma^n(\eta), g_\xi(z)) = (\tau, u) \in X_{\boldsymbol{t}(\xi)}(S) \times \mathsf{H}_{\boldsymbol{t}(\xi)}(R).$$

由于 $(\eta, z) \in J(f)$，由 (4) 可得 $f^n(\eta, z) \in J(f)$。因此 $f^n(\eta, z) \in \mathsf{H}(R)$，这证明了 $B_{\xi,U}(R) \subset \mathrm{HP}_n(R)$，并完成了证明。□

以下引理在 [PU10 的命题 4.4 的证明中已有论述。3]

引理 4.5。 存在 $\eta_0 > 0$，使得对于任意 $\tilde{y} \in J(f)$ 和 $n \in \mathbb{N}$，集合 $f^{-n}(\tilde{y})$ 是 $(n, 2\eta_0)$-分离的；也就是说，对于任意不同的点 $\tilde{z}, \tilde{z}' \in f^{-n}(\tilde{y})$，有 $d_n(\tilde{z}, \tilde{z}') \geq 2\eta_0$。

引理 4.6. 存在 $\varepsilon_{\mathrm{rep}} > 0$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，有限集 $\mathcal{R}_n$ 在 $J(f)$ 中是 $(n, 2\varepsilon_{\mathrm{rep}})$-分离的。此外，每个 Bowen 球 $B_n(\tilde{z}, \varepsilon_{\mathrm{rep}})$ 与 $\mathcal{R}_n$ 至多相交于一点。

证明. 设 $n \in \mathbb{N}$。令 $\eta_0 > 0$ 如引理 4.5 所述，并设 $\varepsilon_{\mathrm{rep}} := \min\{1/4, \eta_0/2\}$。取 $\tilde{z}_{\xi,U} \neq \tilde{z}_{\xi',U'}$，其中 $\xi := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ $\xi' := (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n) \in X^n(S)$。假设 $\xi \neq \xi'$。令 $m := \min\{k \le n: \xi_k \neq \xi'_k\}$。于是，我们有

$$d_{X(S)}\left(\sigma^{m-1}(\xi\kappa_{\boldsymbol{t}(\xi)}),\ \sigma^{m-1}(\xi'\kappa_{\boldsymbol{t}(\xi')})\right) = \frac{1}{2}.$$

因此 $d_n(\tilde{z}_{\xi,U},\ \tilde{z}_{\xi',U'}) \ge 1/2 \ge 2\varepsilon_{\mathrm{rep}}$。

接下来，我们假设 $\xi = \xi'$。于是，$f^n(\tilde{z}_{\xi,U}) = (\kappa_{\boldsymbol{t}(\xi)},\ y_{\boldsymbol{t}(\xi)}) = f^n(\tilde{z}_{\xi,U'})$，因此二者都属于 $f^{-n}((\kappa_{\boldsymbol{t}(\xi)},\ y_{\boldsymbol{t}(\xi)})) \cap J(f)$。根据引理 4.5，该集合是 $(n,\ 2\eta_0)$-分离的，因此

$$d_n(\tilde{z}_{\xi,U}, \tilde{z}_{\xi,U'}) \ge 2\eta_0 \ge 2\varepsilon_{\mathrm{rep}}.$$

最后，令 $\tilde{z} \in J(f)$。如果 $B_n(\tilde{z},\ \varepsilon_{\mathrm{rep}})$ 与 $\mathcal{R}_n$ 相交于两个不同的点 $\tilde{z}_1,\ \tilde{z}_2 \in \mathcal{R}_n$，那么对于 d_n，我们有

$$d_n(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \le d_n(\tilde{z}_1, \tilde{z}) + d_n(\tilde{z}, \tilde{z}_2) < \varepsilon_{\mathrm{rep}} + \varepsilon_{\mathrm{rep}} = 2\varepsilon_{\mathrm{rep}},$$

这与 $\mathcal{R}_n$ 的 $(n,\ 2\varepsilon_{\mathrm{rep}})$-分离性矛盾。因此，每个 $B_n(\tilde{z},\ \varepsilon_{\mathrm{rep}})$ 与 $\mathcal{R}_n$ 至多相交于一点。证明完毕。□

引理 4.7. 存在一个常数 $K_{\mathrm{koe}} \ge 1$，使得对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in X^n(S)$, $U \in \mathrm{Comp}(\xi, R)$ 和 $\tilde{z} \in B_{\xi,U}(R)$，我们有

$$K_{\mathrm{koe}}^{-1} \mathrm{w}_\delta(\xi, U) \le \exp(\mathcal{S}_n(\delta\tilde{\varphi})(\tilde{z})) \le K_{\mathrm{koe}} \mathrm{w}_\delta(\xi, U).$$

证明。取定 $\xi \in X^n(S)$ 和 $U \in \mathrm{Comp}(\xi, R)$。任取一点 $\tilde{z} \in B_{\xi,U}(R)$，使得满足 $\pi_1(\tilde{z}) \in [\xi]$。记 $z := \pi_2(\tilde{z})$。根据 $B_{\xi,U}(R)$ 的定义，存在一点 $u \in \mathrm{H}^{\boldsymbol{t}(\xi)}(R) \subset D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}, R)$，使得 $z = \gamma_{\xi,U}(u)$。因此，我们有 $\exp(\mathcal{S}_n(\delta\tilde{\varphi})(\tilde{z})) = |(g_\xi)'(z)|^{-\delta} = |(\gamma_{\xi,U})'(u)|^\delta$。将命题 2.8 应用于 $D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}, R) \subset D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}, 2R)$，得到

$$\sup_{w \in D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}, R)} |(\gamma_{\xi,U})'(w)| \le \boldsymbol{k}(1/2) \inf_{w \in D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}, R)} |(\gamma_{\xi,U})'(w)|,$$

这意味着，对每个 $u \in D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}, R)$，都有

$$\boldsymbol{k}(1/2)^{-1} |(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})| \le |(\gamma_{\xi,U})'(u)| \le \boldsymbol{k}(1/2) |(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|.$$

两边取 $\delta > 0$ 次方，得到

$$\boldsymbol{k}(1/2)^{-\delta} |(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|^\delta \le |(\gamma_{\xi,U})'(u)|^\delta \le \boldsymbol{k}(1/2)^\delta |(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|^\delta.$$

最后，由于 $\mathrm{w}_\delta(\xi, U) = |(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|^\delta$，所需的估计便由 $K_{\mathrm{koe}} := \boldsymbol{k}(1/2)^\delta$.□ 得出。

下述引理可由 [PU10, 引理 4.4.2（预有界畸变引理）]得出。

引理 4.8. 存在 $\varepsilon_{\mathrm{bd}} > 0$和 $D_{\mathrm{bd}} \ge 1$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$和 $\tilde{z} \in J(f)$，我们有

$$\exp\left(\sup_{\tilde{w} \in B_n(\tilde{z}, \varepsilon_{\mathrm{bd}})} \mathcal{S}_n(\delta\tilde{\varphi})(\tilde{w})\right) \le D_{\mathrm{bd}} \cdot \exp(\mathcal{S}_n(\delta\tilde{\varphi})(\tilde{z})).$$

引理 4.9. 对于每个 $0<\varepsilon\le 1$，都存在 $N_{\mathrm{cov}}(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，具有以下性质：对于任意 $n\in\mathbb{N}$、$\xi\in X^n(S)$ 以及 $U\in\mathsf{Comp}(\xi,R)$，存在点 $\tilde z_{\xi,U1},\ \ldots\ldots,\ \tilde z_{\xi,U,N}\in B_{\xi,U}(R)$，其中某个 $1\le N\le N_{\mathrm{cov}}(\varepsilon)$ 使得

$$\tilde B_{\xi,U}(R)=\big([\xi]\times\gamma_{\xi,U}(\mathsf{H}_{\boldsymbol{t}(\xi)}(R))\big)\cap J(\tilde f)\subset\bigcup_{m=1}^{N}B_n(\tilde z_{\xi,U,m},\varepsilon).$$

证明。固定 $0<\varepsilon\le 1$。选取 $L=L(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ 使得 $2^{-(L+1)}<\varepsilon/2$。由于 S 是有限生成的，我们有

$$K(\varepsilon):=\max_{i\in V}\#X_i^L(S)<\infty.$$

固定 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\xi\in X^n(S)$。于是，我们有 $[\xi]\subset\bigcup_{\tau\in X^L_{\boldsymbol{t}(\xi)}(S)}[\xi\tau]$。此外，对于任意$\eta,\eta'\in[\xi\tau]$ 以及任意 $0\le k<n$，我们有

$$d_{X(S)}\left(\sigma^k(\eta),\sigma^k(\eta')\right)\le 2^{-(L+1)}<\varepsilon/2.$$

现在，我们还固定 $U\in\mathsf{Comp}(\xi,R)$。对于整数 $k\in\{0,\ldots,n\}$，我们定义一个单叶函数

$$F_k:=g_{\xi|k}\circ\gamma_{\xi,U}:D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)},2R)\to\mathbb{C},$$

其中 $g_{\xi|0}:=\mathsf{id}$。令 $h_k:=g_{\xi,n}\circ\cdots\circ g_{\xi,k+1}$，其中 $h_n:=\mathsf{id}$。

我们证明每个 F_k 在 $D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)},R)$ 上都是利普希茨的。令 $\tilde z_{\xi,U}$ 如记号 4.3 所述。于是，由 (4) 可得，对于所有 $k\in\mathbb{N}_0$，有 $\tilde f^k(\tilde z_{\xi,U})\in J(\tilde f)$。对于每个 $k\in\{0,\ldots,n-1\}$，我们有

$$|h_k'(F_k(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}))|=\left|(\tilde f^{n-k})'(\tilde f^k(\tilde z_{\xi,U}))\right|\ge c\lambda^{n-k},$$

因此

$$|F_k'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|=\frac{1}{|h_k'(F_k(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}))|}\le\frac{1}{c\lambda^{n-k}}\le\frac{1}{c\lambda}.$$

对于 $k=n$，我们有 $F_n=\mathsf{id}$，因此 $|F_n'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|=1$。因此，对于所有 $k\in\{0,\ldots,n\}$，

$$|F_k'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|\le C_0:=\max\left\{1,\frac{1}{c\lambda}\right\}.$$

根据命题 2.8，我们有

$$\sup_{u\in D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)},R)}|F_k'(u)|\le\boldsymbol{k}(1/2)\inf_{u\in D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)},R)}|F_k'(u)|\le\boldsymbol{k}(1/2)|F_k'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|\le\boldsymbol{k}(1/2)C_0$$

对于所有 $k\in\{0,\ldots,n\}$。因此，每个 F_k 在 $D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)},R)$ 上都是 $L_{\mathrm{Lip}}:=\boldsymbol{k}(1/2)C_0$-利普希茨的。

选取 $r>0$ 使得 $2L_{\mathrm{Lip}}r<\varepsilon/2$。由于每个 $\mathsf{H}_i(R)\subset D(y_i,R)$ 都是全有界的，且V是有限的，对于每个 $j\in V$，存在 $u_{j,1}$、……、$u_{j,M_j(\varepsilon)}\in\mathsf{H}_j(R)$，使得

$$\mathsf{H}_j(R)\subset\bigcup_{\ell=1}^{M_j(\varepsilon)}D(u_{j,\ell},r).$$

令 $M(\varepsilon):=\max_{j\in V}M_j(\varepsilon)$。对于 $\tau\in X^L_{\boldsymbol{t}(\xi)}(S)$ 和 $\ell\in\{1,\ldots,M_{\boldsymbol{t}(\xi)}(\varepsilon)\}$，我们定义

$$A_{\tau,\ell}:=\big([\xi\tau]\times\gamma_{\xi,U}(\mathsf{H}_{\boldsymbol{t}(\xi)}(R)\cap D(u_{\boldsymbol{t}(\xi),\ell},r))\big)\cap J(\tilde f).$$

于是，我们有 $B_{\xi,\,U}(R)\subset\bigcup_{\tau\in X^L_{\boldsymbol{t}(\xi)}(S)}\bigcup_{\ell\in\{1,\dots,M(\varepsilon)\}}A_{\tau,\,\ell}$。

如果 $A_{\tau,\,\ell}=\varnothing$，那么 $A_{\tau,\,\ell}\subset B_n(\tilde{z},\ \varepsilon)$ 对任意 $\tilde{z}\in J(f)$ 都显然成立。因此，任取一点 $\tilde{z}_{\tau,\,\ell}\in A_{\tau,\,\ell}\neq\varnothing$ 并断言 $A_{\tau,\,\ell}\subset B_n(\tilde{z}_{\tau,\,\ell},\ \varepsilon)$。取 $\tilde{z}=(\eta,\ z)$，$\tilde{z}'=(\eta',\ z')\in A_{\tau,\,\ell}$。于是 $\eta,\ \eta'\in[\xi\tau]$，因此对所有 $k\in\{0,\dots,n-1\}$，

$$d_{X(S)}\left(\sigma^k(\eta),\sigma^k(\eta')\right)<\varepsilon/2.$$

此外，由于 $z,\ z'\in\gamma_{\xi,\,U}(\mathrm{H}^{\boldsymbol{t}(\xi)}(R))$，我们有 $u:=g_\xi(z)\in\mathrm{H}^{\boldsymbol{t}(\xi)}(R)$，$v:=g_\xi(z')\in\mathrm{H}^{\boldsymbol{t}(\xi)}(R)$。另外 $u,\ v\in D(u_{\boldsymbol{t}(\xi),\,\ell},\ r)$，所以 $d_{\mathbb{C}}(u,\ v)<2r$。对于 $k\in\{0,\dots,n-1\}$，利用 $\eta,\ \eta'\in[\xi]$ 我们有

$$\pi_2(\tilde{f}^k(\tilde{z}))=g_{\xi|k}(z)=F_k(u),\qquad \pi_2(\tilde{f}^k(\tilde{z}'))=g_{\xi|k}(z')=F_k(v),$$

因此

$$d_{\mathbb{C}}\left(\pi_2(\tilde{f}^k(\tilde{z})),\pi_2(\tilde{f}^k(\tilde{z}'))\right)=d_{\mathbb{C}}(F_k(u),F_k(v))\le L_{\mathrm{Lip}}d_{\mathbb{C}}(u,v)<2L_{\mathrm{Lip}}r<\varepsilon/2.$$

因此，对所有 $0\le k<n$，

$$d_{X(S)\times\mathbb{C}}\left(\tilde{f}^k(\tilde{z}),\tilde{f}^k(\tilde{z}')\right)=\max\left\{d_{X(S)}(\sigma^k(\eta),\sigma^k(\eta')),d_{\mathbb{C}}\left(\pi_2(\tilde{f}^k(\tilde{z})),\pi_2(\tilde{f}^k(\tilde{z}'))\right)\right\}<\varepsilon,$$

所以 $d_n(\tilde{z},\ \tilde{z}')<\varepsilon$，从而证明了 $A_{\tau,\,\ell}\subset B_n(\tilde{z}_{\tau,\,\ell},\ \varepsilon)$。

最后，由于我们有 $\#X^L_{\boldsymbol{t}(\xi)}(S)\cdot M(\varepsilon)\le K(\varepsilon)M(\varepsilon)$，集合 $\tilde{B}_{\xi,\,U}(R)$ 至多可由 at most $N_{\mathrm{cov}}(\varepsilon):=K(\varepsilon)M(\varepsilon)$ 个以 $\tilde{B}_{\xi,\,U}(R)$ 中的点为中心、形如 $B_n(\cdot,\ \varepsilon)$ 的 Bowen 球覆盖。证明完毕。□

命题 4.10。设 $S=(V,\ E,\ (\Gamma_e)_{e\in E})$ 是一个有限生成、不可约的有理广义马尔可夫动力系统。假设相应的斜积 f 沿纤维扩张，且在 $J(f)$ 上拓扑传递。那么，我们有

$$\overline{\mathcal{CP}}\left(\tilde{f}|_{J(\tilde{f})},\delta\tilde{\varphi},\widetilde{\mathsf{HP}}(R)\right)=\overline{\mathrm{P}^{\mathrm{geom}}}(\delta,R).$$

证明。令 $\varepsilon_0:=\min\{\varepsilon_{\mathrm{bd}},1,\varepsilon_{\mathrm{rep}}\}$。固定 $n\in\mathbb{N}$。对于任意 $\xi\in X^n(S)$，$U\in\mathsf{Comp}(\xi,R)$，根据引理 4.9，存在 $\tilde{z}_{\xi,\,U,\,1}$，……，$\tilde{z}_{\xi,\,U,\,N}\in B_{\xi,\,U}(R)$，使得

$$\tilde{B}_{\xi,U}(R)\subset\bigcup_{m=1}^{N_{\mathrm{cov}}(\varepsilon_0)}B_n(\tilde{z}_{\xi,U,m},\varepsilon_0).$$

注意到式（9）中给出的 $\mathrm{HP}_n(R)$ 的定义，我们还可以得到

$$\widetilde{\mathsf{HP}}_n(R)\subset\bigcup_{\xi\in X^n(S)}\bigcup_{U\in\mathrm{Comp}(\xi,R)}\tilde{B}_{\xi,U}(R)$$

事实上，对于 $(\omega,z)\in\mathsf{HP}_n(R)$，我们有 $g_\omega(z)\in\mathrm{H}^{\boldsymbol{t}(\omega)}(R)\subset D(y_{\boldsymbol{t}(\omega)},R)$，因此 z 属于唯一的一个分支分量 $U\in\mathsf{Comp}(\omega,R)$，且反分支 $\gamma_{\omega,U}$ 在$D(y_{\boldsymbol{t}(\omega)},2R)$上定义良好。因此，

$$\Lambda_n(\widetilde{\mathsf{HP}}_n(R),\delta\tilde{\varphi},\varepsilon_0)\le\sum_{\xi\in X^n(S)}\sum_{U\in\mathrm{Comp}(\xi,R)}\sum_{m=1}^{N_{\mathrm{cov}}(\varepsilon_0)}\exp\left(\sup_{\tilde{y}\in B_n(\tilde{z}_{\xi,U,m},\varepsilon_0)}\mathcal{S}_n(\delta\tilde{\varphi})(\tilde{y})\right).$$

根据引理 4.8,

$$\exp\left(\sup_{\tilde{y}\in B_n(\tilde{z}_{\xi,U,m},\varepsilon_0)} \mathcal{S}_n(\delta\tilde{\varphi})(\tilde{y})\right) \le D_{\mathrm{bd}}\cdot\exp(\mathcal{S}_n(\delta\tilde{\varphi})(\tilde{z}_{\xi,U,m}));$$

由于 $\tilde{z}_{\xi,U,m}\in B_{\xi,U}(R)$，引理 4.7 得出 $\exp(\mathcal{S}_n(\delta\tilde{\varphi})(\tilde{z}_{\xi,U,m})) \le K_{\mathrm{koe}}\mathrm{w}_\delta(\xi,U)$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\Lambda_n(\widetilde{\mathsf{HP}}_n(R),\delta\tilde{\varphi},\varepsilon_0) &\le D_{\mathrm{bd}}K_{\mathrm{koe}}N_{\mathrm{cov}}(\varepsilon_0)\sum_{\xi\in X^n(S)}\sum_{U\in\mathrm{Comp}(\xi,R)}\mathrm{w}_\delta(\xi,U)\\ &= D_{\mathrm{bd}}K_{\mathrm{koe}}N_{\mathrm{cov}}(\varepsilon_0)Z_n^{\mathrm{geom}}(\delta,R).\end{aligned} \tag{13}$$

接下来，任取一个至多可数集 $E=\{\tilde{z}\}_{\tilde{z}\in E}\subset J(f)$，使得 $\mathrm{HP}_n(R)\subset\bigcup_{\tilde{z}\in E}B_n(\tilde{z},\varepsilon_0)$。由于 $\varepsilon_0\le\varepsilon_{\mathrm{rep}}$，引理 4.6 表明每个球与 $\mathcal{R}_n$ 至多相交于一点。因此，

$$\sum_{\tilde{z}\in E}\exp\left(\sup_{\tilde{y}\in B_n(\tilde{z},\varepsilon_0)}\mathcal{S}_n(\delta\tilde{\varphi})(\tilde{y})\right)\ge\sum_{\tilde{z}\in\mathcal{R}_n}\exp(\mathcal{S}_n(\delta\tilde{\varphi})(\tilde{z})).$$

注意，对于 $\xi\in X^*(S)$ 和 $U\in\mathrm{Comp}(\xi,R)$，我们有

$$\exp(\mathcal{S}_n(\delta\tilde{\varphi})(\tilde{z}_{\xi,U}))=|(g_\xi)'(\gamma_{\xi,U}(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}))|^{-\delta}=|(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|^{\delta}=\mathrm{w}_\delta(\xi,U)$$

因此

$$\sum_{\tilde{z}\in\mathcal{R}_n}\exp(\mathcal{S}_n(\delta\tilde{\varphi})(\tilde{z}))=\sum_{\xi\in X^n(S)}\sum_{U\in\mathrm{Comp}(\xi,R)}\mathrm{w}_\delta(\xi,U)=Z_n^{\mathrm{geom}}(\delta,R).$$

对所有鲍恩覆盖取下确界，得到

$$\Lambda_n(\widetilde{\mathsf{HP}}_n(R),\delta\tilde{\varphi},\varepsilon_0)\ \ge\ Z_n^{\mathrm{geom}}(\delta,R). \tag{14}$$

令 $C_{\mathrm{cap}}:=\max\{1,\ D_{\mathrm{bd}}K_{\mathrm{koe}}N_{\mathrm{cov}}(\varepsilon_0)\}$ 结合 (13) 和 (14)，我们得到

$$C_{\mathrm{cap}}^{-1}Z_n^{\mathrm{geom}}(\delta,R)\le\Lambda_n(\widetilde{\mathsf{HP}}_n(R),\delta\tilde{\varphi},\varepsilon_0)\le C_{\mathrm{cap}}Z_n^{\mathrm{geom}}(\delta,R),$$

这意味着

$$\overline{\mathcal{CP}}\left(\tilde{f},\delta\tilde{\varphi},\widetilde{\mathsf{HP}}(R),\varepsilon_0\right)=\overline{\mathrm{P}^{\mathrm{geom}}}(\delta,R).$$

对于任意 $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$，由于 $\varepsilon\le\varepsilon_{\mathrm{rep}}$，同样的下界仍然成立；而将 $N_{\mathrm{cov}}(\varepsilon_0)$ 替换为 $N_{\mathrm{cov}}(\varepsilon)$，上界也成立。因此，对所有 $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$，我们有 $\mathcal{CP}\left(\tilde{f},\delta\tilde{\varphi},\widetilde{\mathrm{HP}(R)},\varepsilon\right)=\mathrm{P}^{\mathrm{geom}}(\delta,R)$。最后，由定义 1.8 可得 $\mathcal{CP}\left(\tilde{f},\delta\tilde{\varphi},\widetilde{\mathrm{HP}(R)}\right)=\mathrm{P}^{\mathrm{geom}}(\delta,R)$。□

5. Conformal preimage decay exponent

本节中，我们始终假设上一节给出的基本假设成立。回顾 (5) 中 $J_i(f)$ 的定义，以及命题 2.12 中给出的共形测度。对于每个 $i\in V$，我们定义有限博雷尔测度 $\nu_{\delta,i}$ 在 $J_i(S)$ 上由 $\nu_{\delta,i}:=(\pi_2|_{J_i(\tilde{f})})_*(\tilde{\nu}_\delta|_{J_i(\tilde{f})})$ 给出。

命题 5.1 ([AJSW24])。 假设 S 满足 VSC，且其相关联的˜ ˆ斜积映射 $f\colon X(S)\times\mathbb{C}\circlearrowleft$ 沿纤维扩张，并且在$\sim J(f)$上拓扑传递。那么，存在常数 $C_{\mathrm{Ahl}}\geq 1$和 $r_0>0$，使得

(i) 对每个 $z\in J(S)$ 和每个 $0<r<r_0$,
$$C_{\mathrm{Ahl}}^{-1}r^{\delta}\leq \nu_{\delta}\left(D(z,r)\cap J(S)\right)\leq C_{\mathrm{Ahl}}r^{\delta};$$
(ii) 对每个 $i\in V$、每个 $z\in J_i(S)$ 和每个 $0<r<r_0$,
$$C_{\mathrm{Ahl}}^{-1}r^{\delta}\leq \nu_{\delta,i}\left(D(z,r)\cap J_i(S)\right)\leq C_{\mathrm{Ahl}}r^{\delta}.$$

˜从现在起，我们还假设 S 满足 VSC，且 f 在拓扑意义下˜于 $J(f)$ 上是传递的。

引理 5.2. 对于 $\xi\in X^*(S)$ 和 $U\in\mathrm{Comp}(\xi,R)$，令 $\gamma_{\xi,U}\colon D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)},2R)\to\mathbb{C}$ 如定义 4.1 中所述。于是，存在一个常数 $D\geq 1$，使得对于任意 $\xi\in X^*(S)$ 和$U\in\mathrm{Comp}(\xi,R)$，有
$$D^{-1}|(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|d_{\mathbb{C}}(u,v)\leq d_{\mathbb{C}}(\gamma_{\xi,U}(u),\gamma_{\xi,U}(v))\leq D|(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|d_{\mathbb{C}}(u,v)$$
对于任意 $u,v\in D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)},R)$。

证明。 固定 $\xi\in X^*(S)$ 和 $U\in\mathrm{Comp}(\xi,R)$。令
$$F(z):=\frac{\gamma_{\xi,U}(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}+2Rz)-\gamma_{\xi,U}(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})}{2R(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})}\qquad(|z|<1).$$
于是， F 属于 Schlicht 类 $\mathfrak{S}$。令 $K:=D(0,1/2)$, 并定义
$$Q(F,u,v):=\begin{cases}\dfrac{d_{\mathbb{C}}(F(u),F(v))}{d_{\mathbb{C}}(u,v)}, & u\neq v,\\ |F'(u)|, & u=v.\end{cases}$$
由于 Schlicht 类 $\mathfrak{S}$ 在局部一致收敛拓扑下是紧的，且Q 在 $\mathfrak{S}\times K\times K$上连续且为正，因此存在 $0<m\leq M<\infty$，使得$m\leq Q(F,u,v)\leq M$对所有 $F\in\mathfrak{S}$和 $u,v\in K$均成立。令 $D:=\max\{M,m^{-1}\}$，即可完成证明。□

引理 5.3。 存在常数 $C_1,C_2>0$，使得对于任意满足 $\boldsymbol{t}(\xi)=j$的 $\xi\in X^*(S)$，以及任意 $U\in\mathrm{Comp}(\xi,R)$，均有
$$C_1\mathrm{w}_{\delta}(\xi,U)\leq\nu_{\delta}\left(\gamma_{\xi,U}(\mathsf{H}_j(R))\right)\leq C_2\mathrm{w}_{\delta}(\xi,U).$$

证明。 固定 $\xi\in X^*(S)$ 和 $U\in\mathrm{Comp}(\xi,R)$。注意到 V是有限的，由命题 5.1 和[Mat95 定理 6.9], 可知，存在常数 $C_{\mathrm{H}}\geq 1$，使得
$$C_{\mathrm{H}}^{-1}\mathcal{H}^{\delta}(U)\leq\nu_{\delta}(U)\leq C_{\mathrm{H}}\mathcal{H}^{\delta}(U)\tag{15}$$
对于所有博雷尔子集 $U\subset J(S)$；并且
$$C_{\mathrm{H}}^{-1}\mathcal{H}^{\delta}(U)\leq\nu_{\delta,i}(U)\leq C_{\mathrm{H}}\mathcal{H}^{\delta}(U)\tag{16}$$
对于所有博雷尔子集 $U\subset J_i(S)$ 和 $i\in V$。

设 $r_0 > 0$ 和 $C_{\mathrm{Ahl}} \geq 1$ 如命题 5.1 所述，并令 $r_* := \min\{R, r_0/2\} > 0$。那么对于每个 $i \in V$，我们有

$$\nu_{\delta,i}\left(\mathsf{H}_i(R)\right) \;\geq\; \nu_{\delta,i}\left(D(y_i, r_*) \cap J_i(S)\right) \;\geq\; C_{\mathrm{Ahl}}^{-1} r_*^{\delta}.$$

将此与 (16) 以及 $\nu_{\delta,i}(\mathsf{H}_i(R)) \leq \nu_{\delta,i}(J_i(S)) < \infty$ 结合可得

$$C_{\mathrm{H}}^{-1} C_{\mathrm{Ahl}}^{-1} r_*^{\delta} \leq \mathcal{H}^{\delta}(\mathsf{H}_i(R)) \leq C_{\mathrm{H}}$$

对每个 $i \in V$。由引理 5.2，存在 $D \geq 1$，使得对所有 $u, v \in D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)}, R)$，

$$D^{-1}|(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})| d_{\mathbb{C}}(u,v) \leq d_{\mathbb{C}}(\gamma_{\xi,U}(u), \gamma_{\xi,U}(v)) \leq D|(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})| d_{\mathbb{C}}(u,v).$$

因此，由于 $\gamma_{\xi,U}|_{D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)},R)}$ 和 $(\gamma_{\xi,U})^{-1}|_{\gamma_{\xi,U}(D(y_{\boldsymbol{t}(\xi)},R))}$ 都是利普希茨的，我们有

$$D^{-\delta}|(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|^{\delta} \mathcal{H}^{\delta}(\mathsf{H}_{\boldsymbol{t}(\xi)}(R)) \leq \mathcal{H}^{\delta}(\gamma_{\xi,U}(\mathsf{H}_{\boldsymbol{t}(\xi)}(R))) \leq D^{\delta}|(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|^{\delta} \mathcal{H}^{\delta}(\mathsf{H}_{\boldsymbol{t}(\xi)}(R)).$$

利用 (15)，我们得到常数 $C_1, C_2 > 0$，使得

$$C_1 |(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|^{\delta} \leq \nu_{\delta}(\gamma_{\xi,U}(\mathsf{H}_{\boldsymbol{t}(\xi)}(R))) \leq C_2 |(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|^{\delta}.$$

最后，根据定义，$\mathrm{w}_{\delta}(\xi, U) = |(\gamma_{\xi,U})'(y_{\boldsymbol{t}(\xi)})|^{\delta}$。证明完毕。 □

命题 5.4. 设 $\lambda > 1$ 如 (6) 中所述。那么

$$\overline{\mathrm{P}^{\mathrm{geom}}}(\delta, R) \leq \mathrm{P}(\sigma, \psi) \;-\; \delta \log \lambda \;<\; \mathrm{P}(\sigma, \psi).$$

证明. 由推论 2.7 和 (7) 可知，对每个 $j \in V$，存在 $\eta \in X_j(S)$ 使得 $y_j \in J_\eta$。固定 $j \in V$，$\xi \in X^n(S)$，满足 $\boldsymbol{t}(\xi) = j$ 且 $U \in \mathsf{Comp}(\xi, R)$。于是，由命题 2.3 (ii) 可得 $\gamma_{\xi,U}(y_j) \in g_\xi^{-1}(J_\eta) = J_{\xi\eta}$，从而 $(\xi\eta, \gamma_{\xi,U}(y_j)) \in J(\tilde{f})$。由于映射 $\tilde{f}$ 沿纤维扩张，我们有

$$|(g_\xi)'(\gamma_{\xi,U}(y_j))| = |(\tilde{f}^n)'(\xi\eta, \gamma_{\xi,U}(y_j))| \;\geq\; c\lambda^n.$$

因此，

$$\mathrm{w}_{\delta}(\xi, U) = |(g_\xi)'(\gamma_{\xi,U}(y_j))|^{-\delta} \leq c^{-\delta} \lambda^{-\delta n}.$$

由于 $\#\,\mathsf{Comp}(\xi, R) = \deg(g_\xi)$，我们得到

$$Z_n^{\mathrm{geom}}(\delta, R) = \sum_{\xi \in X^n(S)} \sum_{U \in \mathrm{Comp}(\xi,R)} \mathrm{w}_{\delta}(\xi, U) \leq \sum_{\xi \in X^n(S)} \deg(g_\xi) c^{-\delta} \lambda^{-\delta n} = c^{-\delta} \lambda^{-\delta n} N_n,$$

这意味着 $\mathrm{P}^{\mathrm{geom}}(\delta, R) \leq \mathrm{P}(\sigma, \psi) - \delta \log \lambda < \mathrm{P}(\sigma, \psi)$，并完成证明。 □

定理 5.5。 设 $S = (V, E, (\Gamma_e)_{e \in E})$ 是一个有限生成的不可约有理 GDMS。~假设 S 满足 VSC，且映射 f 沿纤维扩张，并在 $J(f)$ 上拓扑传递。任取一族逐顶点孔 $(\mathsf{H}_i(R))_{i \in V}$，其中 S。那么，

$$e_{\delta}(R) = \mathrm{P}(\sigma, \psi) - \overline{\mathrm{P}^{\mathrm{geom}}}(\delta, R) > 0.$$

证明。对每个 $i \in V$，令

$$\mathcal{B}_{n,i}(R) := \bigcup_{\xi \in X_i^n(S)} \bigcup_{U \in \mathrm{Comp}(\xi,R)} B_{\xi,U}(R).$$

那么，我们有 $\mathsf{HP}_n(R) = \bigcup_{i\in V} \mathcal{B}_{n,\ i}(R)$。由迭代VSC可得

$$\nu_\delta(\mathcal{B}_{n,i}(R)) = \sum_{\xi \in X_i^n(S)} \sum_{U \in \mathrm{Comp}(\xi,R)} \nu_\delta(B_{\xi,U}(R)).$$

由于 $\nu_\delta(\mathsf{HP}_n(R)) \geq \max_{i\in V} \nu_\delta(\mathcal{B}_{n,\ i}(R))$，且

$$\max_{i\in V} \nu_\delta\left(\mathcal{B}_{n,i}(R)\right) \geq \frac{1}{\#V} \sum_{i\in V} \nu_\delta\left(\mathcal{B}_{n,i}(R)\right),$$

我们有

$$\frac{1}{\#V} \sum_{i\in V} \nu_\delta(\mathcal{B}_{n,i}(R)) \leq \nu_\delta(\mathsf{HP}_n(R)).$$

因此，我们有

$$\frac{1}{\#V} \sum_{i\in V} \nu_\delta(\mathcal{B}_{n,i}(R)) \leq \nu_\delta(\mathsf{HP}_n(R)) \leq \sum_{i\in V} \nu_\delta(\mathcal{B}_{n,i}(R)).$$

因此，

$$\frac{1}{\#V} \sum_{\xi \in X^n(S)} \sum_{U \in \mathrm{Comp}(\xi,R)} \nu_\delta(B_{\xi,U}(R)) \leq \nu_\delta(\mathsf{HP}_n(R)) \leq \sum_{\xi \in X^n(S)} \sum_{U \in \mathrm{Comp}(\xi,R)} \nu_\delta(B_{\xi,U}(R)).$$

应用引理 5.3 可得常数 c_*，$C_* > 0$，使得

$$c_* Z_n^{\mathrm{geom}}(\delta, R) \leq \nu_\delta(\mathsf{HP}_n(R)) \leq C_* Z_n^{\mathrm{geom}}(\delta, R)$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$。因此，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \nu_\delta(\mathsf{HP}_n(R)) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_n^{\mathrm{geom}}(\delta, R) = \overline{\mathrm{P}^{\mathrm{geom}}}(\delta, R).$$

从而

$$e_\delta(R) = -\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\nu_\delta(\mathsf{HP}_n(R))}{N_n} = -\overline{\mathrm{P}^{\mathrm{geom}}}(\delta, R) + \mathrm{P}(\sigma, \psi).$$

结合命题 5.4，即完成证明。 □

References

[AJSW24] Tadashi Arimitsu、Johannes Jaerisch、Hiroki Sumi 和 Takayuki Watanabe。关于有理图导向马尔可夫系统的 Bowen公式，2024 年。[ASU25] Jason Atnip、Hiroki Sumi 和 Mariusz Urba ´nski。《半双曲有理函数半群的动力学与几何》。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，307(1552):v+192，2025 年。[DWY12] Mark F. Demers、Paul Wright 和 Lai-Sang Young。《开放系统中的熵、李雅普诺夫指数与逃逸率》。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*，32(4):1270–1301，2012 年。[DY06] Mark F. Demers 和 Lai-Sang Young。《逃逸率与条件不变测度》。 *Nonlin-earity*，19(2):377–397，2006 年。[FP12] Andrew Ferguson 和 Mark Pollicott。《吉布斯测度的逃逸率》。 *Ergodic Theory Dynam.Systems*，32(3):961–988，2012 年。

[HM96] A. Hinkkanen 和 G. J. Martin。《有理函数半群的动力学 I》。 *Proc. LondonMath. Soc. (3)*, 73(2):358–384，1996 年。[Jon99] Mattias Jonsson。《C^2 上多项式斜积的动力学》。 *Math. Ann.*, 314(3):403–447，1999 年。[Jon00] Mattias Jonsson。《纤维化有理映射的遍历性质》。 *Ark. Mat.*, 38(2):281–317，2000 年。[KL09] Gerhard Keller 和 Carlangelo Liverani。《稀有事件、逃逸率与准平稳性：若干精确公式》。 *J. Stat. Phys.*，135(3):519–534，2009 年。[LW77] Fran¸cois Ledrappier 和 Peter Walters。《连续变换的相对变分原理》。 *J. London Math. Soc. (2)*, 16(3):568–576，1977 年。[Mat95] Pertti Mattila。 *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*，第 44 卷， *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*。剑桥大学出版社，剑桥，1995 年。《分形与可求长性》。[Pes88] Ya。 ˜B. Pesin。《动力系统不变集的类维数特征》。 *Uspekhi Mat.Nauk*，43(4(262)):95–128，255，1988 年。[Pes97] Yakov B. Pesin。 *Dimension theory in dynamical systems*。芝加哥数学讲座。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，1997 年。《当代观点与应用》。[PU10] Feliks Przytycki 和 Mariusz Urba´nski。 *Conformal fractals: ergodic theory methods*，第 371 卷，*London Mathematical Society Lecture Note Series*。剑桥大学出版社，剑桥，2010 年。[PY79] Giulio Pianigiani 和 James A. Yorke。《几乎不变集上的扩张映射：衰减与混沌》。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，252:351–366，1979 年。[SU13] Hiroki Sumi 和 Mariusz Urba´nski。《扩张有理函数半群的横截族》。 *Adv.Math.*，234:697–734，2013 年。[Sum00] Hiroki Sumi。《与有限生成有理函数半群相关的斜积映射》。 *Nonlinearity*，13(4):995–1019，2000 年。[Sum01] Hiroki Sumi。《次双曲与半双曲有理函数半群及斜积的动力学》。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*，21(2):563–603，2001 年。[Sum05] Hiroki Sumi。《扩张有理函数半群的 Julia 集维数》。 *Kodai Math. J.*，28(2):390–422，2005 年。[Sum06] Hiroki Sumi。《半双曲纤维化有理映射与有理半群》。 *Ergodic Theory Dy-nam. Systems*, 26(3):893–922，2006 年。[SW19] Hiroki Sumi 和 Takayuki Watanabe。《非独立同分布随机全纯动力系统与趋于无穷大的概率》。 *Nonlinearity*，32(10):3742–3771，2019 年。[URM22a] Mariusz Urba´nski、Mario Roy 和 Sara Munday。 *Non-invertible dynamical systems. Vol. 1. Ergodictheory—finite and infinite, thermodynamic formalism, symbolic dynamics and distance expandingmaps*，第 69.1 卷， *De Gruyter Expositions in Mathematics*。De Gruyter，柏林， [2022] ©2022。[URM22b] Mariusz Urba´nski、Mario Roy 和 Sara Munday。 *Non-invertible dynamical systems. Vol. 2. Finer thermodynamic formalism—distance expanding maps and countable state subshifts of finite type, conformal GDMSs, Lasota-Yorke maps and fractal geometry*，第 69.2 卷， *De Gruyter Expositions in Mathematics*。De Gruyter，柏林， [2022] ©2022。[Wal82] Peter Walters。 *An introduction to ergodic theory*，第 79 卷， *Graduate Texts in Mathematics*。Springer-Verlag，纽约—柏林，1982 年。[ZR92] Wei Min Zhou 和 Fu Yao Ren。《由一组有理函数构成的动力系统》。载于 *Current topics in analytic function theory*，第 437–449 页。World Sci. Publ.，美国新泽西州里弗埃奇，1992 年。

(Tadashi Arimitsu) Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku,Nagoya, 464-8602, JAPAN*Email address*: m21002u@math.名古屋-u.ac.jp