arXiv:2601.06897v1 [math.AC] 11 Jan 2026

¨普吕克理想及具有标准化律的代数的消去理想

Viktoriia Borovik 和 Takayuki Hibi

Abstract. 众所周知，定义格拉斯曼流形的普吕克理想由二次普吕克关系生成。这些关系构成一个逆字典序 Gröbner 基，并赋予普吕克代数具有标准化律的代数（ASL）结构。本文研究直线格拉斯曼流形 Gr(2, n) 的由二次式生成的投影。随后，我们以组合方式刻画 Gr(2, n) 的普吕克代数中的戈伦斯坦型 ASL 子代数。

Introduction

二项式和单项式长期以来一直是组合学与交换代数研究的核心对象。早期，人们对与单纯复形和有限偏序集相关联的无平方单项式理想，即所谓的斯坦利-赖斯纳理想 [14, 16], 进行了深入研究。到了 20 世纪 90 年代末，在 Gröbner 基的推动下，由单项式生成的域上多项式环的子代数及其定义理想（即所谓的环面理想） [11, 18], 开始受到关注。到了 2010 年代初，对边理想的幂和二项式边理想 [7, 8] 的研究迅速发展成为一个庞大的分支。

本文遵循 Pl¨ucker [12, 13]和 Grassmann [4] 的经典研究，从具有标准化律的代数 [3], 的视角，研究由二项式生成的多项式环的一个子代数；其定义理想是 Pl¨ucker 理想的一个消去理想（例如，参见 [10, 定理 1.4.1]）。

设 $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ 表示域 $\mathbb{K}$上以 $2n$ 个变量为变量的多项式环，并设 $L_n = \{p_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ 为一个分配格，其偏序定义为：若 $i \leq k$ 且 $j \leq \ell$，则 $p_{ij} \leq p_{k\ell}$。格拉斯曼流形 Gr(2, n) 的齐次坐标环 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L_n] = \mathbb{K}[x_i y_j - x_j y_i : 1 \leq i < j \leq n]$，通过恒等对应 $p_{ij} \mapsto x_i y_j - x_j y_i$，是定义在 L_n 上、以 $\mathbb{K}$ 为基域的直化律代数。Pl¨ucker 理想 I_{L_n}是 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L_n]$在多项式环$\mathbb{K}[p_{ij} : 1 \leq i < j \leq n]$中的定义理想，由二次 Pl¨ucker 关系生成

$$Q_{ijk\ell} := p_{i\ell}p_{jk} - p_{ik}p_{j\ell} + p_{ij}p_{k\ell}, \qquad 1 \leq i < j < k < \ell \leq n. \tag{1}$$

我们的目标是寻找一个子格 $L \subset L_n$，使其具有以下性质：

(i) 由满足 $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ $p_{ij} \in L$ 的 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L] \subset \mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L_n]$ 生成的子代数是在 $\mathbb{K}$上的、以 L 为基础的直化律代数；

2020 数学学科分类。 13H10、14M15、06D05。关键词和短语。 Pl¨ucker 理想、消去理想、具有标准化律的代数、分配格、区间图、Gr¨obner 基。

(ii) $\mathbb{K}[p_{ij}$中 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 的定义理想 I_L： $p_{ij} \in L]$ 是 I_{L_n}的消去理想；(iii) $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$是Gorenstein的。

本文的结构安排如下。在第 1 节中，我们简要回顾具有标准化律的代数。在第 2 节中，我们引入一种特定的字典序 $<_{\mathrm{lex}}$，使二次 Pl¨ücker 关系式（1）构成 Pl¨ücker 理想 ¨的 Gröbner 基。随后，我们研究特殊子格 I_{L_n}，它们使 L 的子代数 L_n（相容和完美相容子格）的定义理想 I_L 成为$\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 的 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L_n]$ 消去理想 $I_{L_n} \cap \mathbb{K}[p_{ij} : p_{ij} \in L]$ Pl¨ücker 理想。

尽管我们的主要研究对象是 L_n 的子格，但其组合性质可以通过有限图优雅地描述。在第 3 节中，我们为每个子格 $L \subseteq L_n$关联一个有限图 G_L，其顶点集为 $[n] = \{1, \ldots, n\}$，当且仅当 $\{i, j\}$ 时，顶点之间有边 $p_{ij} \in L$。我们的讨论聚焦于区间图。在定理 3.12 中，我们给出一个有效判据，用以判断当 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 是相容子格时， L 是否为 Gorenstein。此外，我们利用该判据计算出使 $L \subseteq L_n$ 为 Gorenstein 的完美相容子格 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 的数量（推论 3.15）。

在附录中A，我们构造了另一组由二次式（¨和三次式组成的 Pl¨ucker 理想 I_{L_n} 的字典序 Gr1）的 Gröbner 基。这为卡特兰数提供了另一种组合解释，即通过直线上的 n 个点上的嵌套弧排列来解释。利用这组 Grö¨bner 基，我们还部分重复了第2节中的消去结果。

1. Algebras with straightening laws

设 $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的诺特分次代数。设 P 是有限偏序集（部分有序集），并假设给定一个单射

$$\varphi : P \hookrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

使得 R 由 $\varphi(P)$ 作为 $\mathbb{K}$-代数生成。标准单项式是 R 中形如 $\varphi(\gamma_1)\varphi(\gamma_2)\cdots\varphi(\gamma_n)$ 的齐次元素，其中 $\gamma_1 \le \gamma_2 \le \cdots \le \gamma_n$ 属于 P（空积解释为 1）。如果满足以下条件，我们称 R 是 P 上关于 $\mathbb{K}$ 的直化律代数 [3]：

(ASL -1) 标准单项式集合构成 R 的一个 $\mathbb{K}$-基。(ASL -2) 若 α 和 β 在 P 中不可比较，且

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \sum_i r_i\, \varphi(\gamma_{i_1})\varphi(\gamma_{i_2})\cdots\varphi(\gamma_{i_{n_i}}), \quad \text{with } 0 \neq r_i \in \mathbb{K}, \quad \gamma_{i_1} \le \gamma_{i_2} \le \cdots \tag{2}$$

是 $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \in R$ 的唯一表达式，它是 (ASL-1) 所保证的、由不同标准单项式构成的 $\mathbb{K}$-线性组合，则 $\forall i$: $\gamma_{i_1} \le \alpha$， β。

(ASL-2) 中关系的右端允许为空和（即 0）。我们将“直化律代数”简称为 ASL。(ASL-2) 中的关系称为代数 R 的直化关系。

令 $S = \mathbb{K}[x_\alpha : \alpha \in P]$ 表示域 $\mathbb{K}$ 上以 $|P|$ 个变量构成的多项式环，并定义满射 $\pi : S \to R$，使得 $\pi(x_\alpha) = \varphi(\alpha)$。定义理想

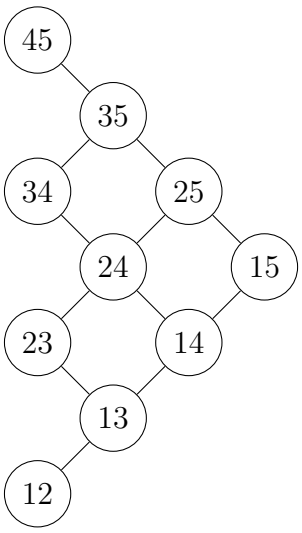


FIGURE 1. 分配格 L_5的哈斯图。

I_R $R=\bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 的定义理想是 π 的核 ker(π)。若 α, $\beta \in P$ 不可比较，则定义

$$f_{\alpha,\beta} := x_\alpha x_\beta - \sum_i r_i\, x_{\gamma_{i_1}} x_{\gamma_{i_2}} \cdots x_{\gamma_{i_{n_i}}},\quad \text{with } 0 \neq r_i \in \mathbb{K},\ \ \gamma_{i_1} \leq \gamma_{i_2} \leq \cdots,$$

由（ASL-2）得出。于是我们有 $f_{\alpha,\beta} \in I_R$。令 G_R 表示所有多项式 $f_{\alpha,\beta}$的集合，其中 α, β在 P中不可比较。令 $<_{\mathrm{rev}}$表示反字典序 [6, 例 2.1.2(b)] ，它由变量的一种排序 S 诱导，使得 $x_\alpha <_{\mathrm{rev}} x_\beta$ 只要 $\alpha < \beta$ 属于 P。由（ASL-1）可知，G_R 是 I_R 关于 $<_{\mathrm{rev}}$的 Gr¨obner 基。特别地， G_R 生成 I_R。

我们简要回顾有限偏序集的一些基本知识。有限偏序集 P 中的链 是 P的一个全序子集。链 C 的长度 为 $|C|-1$，其中 $|C|$ 表示 C的基数。 P 的秩 是 P中链的最大长度；我们将其记为 rank(P)。如果有限偏序集的所有极大链长度都相同，则称其为纯 。若 R是 P上的一个 ASL，且系数环为 $\mathbb{K}$，则 dim R = rank(P) + 1。

2. PLÜCKER IDEALS AND THEIR ELIMINATION IDEALS

令 $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ 为域$\mathbb{K}$上以 $2n$ 个变量为元的多项式环，并设

$$p_{ij} := x_i y_j - x_j y_i, \qquad \text{for } \ 1 \leq i < j \leq n.$$

令 $L_n = \{\, p_{ij} :\ \ 1 \leq i < j \leq n \,\}$，并在 L_n上定义偏序：若 $i \leq k$ 且 $j \leq \ell$，则 $p_{ij} \leq p_{k\ell}$。容易看出， L_n 是一个分配格 [9]。

例 2.1。 分配格的哈斯图 L_5 如图 1所示。我们有时滥用记号，将 L_n 与指标集合 ij Pl¨ucker 变量 p_{ij}等同起来。

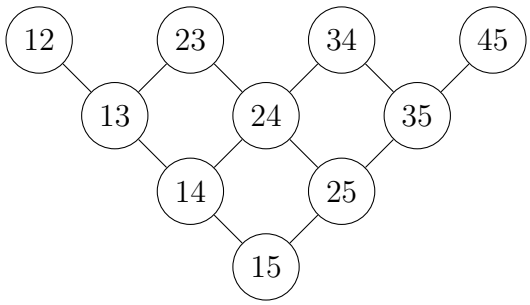


FIGURE 2. 偏序集 Π_5 的哈斯图。

令 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L_n]$ 表示由满足$1 \leq i < j \leq n$的 $\binom{n}{2}$ 二项式 p_{ij} 生成的 A 子代数。换言之,

$$\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L_n] = \mathbb{K}\big[\, x_i y_j - x_j y_i : 1 \leq i < j \leq n \,\big]$$

是直线格拉斯曼流形 Gr(2, n) 的齐次坐标环。由 [1] 可知， $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L_n]$ 是定义在 L_n 上、系数环为 $\mathbb{K}$的 ASL，其 (ASL-2) 关系为

$$p_{il}p_{jk} = p_{ik}p_{jl} - p_{ij}p_{kl}, \qquad 1 \leq i < j < k < \ell \leq n. \tag{3}$$

格拉斯曼–*Pl¨ucker* 理想 I_{L_n}，它是 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L_n]$ 在多项式环$S = \mathbb{K}[\, p_{ij}$ 中的定义理想： $1 \leq i < j \leq n]$ 在 $\binom{n}{2}$ 个变量上、系数为 $\mathbb{K}$，由二次*Pl¨ucker* 关系生成

$$Q_{ijk\ell} = p_{i\ell}p_{jk} - p_{ik}p_{j\ell} + p_{ij}p_{k\ell}, \qquad 1 \leq i < j < k < \ell \leq n. \tag{4}$$

令 $<_{\mathrm{rev}}$ 表示由 L_n 的任意线性扩张所给出的变量序诱导的 S 上的逆字典序。由于 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L_n]$ 是定义在 L_n 上、系数环为 $\mathbb{K}$的 ASL，二次 Pl¨ucker 关系（4）构成关于 ¨ 的 Gröbner 基 I_{L_n}，相对于 $<_{\mathrm{rev}}$。

另一方面，我们引入有限偏序集 $\Pi_n = \{\, p_{ij} : \ 1 \leq i < j \leq n\}$其偏序定义为：当 $p_{ij} \leq p_{k\ell}$ 时， $i \leq k$ 且 $j \geq \ell$。当 $n = 5$ 时，该偏序集的一个例子如图2所示。同样，令 $<_{\mathrm{lex}}$ 表示字典序 [6, 例 2.1.2(a)] 在 S 上的诱导序，其中变量序由 Π_n的任意线性扩张给出；也就是说， $p_{k\ell} <_{\mathrm{lex}} p_{ij}$ 当 $p_{ij} <_{\Pi_n} p_{k\ell}$时。

引理 2.2。 二次 *Pl¨ucker* 关系 （*4*） 是 *Pl¨ucker* 理想 ¨的 *Gröbner* 基I_{L_n}， 相对于 $<_{\mathrm{lex}}$而言。

证明。 由于$<_{\mathrm{rev}}$（I_{L_n}）的初始理想I_{L_n} 相对于 $<_{\mathrm{rev}}$ 与单项式理想 (in$<_{\mathrm{lex}}$（$Q_{ijk\ell}$）： $1 \leq i < j < k < l \leq n$）相同，并且二次 Pl¨ucker 关系（4）是¨相对于I_{L_n} 的 Gröbner 基 $<_{\mathrm{rev}}$，因此，二次 Pl¨ucker 关系（4）是¨相对于I_{L_n} 的 Gröbner 基 $<_{\mathrm{lex}}$。 □

现在转向消去问题。设 L 是 L_n 的子格， $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 是 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L_n]$ 的子代数，它由满足 $p_{ij} \in L$ 的二项式 $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ 生成。令 I_L 表示 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 在多项式环 $\mathbb{K}[p_{ij}$ 中的定义理想： $p_{ij} \in L]$ 是在 $\mathbb{K}$ 上的含有 $|L|$ 个变量的环。

引理 2.3。 如果 L 是 L_n 的子格，那么 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 是关于 $\mathbb{K}$ 的 L 上的 *ASL*，当且仅当满足以下条件：如果 $p_{i\ell}$ 和 p_{jk} 满足 $i<j<k<\ell$ 且属于 L，那么 p_{ij} 和 $p_{k\ell}$ 也属于 L。

证明。 **（“如果”）** 设 $p_{i\ell}$ 和 p_{jk} 满足 $i<j<k<\ell$ 属于 L。由于 L 是一个子格，$p_{ik}=p_{i\ell}\wedge p_{jk}$ 和 $p_{j\ell}=p_{i\ell}\vee p_{jk}$ 都属于 L。由于 p_{ij} 和 $p_{k\ell}$ 属于 L，(ASL-2) 关系（3）在 L 中仍然成立。$\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 因此， L 是关于 $\mathbb{K}$的 ASL。

（“仅当”） 设 $p_{i\ell}$ 和 p_{jk} 满足 $i<j<k<\ell$ 属于 L，并假设 p_{ij} 或$p_{k\ell}$ 不属于 L。将 $p_{i\ell}p_{jk}$ 表示为 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$的标准单项式的线性组合，即

$$p_{i\ell}p_{jk}=\sum_{q=1}^{t}c_q p_{i_q j_q}p_{k_q\ell_q},\quad 0\neq c_q\in\mathbb{K}.$$

然后，利用（3），在 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L_n]$ 中有

$$p_{ik}p_{j\ell}-p_{ij}p_{k\ell}=\sum_{q=1}^{t}c_q p_{i_q j_q}p_{k_q\ell_q}. \tag{5}$$

然而，（5）与 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L_n]$的 (ASL-1) 矛盾，因为 p_{ij} 或 $p_{k\ell}$ 并未出现在（5）的右端。因此， $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 不可能是关于 L 的 ASL，其中 $\mathbb{K}$。□

有限偏序集 P的一个偏序集理想是满足以下性质的子集 $J\subseteq P$：如果 $\alpha\in J$和 $\beta\in P$满足 $\beta<\alpha$，那么 $\beta\in J$。

定义 2.4。 如果 L 的秩为 n，且 $L_n\setminus L$ 是 Π_n的偏序集理想，则称 L_n 的子格 L 与 Π_n 相容。

总结目前为止的讨论，我们得到第 2 节的主要结果。

定理 2.5。 设 L 是 L_n的一个相容子格。那么， $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 是 L上的一个 *ASL*，其系数环为 $\mathbb{K}$。特别地， I_L 由二次元生成，且 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 是科恩–麦考利的。此外， I_L 是 *Pl¨ucker* 理想 I_{L_n}的一个消去理想。

证明。 设 $p_{i\ell}$ 和 p_{jk}，其中 $i<j<k<\ell$ 属于 L。由于 $L_n\setminus L$ 是 Π_n的一个偏序集理想， p_{ij} 和 $p_{k\ell}$ 都属于 L。由引理 2.3 可知， $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 是 L上的一个 ASL，其系数环为 $\mathbb{K}$。特别地，

$$I_L=(Q_{ijk\ell}:1\le i<j<k<\ell\le n,\ p_{i\ell}\in L). \tag{6}$$

由于分配格的每个子格都是分配格，且分配格具有很好的性质 [3, , 第 263], 页。因此，根据 [3, 推论 4.2] ，可知 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$是 Cohen–Macaulay 的。

在多项式环 $S=\mathbb{K}[p_{ij}:\ 1\le i<j\le n]$上固定字典序 $<_{\text{lex}}$，该序由变量序诱导，使得

(*i*) 若 $p_{ij}<p_{k\ell}$ 属于 Π_n；(*ii*) 若 $p_{ij}\notin L$ 且 $p_{k\ell}\in L$。

由（6）可得

$$I_L=(Q_{ijk\ell}:1\le i<j<k<\ell\le n)\cap\mathbb{K}[p_{i\ell}:p_{i\ell}\in L]. \tag{7}$$

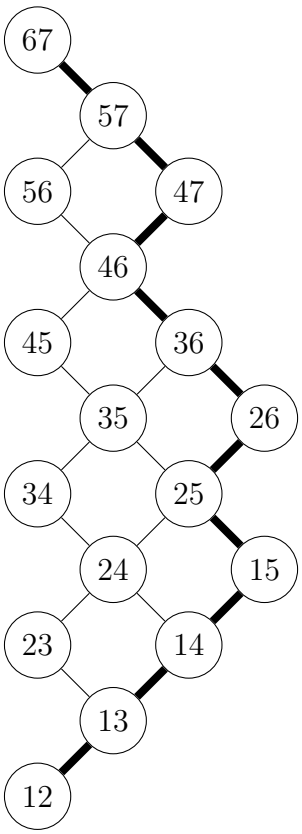


FIGURE 3.完美相容子格的哈斯图 L_7。基本链以粗体突出显示。

由于 $p_{k\ell} <_{\text{lex}} p_{ij}$ 当 $p_{ij} \notin L$ 且 $p_{k\ell} \in L$时成立，并且二次 Pl¨ucker 关系（4）构成关于 ¨的 Gr I_{L_n} obner 基，$<_{\text{lex}}$（引理 2.2）由此可知，根据（7）I_L 是 I_{L_n}的消去理想，证毕。□

我们以几个补充定义和例子来结束本节。

定义 2.6. 若相容子格 L 满足 L_n，则称其为完美的，如果

$$\dim \mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L] = 2n - 3.$$

由于 $\dim \mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L] = \text{rank}(L) + 1 \leq \text{rank}(L_n) + 1 = 2n - 3$，因此 L 是完美的，当且仅当对于每个 $1 \leq i \leq n-1$，都有$p_{i,\ i+1} \in L$；并且对于每个$1 \leq i \leq n-2$，都有$p_{i,\ i+2} \in L$。L_n 的完美相容子格数量为卡特兰数（其他组合解释见 [15]）：

$$C_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}.$$

例 2.7. 对于 $n = 5$ 有 $C_3 = 5$ 个的完美相容子格。它们的哈斯图见图4。

设 L 是 L_n 的完美相容子格。由于 $L_n \setminus L$ 是 Π_n 的偏序集理想，因此若 $p_{ij} \in L$，则 $p_{i+1,\ j} \in L$。对于 $p_{ij} \in L$，我们定义 $p_{ij}^{(1)}$ 为 $p_{i,\ j+1}$

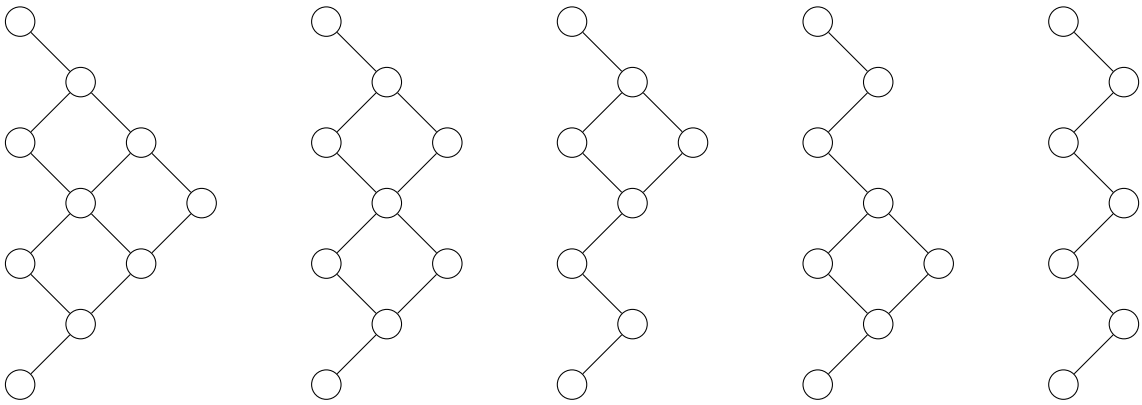


FIGURE 4. 格 L_5 的完美相容子格。

若 $p_{i,\ j+1} \in L$，而在其他情况下 $p_{i+1,\ j}$。递归地，对于 $k \geq 2$，我们设

$$p_{ij}^{(k)} := \left(p_{ij}^{(k-1)}\right)^{(1)}.$$

链

$$p_{12} < p_{12}^{(1)} < p_{12}^{(2)} < \cdots < p_{12}^{(2n-4)}$$

在 L 中，长度为 $2n-4$ 的链称为基本链。

例2.8。 完美相容子格的基本链 L_7 如图 3 所示。

3. INTERVAL GRAPHS AND THE GORENSTEIN PROPERTY

设 G 是定义在 $[n] = \{1, \ldots, n\}$ 上的有限简单图，且没有孤立顶点。G 的团是一个子集 $C \subseteq [n]$，满足对于任意不同的 $i,\ j \in C$，点对 $\{i, j\}$ 是 G的一条边。用 $\Delta(G)$表示 G的团集。由于 $\Delta(G)$是定义在 $[n]$上的单纯复形，我们称 $\Delta(G)$为 G 的团复形 。 G 的极大团 是 $\Delta(G)$的极大面（即一个面）。

弦 图是指一种有限图 G，其中每个长度大于3的圈都含有一条弦。我们回顾一类特殊的弦图。

定义3.1。 我们称 G 为区间图，若 G 的每个极大团都是一个区间 $[a, b]$，且 $1 \leq a < b \leq n$，其中 $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b\}$.

例3.2。 图5左侧的有限图是区间图。相比之下，图5 右侧的同构有限图不是区间图：团 $\{2, 4, 5\}$ 不是区间。

引理3.3。 每个区间图都是弦图。

证明。 设 G是一个定义在 $[n]$ 上的区间图，并设 G的极大团为 $C_1 = [a_1, b_1]$，……，$C_s = [a_s, b_s]$，其中 $1 = a_1 < \cdots < a_s < n$。由于

$$C_i \cap C_j \subset C_{j-1} \cap C_j, \quad \text{for } 1 \leq i < j \leq s,$$

序列 $C_1, \ldots, C_s$ 是 $\Delta(G)$ 的 叶序 [6, p. 172]。因此，$\Delta(G)$ 是 拟森林 [6, p. 172]，而且 G 是弦图（[6, 定理 9.2.12]）。□

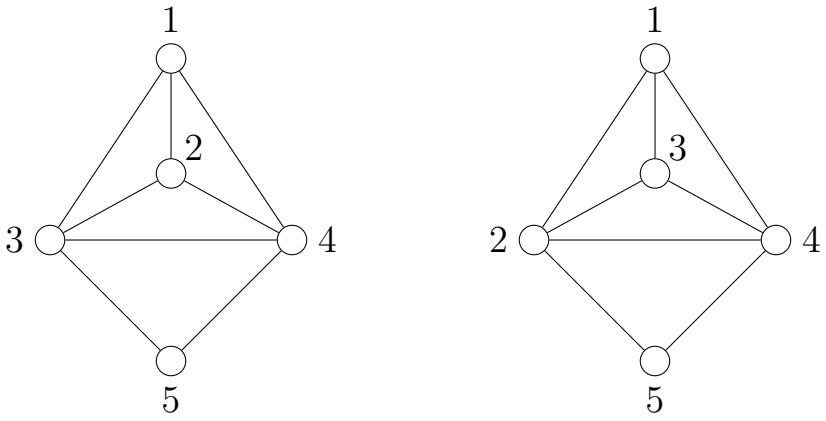


FIGURE 5. 两个同构图：一个区间图（左），一个非区间图（右）。

与上一节一样，设 $L_n = \{p_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ 为有限分配格。给定 L_n 的任意子偏序集 L，我们将一个以 $[n]$ 为顶点集的有限图 G_L 与 L 关联起来，其边恰好是满足 $p_{ij} \in L$ 的那些 $\{i, j\}$。

例 3.4。设 L 是 L_6 中如图6 左侧所示的子偏序集。则G_L 是同一图右侧所示的、定义在 $[6]$ 上的有限图。

引理 3.5。设 L 是 L_n的子偏序集。那么，当且仅当 G_L 是区间图时，$L_n \setminus L$ 是 Π_n 的偏序集理想。

证明。根据 [5, 定理 2.2], ，定义在 $[n]$ 上的有限图 G 是区间图，当且仅当满足以下条件：

(∗) 若 $\{i, j\}$ 和 $\{k, \ell\}$ 是 G 的边，且 $i < j$ 和 $k < \ell$，则

当 $i = k$ 和 $j \neq \ell$时，• $\{j, \ell\}$ 是 G 的一条边，并且

当 $i \neq k$ 和 $j = \ell$时，• $\{i, k\}$ 是 G 的一条边。

首先，假设 $L_n \setminus L$ 是 Π_n的一个偏序集理想。设 $\{i, j\}$ 和 $\{k, \ell\}$是 G_L的边，其中 $i < j$ 和 $k < \ell$。若 $i = k$ 和 $j < \ell$，那么由于 $L_n \setminus L$ 是Π_n的一个偏序集理想，可得对所有 $k' \geq k$，$\{k', \ell\}$ 都是 G_L 的一条边。特别地，$\{j, \ell\}$ 是 G_L的一条边。若 $i < k$ 和 $j = \ell$，那么同样由于 $L_n \setminus L$ 是 Π_n的一个偏序集理想，可得对所有 $j' \leq j$，$\{i, j'\}$ 都是 G_L 的一条边。特别地，$\{i, k\}$ 是G_L的一条边。因此，条件（∗）成立，且 G_L 是一个区间图。

反过来，假设有限图 G_L 在 $[n]$ 上是一个区间图，其极大团为 $C_1 = [a_1, b_1]$、.....、$C_s = [a_s, b_s]$，且 $1 = a_1 < \cdots < a_s < n$。令$\{i, j\}$ 满足 $i < j$，令 $\{k, \ell\}$ 满足 $k < \ell$，并假设 $i \geq k$ 和 $j \leq \ell$。假设 $\{k, \ell\}$是 G_L的一条边，设为 $\{k, \ell\} \in C_t$。那么 $a_t \leq k < \ell \leq b_t$。由于 $i \geq k$ 且 $j \leq \ell$，我们有 $a_t \leq i < j \leq b_t$，因此 $\{i, j\} \in C_t$。于是 $\{i, j\}$ 是 G_L的一条边。这表明 $L_n \setminus L$ 是 Π_n的一个偏序集理想，证毕。□

推论 3.6. L 是 L_n 的子偏序集，当且仅当G_L 是 L_n 的相容子格，且G_L 是区间图。

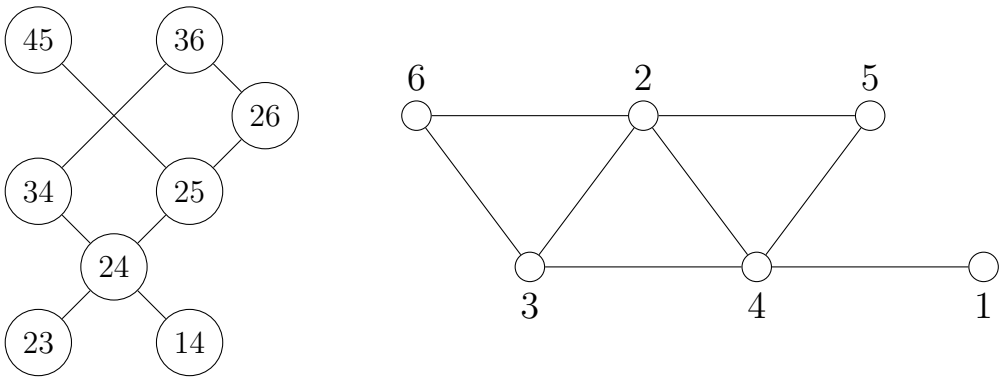


FIGURE 6. L 的子偏序集 L_6 （左）及其有限图 G_L （右）。

证明. **（“仅当”）**这是引理 3.6的直接推论。

（“如果”） 假设 G_L 是一个区间图。令 $\{i,\ell\}$ 和 $\{j,k\}$ 是 G_L的边，且 $i<j<k<\ell$。由于 G_L 是一个区间图，因此 $\{i,k\}$ 和 $\{j,\ell\}$也都是 G_L的边。因此， $p_{i\ell}\wedge p_{jk}$和 $p_{i\ell}\vee p_{jk}$都属于 L。换言之，L 是 L_n的子格。由引理3.6 又可得 L 是 L_n的相容子格。□

引理 3.7。 设 L是 L_n 的一个子格，并假设 G_L 是一个区间图，其极大团为 $C_1=[a_1,b_1]$，……，$C_s=[a_s,b_s]$，其中 $1=a_1<\cdots<a_s<n$。那么， L 作为 L_n 的相容子格是完美的，当且仅当

$$|C_i\cap C_{i+1}|\geq 2 \quad for\ each\ \ 1\leq i<s.$$

证明。 假设对于每个 $1\leq i<s$，都有 $|C_i\cap C_{i+1}|\geq 2$。由于对于所有 $1\leq i<s$，都有 $C_i\cap C_{i+1}\neq\emptyset$，因此对于每个 $1\leq j<n$， $\{j,j+1\}$ 都是 G 的一条边。固定$1\leq j\leq n-2$，并选取满足 $j\in C_i$的最大指标 i。由于 $|C_i\cap C_{i+1}|\geq 2$，我们有 $a_i\leq j\leq b_i-2$。因此 $j+2\in C_i$，故 $\{j,j+2\}$ 是 G的一条边。

另一方面，如果存在一个指标 $1\leq i_0<s$ 使得 $|C_{i_0}\cap C_{i_0+1}|\leq 1$，那么 $\{b_{i_0}-1,\ b_{i_0}+1\}$ 就不可能是 G的一条边。因此， L 不可能是完美的。□

例 3.8。 设 $n=5$。满足引理 3.7条件的 $[5]=\{1,2,3,4,5\}$ 上的区间图为

$$\{[1,5]\},\ \{[1,4],[2,5]\},\ \{[1,4],[3,5]\},\ \{[1,3],[2,5]\},\ \{[1,3],[2,4],[3,5]\},$$

例如， $\{[1,4],[3,5]\}$ 表示定义在 $[5]$ 上的区间图，其极大团为 $[1,4]$ 和 $[3,5]$。

注 3.9。 沿用上一节最后一段的论述， L_n 的完美相容子格数为卡特兰数 C_{n-2}。由此可知，满足引理 3.7 条件的区间图 G 的数量也为卡特兰数 C_{n-2}。

现在我们来讨论 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 成为 Gorenstein 的条件。回想一下，在有限分配格 L中，若元素 a 满足以下条件，则称其为不可约并元：

每当 $a = b \vee c$ 且 $b, c \in L$ 时，必有 $a = b$ 或 $a = c$。L 的唯一极小元不可能是不可约并元。

例 3.10. 有限分配格的并不可约元 $L \subset L_7$如图3所示，为

$$p_{13},\ p_{14},\ p_{15},\ p_{26},\ p_{47},\ p_{23},\ p_{34},\ p_{45},\ p_{56},\ p_{67}.$$

引理 3.11. 设 L 是 L_n 的子格，并假设 G_L 是一个区间图，其极大团为 $C_1 = [a_1, b_1], \ldots, C_s = [a_s, b_s]$，且 $1 = a_1 < \cdots < a_s < n$。设 P 为 L 的子偏序集，它由 L 的所有并不可约元组成。那么，当且仅当对每个 $1 \leq i < s$ 都有 $|C_i \cap C_{i+1}| \leq 3$ 时，P 是纯的。

证明。有 $L = \{p_{ij} : i < j,\ \ i \in C_q,\ \ j \in C_q,\ \ 1 \leq q \leq s\}$.

(“若”) 假设对每个 $1 \leq i < s$ 都有 $|C_i \cap C_{i+1}| \leq 3$。我们对 s 使用归纳法，证明由 L 的所有并不可约元组成的 L 的子偏序集 P 是纯的。

令 $s = 1$。那么，L 的并不可约元为 p_{1j}，其中有 $3 \leq j \leq b_1$ 和 $p_{j,\ j+1}$，其中有 $2 \leq j < b_1$。由于 P的偏序为

$$p_{12} < p_{13} < p_{23} < \cdots < p_{b_1-2,b_1-1} < p_{b_1-1,b_1},$$
$$p_{12} < p_{13} < p_{14} < \cdots < p_{1b_1} < p_{b_1-1,b_1},$$
$$p_{1j} < p_{j-1,j},$$

对于 $4 \leq j \leq b_1$，可知偏序集 P是纯的。

令 $s > 2$，并令 G'为 G_L的子图，其极大团为 $C_1, \ldots, C_{s-1}$。我们用 L' 表示与图 G'对应的 L 的一个子格。假设由 L' 的所有并不可约元组成的 L' 的子偏序集 P' 是纯的。P'的极大元为 $p_{b_{s-1}-1,\ b_{s-1}}$。偏序集 P由 P'添加 $p_{a_s,\ j}$（其中有 $b_{s-1} < j \leq b_s$）以及 $p_{j,\ j+1}$（其中有 $b_{s-1} \leq j < b_s$）得到。$P \setminus P'$ 的偏序为

$$p_{a_s,b_{s-1}+1} < p_{a_s,b_{s-1}+2} < \cdots < p_{a_s,b_s},$$
$$p_{b_{s-1},b_{s-1}+1} < p_{b_{s-1}+1,b_{s-1}+2} < \cdots < p_{b_s-1,b_s},$$
$$p_{a_s,j} < p_{j-1,j},$$

对于 $b_{s-1} < j \leq b_s$，它是纯的。令 $|C_{s-1} \cap C_s| = 3$。那么

$$p_{a_s,a_s+1} < p_{b_{s-1}-1,b_{s-1}} < p_{b_{s-1},b_{s-1}+1},$$
$$p_{a_s,a_s+1} < p_{a_s,b_{s-1}+1}.$$

现在，归纳假设保证 P 是纯的。类似的论证表明，若 $|C_{s-1} \cap C_s| < 3$，则 P 是纯的。

（“当且仅当”） 假设 $|C_{s-1} \cap C_s| \geq 4$。令 $C_{s-1} = \{\ldots, a-1, a, a+1, \ldots, b\}$ 和 $C_s = \{a, a+1, \ldots, b, \ldots, n\}$ 满足 $b - a \geq 3$。那么区间 $[p_{a,a+1},\ p_{b,b+1}]$ 是

$$p_{a,a+1} < p_{a+1,a+2} < p_{a+2,a+3} < \cdots < p_{b,b+1},$$
$$p_{a,a+1} < p_{a,b+1} < p_{b,b+1},$$

它不是纯的，因为 $b - a \geq 3$。因此，P 不可能是纯的，证毕。 □

现在我们转而讨论定理 2.5的推广。

定理 3.12。 L 的子格是 L_n 的相容子格，当且仅当 G_L 是一个区间图。此外，如果 G_L 是一个区间图，其极大团为 $C_1 = [a_1, b_1]$、……、$C_s = [a_s, b_s]$，且满足 $1 = a_1 < \cdots < a_s < n$，那么对于每个 $1 \le i < s$， $\mathcal{R}_K(L)$是 *Gorenstein* 的，当且仅当 $|C_i \cap C_{i+1}| \le 3$ 。

证明。由于 $\mathcal{R}(G) = S/I_G$ 是一个 Cohen–Macaulay 整环（定理 2.5），根据 [17, 定理 4.4], 中第 [9, 页的判据，该判据适用于 $\mathcal{R}(G) = S/I_G$。换言之，当且仅当 L 的所有并不可约元构成的子偏序集 P 是纯的时， $\mathcal{R}(G) = S/I_G$ 才是 Gorenstein。由引理 3.11 可知，当且仅当对每个 $1 \le i < s$都有 $|C_i \cap C_{i+1}| \le 3$时， $\mathcal{R}(G) = S/I_G$才是 Gorenstein。□

推论 3.13。 L 是 L_n 的完美相容子格，其中 $\mathcal{R}_K(L)$ 为 *Gorenstein*，当且仅当 G_L 是一个区间图，其极大团 $C_1 = [a_1, b_1]$、……、$C_s = [a_s, b_s]$ 满足 $1 = a_1 < \cdots < a_s < n$

$$2 \le |C_i \cap C_{i+1}| \le 3 \quad for\ each\ \ 1 \le i < s.$$

最后，我们枚举满足 L 是 L_n 的完美相容子格这一条件、且 $\dim \mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L] = 2n - 3$ 的 Gorenstein 环 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 的数量。首先，我们通过递推关系定义数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$p_{n+1} = 2p_n + q_n, \quad q_{n+1} = p_n + q_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

以及初始条件 $p_0 = 1$ 和 $q_0 = 1$。

引理 3.14。 设 $n \ge 4$。满足推论 *3.13* 条件的 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上的区间图数量为 $p_{n-4} + q_{n-4}$。

证明。 设 $n \ge 0$。令 p_n （分别为 q_n）表示满足推论 3.13 条件的区间图 G在 $[n+4]$ 上的数量，其中 $|C| \ge 4$ （分别为$|C| = 3$），这里 C 是 G 中满足 $n \in C$ 的极大团。特别地，满足推论 3.13 条件的 $[n]$ 上的区间图数量为 $p_{n-4} + q_{n-4}$。现在有 $p_0 = q_0 = 1$，由此容易推出数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和$\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足递推公式（8）。□

最后，将 p_n 和 q_n 表示为关于 n 的形式，可得到如下结果。

推论 3.15。 设 $n \ge 4$。满足 维数$\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L] = 2n - 3$ 的 *Gorenstein* 环 $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}[L]$ 的数量为，其中 L 是 L_n 的完美相容子格:

$$\frac{1}{5}\left[(5 + 2\sqrt{5})\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-4} + (5 - 2\sqrt{5})\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-4}\right].$$

Appendix A. Another Gröbner basis for the Plücker ideal

在第 2节中，我们给出了 Pl¨ucker 理想的字典序 Gr¨obner 基 I_{L_n}，该理想与有限偏序集 Π_n相关联。在本附录中，我们针对 Pl¨ucker 变量的自然字典序，构造另一个字典序 Gr¨obner 基。在陈述这一结果之前，我们先证明一个组合引理。

Richard Stanley 在其专著 [15] 中记录了 214 种关于卡塔兰数的组合解释。下面的引理为这份清单又添了一项。

引理 A.1。 设在水平线上放置的 n 个点 $1, \ldots, n$ 上绘制弧 (a, b)。假设该排列不包含以下模式：

- 两条不相交的弧 (i, j) 和 (k, l)，且具有 $1 \leq i < j < k < l \leq n$；
- 三条弧 (i, k)、(j, l)、(k, m)，且具有 $1 \leq i < j < k < l < m \leq n$；
- 三条弧 (i, l)、(j, m)、(k, s)，且具有 $1 \leq i < j < k < l < m < s \leq n$。

于是：

(1) 每个非极大排列都可以扩展为一个具有 $2n - 3$ 条弧的排列；
(2) 这种排列中弧的最大数量为 $2n - 3$；
(3) 极大排列的数量等于卡特兰数 C_{n-2}。

证明。 根据第一个禁用模式，任意两条弧都不互不相交，因此任意两条不同的弧 (a, b) 和 (c, d) 要么相交（$a < c \leq b < d$），要么互相嵌套（$a \leq c < d \leq b$）。

定义弧 (a, b) 的长度为 $b - a$。长度为$n - 1$的弧至多有一条，即 $(1, n)$。对于任意 $1 \leq \ell \leq n - 2$，长度为 ℓ的弧至多有两条。事实上，三条长度相同的不同弧不可能互相嵌套，因此必定两两相交，这必然会形成一种禁用三元组。因此，弧的总数至多为 $1 + 2(n - 2) = 2n - 3$，由此证明了（2）。例如，以下排列达到了这个上界

$$\{(1, k), (2, l) \mid k \in \{2, \ldots, n\},\ l \in \{3, \ldots, n\}\}.$$

现在我们通过对 n归纳来证明 (1) 和 (3)。对于 $n = 2$，唯一的允许排列是空排列和仅由一条弧组成的排列，因此两个结论都成立。为证明 (3)，我们构造一个双射，将这些排列对应到具有$n - 1$ 个叶节点的满二叉树，等价地，对应到具有 $n - 2$ 个内部节点的满二叉树。其数量众所周知为卡特兰数 C_{n-2}，见 [15]。例如，当 $n = 2$ 时，这棵树由一个节点组成，该节点对应于弧 $(1, 2)$。

现在令 $n \geq 3$。注意，弧 $(1, n)$、$(1, n - 1)$ 和 $(2, n)$ 总是可以加入任意允许排列，而不会产生禁用模式。因此，只需考虑包含这三条弧的 n 个点上的排列。

首先假设其余所有弧都嵌套在一条长度为 $n - 2$ 的弧内，例如 $(1, n - 1)$。移除顶点 n 以及弧 $(1, n)$ 和 $(2, n)$，得到一个 $n - 1$ 个点上的允许排列。根据归纳法，该排列可扩展为一个含有 $2n - 5$ 条弧的排列 $\mathcal{A}'$。加回弧 $(1, n)$ 和 $(2, n)$，得到一个 n 个点上含有 $2n - 3$ 条弧的允许排列 $\mathcal{A}$，从而证明了此情形下的 (1)。根据归纳假设，$\mathcal{A}'$ 对应于一棵以弧 $(1, n - 1)$ 为根的满二叉树。要构造与 $\mathcal{A}$ 对应的树，我们添加一个标记为 $(1, n)$ 的新根，其左子节点是对应于 $\mathcal{A}'$ 的树，右子节点则是对应于 $(2, n)$ 的叶节点。

现在假设并非所有长度不超过 $n - 3$ 的弧都嵌套在同一条长度为 $n - 2$的弧内，例如 $(1, n - 1)$。设 $(i_1, n), \ldots, (i_k, n)$ 为所有右端点在 n处的弧。将每条弧 (i_j, n) 替换为 $(i_j, n - 1)$。若替换后与已有弧重合，则只保留一条。移除顶点 n 及所有与其关联的弧后，得到点 $1, \ldots, n - 1$上的一个排列。这个挤压操作不会产生禁用模式，因为所有右端点都向内移动，同时保持它们的相对顺序。因此，所得排列是允许排列。根据归纳法，它可扩展为一个含有 $2n - 5$ 条弧的允许排列 $\mathcal{B}'$。

设 $(a, n-1)$ 是 $\mathcal{B}'$中右端点为 $n-1$ 的最短弧。现在重新插入顶点 n，并将每条弧 $(j, n-1)$ 替换为 (j, n)；这样仍然不会出现三种禁用模式。最后，我们添加两条弧 $(1, n)$ 和 $(a, n-1)$。所得排列 $\mathcal{B}$ 是允许排列，且含有 $2n-3$ 条弧，从而证明了此情形下的 (1)。

在树的层面上，$\mathcal{B}'$ 通过归纳法对应于一棵满二叉树 T'，其根节点为 $(1, n-1)$，左、右子节点分别为 $(1, n-2)$ 和 $(2, n-1)$。设 $(a, n-1)$ 为长度最小的最右叶节点。移除以 $(2, n-1)$ 为根节点的子树，并将 $(1, n-1)$ 的右叶节点与 $(a, n-1)$ 合并，得到一棵树T_1。利用移除的子树构造一棵新树 T_2：将每个节点标记中的 $n-1$ 替换为 n。对应于 $\mathcal{B}$ 的树通过引入一个标记为 $(1, n)$ 的新根节点得到，其左子节点为 T_1，右子节点为 T_2。

最后，注意，对于每个标记为弧 (a, b) 的内部节点，其两个子节点由形如 (a, j) 和 (i, b) 且满足 $j \geq i$ 嵌套于其中的极大弧唯一确定。禁型保证了这种选择既存在又唯一，从而确保该构造确实生成一棵满二叉树。□

例 A.2. 对于 $n = 5$，恰有 $C_3 = 5$个嵌套弧排列避开引理A.1中的模式。这些弧排列的示意图见图7的第一行。对应的具有四个叶节点的满二叉树见图7的第二行。注意，第一棵和最后两棵二叉树是通过给一棵具有三个叶节点的满二叉树添加一个新根节点及一个额外的子节点得到的。这对应于引理 A.1证明中归纳步骤的第一种情形。中间的二叉树则由证明第二种情形中所述的过程得到。

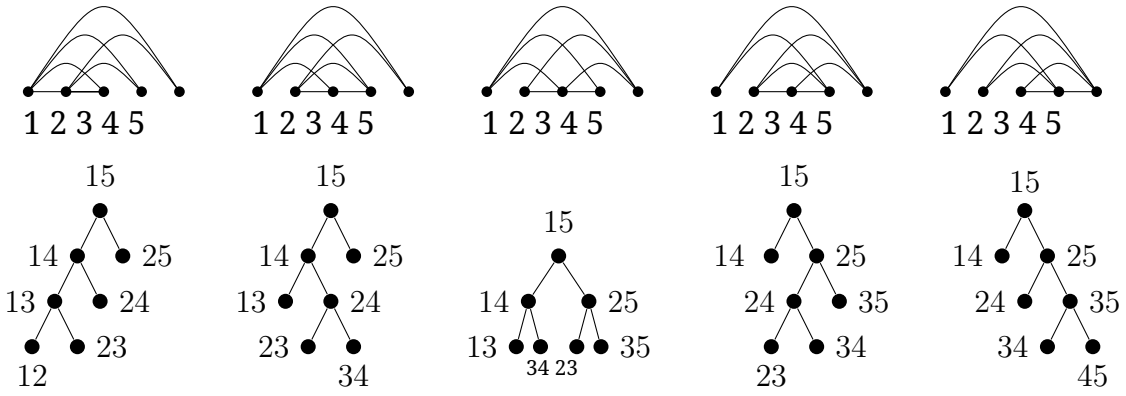


FIGURE 7.不含引理中禁用模式的嵌套弧图A.1 以及对应的满二叉树（$n = 5$）。

回到格罗布纳基，我们将普吕克变量按字典序排列：

$$p_{12} > p_{13} > \cdots > p_{1n} > p_{23} > \cdots > p_{2n} > \cdots > p_{n-2,n} > p_{n-1,n}. \tag{9}$$

命题 A.3. 以下 $\binom{n}{4}$ 二次式和 $\binom{n}{5}+\binom{n}{6}$ 三次式构成了关于变量序 ¨(¨普吕克理想 I_{L_n} 的约化字典序格罗布纳基 (9)。

(10)

$$Q_{ijkl} := \underline{p_{ij}p_{kl}} - p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk}, \quad for\ i<j<k<l,$$

$$C^{(5)}_{ijklm} := \underline{p_{ik}p_{jl}p_{km}} - p_{ik}p_{jm}p_{kl} - p_{il}p_{jk}p_{km} + p_{im}p_{jk}p_{kl}, \quad for\ i<j<k<l<m,$$

$$C^{(6)}_{ijklms} := \underline{p_{il}p_{jm}p_{ks}} - p_{il}p_{js}p_{km} - p_{im}p_{jk}p_{ls} + p_{is}p_{jk}p_{lm}, \quad for\ i<j<k<l<m<s.$$

我们需要以下命题。

命题 A.4. 令 M_{L_n} 为由 $\binom{n}{4}+\binom{n}{5}+\binom{n}{6}$ 中带下划线的单项式生成的平方自由单项式理想(10)。则有

(1) M_{L_n} 是等维的；(2) dim(M_{L_n}) $= 2n-3$；(3) deg(M_{L_n}) $= C_{n-2}$。

证明。 这由斯坦利–赖斯纳对应和引理 A.1 得出。 □

命题 *A.3* 的证明。 所列多项式（10）显然生成 I_{L_n}，因为它们包含所有二次 Pl¨ucker 关系式 Q_{ijkl}，而这些关系式最小生成 I_{L_n}。为了证明它们构成一个 Gr¨öbner 基，我们应用布赫伯格判据。对于所选的字典序（9），（10）中带下划线的单项式确实是首项。现在考虑二次式 S的 -对 Q_{ijkl}。每个二次式由四个指标 $i<j<k<l$ 确定，因此两个不同的二次式可能共有零到三个指标。

- 如果两个二次式至多共享一个指标，或者共享的两个指标分别位于首项中不同的 Pl¨ucker 变量内，那么它们的首项单项式互素。根据布赫伯格第二判据， S-对可立即约化为零。
- 假设它们恰好共享两个指标，且这两个指标同时出现在首项的同一个变量中。由对称性（注意， Q_{ijkl} 在 $(ik)(jl)$ 下不变），不妨设最后两个指标相同，因此这两个二次式分别为 Q_{ilms} 和 Q_{jkms}。于是

$$S(Q_{ilms}, Q_{jkms}) = p_{jk}(-p_{im}p_{ls} + p_{is}p_{lm}) - p_{il}(-p_{jm}p_{ks} + p_{js}p_{km}) = C^{(6)}_{ijklms},$$

因此，根据布赫伯格算法，应将其加入生成集 m.

- 最后，如果两个二次式共享三个指标，除对称情形外有两种可能：第三个公共指标是相应变量 p中的最小指标，或是最大指标。这两种情形都会得到如下形式的 S-对

$$\begin{aligned} C^{(5)}_{ijklm} &= S(Q_{iklm}, Q_{jklm}) = p_{jk}(-p_{il}p_{km} + p_{im}p_{kl}) - p_{ik}(-p_{jl}p_{km} + p_{jm}p_{kl}) = \\ &= S(Q_{ijkm}, Q_{ijkl}) = p_{kl}(-p_{ik}p_{jm} + p_{im}p_{jk}) - p_{km}(-p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk}). \end{aligned}$$

在证明这个集合足以构成格罗布纳基之前，我们先对它进行约化。

六指标三次式。考虑 $C^{(6)}_{ijklms} = S(Q_{ilms}, Q_{jkms})$，其中 $i < l < m < s$ 和 $j < k < m < s$。(i, j, l, k) 有六种可能的相对次序：

$$i < j < k < l, \quad j < i < k < l,$$
$$i < j < l < k, \quad j < i < l < k,$$
$$i < l < j < k, \quad j < k < i < l.$$

在前三种排序中，$C^{(6)}_{ijklms}$ 的首项是 $p_{il}p_{jm}p_{ks}$；在后三种排序中，则是 $p_{im}p_{jk}p_{ls}$。除两种模式（$ijkl$）和（$jilk$）外，所有情况下的首项都能被二次首项 $p_{ab}p_{cd}$ 整除，其中 $a < b < c < d$，因此可根据某个 Q_{abcd}进行约化。此外，根据（10）完全约化后，结果为零。例如，当 $i < j < l < k$时，我们有

$$C^{(6)}_{ijklms} - p_{jm}Q_{ilks} + p_{js}Q_{ilkm} - C^{(6)}_{ijlkms} - p_{im}Q_{jlks} + p_{is}Q_{jlkm} = 0,$$

其中 $C^{(6)}_{ijlkms}$ 属于集合（10），因为其指标按递增顺序排列。因此，唯一非冗余的情况是（$ijkl$）和（$jilk$）。由于三次式$C^{(6)}_{ijklms}$ 在置换（ij）（kl）下保持不变，我们可以只考虑满足$i < j < k < l$的那些情况，它们恰好就是（10）中列出的情况。

五指标三次式。接下来，考虑

$$C^{(5)}_{ijklm} = S(Q_{iklm}, Q_{jklm}) = S(Q_{ijkm}, Q_{ijkl}).$$

如果由第一对 S 得到，那么 $i < k < l < m$ 和 $j < k < l < m$，留下两种可能：$i < j$ 或 $j < i$。如果由第二对 S 得到，唯一的自由度就是交换 l 和 m。然而，这些三次式满足关系

$$C^{(5)}_{ijklm} = -C^{(5)}_{jiklm} = -C^{(5)}_{ijkml},$$

因此，它们在这些简单反射下至多相差一个符号，保持不变。因此，只需将 $C^{(5)}_{ijklm}$ 与 $i < j < k < l < m$ 一同纳入 Gr¨obner 基。

现在我们转向由（10）中带下划线的单项式生成的单项式理想。这恰好就是命题 M_{L_n} 中的理想A.4，因此它是等维的，其维数和次数与 Pl¨ucker 理想 I_{L_n} 相同。因此，根据 [2, 引理 3.1] 可知，（10）中的多项式构成¨的 Gr I_{L_n} obner 基，其所依据的字典序为（9）。□

序（9）是一个消去序。尽管 Gr¨obner 基本身不是二次的，我们仍然可以证明，相应的消去理想由二次元生成。更准确地说，我们可以删除 任意 初始段的 Pl¨ucker 变量（相对于序（9））， 并且仍然得到一个由二次元生成的理想。

我们采用第 3 节中的图约定，并将 I_G 消去理想记为 $I_G = I_{L_n} \cap \mathbb{K}[p_{ij} : \{i, j\} \in E(G)]$.

定义 A.5. 图 G与 消去序 (9) 相容，当且仅当存在某个$n \geq k > j \geq 1$ 其补图 G^c 同构于一个边集为

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{j, j + 1\}, \ldots, \{j, k\}.$$

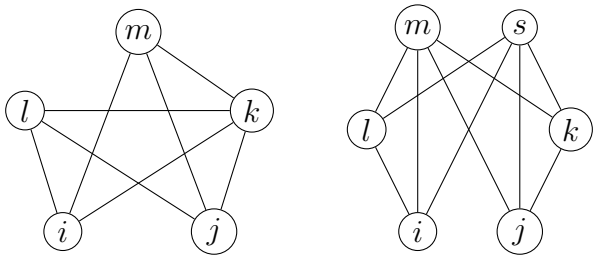


FIGURE 8. 分别支持三次关系 $C^{(5)}_{ijklm}$ 和 $C^{(6)}_{ijklms}$的图。

推论 A.6. 如果 G 与消去序 (9)相容，那么 I_G 由二次 *Pl¨ucker* 关系生成

$$\underline{p_{ij}p_{kl}} - p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk}, \quad i < j < k < l, \ \{ij, kl, ik, jl, il, jk\} \subseteq E(G). \tag{11}$$

证明。 根据消去定理 [10, 定理 1.4。1], Gr¨obner 基 I_G关于字典序 (9) 由 (10) 中仅涉及变量 p_{ij} 且满足 $\{i, j\} \in E(G)$ 的那些二次式和三次式组成。

任意三次式 $C^{(5)}_{ijklm}$ 都是完全图 K_5 中边之间的一个关系，其中该图不包含图 8左侧示意图所示的两条边。这样的三次式可以由二次式 Q_{iklm} 和 Q_{jklm}生成，条件是 $\{l, m\} \in E(G)$。对于相容图，这一条件总是成立：若 $\{i, k\} \in E(G)$，则按顺序 (9) 小于 $\{i, k\}$ 的每条边也都属于 $E(G)$，特别是 $\{l, m\}$ 对于 $i < k < l < m$。

同样的推理适用于任意三次式 $C^{(6)}_{ijklms}$。如果它属于相容图 $\mathbb{K}[p_{ij} : \{i, j\} \in E(G)]$ 的环 G，那么它属于由二次式（11）生成的理想，因为它由 Q_{ilms} 和 Q_{jkms} 生成。对于图 $\{m, s\}$ ，图 8 右侧示意图中出现的额外边 同样可以保证属于 $E(G)$，只要 $\{i, l\} \in E(G)$ 对 $i < l < m < s$成立。 □

ACKNOWLEDGMENTS

本文的研究始于第二作者于 2025 年 8 月 15 日至 9 月 8 日在莱比锡马克斯·普朗克数学科学研究所访问期间。

第一作者感谢欧洲研究理事会的资助（UNIVERSE PLUS，101118787）。然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究理事会执行局的立场。欧盟和资助机构均不对这些观点和意见承担责任。

REFERENCES

[1] C. De Concini、D. Eisenbud 和 C. Procesi，杨图与行列式簇，《发明数学》**56** （1980）129–165。[2] A. Conner、K. Hanand 和 M. Micha·lek，循环高斯图模型的 Sullivant–Talaska 理想，arXiv.2308.05561（2023）。[3] D. Eisenbud，直化律代数导论，载于 《环论与代数 III》（B. R. McDonald 编），第三届俄克拉荷马会议论文集，《纯粹与应用数学讲义》第55卷，Dekker，1980，243–268。

[4] H. Grassmann，《扩张理论》（英文译本）：《扩张理论》（L. Kannenberg 编），数学史第19卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州（2000）。[5] V. Ene、J. Herzog 和 T. Hibi，Cohen–Macaulay二项式边理想，《名古屋数学杂志》204（2011），57–68。[6] J. Herzog 和 T. Hibi，《单项式理想》，GTM 260，Springer，2011。[7] J. Herzog、T. Hibi 和 X. Zheng，具有线性分解的幂的单项式理想，《斯堪的纳维亚数学杂志》95（2004），23–32。[8] J. Herzog、T. Hibi、F. Hreinsd´ottir、T. Kahle 和 J. Rauh，二项式边理想与条件独立性陈述，《应用数学进展》45（2010），317–333。[9] T. Hibi，分配格、仿射半群环与具有标准化律的代数，[10] T. Hibi 编，《格罗布纳基》，Springer，2013。[11] H. Ohsugi 和 T. Hibi，由二次二项式生成的环面理想，《代数杂志》218（1999），509–527。[12]J. Pl¨ucker，《空间几何的新解析处理体系》，杜塞尔多夫，Schaub'sche Buchhandlung，（1846）。.[13] J. Pl¨ucker，论一种新的坐标系，《纯粹与应用数学杂志》5（1830），1-36 [《全集》第9篇，124–158]。[14] G. Reisner，多项式环的 Cohen–Macaulay商环，《数学进展》21（1976），30–49。[15] R. P. Stanley，《卡特兰数》，剑桥大学出版社，2015。[16] R. P. Stanley，上界猜想与 Cohen–Macaulay环，《应用数学研究》54（1975），135–142。[17] R. P. Stanley，分次代数的 Hilbert函数，《数学进展》28（1978），57–83。[18] B. Sturmfels，《格罗布纳基与凸多面体》，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996。

(Viktoriia Borovik) Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Inselstrasse 22, 04103 Leipzig, Germany电子邮箱地址：viktoriia.borovik@mis.mpg.de

(Takayuki Hibi) Department of Pure and Applied Mathematics,
Graduate Schoolof Information Science and Technology, Osaka University,
Suita, Osaka 565–0871,Japan电子邮箱地址：hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp