arXiv:2601.06812v1 [math.CA] 11 Jan 2026

矩求和方法与非齐次卡尔曼类

AVNER KIRO

摘要。我们通过刻画广义拉普拉斯变换作用于各种光滑函数空间所得的像，拓展了 F. Nevanlinna 和 Beurling 的经典定理。为此，我们引入并分析了新型非齐次卡尔曼类，它们推广了传统的齐次定义。通过这一刻画，我们得以推导出在给定函数类中应用矩求和方法的充要条件。此外，我们还拓展了 Écalle 的拟解析延拓概念，并将这些结果应用于多重可求和性理论和欧拉型微分方程。

目录

1. 引言 2 1.1. 广义拉普拉斯变换的光滑性 3 1.2. 主要结果 4 1.3. F. Nevanlinna 和 Beurling 定理 7 2. 基本概念 8 2.1. 记号 8 2.2. 可容许权和序列 $\widehat{\gamma}$ 8
2.3. 函数 K 和 E 9 2.4. 卡尔曼型类 10 3. 非齐次卡尔曼类 12 3.1. 非齐次卡尔曼类与类 $B(M,N;\ I)$ 的等价性 12 3.2. 非齐次卡尔曼类的拟解析性 14 4. 包含关系 $\mathcal{L}_\gamma A(M,\gamma;\ I)\ \subseteq B_\eta(M\gamma,\widehat{\gamma};\ I)$ 16 4.1. K 16的导数估计 4.2. 非解析情形下包含关系 $\mathcal{L}_\gamma A\,(M,\gamma,I)\ \subseteq B_\eta\,(M\gamma,\widehat{\gamma};\ I)$ 的证明 18 4.3. 解析情形下包含关系 $\mathcal{L}_\gamma A\,(M,\gamma;I)\ \subseteq D\,(M,\gamma;\ I)$ 19 5. 非齐次卡尔曼类中的几乎全纯延拓 20 5.1. 类 $B(\widehat{\gamma},M;\ I)$ 中函数的几乎全纯延拓：非解析情形 20 5.2. 类 $B(M,\widehat{\gamma};I)$ 中函数的几乎全纯延拓：解析情形 27 5.3. 类 $B^{\pm}(\widehat{\gamma},M;\ J)$ 28 6. 广义博雷尔变换的估计 30 6.1. 非解析情形下广义博雷尔变换的估计 30 6.2. 解析情形下广义博雷尔变换的估计 33 6.3. $B^{+}\,(M\gamma,\widehat{\gamma},I)$ 中广义博雷尔变换的估计 34 7. 一些应用 36 7.1. 到卡尔曼类的双射。36 7.2. 卡尔曼类中的多重可求和性 36 7.3. 重生理论 37

7.4. 欧拉型微分方程 附录A. 关于函数 K 和 E 38
的引理 参考文献 39
41

1. 引言

矩求和方法（也称为广义博雷尔-拉普拉斯求和）将函数与形式幂级数相关联。它们推广了收敛幂级数这一经典概念。按照 [21], ，我们简要回顾与这些方法相关的一些基本概念。设 $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ 是一个快速增长的正数序列，且 $\lim_{n\to\infty}\gamma_n^{1/n}=\infty$。假设它是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的函数 K 的矩序列，也就是说

$$\int_0^\infty t^n K(t)dt=\gamma_{n+1},\quad \forall n\in\mathbb{Z}_+.$$

~设 $f\sim\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ 是一个形式幂级数。假设级数 $F(t)=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{\gamma_{n+1}}t^n$ 在 $0\leq t\leq t_0$ 上收敛。若它可以解析延拓到整个正半轴 $\mathbb{R}_+$，使得

$$f(x)=\int_0^\infty F(xt)K(t)dt,$$

~那么称 f 可（γ）–求和为函数 f。我们分别将广义博雷尔变换和拉普拉斯变换定义为 $\mathcal{B}_\gamma f=F$ 和 $\mathcal{L}_\gamma F=f$。如果对于每个 $f\in D$，$\mathcal{L}_\gamma\mathcal{B}_\gamma f=f$，则称（$\gamma$）–求和在 C^∞ 光滑函数类 D 中适用。

广义博雷尔变换 $\mathcal{B}_\gamma$ 仅取决于 f 在原点处的泰勒系数。若要使（γ）–求和适用于 D 光滑函数类，博雷尔映射

$$f\mapsto\left(f^{(n)}(0)\right)_{n\geq 0}$$

在 D 中必须是单射。为此，我们引入以下定义。

定义1.1。设 I 是一个区间，且 $D\subseteq C^\infty(I)$。如果对于任意满足下述条件的 $f_1,\ f_2\in D$，我们称类 D 为拟解析：

$$f_1^{(n)}(c)=f_2^{(n)}(c)$$

对于某个固定点 $c\in I$，对所有 $n\in\mathbb{Z}_+$，都有 $f_1\equiv f_2$ 属于 I。

整函数

$$E(z):=\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{\gamma_{n+1}}$$

在矩求和理论中起着关键作用。注意，E 是柯西核 $x\mapsto\frac{1}{1-x}$ 的广义博雷尔变换 $\mathcal{B}_\gamma$，也是形式幂级数环（按项加法和乘法）中的恒等元。例如，在经典的博雷尔–拉普拉斯求和中，$\gamma_{n+1}=n!$，$K(t)=e^{-t}$，且$E(z)=e^z$。在 Beurling 考虑的对数情形 $\gamma_n=\log^n(n+e)$ 中，我们有

$$\log E(t)\sim-\log K(t)\sim\frac{e^t}{t},\quad t\to\infty.$$

我们强调，E的增长与 K的衰减之间的这种匹配至关重要，并将在下文中发挥重要作用。

此后，我们将函数限制为满足如下条件的 F： $\mathcal{L}_\gamma F \in C^\infty$ 在 0 的某个右邻域内。对于后文所施加的正则性条件， $\mathcal{L}_\gamma F$ 在区间 $[0,1)$上为 C^∞函数的充要条件是，对于任意 $\eta > 1$ 和 $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\left|F^{(n)}(x)\right| = O\left(E\left(\eta x\right)\right), \quad \text{as} \quad x \to \infty. \tag{1.1}$$

详情请参见第 4.2 节和第 6.1 节。

本文旨在描述光滑函数类在 $\mathcal{L}_\gamma$ 下的像。这些类是通过限制上述估计中的隐含常数而得到的。

定义 1.2. 设 γ 与前文相同， $M = (M_n)_{n\geq 0}$ 为一个正数序列，且 $I = [0,a)$（其中$0 < a \leq +\infty$）。类 $A(M,\gamma;\ I)$ 由所有满足以下条件的函数 $F \in C^\infty[0,\infty)$ 组成：对于任意 $\eta > 1$，存在常数 $C = C(\eta, F) > 0$，使得

$$\left|F^{(n)}(x)\right| \leq C^{n+1} M_n E\left(\eta \cdot \frac{x}{a}\right).$$

我们还定义

$$A\left(M,\gamma;0^+\right) = \bigcap_{a>0} A\left(M,\gamma;[0,a)\right)$$

注意，根据 Denjoy–Carleman定理 [10], ，若 M 为对数凸序列，则 $A(M,\gamma;I)$ 是拟解析的当且仅当

$$\sum_{n\geq 0} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty.$$

对于特定的取值 $M_n = n!$，类 $A(M,\ \gamma;\ I)$ 中的函数在某个半条带$\{z$内解析：$\operatorname{dist}(z,\ \mathbb{R}_+) \leq \varepsilon\}$.

利用类 $A(M,\ \gamma;\ I)$，我们扩展了 (γ)–可求和性的概念。也就是说，若存在拟解析的 $A(M,\ \gamma;I)$，使得 $\mathcal{L}_\gamma D$ 中的所有函数都是 $A(M,\ \gamma;\ I)$ 中函数在原点右侧某邻域上的限制，则它在类 $D \subseteq C^\infty$ 中适用。这扩展了 Écalle 的拟解析延拓概念 [18]。

1.1. **广义拉普拉斯变换的光滑性**。广义拉普拉斯变换

$$f(x) = \left(\mathcal{L}_\gamma F\right)(x) = \int_0^\infty F(xt)K(t)dt,$$

可以看作 F 与.....的乘法卷积

$$K_1(u) := \frac{1}{u} K\left(\frac{1}{u}\right).$$

事实上，作变量代换 $u = \frac{1}{t}$ 后，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty F\left(\frac{x}{u}\right) \frac{1}{u} K\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u} \\ &= \int_0^\infty F\left(\frac{x}{u}\right) K_1(u) \frac{du}{u} = (F \star K_1)(x). \end{aligned}$$

将 f 视为这样的卷积，它便“继承”了 F 和 K的光滑性。将导数移入积分号内，可得对于 $x \geq 0$ 和 $n \geq 0$,

$$f^{(n)}(x) = \int_0^\infty F^{(n)}(xt)\, t^n K(t)dt, \tag{1.2}$$

在可容许性假设下，这给出原点附近的界

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le C^{n+1}M_n, \quad \forall x \in [0,\delta],\, n \ge 0, \tag{1.3}$$

当 $\delta > 0$ 足够小时。

这也 因此，改用对数坐标也很有用。令 $x = e^{\xi}$ 和 $u = e^{\xi - v}$，可得

$$f(e^{\xi}) = \int_0^{\infty} F(e^{v})\, K_1(e^{\xi - v})\, dv,$$

因此，对 ξ 求导并应用链式法则，

$$\frac{d^n}{d\xi^n} f(e^{\xi}) = \int_0^{\infty} F(e^{v})\, \frac{d^n}{d\xi^n} K_1(e^{\xi - v})\, dv.$$

由此可得对数界（见 §4.2）

$$\left|\frac{d^n}{d\xi^n} f\left(e^{\xi}\right)\right| \le C'_{\eta,\delta}\eta^n \widehat{\gamma}_n, \quad \xi \in (-\infty, \log\delta],\, n \ge 0,\, \eta > 1, \tag{1.4}$$

其中 $\widehat{\gamma}$ 由下式给出

$$\widehat{\gamma}_n := \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\right)^{\frac{\pi}{2}n}.$$

估计式 (1.3) 和 (1.4) 是下文所引入局部类的基本依据 .

定义 1.3. 设 $I \subseteq [0,\infty)$ 为一个区间， $\eta > 0$ 和 M, N 为两个正序列。类$B_{\eta}(M,N;\, I)$ 由所有函数 $f \in C^{\infty}(I)$ 构成，且对于任意紧集 $J \subset I$，都存在常数$C = C(f,J) > 0$，使得以下两个条件成立：

(1) $\left|f^{(n)}(x)\right| \le C^{n+1}M_n$,for any $x \in J$ and $n \ge 0$;

(2) $\left|\frac{d^n}{d\xi^n} f\left(e^{\xi}\right)\right| \le C\eta^n N_n$,for any ξ so that $e^{\xi} \in J$ and $n \ge 0$.

我们还定义

$$B_{\eta}(M,N;0^{+}) = \bigcap_{a>0} B_{\eta}(M,N;[0,a))$$

1.2. **主要结果**。

1.2.**1.** 一个局部结果。 我们首先给出关于原点处右芽的主要结果 .

定理 1.4。L 设 γ 是一个可容许权，并设 M 是一个正则序列。对于任意 $\eta > 1$，有

$$\mathcal{B}_{\gamma}B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};0_{+}) \subseteq A(M,\gamma;0_{+}) \quad and \quad \mathcal{L}_{\gamma}A(M,\gamma;0_{+}) \subseteq B_{\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};0_{+}).$$

此外，如果类 A（M,γ； 0_{+}） 是拟解析的（即，如果 $\sum M_n/M_{n+1} = \infty$），则 n

$$B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};0_{+}) \subseteq \mathcal{L}_{\gamma}A(M,\gamma;0_{+}) \subseteq B_{\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};0_{+}),$$

并且，在类 $B_{1/\eta}$（$M\gamma,\widehat{\gamma}$； 0_{+}） 中，（γ）–求和是适用的。

可容许权和正则序列的精确定义见第 2.2 节和第 2.4 节。下表展示了可容许权 γ 与相应序列 $\widehat{\gamma}$之间的关系：

γ	$\widehat{\gamma}$	参数
对数$^{\alpha n}\, n \cdot$ 对数$^{\beta n}$ 对数 n	$n!\left(\frac{2}{\pi\alpha}\right.$ 对数 $\left.n\right)^n$	$\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$
对数$^{\beta n}$ 对数 n	$n!\left(\frac{2}{\pi\beta}\right.$ 对数 $n \cdot$ 对数 对数 $\left.n\right)^n$	$\beta > 0$
指数函数(n对数$^{\alpha}\, n$)	$n!\left(\frac{2}{\pi\alpha}\right.$ 对数$^{1-\alpha}\, \left.n\right)^n$	$0 < \alpha < 1$
指数函数$\left(\frac{n \text{ 对数}}{n \text{ 对数}^{\alpha} \text{ 对数 } n}\right)$	$n!\left(\frac{2}{\pi\alpha}\right.$ 对数 对数 $\left.n\right)^n$	$\alpha > 0$
$\Gamma\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)$	$n!\ \left(\frac{2}{\pi}\alpha\right)^n$	$\alpha > 0$

表1. γ 和 $\widehat{\gamma}$ 的对应关系。

我们还要指出，下列序列是正则的：

$$M_n = n!^{\alpha_1}\Gamma\left(1+\alpha_2 n\right)\cdot\exp\left(\alpha_3\frac{n\log n}{\log^{\alpha_3}\log n}+n\log^{\alpha_4} n\right)\log^{\alpha_5 n} n\cdot\log^{\alpha_6 n}\left(\log n\right)$$

对于任意 $\alpha_1,\cdots,\alpha_6 \geq 0$。

注 1.5. 注意，当 $A(M,\gamma;\ 0_+)$ 是非拟解析时，包含关系 $\mathcal{B}_\gamma B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};\ 0_+) \subseteq A(M,\gamma;\ 0_+)$ 应在形式幂级数层面理解，即，对于任意 $f \in B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};\ 0_+)$，存在一个函数 $F \in A(M,\gamma;0_+)$，使得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{\gamma_{n+1}} = F^{(n)}(0), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

1.2.2. 非解析情形下的整体结果。 在下文中，我们称一个序列 N 为解析，如果

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{N_n}{n!}\right)^{1/n} < \infty,$$

否则，我们称 N 为非解析。

当序列 $\widehat{\gamma}$ 为解析或非解析时，我们的局部结果可以通过不同方式加强。我们首先给出非解析情形的一个版本。

定理 1.6。 假设 γ 是一个具有非解析 $\widehat{\gamma}$ 的可容许权， M 是正则序列， $\eta > 1$和 $I = [0,a)$ （其中 $0 < a \leq +\infty$)。那么，

$$\mathcal{B}_\gamma B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};I) \subseteq A(M,\gamma;I), \quad \mathcal{L}_\gamma A(M,\gamma;I) \subseteq B_\eta(M\gamma,\widehat{\gamma};I).$$

此外，若类 $A(M,\gamma;\ \ I)$ 是拟解析的，则

$$B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};I) \subseteq \mathcal{L}_\gamma A(M,\gamma;I) \subseteq B_\eta(M\gamma,\widehat{\gamma};I),$$

且 γ) 求和适用于类 $B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};\ \ I)$。

1.2.3. 整体结果 在解析情形下。 解析情形下的结果需要以下定义 .

定义 **1.7.** 假设 γ 是一个具有解析 $\widehat{\gamma}$、 $I=[0,a)$ 和 $\eta > 0$ 的可容许权。Pu t

$$\Omega_\eta\left(\gamma\right) := \left\{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \sup_{t>0} E(t\eta)\left|K\left(\frac{t}{z}\right)\right| < \infty\right\}.$$

类 $D(M,\ \gamma;\ I)$ 由所有满足以下条件的函数 f 组成：对于任意 $\eta > a$, $f \in$全纯函数 $(\Omega_\eta(\gamma)) \cap C^\infty(\{0\} \cup \Omega_\eta(\gamma))$，存在一个常数 $C = C_\eta > 0$ ，使得

$$|R_n(z,f)| \leq C^{n+1}\frac{M_n\gamma_{n+1}}{n!}|z|^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,\ \forall z \in \Omega_\eta\left(\gamma\right),$$

其中 $R_n(z,\ f)$ 是函数 f 在原点处泰勒级数的 $n-$ 阶余项，即

$$R_n(z,f) := f(z) - \sum_{0\le k<n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

例1.8。对于 $\alpha > \frac{1}{2}$，考虑 $\gamma_n = \Gamma\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)$，其中 Γ 是欧拉 Γ-函数。我们有 $K(t)$ =指数函数$(-t^\alpha)$，并且根据 [20, 第3.5节，3] 我们还有

$$E(z) = \begin{cases} \alpha\exp(z^\alpha) + O(1/z), & |\arg z| \le \frac{\pi}{2\alpha}; \\ O(1/z), & \frac{\pi}{2\alpha} \le |\arg z| \le \pi. \end{cases}$$

对于任意 $\eta_1 < \eta < \eta_2$，集合 $\Omega_\eta(\gamma)$ 满足（见图1.1）

$$\left\{z : \mathrm{Re}\frac{1}{z^\alpha} \ge \eta_2^\alpha\right\} \subset \Omega_\eta(\gamma) \subset \left\{z : \mathrm{Re}\frac{1}{z^\alpha} \ge \eta_1^\alpha\right\}$$

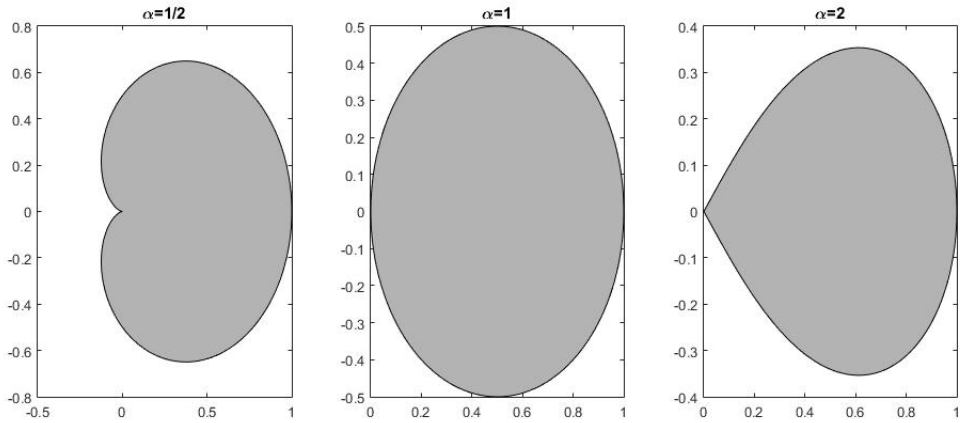

图1.1。$\Omega_1(\gamma)$，其中 $\alpha = \frac{1}{2}$，1，2

下一个引理表明，类 $D(M,\ \gamma; I)$ 也与非齐次卡尔曼类密切相关。

引理 **1.9.** 如果 γ 是具有解析 $\widehat{\gamma}$的权，且 M 是正则序列，那么对于任意 $\eta > 0$

$$B_{1/\eta}(M\gamma, \widehat{\gamma}; 0_+) \subseteq \bigcup_{\delta>0} D(M,\gamma;[0,\delta)) \subseteq B_\eta(M\gamma,\widehat{\gamma};0_+).$$

定理 1.10. 设 γ 是具有解析 $\widehat{\gamma}$的可容许权，M 是正则序列，$I = [0,a)$且 $\eta > 1$。则有

$$\mathcal{B}_\gamma D(M,\gamma;I) \subseteq A(M,\gamma;I) \quad and \quad \mathcal{L}_\gamma A(M,\gamma;I) \subset D(M,\gamma;I).$$

此外，如果类 $A(M,\gamma;I)$ 是拟解析的，那么 $D(M,\gamma;I)$ 也是拟解析的，$\mathcal{L}_\gamma$: $A(M,\gamma;I) \to D(M,\gamma;I)$ 是一个双射，其逆映射为 $\mathcal{B}_\gamma$，并且

$$(\mathcal{B}_\gamma f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_\eta(\gamma)} f(w)E\left(\frac{z}{w}\right)\frac{dw}{w}, \quad \forall z \in \Omega_\eta(\gamma).$$

1.3. **F. Nevanlinna 和 Beurling 定理**。许多作者都研究过广义拉普拉斯变换 $\mathcal{L}_\gamma$ 的一个自然定义域 [35, 7], , 即由所有函数 F 组成的空间；这些函数在某个半条带 $\{z\colon |\mathrm{Im}(z)| \le C^{-1}, \mathrm{Re}(z) \ge 0\}$ 中解析，并且在其中满足

$$|F(z)| = O\left(E(\eta|z|)\right), \quad \forall \eta > 1.$$

注意，根据解析函数导数的柯西估计，这个空间与 $A\left(n!\ \gamma; [0,1)\right)$ 相同。

接下来，我们比较 $\mathcal{L}_\gamma A\left(n!\ \gamma;\ [0,1)\right)$ 在 $\gamma_{n+1} = n!$ 和 $\gamma_{n+1} = \log^n(n+e)$ 中的两种经典描述。这些结果（及其推广）是我们开展这项工作的动机之一。我们指出，下文提及的这两项结果及其推广都是定理 1.6 和 1.10 的特例。

定理 (F. Nevanlinna [35], 另见 Sokal [43])。设 $\gamma_{n+1} = n!$。拉普拉斯变换 $\mathcal{L}_\gamma$ 将空间$A\left(n!\ \gamma;\ [0,1)\right)$ 双射到 $C^\infty[0,1)$ 的子空间，该子空间由所有满足以下条件的函数 f 组成：对任意 $\eta > 1$，函数 f 在圆盘 $\Omega_\eta = \{z\colon\ |2\eta z - 1| < 1\}$ 中全纯，且存在一个常数 $C = C_\eta > 0$使得

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le C^{n+1} n! \gamma_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall z \in \overline{\Omega_\eta}. \tag{1.5}$$

此外，对于任意此类 f, $\mathcal{L}_\gamma \mathcal{B}_\gamma f = f$ 属于 $[0,1)$。

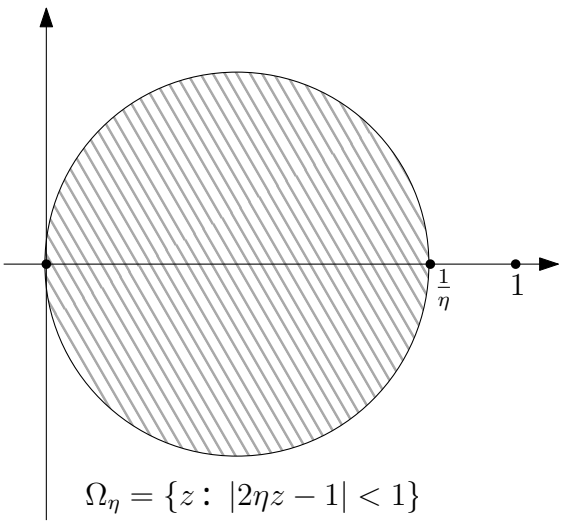

图 1.2. 圆盘 Ω_η

定理 (Beurling [7, 第 420–429])。令 $\gamma_{n+1} = \text{对数}^n(n+e)$。广义拉普拉斯变换 $\mathcal{L}_\gamma$ 将空间 $A(n!\ \gamma;\ [0,1))$ 双射到 $C^\infty[0,1)$ 的子空间，该子空间由满足以下条件的所有函数 f 组成：对于任意 $\eta > 1$，都存在一个常数 $C = C_\eta > 0$，使得

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le C^{n+1} n! \gamma_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall 0 \le x \le \frac{1}{\eta}. \tag{1.6}$$

此外，对于任意这样的 f、 $\mathcal{L}_\gamma \mathcal{B}_\gamma f = f$，均有 $[0,1)$。

尽管不等式（1.5）和（1.6）相同，但在内万林纳情形和 Beurling 情形中， $\mathcal{L}_\gamma A(\gamma)$ 的主要区别在于前者具有额外的解析性。

对于序列 $\gamma_{n+1}=\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)$，在满足 $\beta>\frac{1}{2}$ 的条件下，Moroz [33] 得到了内万林纳定理的一些类似结论。在这种情况下，解析区域应从圆盘 Ω_η 改为一个顶点位于原点、张角为 π/β 的扇形区域（见例1.8和图1.1，另见 [13,§4.5] 中的讨论）。

作者 [23, 在定理 1 和 3], 中得到了 Beurling 定理的推广，证明对于可容许权 γ，当且仅当 $\gamma_n^{1/n}=O$(对数 n) 时，同样的结论成立，其中 $n\to\infty$.。这一对数阈值也是本研究的另一个动机（见 7.1 中的讨论）。

接下来，我们说明在 $\gamma_{n+1}=n!$. 时，我们的结果在内万林纳情形下的具体表述。

推论 1. 设 $\gamma_{n+1}=n!$，并令 M 为正则序列。拉普拉斯变换 $\mathcal{L}_\gamma$ 将空间 $A\left(M,\gamma;[0,1)\right)$ 双射地映射到 $C^\infty[0,1)$ 的子空间，该子空间由所有满足以下条件的函数 f 构成：对于任意 $\eta>1$，函数 f 在圆盘 $\Omega_\eta=\{z:\ |2\eta z-1|\}<1$ 中全纯，并且存在一个常数 $C=C_\eta>0$ 使得

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le C^{n+1}M_n\gamma_{n+1},\quad \forall n\in\mathbb{Z}_+,\forall z\in\overline{\Omega_\eta}$$

此外，对于任意这样的 f、 $\mathcal{L}_\gamma\mathcal{B}_\gamma f=f$，均有 $[0,1)$。

备注 1.12。 Beurling 的结果及其推广最初针对定义在包含原点的开区间上的函数 f。上面对半开区间 $[0,1)$ 的表述是新的，并由定理 1.6 推出。

1.3.1. 本文结构。本文其余部分安排如下。下一节将定义本文所用的所有光滑函数类，并给出关于函数 K 和 E. 渐近行为的一些辅助结果。第 3 节讨论非齐次卡尔曼类和拟解析性。第 4 节证明广义拉普拉斯变换满足形式为 (1.3) 和 (1.4) 的界。第 5 节将德金表示从卡尔曼类中的函数推广到非齐次情形。第 6 节讨论属于非齐次卡尔曼类的函数的广义博雷尔变换导数的界。最后，第 7 节介绍若干应用，包括与欧拉型微分方程、多重可求和性和重生理论相关的应用。

2. 基本概念

2.1. 记号。我们用符号 C 表示较大的正数，它们在不同位置出现时取值可能不同。如果常数 C 依赖于某个参数 p，我们将记作 C_p （其取值在不同位置出现时同样可能不同）。对于定义域相同的两个函数 f 和 g，如果存在某个常数 C使得 $f(x)\le Cg(x)$，则记作 $f\lesssim g$。如果最后一个不等式中的常数 C 依赖于某个参数 p，我们将记作 $f\lesssim_p g$。当 $f\lesssim g$ 且 $g\lesssim f$ （$f\lesssim_p g$且 $g\lesssim_p f$）时，我们使用记号 $f\asymp g$ （$f\asymp_p g$）。如果对于某个集合 Π有 $f|_\Pi\lesssim g|_\Pi$，我们将在 Π上记作 $f\lesssim g$，对于 $\asymp$、$\lesssim_p$ 和 $\asymp_p$也作同样处理。如果 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，我们将记作 $f\sim g$。对于定义在正半轴上的函数 f，若存在 ρ_0，使得性质 P 在区间 $[\rho_0,\infty)$ 上成立，则称该性质最终成立。对于两个序列 M和 N，如果 $M_n^{1/n}\sim N_n^{1/n}$，我们将记作 $M\approx N$。

2.2. **可容许权及序列** $\widehat{\gamma}$。 下文中，我们将序列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 视为定义在 $\mathbb{N}$ 上的函数 γ 的取值（即 $\gamma_n=\gamma(n)$）。我们假设函数 γ 在

a角 $\{s:\ |\arg(s+c)\ <\alpha_0|\}$，其中 $\frac{\pi}{2}<\alpha_0$ 且 $c>0$，并且在（$-c,\ \infty$）上为正。我们令 t

$$L(s)=\gamma(s)^{1/s}\quad\text{and}\quad\varepsilon(s)=s\frac{L'(s)}{L(s)}.$$

定义 2.1. 若函数 γ 满足以下条件：ε 在 $\mathbb{R}_+$上为正且有界，并且满足以下条件，则称其为可容许的：

(A) $\int^{\infty}\frac{\varepsilon}{-(\rho)}\,\rho\,\mathrm{d}\rho=\infty$，(B) 当 $\rho\to\infty$ 时，$\lambda\rho\ \sim\varepsilon(\rho)$ 关于 $\lambda\in\{s$ 局部一致地成立：$|\arg(s)$ $<\alpha_0|\}$，(C) $\lim_{\rho\to\infty}\varepsilon(r)$ 存在且小于 2。(D) 若 $\lim_{\rho\to\infty}\varepsilon(\rho)\ =0$，则假设 ε 最终单调递减，且对任意 $\delta>0$，$|\varepsilon'(\rho)|\gtrsim_\delta e^{-\delta\rho}$。

不难证明，在这些假设下，我们有

$$\log\left|\gamma\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|=\cos\theta\log L(\rho)+\theta\sin\theta\varepsilon\left(\rho\right)+o\left(\varepsilon\left(\rho\right)\right),\tag{2.1}$$

当 $\rho\to\infty$. 时，关于 $\theta\in(-\alpha_0,\ \alpha_0)$ 局部一致地成立。给定一个可容许的 γ，定义

$$\widehat{\gamma}_n=\sup_{\rho>0}\rho^n\left|\gamma\left(i\rho\right)\right|=\sup_{\rho>0}\rho^n\exp\left(-\left(1+o(1)\right)\frac{\pi}{2}\rho\varepsilon(\rho)\right)$$

序列 $\widehat{\gamma}_n$ 在估计项 $\frac{d^n}{dt^n}\left(t^nK(t)\right)$ 时自然出现，该项见于式 (1.2)（参见引理 4.1 及其证明）。

2.3. 函数 K 和 E。

本节介绍 [24]关于函数 K 和 E.渐近行为的结果

2.3.1. 鞍点方程。当 z 较大时，函数 K 和 E 的渐近分析由函数 $s\mapsto\log\ \gamma(s)\ -s\log\ z=s\log\ L(s)\ -s\log\ z$ 的鞍点决定，也就是说，由下列方程决定

$$\log L(s)+s\frac{L'(s)}{L(s)}=\log z.\tag{2.2}$$

对于 $0<\alpha<\alpha_0$ 和 $\rho_0>0$，令

$$S(\alpha,\rho_0)=\{s:\ |\arg(s)|<\alpha,\ |s|>\rho_0\}.$$

那么，不难证明，在我们的可容许性假设下，鞍点方程 (2.2) 左端是 $S(\alpha,\rho_0)$ 中的单叶函数（参见 [24, 第 1.3] 节）。从这里开始，我们假设情况确实如此，并令

$$\Omega(\alpha)=\left\{z\colon\ \log z=\log L(s)+s\frac{L'(s)}{L(s)},\ s\in S(\alpha,\rho_0)\right\}.$$

一般来说，这是对数 z的黎曼曲面上的一个区域；但只要选择足够大的 ρ_0 ，我们就可以将其视为割平面 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$的子区域，前提是

$$\limsup_{\rho\to\infty}\varepsilon(\rho)<\frac{\pi}{\alpha},$$

下文中，我们用 $s_z=\rho_ze^{\mathrm{i}\theta_z}$ 表示鞍点方程 (2.2) 的唯一解。

2.3.2. 函数 K 和 E 的渐近行为。

定理 (A)。 设 γ 是可容许的。那么，对于任意 $\delta > 0$，函数 K 在 $\Omega(\alpha_0 - \delta)$ 中解析，并且

$$K(z) = (1 + o(1)) \sqrt{\frac{s}{2\pi\varepsilon(s)}} \exp\left(-s\varepsilon(s)\right), \quad z \to \infty,$$

在 $\Omega(\alpha_0 - \delta)$ 中一致成立。这里 $s = s_z$，且平方根的分支在正半轴上为正。

Theo余 (B)。 设 γ 是可容许的。那么，给定充分小的 $\delta > 0$，我们有 e

$$zE(z) = (1 + o(1)) \sqrt{2\pi \frac{s}{\varepsilon(s)}} \exp\left(s\varepsilon(s)\right) + o(1), \quad z \to \infty,$$

在 $\Omega(\frac{\pi}{2} + \delta)$ 中一致成立，并且

$$zE(z) = O(1), \quad z \to \infty$$

在 $\mathbb{C} \setminus \Omega(\frac{\pi}{2}$ 中一致成立 $+ \delta)$ 。这里， $s = s_z$ 平方根的分支在正半轴上为正 .

2.4. 卡尔曼型类。在本文中，我们将使用实数轴的双点紧化 $[-\infty, \infty]$. 给定一个正序列 M、闭区间 $J \subseteq [-\infty, \infty]$，和正常数$\mu > 0$，卡尔曼型类 $C_\mu^M(J)$由所有满足以下条件的函数 $f \in C^\infty(J)$构成:

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq C(f) \cdot \mu^n M_n, \quad \forall x \in J \cap \mathbb{R},\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

给定任意区间 I，令

$$C_\mu^M(I) = \bigcup_{J \subseteq I} C_\mu^M(J),$$

其中，遍历所有闭子区间 $J \subseteq I$取并集。我们还用以下符号表示

$$C_\infty^M(I) = \bigcup_{0<\mu<\infty} C_\mu^M(I), \quad \text{and} \quad C_0^M(I) = \bigcap_{0<\mu<\infty} C_\mu^M(I),$$

分别表示*Carleman*类和*Beurling*类。给定 $a \in (-\infty, \infty)$，我们用 $C_\mu^M(a_+)$和 $C_\mu^M(a)$分别表示点 a 处类 C_μ^M 的所有右芽和芽的集合，即:

$$C_\mu^M(a_+) := \bigcap_{\delta>0} C_\mu^M([a, a+\delta]), \quad \text{and} \quad C_\mu^M(a) := \bigcap_{\delta>0} C_\mu^M([a-\delta, a+\delta]).$$

最后，给定完美紧集 $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}$ ，解析-*Carleman*类 $C_\infty^M(\mathbb{E})$由所有满足以下条件的函数$f \in$ 全纯函数$(\mathbb{E}^\circ) \cap C^\infty(\mathbb{E})$ 构成:

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq C_f^{n+1} M_n, \quad \forall z \in \mathbb{E},\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Fro从此处起，所有序列 M 均假定满足以下意义下的正则性。

定义 2.2。 若正数序列 $M = (n! m_n)_{n \geq 0}$，满足以下条件，则称其为正则的:

(1) (m_n) 是最终对数凸序列（即对于所有充分大的 n， $m_n^2 \leq m_{n-1} m_{n+1}$ ）。(2) $\left(m_n^{1/n}\right)$ 最终非递减。(3) 存在一个 $C > 0$ ，使得对于任意 $n \geq 0$， $m_{n+1} \leq C m_n^{1+1/n}$

令 $\tau(M) = \lim m_n^{1/n}$，并注意到，若 $\tau(M) < \infty$，则 $C^M(I)$ 只包含解析函数；而若$\tau(M) = \infty$，则 $C^M(I)$ 也包含非解析函数。因此，我们将把满足$\tau(M) < \infty$的序列 M称为解析的，把满足 $\tau(M) = \infty$的序列称为非解析的。

以下拟解析性判据归功于 Denjoy 和 Carleman。

定理 (Denjoy–Carleman [10])。 假设 $M=(M_n)^{n\geq 0}$ 是一个正的对数凸序列。对于 $0\leq\mu\leq\infty$，类 $C_\mu^M(I)$ 是拟解析的，当且仅当

$$\sum_{n\geq 0}\frac{M_n}{M_{n+1}}=+\infty.$$

2.4.1. 加权卡尔曼类：类 $A(M,\gamma,I)$。 如前所述，我们将在比 $A(\gamma)$ 更一般的定义域上考虑 $\mathcal{L}_\gamma$：

定义 2.3。 设 γ 如前， M 为正序列，且 $J=[0,a]$ 满足 $0<a<+\infty$。类$A(M,\gamma,J)$ 由所有函数 $F\in C^\infty[0,\infty)$ 构成，且存在常数 $C=C_J>0$ 使得

$$\left|F^{(n)}(x)\right|\leq C^{n+1}M_nE\left(\frac{x}{a}\right).$$

对于区间 $J=[-a,0]$，令

$$A(M,\gamma,J):=\{F\in C^\infty(-\infty,0]\,:\,F(-x)\in A(M,\gamma,-J)\}.$$

对于一般区间 $0\in I\subseteq\mathbb{R}$ （不一定是闭区间），令

$$A(M,\gamma,I):=\bigcup_{J\subseteq I}A(M,\gamma,J),$$

其中，取遍所有满足 $J\subseteq[0,\infty)$ 或 $J\subseteq(-\infty,0]$ 的紧致 $J\subseteq I$，并对其取并集。最后，令

$$A(M,\gamma,0_+):=\bigcup_{b>0}A(M,\gamma,[0,b]),\quad A(M,\gamma,0):=\bigcup_{b>0}A(M,\gamma,[-b,b])$$

注记 2.4. 正如我们已经提到的， $A(\gamma)=A(M,\ \gamma,\ I)$ 满足 $M_n=n!$ 和 $I=[0,1]$。请注意， $A(M,\ \gamma,\ I)$ 中的元素不必是解析的，但对于 $F\in A(M,\ \gamma,\ I)$，函数 $\mathcal{L}_\gamma F$ 是定义良好的 $C^\infty(I)$ 函数。

接下来的三 类将在描述 $\mathcal{L}_\gamma A(M,\ \gamma,\ I)$ 时发挥重要作用 .

2.4.2. 指数变量替换下的卡尔曼类：类 $B(M,N;\ I)$。给定一个区间 I，令对数 $I_+=\{$对数 $x:\ \ x\in I\cap[0,\infty)\}$ 以及对数 $I_-=\{$对数$(-x):\ \ x\in I\cap(-\infty,0]\}$

设 M 和 N 是两个正则序列， I 是一个区间。类 $B_\mu(M,\ N;\ I)$ 由所有满足以下条件的函数 $f\in C^\infty(I)$ 构成： $f(x)\in C_\infty^M(I)$ $f(e^x)\in C_\mu^N($对数 $I_+)$，且 $f(-e^x)\in C_\mu^N($对数 $I_-)$。类似地，我们将 $B_\eta(M,\ N;\ 0_+)$ 和 $B_\eta(M,\ N;0)$ 分别定义为右芽集合和原点处的芽集合。

2.4.3. 非齐次卡尔曼类。 非齐次卡尔曼类 $C_\mu(M,\ N;\ I)$ 由所有函数 $f\in C^\infty(I)$ 组成，其中存在一个 $C=C(f)>0$ 使得

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leq C\cdot\min\left\{C^nM_n\,,\,\frac{\mu^n\cdot N_n}{|x|^n}\right\},\quad\forall x\in I,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

如果 $I=[0,a]$，那么非齐次卡尔曼类与 $B_\mu(M,\ N;\ I)$ 密切相关，下一条引理将对此进行说明。

引理 2.5。 设 $I=[0,a]$，且 M和 N是两个满足 $\tau(N)\geq\frac{2}{\pi}$的正则序列。那么对于任意 $\eta>1$

$$B_{1/\eta}(M,N;I)\subseteq C_1(M,N^*;I)\subseteq B_\eta(M,N;I)$$

在非解析情形下为 $N^*=N$，而在解析情形下为 $N_n^*=n!\left(\text{正弦}\,\tau^{-1}(N)\right)^n$。

2.4.4. 解析函数的 *Carleman* 型类：类 D（M，γ；I）。给定一个可容许权 γ和$\eta > 0$，令

$$\Omega_\eta(\gamma) := \left\{ z \neq 0 : \sup_{t>0} E(t\eta) \left| K\left(\frac{t}{z}\right) \right| < \infty \right\}$$

and

$$D(M, \gamma; [0, a)) = \bigcup_{\eta > a} C_\infty^M(\overline{\Omega}_\eta(\gamma)).$$

也就是说，类 $D(M$，$\gamma; I)$ 由满足以下条件的所有函数 f 构成：对任意 $\eta > a$，f 在 $\Omega_\eta(\gamma)$ 上全纯，并且存在一个常数 $C = C_\eta > 0$，使得

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq C^{n+1} M_n \gamma_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall z \in \overline{\Omega}_\eta(\gamma).$$

等价地，我们可以不使用迭代导数，而通过原点处渐近展开的余项来定义类 $D(M$，$\gamma; I)$：给定 $f \in \mathrm{Hol}(\Omega_\eta(\gamma))$ $\cap C^\infty(\{0\} \cup \Omega_\eta(\gamma))$，令

$$R_n(z, f) := f(z) - \sum_{0 \leq k < n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^n.$$

类 $D(M$，γ；$I)$ 由满足以下条件的所有函数 f 构成：对任意 $\eta > a$，$f \in \mathrm{Hol}(\Omega_\eta(\gamma)) \cap C^\infty(\{0\} \cup \Omega_\eta(\gamma))$，并且存在一个常数 $C = C_\eta > 0$，使得

$$|R_n(z, f)| \leq C^{n+1} \frac{M_n \gamma_{n+1}}{n!} |z|^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall z \in \Omega_\eta(\gamma).$$

注记 2.6。回忆一下，$L(s) = \gamma(s)^{1/s}$，$\varepsilon(s) = s^{L'(s)} L(s)$ 以及

$$\widehat{\gamma}_n = \sup_{\rho > 0} \rho^n |\gamma(i\rho)| = \sup_{\rho > 0} \rho^n \exp\left(-(1 + o(1)) \frac{\pi}{2} \rho \varepsilon(\rho) \right).$$

如果序列 $\widehat{\gamma}$ 是解析的（即，如果 $\lim_{\rho \to \infty} \varepsilon(\rho) > 0$），那么 $\Omega_\eta(\gamma)$ 确实是一个区域；而如果序列 $\widehat{\gamma}$ 是非解析的（即，如果 $\lim_{\rho \to \infty} \varepsilon(\rho) = 0$），那么 $[0, \eta^{-1}] \subseteq \Omega(\gamma) \subseteq [0, \eta^{-1})$ 在后一种情况下，$D(M$，$\gamma; I)$ 因此，我们将仅在解析情形下考虑 $D(M$，$\gamma; I)$。

3. 非齐次卡尔曼类

3.1. 非齐次卡尔曼类与类 $B(M$，N；$I)$。在本节中，我们固定一个正则序列 N。回顾一下，$\tau(N) = \lim_{n \to \infty} \binom{N_n}{n!}^{1/n}$，并在非解析情形下设 $N^* = N$（即，$\tau(N) = \infty$）且 $N_n^* = n!^{1/\sin^n(1/\tau(N))}$。

引理 2.5 可由下一个引理推出。

引理 3.1。设 f和 g是两个满足 $g(x) = f(e^x)$ 的 C^∞ 函数，其中 $x \in [-\infty, 0]$。函数 f满足

$$\left| t^n f^{(n)}(t) \right| \lesssim_\eta \eta^n N_n^*, \quad \forall t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}, \eta > 1,$$

当且仅当，对于所有 $\eta > 1$.，$g \in C_\eta^N[-\infty, 0]$

为证明该引理，我们需要以下组合论断。

论断 3.2. 考虑递归定义的第一类和第二类斯特林数：

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ j \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1,$$

and

$$\left\{ {n+1 \atop j} \right\} = j \left\{ {n \atop j} \right\} + \left\{ {n \atop j-1} \right\}, \quad \left\{ {n \atop 0} \right\} = 0, \left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1$$

分别。如果 $g(x) = f(e^x)$ 且 $g \in C^\infty$，则

$$g^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} f^{(j)}\left(e^x\right) e^{jx},$$

and

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{t^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \left[{n \atop j} \right] g^{(j)}\left(\log t\right).$$

证明。我们将对 n 使用归纳法证明这两个恒等式。显然，该论断对 $n = 0$ 和 $n = 1$成立。假设它对 $j = n-1,$ 成立，即

$$g^{(n-1)}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop j} \right\} f^{(j)}\left(e^x\right) e^{jx}.$$

对该恒等式求导可得

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop j} \right\} \left(f^{(j+1)}\left(e^x\right) e^{(j+1)x} + j f^{(j)}\left(e^x\right) e^{jx} \right) \\ &= \sum_{j=2}^{n} \left\{ {n-1 \atop j-1} \right\} f^{(j)}\left(e^x\right) e^{jx} + \sum_{j=1}^{n-1} j \left\{ {n-1 \atop j} \right\} f^{(j)}\left(e^x\right) e^{jx} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\left\{ {n-1 \atop j-1} \right\} + j \left\{ {n-1 \atop j} \right\} \right) f^{(j)}\left(e^x\right) e^{jx} = \sum_{j=1}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} f^{(j)}\left(e^x\right) e^{jx}, \end{aligned}$$

从而证明第一个恒等式。至于第二个恒等式，假设

$$f^{(n-1)}(t) = \frac{1}{t^{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1+j} \left[{n-1 \atop j} \right] g^{(j)}\left(\log t\right).$$

Then

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= t^{-n} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1+j} \left[{n-1 \atop j} \right] \left(g^{(j+1)}\left(\log t\right) + (1-n)\, g^{(j)}\left(\log t\right) \right) \\ &= t^{-n} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{n+j} \left[{n-1 \atop j-1} \right] g^{(j)}\left(\log t\right) + t^{-n} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} \left[{n-1 \atop j} \right] (n-1)\, g^{(j)}\left(\log t\right) \\ &= t^{-n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \left(\left[{n-1 \atop j-1} \right] + \left[{n-1 \atop j} \right] (n-1) \right) g^{(j)}\left(\log t\right) \\ &= \frac{1}{t^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \left[{n \atop j} \right] g^{(j)}\left(\log t\right), \end{aligned}$$

证明第二个恒等式。 □

引理 *3.1* 的证明。 我们先考虑 $\tau(N) = +\infty$ 的情形，因此 $N^* = N$.假设对于所有 $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ 以及 $\eta > 1$，均有 $\left|t^n f^{(n)}(t)\right| \lesssim_\eta \eta^n N_n$。那么， $g \in C^\infty[-\infty, 0]$,并满足等式

$$g^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} f^{(j)}(e^x)\, e^{jx},$$

特别地，对于任意 $\eta > 1$

$$\left|g^{(n)}(x)\right| \lesssim_\eta \eta^n \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} N_j := C\eta^n \widetilde{N}_n.$$

~我们将通过归纳法证明，对于任意 $\delta > 0.$，~$(1+\delta)^n N_n$。事实上，假设该命题对 n 成立，并利用递推公式，可得

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ j \end{matrix} \right\} N_j = \sum_{j=1}^{n+1} \left(j \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ j-1 \end{matrix} \right\} \right) N_j \\ &= \sum_{j=1}^n j \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} N_j + \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} N_{j+1} \leq \left(n + \frac{N_{n+1}}{N_n} \right) \widetilde{N}_n \\ &\leq C_\delta (1+\delta)^n \left(n + \frac{N_{n+1}}{N_n} \right) N_n. \end{aligned}$$

由于 $\tau(N) = +\infty$，当 n充分大时，我们有 $\left(n + \frac{N_{n+1}}{N_n}\right) \leq (1+\delta)\ \frac{N_{n+1}}{N_n}$，从而证明了该命题。因此，对于所有 $\eta > 1.$，我们得出 $g \in C_\eta^N[-\infty, 0]$

接下来，我们假设 $g \in C_\eta^N[-\infty, 0]$。由于， $f(t) = g$(对数 t)，我们得到

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{t^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] g^{(j)}(\log t),$$

同前面的归纳论证可得 $\left|t^n f^{(n)}(t)\right| \lesssim_\eta \eta^n N_n$.

最后 ，我们讨论 $\tau(N) < +\infty.$ 的情形。在这种情况下，函数 g 在半条带内解析 p

$$\left\{ z : \operatorname{dist}(z, \mathbb{R}_-) < \frac{1}{\tau(N)} \right\},$$

而 f 在扇形区域内解析

$$\left\{ s : |\arg s| < \arcsin \frac{1}{\tau(N^*)} \right\}.$$

由于映射 $s = e^z$ 将上述半条带映入所讨论的扇形区域，引理得证。 □

3.2. **非齐次 Carleman 类的拟解析性**。这里我们讨论非齐次 Carleman 类 $B(M,\ N;\ I)$。我们首先回顾关于 $C_\infty^M(\Omega)$ 中拟解析性的一些经典结果，其中 Ω 是一个包含原点的区间， I，或开角为 $\pi\alpha$，$\Omega_\alpha = \left\{ z\colon |\arg\ z| \leq \alpha\frac{\pi}{2},\ 0 \leq |z| \leq \rho_0 \right\}$.

正如我们之前提到的，Denjoy 和 Carleman [10] 找到了 Carleman 类 $C^M(I)$ 拟解析的一个充要条件。对于正则序列 M，他们的条件是

$$\sum_{n \geq 0} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty.$$

一个结果 由 Carleson [11], Salinas [39] 和 Korenblum [25, 26] 证明，这意味着条件

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}}=\infty$$

是类 $C_\infty^M(\Omega_\alpha)$ 拟解析性的充要条件，前提是 $\alpha<2$。这些经典结果为非齐次卡尔曼类 $B(M,\ N;\ I)$ 的拟解析性提供了判据：当 $B(M,\ N;\ I)$ 化为一个卡尔曼类（即当 $N_n^{1/n}\lesssim M_n^{1/n}$）时，或当 N是解析的（即当 $(N_n/n!)^{1/n}\lesssim 1$）时，，但一般而言，非齐次卡尔曼类的拟解析性并未涵盖在拟解析性的经典理论之中。这里，我们将提出一个拟解析性判据，该判据源自对 $\mathcal{B}_\gamma$ 在不同类下像的考察。

定理 3.3。假设 γ 是一个具有非解析 $\widehat{\gamma}$ 的可容许权，M 是一个正则序列，$\eta>1$且 I 是一个包含原点的区间。那么，以下结论成立：

(1) 若 $\sum_{n\geq 1}\frac{M_n}{M_{n+1}}=\infty$，则类 $B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};\ I)$ 和 $C_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};\ I)$ 是拟解析的。(2) 若 $\sum_{n\geq 1}\frac{M_n}{M_{n+1}}<\infty$，则类 $B_\eta(M\gamma,\widehat{\gamma};\ I)$ 和 $C_\eta(M\gamma,\widehat{\gamma};\ I)$ 不是拟解析的。

注 3.4。注意，$B_\eta(M\gamma,\ \widehat{\gamma};\ I)$ 在零点之外始终是拟解析的（即，对于任意 $c\in J$、$c\neq 0$，映射 $f\mapsto\left(f^{(n)}(c)\right)_{n\geq 0}$都是单射）。事实上，若 $f\in B_\eta(M\gamma,\ \widehat{\gamma};\ I)$，则 $f|_{I\setminus\{0\}}\in C_\infty^{\widehat{\gamma}}(I\setminus\{0\})$。可容许函数的第一个假设意味着 $\sum\widehat{\gamma}_n^{-1/n}=\infty$，因此根据 Denjoy–Carleman定理，类 $C^{\widehat{\gamma}}(J\setminus\{0\})$ 是拟解析的。

注记 3.5. 上述定理的第二个断言可由定理 1.4 直接推出 .

注记 3.6. 只需证明第一个断言对芽成立。事实上，如有必要，对 I 进行反射后，不妨假设对于充分小的 δ，$[0,\delta]\subset I$。因此，若 $f\in B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};\ I)$，且对所有 $n\geq 0,f^{(n)}(0)\equiv 0$，则 $f|_{[0,\delta]}$ 可延拓为 $B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};\ [-\delta,\delta])$ 的一个元素。

例 3.7. 类 $B_1(n!\text{ 对数}^{n\alpha}(n+e)\ \ n!\text{ 对数}^{n}(n+e);\ I)$ 在 $\alpha<\frac{\pi}{2}+1$ 时是拟解析 的，而在$-\alpha>\frac{\pi}{2}+1$时不是拟解析 。该定理未涵盖 $\alpha=\frac{\pi}{2}+1$ 的情形，但我们猜测在这种情况下该类也是拟解析的。

例 3.8。类 $B_1\left(n!\text{ 指数函数}\left(\alpha n\sqrt{\text{对数}(n+1)}\right),n!\text{对数}^{n/2}(n+e);\ I\right)$ 在 拟解析 当 $\alpha\leq\pi$ 且为非拟解析 当 $\alpha>\pi$。

例 3.9。类 $B_1(n!\text{ 对数}^{n}(n+e)\text{ 对数}^{\beta n}\text{对数}(n+e^e)\ \ n!\text{ 对数}^{n}(n+e)\text{ 对数}^{n}\text{对数}(n+e^e);\ I)$ 在拟解析当 $\beta<\frac{\pi}{2}+1$ 且在非拟解析 当 $\beta>\frac{\pi}{2}+1$。 −

注 3.10。利用 Hirschman 版本的不确定性原理 [22]，可以得到一个更强且证明初等的拟解析性结果。该结果及其证明将在别处给出。

注 3.11。Carleson、Salinas 和 Korenblum 的结果对 $\alpha\geq 2$ 仍然成立，前提是我们将 Ω_α 视为对数黎曼曲面上的一个扇形区域，即，如果 $C_\infty^M(\Omega_\alpha)$ 由函数 f 组成，使得 $f(e^z)$ 在半条带中解析

$$\left\{w:\operatorname{Re}(w)<\log\rho_0,\ |\operatorname{Im}(w)|<\alpha\cdot\frac{\pi}{2}\right\}.$$

3.2.1. 函数的因子分解 $B_\eta(M,\ N;0)$。定理 3.3 的证明需要将 $B_\eta(M,\ N;0)$ 中的函数分解为两个函数之和，它们分别在下、上半平面内解析。令 $S_\mu^\pm=\{z:\ \pm\mathrm{Im}z>0,\ \ |z|<\mu\}$.类 $B_\eta^\pm(M,\ N;0)$ 是所有满足以下条件的函数 $f\in B_\eta(M,\ N;0)$ 所构成的类：存在 $\mu=\mu_f>0$ 使得 $f\in C^\infty\left(S_\mu^\pm\right)\cap$全纯函数 $\left(S_\mu^\pm\right)$.

设 γ 为一个具有非解析 $\widehat{\gamma}$ 的可容许权，并设 M 为一个拟解析正则序列（即，$\sum_{n\geq 1}\frac{M_n}{M_{n+1}}=\infty$）。我们将在第5.3节证明如下因子分解：

$$B_\eta(M\gamma,\widehat{\gamma};0)\subseteq B^+_{\eta_1}(M\gamma,\widehat{\gamma};0)+B^-_{\eta_1}(M\gamma,\widehat{\gamma};0),\quad \forall \eta_1>\eta>0. \tag{3.1}$$

注意，上述因子分解并不唯一，但 $B^+_\eta(M\gamma,\ \widehat{\gamma};0)\cap B^-_\eta(M\gamma,\ \widehat{\gamma};0)=C^\omega(0)$，它是原点处所有实解析芽构成的类

还要注意

$$\sum_{n\geq 1}\frac{M_n}{M_{n+1}}=\infty\quad\Rightarrow\quad\sum_{n\geq 1}\sqrt{\frac{M_n\gamma_n}{M_{n+1}\gamma_{n+1}}}=\infty,$$

因此，根据 Carleson、Salinas 和 Korenblum 的结果，类 $B^\pm_\eta(M\gamma,\ \widehat{\gamma};\ J)$ 是拟解析的。下一个引理将在第5.3节中证明，是定理 3.3 证明中的关键组成部分。

引理 3.12. 对于任意 $\eta>0$,

$$\mathcal{B}_\gamma B^+_\eta(M\gamma,\widehat{\gamma};0)\cap\mathcal{B}_\gamma B^-_\eta(M\gamma,\widehat{\gamma};0)=\mathcal{B}_\gamma C^\omega(0),$$

其中 $C^\omega(0)$ 是原点处实解析芽构成的类。

定理 3.3 的证明。设 $\eta>1$和 $f\in B_{1/\eta}(M\gamma,\ \widehat{\gamma};\ J)$，其中 $f^{(n)}(0)\equiv 0$对所有 $n\geq 0$.均成立。考虑因子分解 $f=f_++f_-$，其中 $f_\pm\in B_{\eta_0}(M\gamma,\ \widehat{\gamma};\ J)$，对于某个 $1/\eta<\eta_0<1$成立。由 $\mathcal{B}_\gamma$的线性性，可得 $\mathcal{B}_\gamma f=\mathcal{B}_\gamma f_++\mathcal{B}_\gamma f_-$。根据定理 1.6，$\mathcal{B}_\gamma f\in A(M,\ \gamma;0)$，且对于所有 $n\geq 0$，$(\mathcal{B}_\gamma f)^{(n)}(0)\equiv 0$。由于$A(M,\ \gamma;0)\subset C^M(0)$，且后者是拟解析的，我们得出

$$\mathcal{B}_\gamma f\equiv 0\quad\Rightarrow\quad\mathcal{B}_\gamma f_+\equiv-\mathcal{B}_\gamma f_-.$$

因此 $\mathcal{B}_\gamma f_\pm\in\mathcal{B}_\gamma B^+_\eta(M\gamma,\ \widehat{\gamma};0)\cap\mathcal{B}_\gamma B^-_\eta(M\gamma,\ \widehat{\gamma};0)$，由引理 3.12 可知 $\mathcal{B}_\gamma f_\pm\in\mathcal{B}_\gamma(C^\omega(0))$。由于映射 $\mathcal{B}_\gamma$在类 $B^\pm_\eta(M\gamma,\ \widehat{\gamma};\ J)$ 和 $C^\omega(0)$ 中是单射，因此有 $f_\pm\in C^\omega(0)$。由此得出 $f\in C^\omega(0)$，其中对于所有 $n\geq 0,\ \ f^{(n)}(0)\equiv 0$ 均成立，因此 $f\equiv 0$，如所要证。□

注记 3.13. 在 [23], 中也使用了相同的技巧，从拟解析 Beurling类 $C^M_0(I)$推导出一个新的 Phragmén–Lindelöf 型定理。

4. The inclusion $\mathcal{L}_\gamma A(M,\gamma;I)\subseteq B_\eta(M\gamma,\widehat{\gamma};I)$

4.1. K**的导数估计**。回顾

$$K(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}t^{-z}\gamma(z)dz,\quad c>0,$$

并设

$$K_1(t):=K\left(e^t\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{-zt}\gamma(z)dz.$$

引理 4.1. 若 γ是具有非解析 $\widehat{\gamma}$的可容许的(即，具有$\lim_{\rho\to\infty}\varepsilon(\rho)=0$)，则对任意 $\delta>0$，有

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}\left(e^tK_1(t)\right)\right|\lesssim_\delta(1+\delta)^n\widehat{\gamma}_nK_1(t-\delta),$$

证明。 首先我们将证明

$$\left|K_1^{(n)}(t)\right|\lesssim_\delta(1+\delta)^n\widehat{\gamma}_nK_1(t-\delta). \tag{4.1}$$

记

$$K_1^{(n)}(t)=\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma z^ne^{-zt}\gamma(z)dz,$$

对于 c 曲线 Γ，其具体形式将在下文说明。固定 $\delta>0$，并将解记为 $\rho_0=\rho_0(t,\ \delta)$ to

$$\log L(\rho)+\varepsilon(\rho)=t-\delta.$$

假设 t 足够大，使得 $\varepsilon(\rho_0)<\delta$，并考虑曲线

$$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3=(-i\infty,-i\rho_0]+\left\{\rho_0 e^{i\theta}:\theta\in\left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]\right\}+[i\rho_0,i\infty).$$

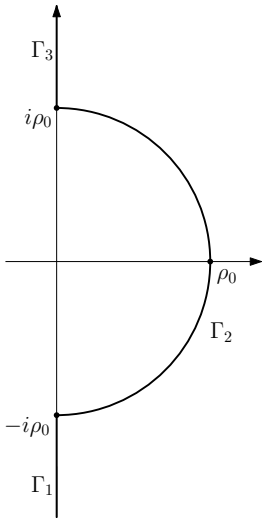

图 4.1. $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$

由 (2.1)，对于 $z=\rho_0 e^{i\theta}$，我们有

$$\begin{aligned}\left|e^{-zt}\gamma(z)\right|&=\exp\left[\rho_0\cos\theta\left(\log L(\rho_0)-t\right)-\rho_0\theta\sin\theta\varepsilon(\rho_0)+o(\rho_0\varepsilon(\rho_0))\right]\\&=\exp\left[-\rho_0\cos\theta\left(\varepsilon(\rho_0)+\delta\right)-\rho_0\theta\sin\theta\varepsilon(\rho_0)+o(\rho_0\varepsilon(\rho_0))\right]\\&\le\exp\left[-2\cos\theta\rho_0\varepsilon(\rho_0)-\rho_0\theta\sin\theta\varepsilon(\rho_0)+o(\rho_0\varepsilon(\rho_0))\right]\end{aligned}$$

注意，在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，函数 $\theta\mapsto-2\cos\theta-\theta\sin\theta$ 单调递增，且有上界 $-\frac{\pi}{2}$. 因此，对于足够大的 $z\in\Gamma_2$ 和 t，我们有

$$\left|e^{-zt}\gamma(z)\right|\le\exp\left[-\tfrac{\pi}{2}\rho_0\varepsilon(\rho_0)(1+o(1))\right]\le\exp\left[-\left(\tfrac{\pi}{2}-2\delta\right)\rho_0\varepsilon(\rho_0)+\delta\rho_0\varepsilon(\rho_0)\right]$$

因此，由定理 A 可得

$$e^{\delta\rho_0\varepsilon(\rho_0)}\lesssim_\delta\left(K_1(t-2\delta)\right)^\delta\lesssim_\delta K_1(t-3\delta).$$

由此我们得出

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_2}z^n e^{-zt}\gamma(z)dz\right|&\lesssim_\delta K_1(t-3\delta)\rho_0^{n+1}e^{-\left(\frac{\pi}{2}-2\delta\right)\rho_0\varepsilon(\rho_0)}\\&\le\rho_0 K_1(t-3\delta)\sup_{\rho>0}\rho^n e^{-\left(\frac{\pi}{2}-2\delta\right)\rho\varepsilon(\rho)}.\end{aligned}$$

由于函数 ε是慢变的，我们得到

$$\sup_{\rho>0}\rho^n e^{-\left(\frac{\pi}{2}-2\delta\right)\rho\varepsilon(\rho)}\lesssim_\delta(1+3\delta)^n\sup_{\rho>0}\rho^n e^{-\frac{\pi}{2}\rho\varepsilon(\rho)}\lesssim_\delta(1+4\delta)^n\widehat{\gamma}_n.$$

我们得到

$$\left|\int_{\Gamma_2} z^n e^{-zt}\gamma(z)dz\right| \lesssim_\delta (1+4\delta)^n \widehat{\gamma}_n K_1(t-4\delta).$$

若 $z=i\rho\in\Gamma_3$，则

$$\left|e^{-zt}\gamma(z)\right| = \exp\left[-\tfrac{\pi}{2}\rho\varepsilon(\rho)(1+o(1))\right].$$

Thus

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_3} z^n e^{-zt}\gamma(z)dz\right| &\lesssim_\delta e^{-\delta\rho_0\varepsilon(\rho_0)}\cdot\left(\sup_{\rho>0}\rho^n e^{-\left(\frac{\pi}{2}-2\delta\right)\rho\varepsilon(\rho)}\right)\int_{\rho_0}^{\infty} e^{-\delta\rho\varepsilon(\rho)}\\ &\lesssim_\delta K_1(t-4\delta)\cdot(1+4\delta)^n\widehat{\gamma}_n.\end{aligned}$$

$\int_{\Gamma_1}$ 的界可用类似的方法得到，从而证明了 **(4.1)**。为完成证明，我们注意到

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(e^t K_1(t)\right) = e^t\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}K_1^{(k)}(t).$$

So

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}\left(e^t K_1(t)\right)\right| \lesssim_\delta e^t K_1(t-\delta)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+\delta)^k\widehat{\gamma}_k.$$

由于 $(\widehat{\gamma}_k)_k$ 最终是对数凸的，且 $\left(\frac{\widehat{\gamma}_k}{k!}\right)^{1/k}\underrightarrow{}\infty$，因此我们有

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}\left(e^t K_1(t)\right)\right| \lesssim_\delta (1+\delta)^n e^t K_1(t-\delta).$$

最后，注意到以下事实即可完成证明：

$$e^t K_1(t-\delta) \lesssim_\delta K_1(t-2\delta).$$

□

4.2. 非解析情形下包含关系的证明 $\mathcal{L}_\gamma A(M,\ \gamma,\ I)\subseteq B_\eta(M\gamma,\ \widehat{\gamma};\ I)$。包含关系 $R_\gamma A(M,\ \gamma,\ I)\subseteq B_\eta(M\gamma,\ \widehat{\gamma};\ I)$ 的证明需要以下引理，其证明见附录 A。

引理 4.2。对于任意 $\eta<1$，存在 $\delta=\delta(\eta)>0$，使得

$$E(t\delta)E(t\eta)\lesssim_\eta E(t),\quad and\quad E(t\delta)E(t\eta)\lesssim_\eta \frac{1}{|K(t)|},\quad \forall t>0.$$

非解析情形下包含关系 $R_\gamma A(M,\ \gamma,\ I)\subseteq B_\eta(M\gamma,\ \widehat{\gamma};\ I)$ 的证明。不妨设 $I=[0,1)$。令 $G\in A(M,\ \gamma,\ I)$ 和 $J=[0,a]\subset I$。置

$$f(x)=(\mathcal{L}_\gamma G)(x)=\int_0^\infty G(xt)K(t)\,dt.$$

根据定义，存在一个 $C>0$，使得

$$\left|G^{(n)}(t)\right|\lesssim_\eta C^n M_n E(t\eta),$$

对于任意 $\eta>1.$，选择 η 足够接近 1，使得 $a<\frac{1}{\eta^2}$，对于任意 $x\in J$，我们有

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le\left|\int_0^\infty t^n G^{(n)}(xt)K(t)\,dt\right|\lesssim C^n M_n\int_0^\infty t^n E(tx\eta)|K(t)|\,dt\lesssim C^n\left(M_n\int_1^\infty t^n E\left(t\eta^{-1}\right)|K(t)|\,dt+1\right).$$

根据引理 4.2，存在 $\delta>0$ 使得 $E(\delta t)E\left(t\eta^{-1}\right)|K(t)|\lesssim 1$。因此

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\lesssim C^n\left(M_n\int_1^\infty t^n\frac{1}{E(\delta t)}dt+1\right)\lesssim C^n\left(M_n\int_1^\infty t^n\frac{\gamma(n+3)}{(\delta t)^{n+2}}dt+1\right)\lesssim\left(\frac{C}{\delta}\right)^n M_n\gamma(n+3).$$

由于 $\left(\frac{\gamma(n+3)}{\gamma_{n+1}()}\right)^{1/n}\to 1$，我们得出 $f\in C_\infty^{M\cdot\gamma}(I)$。

接下来，我们将证明，对于任意 $\eta>1.$，$f(e^x)\in C_\eta^{\widehat{\gamma}}([-\infty,0))$。令 $K_1(u):=K(e^u)$，且 $K_2(u)=e^uK_1(u)$。那么$f(e^x)=\int_0^\infty G(e^xt)\ K(t)\ dt\overset{t=e^u}{=}\int_{\mathbb{R}}G\left(e^{x+u}\right)K_1(u)e^udu=\int_{\mathbb{R}}G(e^y)\ K_1(y-x)e^{y-x}dy=\int_{\mathbb{R}}G(e^y)\ K_2(y-x)dy.$

Thus

$$\frac{d^n}{dx^n}f(e^x)=(-1)^n\int_{\mathbb{R}}G(e^y)K_2^{(n)}(y-x)\,dy$$

由引理 4.1，我们有

$$\left|K_2^{(n)}(y-x)\right|\lesssim_\delta(1+\delta)^n\widehat{\gamma}_n\left|K_1(y-x-\delta)\right|,$$

因此我们得出

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}f(e^x)\right|\lesssim_\delta(1+\delta)^n\widehat{\gamma}_n\int_{\mathbb{R}}G(e^y)\left|K_1(y-x-\delta)\right|dy.$$

设 J 是一个紧　　子集 $[-\infty,0)$。我们将 δ 取充分小，使得对任意 $x\in J$，都有$-x-\delta>\frac{\delta}{2}$。于是

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}f(e^x)\right|\lesssim_\delta(1+\delta)^n\widehat{\gamma}_n\int_{\mathbb{R}}E\left(e^{y+\delta/4}\right)\left|K_1\left(y+\frac{\delta}{2}\right)\right|dy\lesssim_\delta(1+\delta)^n\widehat{\gamma}_n.$$

我们得到，对任意 $\eta>1$，都有 $f(e^x)\in C_\eta^{\widehat{\gamma}}([-\infty,0))$，因此 $f\in B_\eta(M\gamma,\ \widehat{\gamma};\ I)$. □

4.3. 解析情形下的包含关系 $\mathcal{L}_\gamma A(M,\ \gamma;\ I)\subseteq D(M,\ \gamma;I)$。本节中，我们始终假设 γ 是一个具有解析 $\widehat{\gamma}$ 的可容许权（即 $\lim_{\rho\to\infty}\varepsilon(\rho)>0$），并且 $I=[0,1$。回忆

$$\Omega_\eta(\gamma):=\left\{z:\sup_{t>0}E(t\eta)\left|K\left(\frac{t}{z}\right)\right|<\infty\right\}.$$

包含关系的证明 $\mathcal{L}_\gamma A(M,\ \gamma;\ I)\subseteq D(M,\ \gamma;\ I)$。。对于 $\eta>1$，假设函数 F 满足

$$|F^{(n)}(t)|\le C^{n+1}M_nE(t\eta).$$

令 $f=\mathcal{L}_\gamma F$。根据引理 4.2，存在一个 $\delta>0$，使得对于任意 $z\in\Omega_{\eta^2}(\gamma)$，都有

$$\left|\int_0^\infty F(t)K\left(\frac{t}{z}\right)\frac{dt}{z}\right|\lesssim\frac{1}{|z|}\int_0^\infty\frac{E(t\eta)}{E(t\eta^2)}dt\lesssim\frac{1}{|z|}\int_0^\infty\frac{1}{E(t\delta)}dt<\infty.$$

因此，根据控制收敛定理，函数

$$f(z)=\int_0^\infty F(t)K\left(\frac{t}{z}\right)\frac{dt}{z}$$

在 $\Omega_{\eta^2}(\gamma)$ 中全纯。对于给定的 $n\ge 0$，记

$$F(t)=\sum_{0\le k<n}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n+R_n(t,F),$$

并注意到

$$R_n(f,z)=\int_0^\infty R_n(t,F)K\left(\frac{t}{z}\right)\frac{dt}{z}.$$

设 $z = re^{i\theta}$，并作变量代换 $t = r \cdot u$，则有

$$R_n(f,z) = \int_0^\infty R_n(ru,F)K\left(ue^{-i\theta}\right)e^{-i\theta}du.$$

根据余项的拉格朗日形式 $R_n(t,F)$，对于 $t \geq 0$，我们有

$$|R_n(t,F)| \leq C^{n+2}\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}E(t\eta)t^{n+1}.$$

因此，根据引理 4.2，存在 $\delta > 0$，使得

$$|R_n(f,z)| \leq C^{n+2}\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_0^\infty (ru)^{n+1}E(rt\eta)\left|K\left(ue^{-i\theta}\right)\right|du \lesssim_\eta C_\eta^n\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|z|^{n+1}\int_0^\infty \frac{t^n}{E(\delta t)}dt.$$

根据定义

$$E(\delta t) \geq \frac{\delta^{n+3}t^{n+2}}{\gamma_{n+3}},$$

所以，我们有

$$\int_0^\infty \frac{t^n}{E(\delta t)}dt = \int_0^1 \frac{t^n}{E(\delta t)}dt + \int_1^\infty \frac{t^n}{E(\delta t)}dt \lesssim_\eta 1 + \frac{\gamma(n+3)}{\delta^n} \lesssim_\eta \frac{\gamma(n+3)}{\delta^n}.$$

由于在.....处存在一个 > 0 such t

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} \leq C^{n+1} \quad \text{and} \quad \frac{\gamma_{n+3}}{\gamma_{n+1}} \leq C^{n+1},$$

我们已经证明

$$|R_n(f,z)| \leq C_\eta^n\frac{M_n}{n!}\gamma_{n+1}|z|^{n+1}, \quad \forall z \in \Omega_{\eta^2}(\gamma).$$

这就证明了所声称的估计。 □

5. 非齐次卡尔曼类中的几乎全纯延拓 ES

5.1. 非解析情形下 $B(\widehat{\gamma},\ M;\ I)$ 中函数的几乎全纯延拓。 在本节中，我们固定一个可容许权 γ，其对应的 $\widehat{\gamma}$ 为非解析，并取一个正则序列 $M = (n!m_n)_{n\geq 0}$，并令

$$\gamma_n = L^n(n), \quad \widehat{\gamma}_n = n!\widehat{L}^n(n).$$

论断 5.1。 设 $C_1 > 0$。存在常数 C_2，C_3，$C_4 > 0$，使得

(1) $1 \leq m_k^{1/k} \leq m_1 \cdot k^{C_2}$，对任意 $k \geq 2$ 均成立；(2) $m_k^{1/k} \leq m_n^{1/n} \leq C_3 m_k^{1/k}$ 对任意 $k \in \mathbb{N}$ 和任意 $n \in [k, C_1 k]$ 均成立；(3) $m_k^{n/k} \leq C_4^{k+n}m_n$ 对任意 $n,\ k \in \mathbb{N}$. 均成立

证明。 根据正则性假设 3，我们有

$$m_k^{1/k} \leq m_{k+1}^{1/(k+1)} \leq C^{1/(k+1)}m_k^{1/k} \tag{5.1}$$

因此

$$m_k^{1/k} \leq C^{\sum_{j=1}^k \frac{1}{j}}m_0 \leq (2C)^{\log(k+1)} \leq k^{C_2}m_1,$$

从而证明了第一个断言。

至于第二个断言，若 $n \geq k$，则反复应用 5.1 可得

$$m_k^{1/k} \leq m_n^{1/n} \leq m_k^{1/k} \cdot \exp\left[\log C \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{k}\right].$$

特别地，若 $n \le C_1 k$，则可得

$$m_n^{1/n} \le m_k^{1/k} \cdot \exp\left[\log C \sum_{j=k+1}^{C_1 k} \frac{1}{k}\right] \le m_k^{1/k} \cdot \exp\left[\log C \left(\log C_1 + 1\right)\right] := m_k^{1/k} C_3,$$

证明第二个断言。

最后，若 $n \ge k$，则

$$m_k^{1/k} \le m_n^{1/n}, \quad \Rightarrow \quad m_k^{n/k} \le m_n,$$

而若 $n < k$，则迭代 5.1 得到

$$m_k^{1/k} \le \exp\left[\log C \sum_{j=n+1}^{k} \frac{1}{j}\right] m_n^{1/n} \le m_n^{1/n} \exp\left[\log C \left(\log k + 1 - \log n\right)\right].$$

我们选择 $C_4 > 0$ 使得

$$\exp\left[\log Cn \left(\log k + 1 - \log n\right)\right] \le C_4^{n+k},$$

并得到第三个断言 □

注记 5.2。在上述论断的最后一个断言中，如果此外序列 $v_k = m_k^{1/k}$ 是慢变的（即，如果 $v_{2k}/v_k \to 1$ 当 $k \to \infty$时），那么 C_4 可以任意接近于 1，即对于任意 $\eta > 1$，存在$C_\eta > 0$ 使得

$$m_k^{n/k} \le C_\eta \eta^{k+n} m_n.$$

论断 5.3。设 $C_1 > 1$ 和 $\eta > 1$. 存在 $k_0 > 0$ 和 $C_3 > 0$，使得对于任意 $k_0 \le k \le n \le C_1 k$，以下结论成立：

(1) $\frac{1}{\eta^n} \le \frac{\widehat{\gamma}_n}{n!} \left(\frac{1}{\eta \widehat{L}(k)}\right)^n \le \frac{1}{\eta^{n/2}}$.
(2) $1 \le m_n m_k^{-n/k} \le C_3^n$

证明。回顾一下，

$$\frac{\widehat{\gamma}_k}{n!} \left(\frac{1}{\eta \widehat{L}(k)}\right)^n = \left(\frac{\widehat{L}(n)}{\eta \widehat{L}(k)}\right)^n.$$

$\widehat{\ }$函数 L 最终非递减，因此对于 $k > k_0$,

$$\left(\frac{\widehat{L}(k)}{\eta \widehat{L}(k)}\right)^n \le \left(\frac{\widehat{L}(n)}{\eta \widehat{L}(k)}\right)^n \le \left(\frac{\widehat{L}(Ck)}{\eta L(k)}\right)^n$$

由于 $\frac{\widehat{L}(Ck)}{\widehat{L}(k)} \to 1$，我们有

$$\frac{1}{\eta^n} \le \left(\frac{\widehat{L}(n)}{\eta \widehat{L}(k)}\right)^n \le \frac{1}{\eta^{n/2}}$$

从而证明了第一个断言。

至于第二个断言，根据断言 5.1 的第二个断言，我们有

$$m_n m_k^{-n/k} = m_n \left(\frac{1}{m_k^{1/k}}\right)^n \le C_3^n \frac{m_k^{n/k}}{m_k^{n/k}} = C_3^n.$$

由于 $m_j^{1/j}$ 是非递减的，我们有

$$m_n m_k^{-n/k} = \left(\frac{m_n^{1/n}}{m_k^{1/k}} \right)^n \geq 1,$$

由此证明了第二个断言。 □

固定一个紧区间 J，使得 $0 \in J$。给定一个 $z \in \mathbb{C}$，用 z^* 表示其在 J上的投影，即 $z^* \in J$，且满足

$$|z - z^*| = \operatorname{dist}(z, J).$$

给定 $\eta > 0$ 和 $Q > 0$，考虑集合

$$V_{k,\eta,Q} = \left\{ z : \operatorname{dist}(z, J) \leq \frac{|z^*|\,\eta}{\widehat{L}(k)} \right\} \cup \left\{ z : \operatorname{dist}(z, J) \leq \frac{1}{Qm_k^{1/k}} \right\}.$$

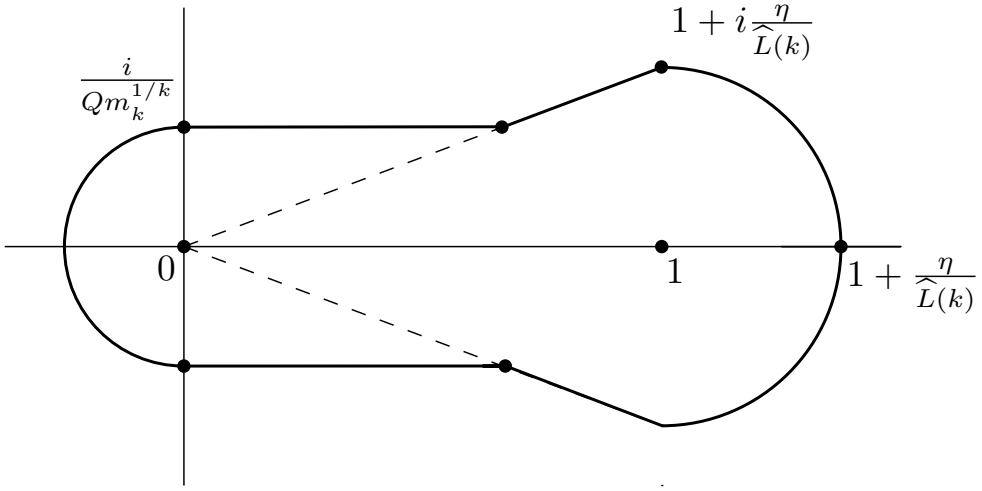

图5.1. 集合 $V_{k,\ \eta,\ Q}$，其中 $J = [0, 1]$

论断 5.4。对于固定的 $\eta > 0$ 和 $Q > 0$，有

$$\operatorname{dist}(\partial V_{k+1,\eta,Q}, \partial V_{k,\eta,Q}) \geq \min \left\{ \frac{1}{Qm_{k+1}^{1/(k+1)}} - \frac{1}{Qm_k^{1/k}}, \frac{\eta}{2} \frac{1}{Qm_{k+1}^{1/(k+1)}} \left(\frac{\widehat{L}(k+1)}{\widehat{L}(k)} - 1 \right) \right\}, \quad k > k_0.$$

证明。不妨设 $J = [0, 1]$。令 $z_0 = x_0 + iy_0 \in \partial V_{k+1,\ \eta,\ Q}$。首先假设$x_0 \leq 1$。如果 $z_0 \in \partial \left\{ z : \operatorname{dist}(z,\ J) \leq \frac{1}{Qm_{k+1}^{1/(k+1)}} \right\}$，那么由于 $\operatorname{dist}(z,\ J)\overline{z^*} \geq \operatorname{dist}(z,\ J)$，我们有

$$\operatorname{dist}(z_0, \partial V_{k,\eta,Q}) \geq \operatorname{dist}\left(z_0, \left\{ z : \operatorname{dist}(z, J) \leq \frac{1}{Qm_k^{1/k}} \right\} \right) = \frac{1}{Qm_{k+1}^{1/(k+1)}} - \frac{1}{Qm_k^{1/k}}.$$

另一方面，如果 $z_0 \in \partial\left\{z:\ \mathrm{dist}(\frac{z}{z^*} \leq \widehat{L}^{\eta,\ J)\,(k+1)}\right\}$，那么 dist $(z_0,\ \partial V_{k,\ \eta,\ Q})$ 大于z_0 到直线 $y = \widehat{L}^{\eta}{}_{k()}x$，因此

$$\mathrm{dist}\left(z_0, \partial V_{k,\eta,Q}\right) \geq \frac{\left|\frac{\eta}{\widehat{L}(k)}x_0 - y_0\right|}{\sqrt{1+\frac{\eta^2}{\widehat{L}^2(k)}}}.$$

注意，$z_0 \in \partial\left\{z:\ 距离(\frac{z}{z^*} \leq \widehat{L}^{\eta,\ J)\,(k+1)}\right\}$ 意味着

$$x_0 \geq \frac{1}{Qm_{k+1}^{1/(k+1)}}\frac{\widehat{L}(k+1)}{\eta}, \quad \text{and} \quad y_0 = x_0\frac{\eta}{\widehat{L}(k+1)}.$$

因此

$$\frac{\left|\frac{\eta}{\widehat{L}(k)}x_0 - y_0\right|}{\sqrt{1+\frac{\eta^2}{\widehat{L}^2(k)}}} \geq \frac{\eta}{2}\frac{1}{Qm_{k+1}^{1/(k+1)}}\left(\frac{\widehat{L}(k+1)}{\widehat{L}(k)} - 1\right)$$

最后，如果 $x_0 > 1$，那么

$$\mathrm{dist}\left(z_0, J\right) = \max\left\{\frac{1}{Qm_{k+1}^{1/(k+1)}}, \frac{\eta}{\widehat{L}(k+1)}\right\}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}\left(z_0, \partial V_{k,\eta,Q}\right) &\geq \max\left\{\frac{1}{Qm_k^{1/k}}, \frac{\eta}{\widehat{L}(k)}\right\} - \max\left\{\frac{1}{Qm_{k+1}^{1/(k+1)}}, \frac{\eta}{\widehat{L}(k+1)}\right\} \\ &\geq \max\left\{\frac{1}{Qm_k^{1/k}} - \frac{1}{Qm_{k+1}^{1/(k+1)}},\ \frac{\eta}{\widehat{L}(k)} - \frac{\eta}{\widehat{L}(k+1)}\right\},\end{aligned}$$

这就证明了该论断。 □

对于 $f \in C^{\infty}(J)$ 和 $N \in \mathbb{N}$，考虑函数

$$P_N\left(z\right) = P_N\left(z; f\right) = \sum_{j=0}^{N}\frac{f^{(j)}(z^*)}{j!}(z - z^*)^j.$$

显然，$P_N \in C^{\infty}\left(\mathbb{C}\right)$ 和 $P_N|_J = f$.

论断 5.5。假设 $f \in C^{\infty}(J)$ 满足以下界

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C\min\left\{\frac{\widehat{\gamma}_n}{\eta_0^n x^n}, M_n\right\}, \forall n \geq 1.$$

那么，对于任意 $0 < \eta < \eta_0$ 和任意 $Q_1 > 1$，存在 $Q > 0$ 和 ℓ，$k_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$\left|\bar{\partial}P_{\ell k-\ell}(z)\right| + \left|\bar{\partial}P_{\ell k}(z)\right| + \left|\bar{\partial}P_{\ell k+\ell}(z)\right| + \left|P_{\ell k+\ell}(z) - P_{\ell k-\ell}(z)\right| \leq \frac{C}{Q_1^k},$$

对于任意 $k > k_0$ 和 $z \in V_{k,\ \eta,\ Q}$.

证明。 注意到

$$\left|\bar{\partial}P_N(z)\right| \leq \frac{1}{2}\max\left\{m_{N+1}\mathrm{dist}^N\left(z, J\right),\ \frac{\widehat{\gamma}_{N+1}}{\eta_0^N\left(N+1\right)!}\left|\frac{z}{z^*} - 1\right|^N\right\}.$$

因此，如果 $z \in V_{k,\ \eta,\ Q}$，那么

$$\left|\bar{\partial} P_N(z)\right| \leq \frac{1}{2} \max\left\{ m_{N+1} \left(\frac{1}{Q m_k^{1/k}} \right)^N,\ \widehat{\gamma}_{N+1} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \cdot \frac{1}{\widehat{L}(k)} \right)^N \right\}$$

根据断言 5.1 的第一个结论，我们有

$$m_{N+1} \leq C m_N N^{C_2}, \quad \frac{\widehat{\gamma}_{N+1}}{(N+1)!} \leq C \frac{\widehat{\gamma}_N}{N!} N^{C_2},$$

因此

$$\left|\bar{\partial} P_N(z)\right| \leq C N^{C_2} \cdot \max\left\{ m_N \left(\frac{1}{Q m_k^{1/k}} \right)^N,\ \frac{\widehat{\gamma}_N}{N!} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \cdot \frac{1}{\widehat{L}(k)} \right)^N \right\}.$$

I特别地，如果 $N = \ell k - \ell,\ \ \ell k,\ \ \ell k + \ell$ 且 Q 足够大，那么由断言 5.3 可得

$$\left|\bar{\partial} P_N(z)\right| \leq C \ell^{C_2} (k+1)^{C_2} \cdot \max\left\{ \left(\frac{C_6}{Q} \right)^{(k-1)\ell},\ \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{\frac{1}{2}(k-1)\ell} \right\}.$$

因此，我们可以将 ℓ 和 Q 取足够大，使得

$$\left|\bar{\partial} P_{\ell k-\ell}(z)\right| + \left|\bar{\partial} P_{\ell k}(z)\right| + \left|\bar{\partial} P_{\ell k+\ell}(z)\right| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{Q_1^k}.$$

接下来，我们处理项 $|P_{\ell k+\ell}(z) - P_{\ell k-\ell}(z)|$。由三角不等式可得

$$\begin{aligned} |P_{\ell k+\ell}(z) - P_{\ell k-\ell}(z)| &\leq \sum_{j=\ell k-\ell}^{\ell k+\ell} \left| \frac{f^{(j)}(z^*)}{j!} \right| |z - z^*|^j \\ &\leq \max\left\{ \sum_{j=\ell k-\ell}^{\ell k+\ell} m_j Q^{-k} m_k^{-j/k},\ \sum_{j=\ell k-\ell}^{\ell k+\ell} \frac{\widehat{\gamma}_j}{j!} \left(\frac{1}{\eta \widehat{L}(k)} \right)^j \right\}. \end{aligned}$$

因此，由断言 5.3 可得

$$|P_{\ell k+\ell}(z) - P_{\ell k-\ell}(z)| \leq (2\ell+1) \max\left\{ \left(\frac{C_6}{Q} \right)^{(k-1)\ell}, \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{\frac{1}{2}(k-1)\ell} \right\} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{Q_1^k}.$$

□

引理 5.6. 假设对某些 $\delta > 0$, $\frac{1}{m_k^{1/k}} - \frac{1}{m_{k+1}^{1/(k+1)}} \gtrsim e^{-\delta k}$ 和 $\widehat{L}(k+1) - \widehat{L}(k) \gtrsim e^{-\delta k}$. 进一步假设 $f \in C^\infty(J)$ 满足以下界

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq C \min\left\{ \frac{\widehat{\gamma}_n}{\eta_0^n x^n}, M_n \right\}, \forall n \geq 1.$$

那么对于任意 $0 < \eta < \eta_0$ 以及任意 $Q_2 > 1$，存在 $k_0, Q > 0$ 和 $F \in C_C^1(\mathbb{C})$，使得 $F|_J = f$ and d

$$\left|\bar{\partial} F(z)\right| \leq \frac{1}{Q_2^k}, \quad z \in V_{k,\eta,Q},\ k \geq k_0.$$

证明。对于每个 k，令 $\phi_k \in C_C^1(\mathbb{C})$ 满足：$\phi_k \equiv 1$ 在 $V_{k,\ \eta,\ Q} \setminus V_{k+1,\ \eta,\ Q}$ 上成立，并在 $V_{k-1,\ \eta,\ Q} \setminus V_{k+2,\ \eta,\ Q}$之外为零。我们以归纳方式构造这些函数 ϕ_k，使得

$$\bar{\partial} \phi_{k-1} = -\bar{\partial} \phi_{k+1}, \quad \text{in } V_{k,\eta,Q} \setminus V_{k+1,\eta,Q}.$$

根据断言 5.4 及我们的假设，我们可以选择这些（ϕ_k），使得

$$\left|\bar{\partial}\phi_{k-1}\right| \lesssim e^{2\delta k}, \quad \text{in } V_{k,\eta,Q} \setminus V_{k+1,\eta,Q}, \quad \forall \delta > 0.$$

对于 $1 < \eta < \eta_0$ 和 $Q_1 = e^{3\delta} Q_2$，我们按断言 5.5 选取 ℓ 和 Q，并令

$$F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(z) P_{j\ell}(z).$$

根据定义，若 $z \in V_{k,\eta,Q} \setminus V_{k+1,\eta,Q}$，则

$$F(z) = \phi_{k-1}(r) P_{\ell(k-1)}(z) + \phi_k(r) P_{\ell k}(z) + \phi_{k+1}(r) P_{\ell(k+1)}(z).$$

因此

$$\begin{aligned} \left|\bar{\partial} F(z)\right| &\leq \left|\bar{\partial} P_{\ell(k-1)}(z)\right| + \left|\bar{\partial} P_{\ell k}(z)\right| + \left|\bar{\partial} P_{\ell(k+1)}(z)\right| + \left|\bar{\partial}\phi_{k-1}\right| \left|P_{\ell(k+1)}(z) - P_{\ell(k-1)}(z)\right| \\ &\leq \frac{e^{3\delta k}}{Q_1^k} = \frac{1}{Q_2^k}. \end{aligned}$$

注意到上述界随 k 的增大而减小，并且

$$V_{k,\eta,Q} = \bigcup_{j \geq k} V_{j,\eta,Q}$$

证明至此完成。 □

5.1.1. 用解析函数逼近 $B(\widehat{\gamma}, M;\ I)$ 中的函数：非解析情形 .

引理 5.7。 假设对某些 $\delta > 0$, $\frac{1}{m_k^{1/k}} - \frac{1}{m_{k+1}^{1/(k+1)}} \gtrsim e^{-\delta k}$ 和 $\widehat{L}(k+1) - \widehat{L}(k) \gtrsim e^{-\delta k}$. 进一步假设 $f \in B_{1/\eta_0}(M, \widehat{\gamma}; J)$。那么对于任意 $Q_3 > 0$ 和 $0 < \eta < \eta_0$，存在 $Q > 0$ 以及一个序列 $(F_k)_{k \geq k_0}$，使得

(1) $F_k \in$ 全纯函数$(V_{k,\eta,Q}) \cup C\left(V_{k,\eta,Q}\right)$, 其中最大值为$_{V_{k,\eta,Q}} |F_{k-1} - F_k| \leq \frac{1}{Q_3^k}$. (2) $F_k \to f$ 在 $C^\infty(J)$ 拓扑中，即 $F_{(k}{}^{n} \to f^{(n)})$ 关于 J 对任意 $n \geq 0$.一致

证明。W 首先假设 $f \in C_{1/\eta_0}(M,\ \widehat{\gamma}; J)$。 用 $C^n M_n$ 替换 M_n 后，我们可以假设 t

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C \min\left\{\frac{\widehat{\gamma}_n}{\eta_0^n x^n}, M_n\right\}, \forall n \geq 1.$$

对于 $1 < \eta < \eta_0$ 和 $Q_2 = 2Q_3$, ，令 F 为引理 5.6 中构造的函数。由柯西–庞培公式,

$$F(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial} F(w) \frac{1}{w - z} d\mu_2(w)$$

其中 μ_2 是 $\mathbb{C}$ 中的平面勒贝格测度。给定 $k \geq k_0$，考虑函数

$$F_k(z) = \int_{\mathbb{C} \setminus V_{k-1,\eta_0,Q}} \bar{\partial} F(w) \frac{1}{w - z} d\mu_2(w)$$

由于 $\cap_k V_{k-1,\ \eta_0,\ Q} = J$，因此 $F_k \to F = f$ 在 $C^\infty(J)$ 拓扑下成立。此外，对于 $k \geq k_0$, ，函数 F_k 在 $V_{k,\ \eta_0,\ Q} \subset V_{k-1,\ \eta_0,\ Q}$ 中解析。记

$$F_{k-1} - F_k = \int_{V_{k-2,\eta_0,Q} \setminus V_{k-1,\eta_0,Q}} \bar{\partial} F(w) \frac{1}{w - z} d\mu_2(w)$$

并回忆起

$$\left|\bar{\partial}F\right| \leq \frac{1}{Q_2^k}, \quad \text{在 } V_{k-2,\eta_0,Q},$$

我们有

$$|F_{k-1} - F_k| \leq \frac{1}{Q_2^k} \frac{1}{\operatorname{dist}(\partial V_{k,\eta_0,Q}, \partial V_{k-1,\eta_0,Q})} \quad \text{in } V_{k,\eta_0,Q}.$$

因此，由断言 5.4 可得

$$|F_{k-1} - F_k| \leq \frac{e^{3\delta k}}{Q_2^k} = \frac{1}{Q_3^k} \quad \text{in } V_{k,\eta_0,Q},$$

这就证明了 $f \in C_{1/\eta_0}(M, \hat{\gamma}; J)$ 的论断。由引理 2.5，对于 $\eta < \eta_1 < \eta_0$，我们有 $B_{1/\eta_0}(M, \hat{\gamma}; J) \subseteq C_{1/\eta_1}(M, \hat{\gamma}; J)$，论断得证。□

对于给定的 $\eta > 1$ 和 $Q > 0,$，记 $U_{k,\eta,Q}$ 为两个扇区的一个 $\frac{1}{Qm_k^{1/k}}$ 邻域

$$\left\{z : \arg(z) \leq \frac{\eta}{\widehat{L}(k)}, \quad 0 < \operatorname{Re}(z) \in J\right\} \bigcup \left\{z : \arg(-z) \leq \frac{\eta}{\widehat{L}(k)}, \quad 0 > \operatorname{Re}(z) \in J\right\}.$$

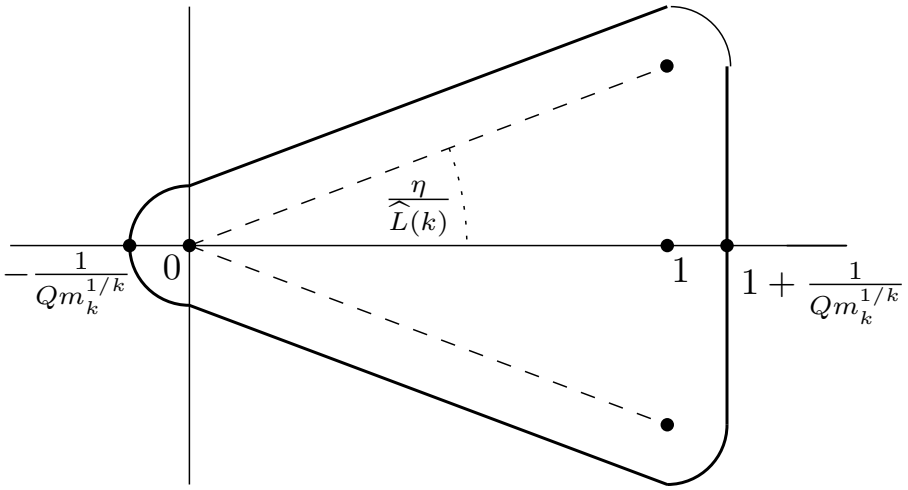

图 5.2. 对于 $J = [0, 1]$，集合 $U_{k、\eta、Q}$

注意，对于任意 $\eta_1 > \eta > 1$ 和 $Q_1 > 1$，存在 $Q > 1$，使得

$$U_{k,\eta,Q} \subset V_{k,\eta_1,Q_1}, \quad \forall k \geq k_0.$$

因此，前面的引理立即给出以下结论：

引理 5.8. 假设对于某些 $\delta > 0$、$\frac{1}{m_k^{1/k}} - \frac{1}{m_{k+1}^{1/(k+1)}} \gtrsim e^{-\delta k}$、$\widehat{L}(k+1) - \widehat{L}(k) \gtrsim e^{-\delta k}$，且 $f \in B_{1/\eta_0}(M、\hat{\gamma}; J)$。那么对于任意 $Q_3 > 0$ 和 $0 < \eta < \eta_0$，存在 $Q > 0$ 以及一个序列 $(F_k)_{k \geq k_0}$，使得

(1) $F_k \in$ 在 $U_{k,\eta,Q}$) 上的全纯函数 $\cup C\left(U_{k,\eta,Q}\right)$，其中最大值为 $_{U_{k,\eta,Q}} |F_{k-1} - F_k| \leq \frac{1}{Q_3^k}$.

(2) 在 $C^\infty(J)$ 拓扑中，即 $F_{(k}{}^n \to f^{(n)})$ 关于 J 一致地，对于任意 $n \geq 0$.

注 5.9。 下文中，我们将把引理 5.8 应用于 $B_{1/\eta_0}(M\cdot\gamma,\widehat{\gamma};0_+)$ 中的函数，其中 M 正则且 γ 可容许的。条件

$$\widehat{L}(k+1)-\widehat{L}(k)\gtrsim e^{-\delta k},\quad \frac{1}{\gamma_k^{1/k}m_k^{1/k}}-\frac{1}{\gamma_{k+1}^{1/(k+1)}m_{k+1}^{1/(k+1)}}\gtrsim e^{-\delta k}$$

由我们的可容许性假设可知。事实上，前一个左侧不等式由可容许性假设 (D) 得出，而右侧不等式则由

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma_k^{1/k}m_k^{1/k}}-\frac{1}{\gamma_{k+1}^{1/(k+1)}m_{k+1}^{1/(k+1)}}&\geq\frac{1}{m_{k+1}^{1/(k+1)}}\left(\frac{1}{\gamma_k^{1/k}}-\frac{1}{\gamma_{k+1}^{1/(k+1)}}\right)=\frac{1}{m_{k+1}^{1/(k+1)}}\int_k^{k+1}\frac{1}{L(x)\cdot\widehat{L}(x)}\cdot\frac{dx}{x}\\&\gtrsim\frac{1}{m_{k+1}^{1/(k+1)}}\frac{1}{L(k+1)\widehat{L}(k+1)}\frac{1}{k}\gtrsim\frac{1}{m_{k+1}^{1/(k+1)}}k^{-C}.\end{aligned}$$

By 论断 5.1 的第一个断言得出，右侧为 $\gtrsim k^{-C_1}$，其中 $C_1>$是某个常数 0.

5.2. **函数的几乎全纯延拓** $B(M,\ \widehat{\gamma};I)$**：解析情形**。在本节中，我们固定一个可容许的 γ，它具有一个解析的 $\widehat{\gamma}$ 和一个正则序列 $M.$。回顾一下，

$$\Omega_\eta(\gamma):=\left\{z:\sup_{t>0}E(t\eta)\left|K\left(\frac{t}{z}\right)\right|<\infty\right\},$$

and

$$D(M,\gamma;[0,a))=\bigcup_{\eta>a}C_\infty^M(\Omega_\eta(\gamma)).$$

我们将使用 Dynkin 的以下定理 [15]。

定理 (Dynkin)。设 $\mathbb{E}\subset\mathbb{C}$ 是一个完美紧集。若 $f\in C_\infty^M(\mathbb{E})$，则存在 $C>0$ 和一个函数$F\in C_C^1(\mathbb{C})$，使得 $F|_{\mathbb{E}}=f$，从而

$$\left|\bar{\partial}F(z)\right|\leq C\cdot h(C\cdot dist(z,\mathbb{E})),z\in\mathbb{C},$$

其中 $h(r)=$下确界$_{n\geq0}\,m_nr^n$。

引理 5.10。 设 $f\in C_\infty^M(\mathbb{E})$。那么对于任意 $Q_1>0$，存在 $Q>0$ 及一个序列 $(F_k)_{k\geq k_0}$，使得 t (1) 函数 F_k 在 $\left\{z\text{ 中解析：}\operatorname{dist}(z,\mathbb{E})\leq\frac{1}{Q^km_k^{1/k}}\right\}$，并且在其中满足 $|F_{k-1}-F_k|\leq\frac{1}{Q_1^k}$，对于任意 $k\geq k_0$；(2) 在 $C^\infty(\mathbb{E})$ 拓扑下，$F_k\to f$，即 $F_{(k^n}\overline{\to f^{(n)}})$ 在 J 中一致成立，对于任意 $n\geq0.$

证明。设 $Q_1>0$ 并设 F 是 Dynkin 定理中的函数。根据柯西–庞皮欧公式 a,

$$F(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\bar{\partial}F(w)\frac{1}{w-z}d\mu_2(w)$$

其中，μ_2 是 $\mathbb{C}$中的平面勒贝格测度。对于稍后将选取的 $Q>0$，令

$$\widetilde{U}_k:=\left\{z:\operatorname{dist}(z,\mathbb{E})\leq\frac{1}{Q^km_k^{1/k}}\right\}$$

and

$$F_k(z)=\int_{\mathbb{C}\setminus\widetilde{U}_{k-1}}\bar{\partial}F(w)\frac{1}{w-z}d\mu_2(w).$$

~由于 $\cap_kU_k=\mathbb{E}$，我们在 $C^\infty(\mathbb{E})$ 拓扑中有 $F_k\to F=f$。

~如果 $w \in U_{k-2}$，那么

$$\left|\bar{\partial} F(w)\right| \leq C \cdot \inf_n m_n \left(\frac{C}{Q^{k-2} m_{k-2}^{1/(k-2)}}\right)^n \overset{(n=k-2)}{=} \frac{C^{k-1}}{Q^{k-2}}.$$

因此，我们可以选择足够大的 Q，使得

$$\left|\bar{\partial} F(w)\right| \leq \frac{1}{Q_1^k}, \quad w \in \widetilde{U}_{k-2},\, k \geq k_0.$$

记

$$F_{k-1} - F_k = \int_{\widetilde{U}_{k-2} \setminus \widetilde{U}_{k-1}} \bar{\partial} F(w) \frac{1}{w - z} d\mu_2(w),$$

我们得到

$$|F_{k-1} - F_k| \leq \frac{1}{Q_2^k} \quad \text{in } \widetilde{U}_k.$$

□

5.3. 类 $B^{\pm}(\widehat{\gamma}, M;\, J)$。 在本节中，我们固定一个可容许的 γ 和一个正则序列 M.

5.3.1. 函数在 $B^{\pm}(\widehat{\gamma}, M; 0)$ **上的几乎全纯延拓。** 对于 $\mu > 0$ 和一个紧集 J，令 $S_\mu^{\pm} = \{z\colon \pm \mathrm{Im} z > 0,\ |z| < \mu\}$. 设 $f_+ \in C^\infty\left(S_{2\mu}^+\right) \cap \mathrm{Hol}\left(\overline{S_{2\mu}^+}\right)$ 满足

$$\left|f_+^{(n)}(x)\right| \leq C \min\left\{\frac{\widehat{\gamma}_n}{\eta_0^n x^n},\ M_n\right\}, \qquad \forall n \geq 1,\ x \in [-2\mu, 2\mu].$$

Put

$$P_N^+(z) = P_N^+(z; f) = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(z^*)}{j!} (z - z_\mu^*)^j,$$

其中 z_μ^* 是 z 在 S_μ^+ 上的投影。注意到，当

$$\left|\bar{\partial} P_N^+(z)\right| \leq \frac{1}{2} \max\left\{m_{N+1} \mathrm{dist}^N(z, J),\ \frac{\widehat{\gamma}_{N+1}}{\eta_0^N\,(N+1)!} \left|\frac{z}{z^*} - 1\right|^N\right\}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

并且 $\bar{\partial} P_N^+ = 0$ 属于 $\overline{S_\mu^{\mp}}$。因此，重复引理 5.8 证明中的所有步骤，我们得到以下类似结果。

引理 5.11。 假设对于某些 $\delta > 0$、 $\frac{1}{m_k^{1/k}} - \frac{1}{m_{k+1}^{1/(k+1)}} \gtrsim e^{-\delta k}$、 $\widehat{L}(k+1) - \widehat{L}(k) \gtrsim e^{-\delta k}$，且 $f \in B_{1/\eta_0}^+(M, \widehat{\gamma};\ [-1,1])$成立。那么对于任意 $Q_3 > 0$和 $0 < \eta < \eta_0$，存在 $Q > 0$、 $\mu > 0$ 以及一个序列$(F_k)_{k \geq k_0}$，使得

(1) $F_k \in$ 全纯函数 $\left(\{|实部 z| \leq \mu\} \cap U_{k,\ \eta,\ Q)} \cup S_\mu^+\right)$，</style}其中最大值为)$\cup S_\mu^+$ $|F_{k-1} - F_k| \leq \frac{1}{Q_3^k}$。

(2) $F_k \to f$在 C^∞([$-\mu, \mu$]拓扑中，即 $F_{(k}^{\ n} \to f^{(n)}$）</style}在 $[-\mu, \mu]$ 中对任意 $n \geq 0$.一致地 —

5.3.2. 因子分解 $B_\eta(M,\ \widehat{\gamma};0)\subseteq B^+_{\eta_1}(M,\ \widehat{\gamma};0)+B^-_{\eta_1}(M\gamma,\ \widehat{\gamma};0)$。 本节证明， $B_\eta(M,\ \widehat{\gamma};0)\subseteq B^+_{\eta_1}(M,\ \widehat{\gamma};0)+B^-_{\eta_1}(M,\ \widehat{\gamma};0)$，其中 $0<\eta<\eta_1,\ M$是正则的，且 γ是具有非解析 $\widehat{\gamma}$.的可容许函数

证明。 令 $0<\eta<\eta_0<\eta_1$。由引理 5.6，存在 $\mu>0$ ，使得对于任意 $Q_2>1$，存在$k_0,\ Q>0$ 和 $F\in C^1_C(\mathbb{C})$，从而 $F|_{[-2\mu,2\mu]}=f$ 并且

$$\left|\bar\partial F(z)\right|\le\frac{1}{Q_2^k},\quad z\in\left\{z:\operatorname{dist}(z,[-2\mu,2\mu])\le\frac{|z^*|}{\widehat{L}(k)\eta_0}\right\}\cup\left\{z:\operatorname{dist}(z,[-2\mu,2\mu])\le\frac{1}{Qm_k^{1/k}}\right\}.$$

由柯西–庞培公式,

$$F(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\bar\partial F(w)\frac{1}{w-z}d\mu_2(w)$$

Put

$$f_\pm(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}_\pm}\bar\partial F(w)\frac{1}{w-z}d\mu_2(w),$$

其中 $\mathbb{C}_\pm=\{z:\ \pm\mathrm{Im}z>0\}$. 显然， $f=f_++f_-$ ，且函数 $f_\pm$ 在 $S^\pm_\mu$ 中解析: $=\{z:\ \pm\mathrm{Im}z>0,\ |z|\le\mu\}$，因此只需证明 $f_+\in B_{\eta_1}(M\gamma,\ \widehat{\gamma};0)$。 注意到

$$\left|f_+^{(n)}(x)\right|\le n!\int_{\mathbb{C}_+}\left|\bar\partial F(w)\right|\frac{1}{|w-x|^{n+1}}d\mu_2(w),\quad x\in[-\mu,\mu]. \tag{5.2}$$

If

$$\frac{1}{Qm_k^{1/k}}\le\operatorname{dist}(w,[-2\mu,2\mu])\le\frac{1}{Qm_{k-1}^{1/k-1}},$$

then

$$\left|\bar\partial F(w)\right|\frac{1}{|w-x|^{n+1}}\le\frac{1}{Q_2^{k-1}}\left(Q^nm_n^{n/k}\right)$$

Thus

$$\left|f_+^{(n)}(x)\right|\le Cn!\sup_{k\ge k_0}\frac{1}{Q_2^{k-1}}\left(Q^nm_n^{n/k}\right)$$

由断言 5.1，我们可以选取 Q_2 ，使得足够接近 1，从而

$$\left|f_+^{(n)}(x)\right|\le C^{n+1}M_n.$$

同样，再次利用 (5.2)，对于满足以下条件的 w

$$\frac{|w^*|}{\widehat{\eta_0L}(k)}\le\operatorname{dist}(w,[-2\mu,2\mu])\le\frac{|w^*|}{\eta_0\widehat{L}(k-1)},$$

我们得到

$$\left|f_+^{(n)}(x)\right|\le|x|^{-n}Cn!\frac{1}{Q_2^{k-1}}\left(\eta_0^{-n}\widehat{L}(k)^n\right).$$

$\widehat{\ }$函数 L 是慢变的，因此根据断言 5.1 和注 5.2，我们可以选取足够接近于 1 的 Q_2 ，使得

$$\left|f_+^{(n)}(x)\right|\le Cn!\frac{\widehat{L}(n)^n}{|x|^n}=C\frac{\widehat{\gamma}_n}{|x|^n}$$

我们已经证明，对于任意 $\eta_1>\eta.$，都有 $f_+\in C^+_{\eta_1}(M\gamma,\widehat{\gamma};0)$。由引理 2.5，对于任意 $\eta_1>\eta.$，都有 $f_+\in B^+_{\eta_1}(M\gamma,\widehat{\gamma};0)$。 $f_-\in B^-_{\eta_1}(M\gamma,\widehat{\gamma};0)$ 的证明方法相同。□

6. 广义博雷尔变换的估计

本节中我们将使用以下辅助引理。它们的证明见附录A.

引理 6.1。 设 γ 是一个可容许权。对于任意 $\eta > 1$，存在 $C > 0$，使得对于任意 $r > 0$

$$\max\left\{|E(z)| : |arg(z)| \geq \frac{\eta}{\widehat{L}\left(L^{-1}(r)\right)} or\, |z| \leq r\right\} \leq CE(r).$$

引理 6.2。 设 γ 是一个可容许权。我们有

$$E\left(L(k)\right) \lesssim e^{2k}, \quad k \geq 1,$$

其中 $L(k) = \gamma(k)^{1/k}$.

6.1. 非解析情形下广义博雷尔变换的估计。 本节中，我们固定一个具有非解析 $\widehat{\gamma}$ 的可容许 γ（即 $\lim_{\rho\to\infty} \varepsilon(\rho) = 0$）、一个正则序列 $M = (n!m_n)_{n\geq 0}$ 以及 $J = [0,1]$。回顾一下，$\gamma_k^{1/k} = L(k)$ 和 $(\widehat{\gamma}_k/k!)^{1/k} = \widehat{L}(k)$。给定 $k \geq 1$、$\eta > 1$ 和 $Q > 0$，回顾集合 $U_{k,\eta,Q}$（见图 5.2）被定义为扇形区域的一个 $QL(k)m_k^{1/k}$ 邻域

$$\left\{z : |\arg(z)| \leq \frac{\eta}{\widehat{L}(k)}, \quad \operatorname{Re}(z) \in J\right\}.$$

广义博雷尔变换的主要估计由以下引理给出。

引理 6.3. 对于任意 $1 < \eta$ 和 $0 < Q$，存在一个常数 $C = C(\eta, Q)$，使得若 $g \in$ 全纯函数$(U_{k,\eta,Q}) \cap C\left(\overline{U_{k,\eta,Q}}\right)$ 满足 $\|g\|_{L^\infty(U_{k,\eta,Q})} \leq 1$，则

$$\left|\left(\mathcal{B}_\gamma g\right)^{(n)}(x)\right| \leq C^{n+1} \cdot n! \cdot m_k^{n/k} \cdot E\left(L(k)\right) E(x),$$

对于任意 $x \geq 0$ 和 $n \in \mathbb{Z}_+$。

证明。 对于 $0 < R < R'$，考虑曲线（见图 6.1）

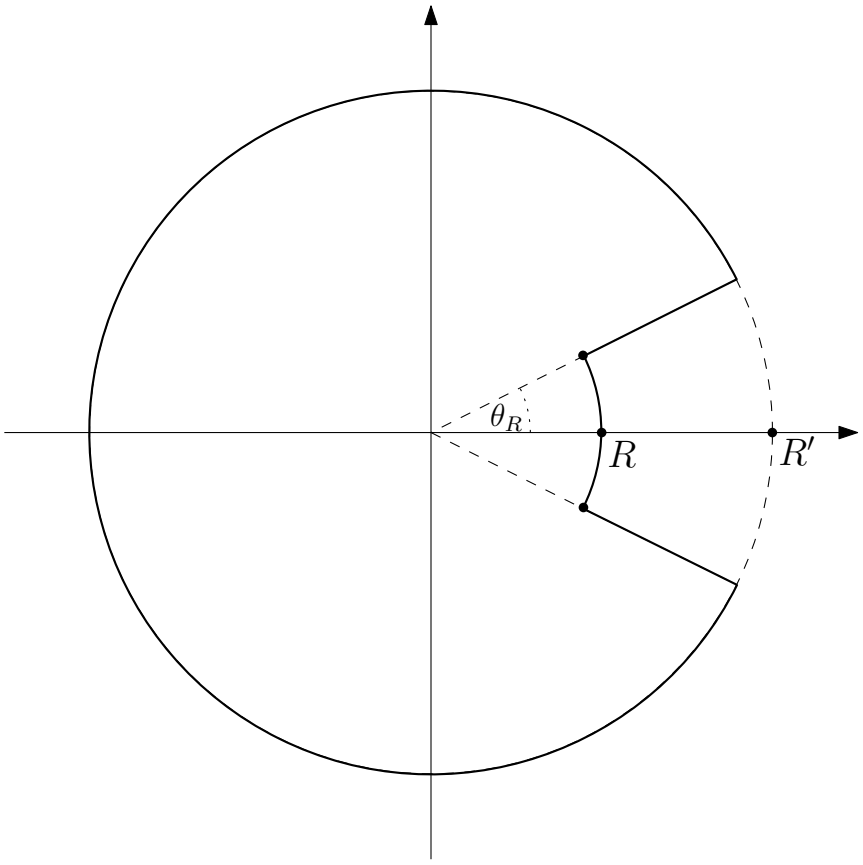

图 6.1。曲线 $\Gamma(R,\ R')$

$$\Gamma(R,R') := \left\{Re^{i\theta} : |\theta| < \theta_R\right\} \cup \left\{te^{\pm i\theta_R} : t \in [R,R']\right\} \cup \left\{R'e^{i\theta} : \theta_R < |\theta| \leq \pi\right\}$$

其中

$$\theta_R = \frac{\eta}{\widehat{L}\left(L^{-1}(R)\right)}.$$

设 $G = \mathcal{B}_\gamma g$。根据柯西公式，

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(R,R')} g\left(\frac{x}{w}\right) E(w)\,\frac{dw}{w},$$

条件是

$$\left\{\frac{x}{w} : w \in \Gamma(R,R')\right\} \subset U_{k,\eta,Q}.$$

此外，对积分号下的表达式求导可得

$$G^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(R,R')} g^{(n)}\left(\frac{x}{w}\right) E(w)\,\frac{dw}{w^{n+1}}.$$

取 $R' \to \infty$ 并代入

$$\Gamma(R) := \left\{Re^{i\theta} : |\theta| < \theta_R\right\} \cup \left\{ue^{\pm i\theta_R} : u > R\right\}.$$

我们得到

$$G^{(n)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(R)}g^{(n)}\left(\frac{x}{w}\right)E(w)\frac{dw}{w^{n+1}}.$$

根据柯西估计，如果

$$\left\{\frac{x}{w}:w\in\Gamma(R)\right\}\subseteq\left\{z:\arg(z)\leq\frac{\eta}{\widehat{L}(k)},\quad \mathrm{Re}(z)\in[0,1]\right\}. \tag{6.1}$$

then

$$\left|G^{(n)}(x)\right|\leq n!\left(Q\cdot m_k^{1/k}\cdot L(k)\right)^n\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma(R)}\left|E(w)\frac{dw}{w^{n+1}}\right|\leq n!\left(Q\cdot m_k^{1/k}\cdot L(k)\right)^n\frac{1}{R^n}\sup_{\Gamma(R)}|E(w)|.$$

根据引理 6.1，$\sup_{\Gamma(R)}|E(w)|\leq CE(R)$, 因此我们有

$$\left|G^{(n)}(x)\right|\lesssim n!\left(Q\cdot m_k^{1/k}\cdot L(k)\right)^n\frac{E(R)}{R^n},$$

只要 (6.1) 成立。最后我们选择

$$R=\max\{L(k),x\}.$$

并注意到，采用这一选择后

$$\theta_R=\frac{\eta}{\widehat{L}\left(L^{-1}(R)\right)}\leq\frac{\eta}{\widehat{L}(k)}.$$

特别地，(6.1) 成立。我们已经得到

$$\left|G^{(n)}(x)\right|\lesssim C^n\cdot n!\cdot m_k^{n/k}\max\{E(L(k)),E(x)\},$$

如前所述。 □

非解析情形下包含关系 $\mathcal{B}_\gamma B_{1/\eta}(M\gamma,\ \widehat{\gamma};\ I)\subseteq A(M,\ \gamma,\ I)$ 的证明。只需证明在 I 紧致的情形下包含关系成立；通过缩放，可假设 $J=[0,1]$. 。令 $1<\eta<\eta_0$,$f\in B_{1/\eta_0}(M\gamma,\ \widehat{\gamma};\ J)$，并令 $C_4>0$ 如断言 5.1 所述。

由引理 5.8 可知，存在一个 $Q>0$ 以及一个序列 $(f_k)_{k\geq k_0}\subset C^\infty(J)$，使得 $\sum_{k\geq k_0}f_k$ 在 $C^\infty(J)$ 拓扑下收敛到 f，且 $f_k\in\mathrm{Hol}(U_{k,\ \eta,\ Q})\cap C\left(U_{k,\ \eta,\ Q}\right)$，其中 ~~$\max$~~$_{U_{k,\ \eta,\ Q}}|f_k|\leq\frac{1}{e^{3k}C_4^k}$ 对任意 ~~$k\geq$~~ k_0. 均成立。由引理 6.3 可得

$$\left|\left(\mathcal{B}_\gamma f\right)^{(n)}(x)\right|\leq C^{n+1}\cdot n!\cdot m_k^{n/k}\cdot E(L(k))\cdot E(x)\cdot\frac{1}{e^{3k}C_4^k},$$

根据引理 6.2，$E(L(k))\lesssim e^{2k}$，因此

$$\left|\left(\mathcal{B}_\gamma f_k\right)^{(n)}(x)\right|\leq C^{n+1}\cdot n!\cdot m_k^{n/k}\cdot E(x)\cdot\frac{1}{e^kC_4^k}$$

对于任意 $n\geq0$。根据断言 5.1 的第三个断言，

$$m_k^{n/k}\leq C_4^{k+n}m_n,$$

因此，我们得出

$$\left|\left(\mathcal{B}_\gamma f_k\right)^{(n)}(x)\right|\leq\frac{C^{n+1}}{e^k}\cdot C_4^n\cdot M_nE(x).$$

因此，$\sum_{k\geq k_0}\mathcal{B}_\gamma f_k$ 收敛到函数 $G\in A(M,\ \gamma,\ J)$。由于 G 和 $\mathcal{B}_\gamma f$ 在原点处具有相同的泰勒系数，我们得以完成证明。□

6.2. **解析情形下广义博雷尔变换的估计**。 在本节中，我们固定一个可容许的 γ，其 $\widehat{\gamma}$为解析的（即 $\lim_{\rho\to\infty}\varepsilon(\rho)>0$），以及一个正则序列 $M=(n!m_n)_{n\geq 0}$。对于给定的 $\eta>0$，回顾

$$\Omega_\eta(\gamma):=\left\{z:\sup_{t>0}E(t\eta)\left|K\left(\frac{t}{z}\right)\right|<\infty\right\}.$$

在本节中，我们通常省略对 γ 的依赖，写作 Ω_{η}。给定 $k\in\mathbb{Z}_+$ 和 $Q>0$，我们考虑集合

$$\Omega_{k,\eta,Q}=\left\{z:\operatorname{dist}(z,\Omega_\eta)\leq\frac{1}{Qm_k^{1/k}L(k)}\right\}$$

下一个引理是解析情形下引理 6.3 的一个变体。

引理 6.4。 对于任意 $1<\eta$、 $0<Q$，存在一个常数 $C=C(\eta,Q)$，使得若 $g\in$ 全纯函数$(\Omega_{k,\eta,Q})\cap C\left(\overline{\Omega_{k,\eta,Q}}\right)$，则对于任意 $x\geq 0$ 和 $n\in\mathbb{Z}_+$，我们有

$$\left|\left(\mathcal{B}_\gamma g\right)^{(n)}(x)\right|\leq C^{n+1}\cdot n!\cdot m_k^{n/k}\cdot E\left(L\left(k\right)\right)E\left(x\eta\right).$$

证明。 令 $\lim_{x\to\infty}\widehat{\gamma}(x)^{1/x}=:\widehat{L}\in\left(\frac{1}{\pi},\infty\right)$。固定 $1<\eta_0<\eta,$使得 $\frac{\eta_0}{\widehat{L}}<\pi.$。对于 $0<R<R',$，考虑曲线

$$\Gamma(R,R'):=\left\{Re^{i\theta}:|\theta|<\theta_0\right\}\cup\left\{te^{\pm i\theta_0}:t\in[R,R']\right\}\cup\left\{R'e^{i\theta}:\theta_0<|\theta|\leq\pi\right\}$$

其中

$$\theta_0=\frac{\eta_0}{\widehat{L}}.$$

令 $G=\mathcal{B}_\gamma g$。由柯西公式,

$$G(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(R,R')}g\left(\frac{x}{w}\right)E(w)\frac{dw}{w},$$

前提是

$$\left\{\frac{x}{w}:w\in\Gamma(R,R')\right\}\subset\Omega_{k,\eta,C}.$$

此外，通过在积分号下求导，我们发现

$$G^{(n)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(R,R')}g^{(n)}\left(\frac{x}{w}\right)E(w)\frac{dw}{w^{n+1}}.$$

取 $R'\to\infty$，并令

$$\Gamma(R):=\left\{Re^{i\theta}:|\theta|<\theta_R\right\}\cup\left\{ue^{\pm i\theta_R}:u>R\right\}.$$

我们得到

$$G^{(n)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(R)}g^{(n)}\left(\frac{x}{w}\right)E(w)\frac{dw}{w^{n+1}}.$$

根据柯西估计，若

$$\left\{\frac{x}{w}:w\in\Gamma(R)\right\}\subseteq\Omega_\eta \tag{6.2}$$

then

$$\left|G^{(n)}(x)\right|\leq n!\left(Qm_k^{1/k}L(k)\right)^n\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma(R)}\left|E(w)\frac{dw}{w^{n+1}}\right|\leq n!\left(Qm_k^{1/k}L(k)\right)^n\frac{1}{R^n}\sup_{\Gamma(R)}|E(w)|.$$

由引理 6.1，$\sup_{\Gamma(R)}|E(w)|\leq CE(R)$，因此我们得到

$$\left|G^{(n)}(x)\right|\lesssim n!\left(Qm_k^{1/k}L(k)\right)^n\frac{E(R)}{R^n},$$

前提是 (6.2) 成立。最后我们取

$$R = \max\left\{L\left(k\right), \eta x\right\},$$

并注意到

$$\left\{\frac{x}{w} : w \in \Gamma(R)\right\} \subseteq \Omega_\eta.$$

我们已经证明了

$$\left|G^{(n)}\left(x\right)\right| \lesssim C^n \cdot n! \cdot m_k^{n/k} \max\left\{E\left(L(k)\right), E\left(x\eta\right)\right\},$$

如所述。 □

解析情形下包含关系 $\mathcal{B}_\gamma D\left(M, \gamma;\ I\right) \subseteq A(M, \gamma, I)$ 的证明。不失一般性，假设 $I = [0, 1)$（否则我们重新缩放）。令 $\eta > 1$, $f \in C_\infty^{M\cdot\gamma}(\Omega_\eta(\gamma))$，并令 $C_4 > 0$ 如断言 5.1 中所述。由引理 5.10，对于任意闭 $J \subseteq I$，存在一个 $Q > 0$ 及一个序列 $(f_k)_{k\geq k_0} \subset C^\infty(J)$，使得 $\sum_{k\geq k_0} f_k$ 在 $C^\infty(J)$ 拓扑下收敛于 f，并且对于任意 $k \geq k_0$，f_k 在 $\left\{z \text{ 中解析：} \operatorname{dist}\left(z, \Omega_\eta(\gamma)\right) \leq \frac{1}{Q^k m_k^{1/k} L(k)}\right\}$，且在那里满足 $\max_{\Omega_k, \eta, Q} |f_k| \leq \frac{1}{C_4^k e^{3k}}$。~~注意，~~

由引理 6.2，当 k 足够大时，我们有$\overline{E(L(k))} \leq e^{2k}$. 因此，引理 6.4 给出

$$\left|\left(\mathcal{B}_\gamma F_k\right)^{(n)}\left(x\right)\right| \lesssim \frac{1}{e^k C_4^k} C^n \cdot n! \cdot m_k^{n/k} E\left(x\eta\right), \quad \forall n \geq 0,\, k \geq k_0.$$

根据断言 5.1 的第三个断言，

$$m_k^{n/k} \leq C_4^{k+n} m_n.$$

我们得出

$$\left|\left(\mathcal{B}_\gamma F_k\right)^{(n)}\left(x\right)\right| \leq C^{n+1} \cdot C_4^n \cdot M_n E\left(x\eta\right).$$

由于右端与 k 无关，我们得到

$$\left|\left(\mathcal{B}_\gamma f\right)^{(n)}\left(x\right)\right| \leq C^{n+1} \cdot C_4^n \cdot M_n E\left(x\eta\right).$$

我们已证明包含关系

$$\mathcal{B}_\gamma C_\infty^{M\cdot\gamma}\left(\Omega_\eta\left(\gamma\right)\right) \subseteq A(M, \gamma, [0, \eta^{-1}]).$$

对所有 $\eta > 1$ 取并集，得到 $\mathcal{B}_\gamma D\left(M, \gamma;\ I\right) \subseteq A(M, \gamma, I)$。 □

6.3. 广义博雷尔变换在 $B^+(M\gamma, \widehat{\gamma}, I)$ 中的估计。 在本节中，我们固定一个具有非解析 $\widehat{\gamma}$（即 $\lim_{\rho\to\infty} \varepsilon(\rho) = 0$）的可容许的 γ、一个正则序列 $M = (n! m_n)_{n\geq 0}$，并令 $J = [-1, 1]$。回顾一下，$\gamma_k^{1/k} = L(k)$ 和 $(\widehat{\gamma}_k/k!)^{1/k} = \widehat{L}(k)$。给定 $k \geq 1$、$\eta > 1$ 和 $Q > 0$，集合$U_{k,\eta,Q}$ 被定义为扇区的一个 $QL\ k\ ()m_k^{1/k}$ 邻域

$$\left\{z : |\arg(z)| \leq \frac{\eta}{\widehat{L}(k)}, \quad \operatorname{Re}\left(z\right) \in [0, 1]\right\} \bigcup \left\{z : |\arg(-z)| \leq \frac{\eta}{\widehat{L}(k)}, \quad \operatorname{Re}\left(z\right) \in [-1, 0]\right\},$$

且 S_μ^+是半圆盘 $\{z : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| \leq \mu\}$。最后，设

$$U_{k,\eta,Q,\mu}^+ = \left(\{|\operatorname{Re}\left(z\right)| \leq \mu\} \cap U_{k,\eta,Q}\right) \cup S_\mu^+.$$

引理 6.5。 对于 $1<\eta$、 $0<Q$ 和 $0<\mu<\frac{1}{2}$，存在一个 $C>0$，使得如果 $g\in$ 全纯函数 $\left(U^{+}_{k,\eta,Q,\mu}\right)$ 满足 $\|g\|_{L^{\infty}\left(U^{+}_{k},\eta,Q,\mu\right)}\leq 1$，那么 $\mathcal{B}_{\gamma}g\in$ 全纯函数 $\bar{(}\{Re\,(z)>0\})\cap C^{\infty}(\{Re(z)\geq 0\})$，

$$\left|\left(\mathcal{B}_{\gamma}g\right)(z)\right|\lesssim E\left(\frac{2|z|}{\mu}\right),\quad \forall Re\,(z)\geq 0,$$

and

$$\left|\left(\mathcal{B}_{\gamma}g\right)^{(n)}(x)\right|\lesssim C^{n}\cdot n!\cdot m_{k}^{n/k}\max\left\{E\left(L(k)\right),E\left(x\eta\right)\right\}\cdot E\left(\frac{2|x|}{\mu}\right),\quad \forall x\in\mathbb{R},\,n\geq 0$$

证明。令 $G=\mathcal{B}_{\gamma}g$。对于 $R>0$，令

$$\Gamma(R):=\left\{Re^{i\theta}:|\theta|<\theta_{R}\right\}\cup\left\{ue^{\pm i\theta_{R}}:u>R\right\},\quad \text{with}\quad \theta_{R}=\frac{\eta}{\widehat{L}\left(L^{-1}(R)\right)}.$$

与引理 6.3 的证明一样，如果

$$\left\{\frac{z}{w}:w\in\Gamma(R)\right\}\subset U^{+}_{k,\eta,Q,\mu},$$

then

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(R)}g\left(\frac{z}{w}\right)E(w)\,\frac{dw}{w}.$$

因此，由引理 6.1，$\sup_{\Gamma(R)}|E(w)|\lesssim CE(R)$。因此，选择 $R=\frac{|z|+1}{\mu}$ 得到 u s

$$|G(z)|\lesssim E\left(\frac{|z|+1}{\mu}\right)\lesssim E\left(\frac{2|z|}{\mu}\right),$$

对于任意 $z\in\{$R e $(z)\geq 0\}$. 由莫雷拉定理， G 在 $\{$Re $(z)>0\}$中是解析的。最后，不等式

$$\left|G^{(n)}(x)\right|\leq C^{n}\cdot n!\cdot m_{k}^{n/k}\max\left\{E\left(L(k)\right),E\left(\frac{2|x|}{\mu}\right)\right\}$$

其证明方式与引理 6.3 相同。 □

引理 3.12 的证明。设 $f_{+}\in B^{+}_{\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};0)$，并令 $C_{4}>0$ 如断言 5.1 中所述。根据引理 5.11，存在$Q>0$、 $\mu>0$ 以及一个序列 $(f_{k})_{k\geq k_{0}}\subset C^{\infty}([-\mu,\mu])$，使得 $\sum_{k\geq k_{0}}f_{k}$ 在 $C^{\infty}([-\mu,\mu])$ 拓扑下收敛到 f_{+}，且 $f_{k}\in$ 全纯函数$\left(U_{k},\right.$ $\left._{\eta,Q,\mu}\right)$ 满足 $\max_{U_{k},\eta,Q,\mu}|f_{k}|\leq\min\left\{\frac{1}{4^{k}C_{4}^{k}},\frac{1}{2^{k}}\right\}$，对任意 $k\geq k_{0}$. 均成立。根据引理 6.5，对每个 $k\geq k_{0}$，有 $\mathcal{B}_{\gamma}f_{k}\in$ 全纯函数 $(\{\mathrm{Re}\,(z)>0\})\cap C^{\infty}(\{\mathrm{Re}\,(z)\geq 0\})$。因此

$$\left|\sum_{k\geq k_{0}}\left(\mathcal{B}_{\gamma}f_{k}\right)(z)\right|\leq\sum_{k\geq k_{0}}\frac{C}{2^{k}}E\left(\frac{2|z|}{\mu}\right)\leq CE\left(\frac{2|z|}{\mu}\right),\quad \forall\mathrm{Re}\,(z)\geq 0.$$

与非解析情形下证明包含关系 $\mathcal{B}_{\gamma}B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};I)\subseteq A(M,\gamma,I)$ 时一样，我们也有

$$\left|\sum_{k\geq k_{0}}\left(\mathcal{B}_{\gamma}f_{k}\right)^{(n)}(x)\right|\lesssim C^{n}M_{n}E\left(\frac{2|x|}{\mu}\right),\quad \forall x\in\mathbb{R},n\geq 0$$

注意到 $\sum_{k\geq k_{0}}\mathcal{B}_{\gamma}f_{k}$ 和 $\mathcal{B}_{\gamma}f_{+}$ 都是拟解析类 $C^{M}(\mathbb{R})$的元素，且在原点处具有相同的泰勒系数，因此根据拟解析性， $\mathcal{B}_{\gamma}f_{+}=\sum_{k\geq k_{0}}\mathcal{B}_{\gamma}f_{k}$. 我们已证明，对于任意 $f_{+}\in B^{+}_{\eta}(M\gamma,\ \widehat{\gamma};0)$， $\mathcal{B}_{\gamma}f_{+}\in$ 全纯函数 $(\{$实部 $(z)>0\})\cap C^{\infty}(\{$实部 $(z)\geq 0\})$，并且存在一个 $\mu>0$ 使得

$$\left|\left(\mathcal{B}_{\gamma}f_{+}\right)(z)\right|\lesssim E\left(\frac{2|z|}{\mu}\right),\quad \forall\mathrm{Re}\,(z)\geq 0.$$

因此，若 $f \in B_\eta^+(M\gamma,\ \widehat{\gamma};0) \cap B_\eta^-(M\gamma,\ \widehat{\gamma};0)$，那么根据莫雷拉定理，$\mathcal{B}_\gamma f$是整函数，并且存在一个 $\mu>0$使得

$$|(\mathcal{B}_\gamma f)(z)| \lesssim E\left(\frac{2|z|}{\mu}\right), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

根据 [23, 定理 7], ，后者蕴含 $f \in C^\omega(0)$，如所论断。 □

7. Some Applications

7.1. 到卡尔曼类的双射。 设 γ 是一个可容许权，设 M 是一个正则序列。若对于某个常数 $C>0$有 $M_n\gamma_{n+1} \lesssim C^n\widehat{\gamma}_n$，则

$$B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};0_+) = B_\eta(M\gamma,\widehat{\gamma};0_+) = C_\infty^{M\gamma}(0_+).$$

因此，在这种情况下，该映射

$$\mathcal{L}_\gamma : A(M,\gamma;0_+) \to C_\infty^{M\gamma}(0_+) \tag{7.1}$$

是满射。此外，如果类 $C_\infty^{M\gamma}(0_+)$还是拟解析的，那么 $\mathcal{L}_\gamma$ 实际上是一个双射。

例如，如果 $M_n \approx n!\log^{n\alpha}(n)$且 $0 \le \alpha \le 1$，那么当 $xL'(x) \lesssim \log^{-\alpha} x$时，(7.1)是一个双射，其中 $\gamma(x) = L^x(x)$。特别的选择 $\alpha=0$，即 $M_n = n!$以及 $xL'(x) \lesssim 1$，就是前述出现在 [23,推论 1]中的对数阈值。

同样值得注意的是，将序列 N 分解为乘积 $M\gamma$. 有许多种方法。例如，考虑

$$M_n^\alpha \approx n!\log^{n\alpha}(n+e), \quad \text{and} \quad \gamma^\alpha(n) = \log^{n\alpha}(n+e).$$

我们有 $M^\alpha\gamma^{1-\alpha} = M^1$，这意味着以下双射族：

$$\mathcal{L}_{\gamma_\alpha} : A^{M^{1-\alpha}}(\gamma_\alpha;I) \to C_\infty^{M^1}(I), \quad 0<\alpha\le 1.$$

7.2. Carleman 类中的多重可求和性。 虽然 γ-求和方法功能强大，但并非普遍适用，尤其不适用于较大的拟解析卡勒曼类中的函数。沿袭 Écalle 和 Ramis 的思想，我们可以通过迭代求和过程来克服这一局限，这种方法称为多重可求和性。

令 γ为可容许的，并令 $M_n = n!\gamma(n+1)$。正如我们已经提到的，对于（γ）–求和而言，要对 Carleman 类$C^M(I)$中的所有元素进行求和，其充要条件（在满足正则性假设的前提下）是 γ至多具有对数增长（即 $\gamma_n^{1/n} \lesssim \log n$）。在本节中，我们将遵循 Écalle [16] 和 Ramis [36] 的思想，以便对更大的拟解析卡勒曼类中的元素进行求和，例如$M_n = n!\log^n(n+e)\log^n\log(n+e^e)$。

If γ_1， γ_2 是两个可容许权，满足 $\gamma_1\cdot\gamma_2=\gamma$，那么对于一个多项式 P，我们有 e

$$\mathcal{L}_{\gamma_1}\mathcal{L}_{\gamma_2}\mathcal{B}_\gamma P = \mathcal{L}_\gamma\mathcal{B}_\gamma P = P,$$

也就是说，对于多项式成立。事实证明，当我们扩展这两个算子的定义域时，求和方法 $\mathcal{L}_{\gamma_1}\mathcal{L}_{\gamma_2}\mathcal{B}_\gamma$ 总是强于 $\mathcal{L}_\gamma\mathcal{B}_\gamma$。按照 Écalle 的说法，若 $\mathcal{L}_{\gamma_1}\mathcal{L}_{\gamma_2}\mathcal{B}_\gamma f = f$，我们就称 f 是（γ_1，γ_2）– 多重可求和的。类似地，给定 k可容许函数 γ_1，$\cdots$，γ_k，若满足

$$f = \mathcal{L}_{\gamma_k}\cdots\mathcal{L}_{\gamma_1}\mathcal{B}_{\gamma_1\cdots\gamma_k} f.$$

例如，考虑

$$\gamma_k(n+1) = \log_{[k]}^n\left(n+\exp_{[k]}(1)\right),$$

其中，对数[k] 和指数函数[k] 分别是函数 $x\mapsto$ 对数 x 和 $x\mapsto e^x$ 的 k次迭代，并且

$$M_n^{[k]} = n!\gamma_1(n+1)\,\gamma_2(n+1)\cdots\gamma_k(n+1), \quad M_n^{[0]} = n!.$$

经过简单计算可得

$$\widehat{\gamma}_k\left(n+1\right)\sim\left(\frac{2}{\pi}+o(1)\right)^n M_n^{[k]}.$$

根据定理 1.4，对于任意 $\eta>1$，我们有

$$B_{1/\eta}\left(M^{[k-1]}\gamma_k,\widehat{\gamma}_k;I\right)\subseteq\mathcal{L}_{\gamma_k}A^{M^{[k-1]}}(\gamma_k;I)\subseteq B_\eta\left(M^{[k-1]}\gamma_k,\widehat{\gamma}_k;I\right).$$

由于

$$M_n^{[k-1]}\gamma_k\left(n+1\right)=M_n^{[k]}=\left(\frac{\pi}{2}+o(1)\right)^n\widehat{\gamma}_k\left(n+1\right),$$

我们有

$$B_{1/\eta}\left(M^{[k-1]}\gamma_k,\widehat{\gamma}_k;I\right)=B_\eta\left(M^{[k-1]}\gamma_k,\widehat{\gamma}_k;I\right)=C_\infty^{M^{[k]}}\left(I\right).$$

由此可得

$$\mathcal{B}_{\gamma_k}:C_\infty^{M^{[k]}}\left(I\right)\to A\left(M^{[k-1]},\gamma_k;I\right)$$

是一个双射，其逆映射为 $\mathcal{L}_{\gamma_k}$.。根据定义，$A\left(M^{[k-1]},\gamma_k;\ I\right)\subseteq C_\infty^{M^{[k-1]}}(\mathbb{R}_+)$，因此

$$f=\mathcal{L}_{\gamma_k}\mathcal{B}_{\gamma_k}f=\mathcal{L}_{\gamma_k}\mathcal{L}_{\gamma_{k-1}}\mathcal{B}_{\gamma_{k-1}}\mathcal{B}_{\gamma_k}f=\cdots=\mathcal{L}_{\gamma_k}\cdots\mathcal{L}_{\gamma_1}\mathcal{B}_{\gamma_1}\cdots\mathcal{B}_{\gamma_k}f=\mathcal{L}_{\gamma_k}\cdots\mathcal{L}_{\gamma_1}\mathcal{B}_{\gamma_1\cdots\gamma_k}f,$$

对于任意 $f\in C_\infty^{M^{[k]}}(I)$。我们得到了如下结果：

命题 **7.1.** 采用上述记号，$C_\infty^{M^{[k]}}(I)$ 中的任意函数都是$(\gamma_1、\ \cdots、\ \gamma_k)$–多重可求和的 $e.$

上述思想还可以进一步推广：给定一个满足 $\sum M_n/M_{n+1}=\infty$ 的序列 M，定义序列 $M^{(k)}$ 和 γ_k 如下

$$\gamma_1\left(n+1\right)^{\frac{1}{n}}=\prod_{j=1}^n\left(1-\frac{M_n}{M_{n+1}}\right)^{-1},\quad M=M^{(1)}\gamma_1,$$

$$\gamma_k\left(n+1\right)^{\frac{1}{n}}=\prod_{j=1}^n\left(1-\frac{M_n^{(k-1)}}{M_{n+1}^{(k-1)}}\right)^{-1},\quad M^{(k-1)}=M^{(k)}\gamma_k.$$

注意，如果 $M_n=n!\gamma(n+1)$，其中 γ 是可容许的，那么 $\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_k$ 都是可容许的，并且根据定理 1.4，映射

$$\mathcal{B}_{\gamma_k}:C_\infty^{M^{(k-1)}}\left(I\right)\to A\left(M^{[k-1]},\gamma_k;I\right),\quad M^{(0)}=M$$

是双射。因此，同样的推理表明，任意 $f\in C_\infty^M(I)$ 都是（$\gamma_k,\ \cdots,\ \gamma_1$）-多重可求和的。

7.3. 重生理论。 重生理论由 Écalle 提出，通过允许拉普拉斯平面中存在奇点，扩展了经典的 Borel–Laplace 求和。在重生理论中，我们不将一个形式幂级数与 $\mathcal{BL}f$关联，而是关联一个称为超渐近级数的更复杂对象（见 [16]）。近年来，重生理论已在与量子场论及数理物理其他领域相关的模型中得到诸多应用。这些应用的核心是具有如下形式的超渐近级数渐近展开的函数 f

$$f(x)\sim\sum_{j=0}^N\sum_{n=0}^\infty e^{-\frac{a_j}{x}}x^n c_{n,j},\ \text{as}x\to0^+\quad 0\le a_0<a_1<\cdots<a_N. \tag{7.2}$$

在经典的博雷尔–拉普拉斯求和中，这些展开源自函数 $\mathcal{B}f$在点 (a_j) 处的不连续性。事实上，对于 $a\ge0$，考虑平移算子

$$\left(\tau_aF\right)(x)=\begin{cases}F(x-a), & x\ge a\\ 0, & x<a,\end{cases}$$

并注意到

$$\mathcal{L}(\tau_a F)(x)=\frac{1}{x}\int_a^\infty F(t-a)e^{-t/x}dt=\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x}\int_0^\infty F(u)e^{-u/x}du=e^{-\frac{a}{x}}\cdot\left(\left(\mathcal{L}F\right)(x)\right).$$

因此，如果

$$F=F_0+\cdots+F_N\in\left(\tau_{a_0}A\left(M,\gamma;[0,1)\right)+\cdots+\tau_{a_0}A\left(M,\gamma;[0,1)\right)\right),$$

那么根据定理 1.10,

$$\mathcal{L}F\in\left(e^{-\frac{a_0}{x}}D\left(M,\Gamma;[0,1)\right)+\cdots+e^{-\frac{a_N}{x}}D\left(M,\Gamma;[0,1)\right)\right).$$

因此，函数 $\mathcal{L}F$ 有如下形式的展开式 (7.2)，其中

$$c_{n,j}=F_j^{(n)}\left(a_j\right).$$

应用定理 1.10 可得以下命题:

命题 7.2。 设 $0\le a_0<a_1<\cdots<a_N$，且 M 是一个正则序列，使得 $\sum M_n/M_{n+1}=\infty$.拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}:\tau_{a_0}A\left(M,\gamma;[0,1)\right)\oplus\cdots\oplus\tau_{a_N}A\left(M,\gamma;[0,1)\right)\to e^{-\frac{a_0}{x}}D\left(M,\Gamma;[0,1)\right)\oplus\cdots\oplus e^{-\frac{a_N}{x}}D\left(M,\Gamma;[0,1)\right)$$

是一个双射。

证明。 由于 $\mathcal{L}\tau_a F=e^{-\frac{a}{x}}\cdot\mathcal{L}F$，定理 1.10 得出 $\mathcal{L}:\ \tau_{a_j}A(M,\ \gamma;\ [0,1))\ \to\ e^{-\frac{a_j}{x}}D(M,\ \Gamma;\ [0,1))$ 是一个双射。因此，我们只需证明陈述中出现的两个和是直和。令$F=F_0+\cdots+F_N\in(\tau_{a_0}A(M,\ \gamma;\ [0,1))+\cdots+\tau_{a_0}A($ $M,\ \gamma;\ [0,1)))$，并注意到

$$F_0^{(n)}(a_0)=F^{(n)}(a_0),$$

and

$$F_j^{(n)}(a_j)=F^{(n)}(a_j)-F_0^{(n)}(a_j)-\cdots-F_{j-1}^{(n)}(a_j)$$

因此，根据拟解析性，首先 F递归地唯一确定 F_0，F_1，$\cdots$。由此可知，和$A(M,\ \gamma;\ [0,1))+\cdots+\tau_{a_N}A(M,\ \gamma;\ [0,1))$ 确实是直和。类似地，如果 $f=f_0+\cdots f_N\in\Big(e^{-\frac{a_0}{x}}D(M,\ \Gamma;\ [0,1))\ +\cdots+e^{-\frac{a_N}{x}}\quad-\quad-D(M,$ 那么，$e^{\frac{a_0}{x}}f(x)$ 和 $e^{\frac{a_0}{x}}f_0(x)$ 在原点处具有相同的幂级数展开，因此 f唯一确定了 f_0。以同样的方式继续推理，我们得出第二个和也是直和。□

7.4. 欧拉型微分方程。本节中，我们固定一个可容许权 γ，$I=[0,1)$ 和 $\eta>1$。考虑算子 $V=V_\gamma:\ \mathbb{C}[x]\to\mathbb{C}[x]$, 定义如下

$$Vx^n=\frac{\gamma(n+2)}{\gamma(n+1)}x^{n+1}.$$

例如 ，若 $\gamma=\Gamma$ 是欧拉伽马函数，则 $Vf(x)=x^2f'(x)$。另一个例子 is

$$\gamma(n+1)=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-a)}\cdots\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-a)},\quad 0<a<1,$$

因此， V 是一个分数阶导数算子:

$$Vf(x)=x^{1+a}\frac{d^a}{dx^a}f(x).$$

命题 7.3。 设 γ 为可容许的，且 M 为正则拟解析序列。若 $g\in B_{1/\eta}(M\gamma,\widehat{\gamma};\ 0_+)$，且 P 是在 $[0,\infty)$ 中没有零点的多项式，则方程

$$P\left(V_\gamma\right)f=g \tag{7.3}$$

有一个解 $f=\mathcal{L}_\gamma\left(\frac{\mathcal{B}_{\gamma}g}{P}\right)\in B_\eta(M\gamma,\widehat{\gamma};\ I)$。

证明。由于

$$\mathcal{B}_\gamma V\left(x^n\right)=\mathcal{B}_\gamma\left(\frac{\gamma(n+2)}{\gamma(n+1)}x^{n+1}\right)=\frac{x^{n+1}}{\gamma(n+1)}=x\mathcal{B}_\gamma\left(x^n\right),$$

（至少形式上）我们有，

$$\mathcal{B}_\gamma\left(P\left(V\right)f\right)=P\cdot\mathcal{B}_\gamma f.$$

由定理 1.4，

$$\mathcal{B}_\gamma g\in A\left(M,\gamma;I\right).$$

由于 P 在 $[0,\infty)$ 中没有零点，我们有

$$\left\|\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{P}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\leq C^n n!.$$

□

因此 $\frac{1}{P}\in A(M,\ \gamma;\ I)$，并且

$$\frac{1}{P}\mathcal{B}_\gamma g\in A\left(M,\gamma;I\right).$$

由同一定理，我们还有

$$f:=\mathcal{L}_\gamma\left(\frac{\mathcal{B}_\gamma g}{P}\right)\in\mathcal{L}_\gamma A\left(M,\gamma;I\right)\subset B_\eta\left(M\gamma,\widehat{\gamma};I\right).$$

由于 f 是方程 7.3 的形式解，且类 $\mathcal{L}_\gamma A\left(M,\ \gamma;I\right)$ 是拟解析的，因此函数 f 实际上是方程 7.3 的解，正如所述。

注记 7.4。 关于 P 是一个在正半轴上无零点的多项式这一假设可以弱化。对于任何满足 $\frac{1}{P}\in A(M,\ \gamma;\ \mathbb{R}_+)$ 。的函数 P，同样的结论也成立。

附录 A. 关于函数 K 和 E 的引理

引理 *4.2* 的证明。根据定理 A 和 B

$$\log E(r)\sim\log\frac{1}{K(r)}\sim\rho\varepsilon(\rho)$$

其中 $\rho=\rho(r)$ 是 $r=L(\rho)e^{\varepsilon(\rho)}.$ 的解。因此，对于任意 $\delta_1\in(0,\ 1)$，只需找到一个 $\delta>0$ 使得

$$\rho(\delta r)\varepsilon\left(\rho(\delta r)\right)+\rho(\eta r)\varepsilon\left(\rho(\eta r)\right)-\rho(r)\varepsilon\left(\rho(r)\right)\lesssim 1.$$

因此，只需证明存在一个与 η 无关的 $\alpha>0$，使得

$$\rho\left(\eta r\right)\varepsilon\left(\rho\left(\eta r\right)\right)\leq\eta^\alpha\rho(r)\varepsilon\left(\rho(r)\right).$$

下面来证明最后一个断言。

$$\begin{aligned}\log\frac{\rho(r)\varepsilon\left(\rho(r)\right)}{\rho(\eta r)\varepsilon\left(\rho(\eta\rho)\right.}&=\int_{\eta r}^{r}\frac{\varepsilon\left(\rho(u)\right)+\rho(u)\varepsilon'\left(\rho(u)\right)}{\rho(u)\varepsilon\left(\rho(u)\right)}\rho'(u)du\\&=(1+o(1))\int_{\eta r}^{r}\frac{\rho'(u)}{\rho(u)}du,\quad r\to\infty,\end{aligned}$$

其中在最后一个 等式中，我们使用了 $\rho|\varepsilon'(\rho)|=o(\varepsilon(\rho))$。对数 $r=$对数 $L(\rho)+\varepsilon(\rho)$ 求导得

$$\frac{\rho'(r)}{\rho(r)}=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\varepsilon\left(\rho(r)\right)+\rho(r)\varepsilon'\left(\rho(r)\right)}=\frac{1}{r\varepsilon\left(\rho(r)\right)}\left(1+o(1)\right).$$

So

$$\log \frac{\rho(r)\varepsilon\left(\rho(r)\right)}{\rho(\eta r)\varepsilon\left(\rho\left(\eta r\right)\right)} = (1+o(1)) \int_{\eta r}^{r} \frac{1}{\varepsilon\left(\rho(u)\right)} \frac{du}{u}.$$

由于 ε 有上界且为正，因此存在 $\alpha > 0$，使得

$$\log \frac{\rho(r)\varepsilon\left(\rho(r)\right)}{\rho(\eta r)\varepsilon\left(\rho\left(\eta r\right)\right)} > \alpha \log \frac{1}{1-\delta}.$$

最后一个不等式完成了证明。 □

引理 *6.1* 的证明。令 $\delta > 0$，我们假设 $z = re^{i\psi}$、$s = \rho e^{i\theta}$ 通过鞍点方程相关联

$$\log z = \log L(s) + \varepsilon(s).$$

比较鞍点方程的实部 和虚部，并利用 (2.1)，我们得到 t

$$r = L(\rho)e^{\varepsilon(\rho)}(1+o(1)), \quad \theta\varepsilon(\rho)(1+o(1)) = \psi, \quad r \to \infty.$$

根据定理 B，$|zE(z)| = O(1)$，当 $|z| \to \infty$ 时，在集合 $\mathbb{C} \setminus \Omega\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)$ 上一致成立。由于，

$$\partial\Omega\left(\eta\tfrac{\pi}{2}\right) := \left\{z \,:\, \theta = \pm\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right),\ \rho > \rho_0\right\},$$

只需证明

$$\eta\varepsilon\left(L^{-1}\left(r\right)\right) \geq \varepsilon\left(\rho\right)$$

对于 r 充分大的情形。

若 $\lim_{\rho\to\infty} \varepsilon(\rho) > 0$，则结论显然成立，因为 $\eta > 1$。否则，$\lim_{\rho\to\infty} \varepsilon(\rho) = 0$，且 ε 最终单调不增。

记

$$\log \frac{\varepsilon(\rho)}{\varepsilon\left(L^{-1}(r)\right)} = -\int_{\rho}^{\rho e^{\varepsilon\left(L^{-1}(\rho)\right)}(1+o(1))} \frac{\varepsilon'(u)}{\varepsilon(u)} du.$$

根据假设，当 u 充分大时，$-\frac{\varepsilon'(u)}{\varepsilon(u)} \leq \frac{1}{u}$，因此

$$\log \frac{\varepsilon(\rho)}{\varepsilon\left(L^{-1}(r)\right)} \leq \varepsilon\left(L^{-1}(\rho)\right) \to_{r\to\infty} 0,$$

由此完成引理 6.1 的证明。 □

引理 *6.2* 的证明。由定理 B，

$$\log\left(rE(r)\right) \sim s\varepsilon(s)$$

其中 $L(s)e^{\varepsilon(s)} = r$. 令 $r = L(k)$。由于 ε 非负且慢变，L 和 $s \mapsto s\varepsilon(s)$ 最终非递减。由 $L(s)e^{\varepsilon(s)} = L(k)$ 可得，$s \leq k$，因此

$$\log\left(rE(r)\right) \leq k\varepsilon\left(k\right)\left(1+o\left(1\right)\right).$$

根据假设，$\lim_{k\to\infty} \varepsilon(k) < 2$，这意味着

$$rE(r) \leq Ce^{2k},$$

如上所述。

□

参考文献

[1] I. Aniceto、G. Başar 和 R. Schiappa。复苏超越级数及其渐近分析入门。《物理学报告》，809：135，2019 1：–。[2] I. Aniceto、J. Russo 和 R. Schiappa。超对称规范理论中可局部化观测量的复苏分析。《高能物理学杂志》，2015(3)：172，2015。[3] I. Aniceto、R. Schiappa 和 M. Vonk。弦理论中瞬子的复苏。arXiv 预印本 arXiv:1106.5922，2011。[4] W. Balser。矩方法与形式幂级数。《纯粹与应用数学杂志》，76(3)：289–305，1997。[5] W. Balser。亚纯常微分方程线性系统的形式幂级数与形式解。Springer Science & Business Media，2008。[6] W. Balser 和 M. Yoshino。具有常系数的非齐次偏微分方程形式幂级数解的 Gevrey 阶。《函数方程》，53(3)：411–434，2010。[7] A. Beurling。Arne Beurling 文集：复分析，由 L. Carleson、P. Malliavin、J. Neuberger 和 J. Wermer 编，第一卷。Birkhauser，1989。[8] N. Bingham、C. Goldie 和 J. Teugels。正则变差，第27卷。剑桥大学出版社，1989。[9] L. Buhovsky、A. Kiro 和 S. Sodin。拟解析卡勒曼类中的幂代换。《以色列数学杂志》，第1–12页，2019。[10] T. Carleman。《拟解析函数：法兰西公学院讲义》。Gauthier-Villars et Cie，1926年。[11] L. Carleson。单位圆内正则函数的唯一性集。《数学学报》，87：325–345，1952年。[12] L. Carleson。关于通用矩问题。《斯堪的纳维亚数学学报》，9(1b)：197–206，1961年。[13] Ovidiu Costin。渐近分析与 Borel 可求和性。Chapman and Hall/CRC，2008年。[14] A. Dudko 和 D. Sauzin。关于 Écalle–Voronin 不变量的复苏方法。《数学报告》，353(3)：265–271，2015年。[15] E. M. Dynkin。光滑函数的伪解析延拓。统一尺度。《数学规划及相关问题》（第七届冬季学校会议，德罗霍贝奇，1974年），《函数理论与泛函分析》（俄文），第40–73页，1976年。[16] J. Écalle。《复苏函数》（分三部分），第1卷。巴黎-萨克雷大学数学系，425号楼，1981年。[17] J. Écalle。《复苏函数：桥方程与局部对象的解析分类》，第3卷。巴黎-萨克雷大学数学系，425号楼，1985年。[18] J. Ecalle。黏合函数与弱加速。《数学分析杂志》，60(1)：71–97，1993年。[19] L. Ehrenpreis。多复变数中的傅里叶分析。Courier Corporation，2011年。[20] A. Goldberg 和 I. Ostrovskii。亚纯函数的值分布，第236卷。美国数学学会，2008年。[21] G. H. Hardy。发散级数，第334卷。美国数学学会，2000年。[22] I. I. Hirschman。关于傅里叶变换在无穷远处的行为及函数的拟解析类。《美国数学杂志》，72(1)：200–213，1950年。[23] A. Kiro。关于光滑函数的泰勒系数。已被《数学分析杂志》接受发表，2019年。[24] A. Kiro 和 M. Sodin。关于由矩序列 K 和 E 生成的函数。《数学探索》，35(4)：443–477，2017年。[25] B. Korenblum。圆域中函数的拟解析类。载于《科学院院报》，第164卷，第36–39页。俄罗斯科学院，1965年。[26] B. Korenblum。某些角域解析函数类的非平凡性条件与拟解析性问题。载于《科学院院报》，第166卷，第1046–1049页。俄罗斯科学院，1966年。[27] A. Lastra、S. Malek 和 J. Sanz。一般卡尔曼超全纯类中的可求和性。《数学分析与应用杂志》，430(2)：1175–1206，2015年。[28] S. Mandelbrojt。无穷次可微函数类。《莱斯研究所小册子—莱斯大学研究》，29(1)，1942年。[29] S. Michalik。具有常系数的非齐次线性偏微分方程形式解的多重可求和性。《动力系统与控制系统杂志》，18(1)：103，2012年。[30] S. Michalik 和 B. Tkacz。某些矩偏微分方程的斯托克斯现象。《动力系统与控制系统杂志》，25(4)：573–598，2019年。[31] R. Miravitllas Mas。复苏：渐近展开中缺失指数修正项的问题。arXiv，第 arXiv–1904 页，2019年。[32] A. Moroz。推广 Borel 方法的新型可求和方法。《捷克斯洛伐克物理学杂志》，40：726，1990 7 705( )：–。[33] A. Moroz。角状区域的可求和方法。《数学物理通讯》，133(2)：369–382，1990年。[34] F. Nazarov、M. Sodin 和 A. Volberg。拟解析函数的下界，I：如何控制光滑函数。《斯堪的纳维亚数学学报》，第59–79页，2004年。

[35] F. Nevanlinna。关于渐近幂级数理论 *I*、*II*由芬兰科学与文学学院出版，1918年。[36] J.-P. Ramis。《k-可求和级数及其应用》。载于复分析、微局部演算与相对论量子理论，第178–199页。Springer，1980年。[37] J.-P. Ramis。发散级数与渐近理论，第121卷。法国数学学会，1993年。[38] J.-P. Ramis 和 Y. Sibuya。非线性亚纯微分方程形式解多重可求和性的新证明。《傅里叶研究所年刊》，44(3):811–848，1994年。[39] B.R. Salinas。零矩函数。《马德里科学院杂志》，49:331–368，1955年。[40] J. Sanz。形式幂级数的渐近分析与可求和性。载于微分方程的解析、代数与几何方面，第199–262页。Springer，2017年。[41] D. Sauzin。1-可求和性与复苏导论。*arXiv* 预印本 *arXiv:1405.0356*，2014年。[42] E. Seneta。正则变函数，第508卷。Springer，2006年。[43] A. D. Sokal。对沃森 Borel 可求和性定理的改进。《数学物理学杂志》，21 263，1980 2 261( ): – 。[44] J. Zinn-Justin。量子力学与场论中的高阶微扰级数：在重求和问题中的应用。《物理学报告》，70(2):109–167，1981年。A. Kiro，数学与计算机科学学院，魏茨曼科学研究所，Herzl街234号

，雷霍沃特 76100 ，以色列
电子邮件地址：avner-ephraiem.kiro@weizmann.ac.il