arXiv:2601.06926v1 [math.DS] 11 Jan 2026

带孔球面上莫尔斯流与余维一梯度流的结构

预印本

Illia Ovtsynov[*]基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学 iliaovtsynov@knu.ua

Alexandr Prishlyak[†]基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学 prishlyak@knu.ua

2026年1月13日

摘要

我们描述了奇点数量至多为六时，带孔二球面上梯度流的典型单参数分岔可能出现的所有拓扑结构。为描述这些结构，我们使用流的分界线图。鞍结奇点通过选取分岔前流的示意图中的一条分界线来指定，而鞍连接则通过连接两个鞍点的一条分界线来指定。

关键词 分岔、拓扑等价、结构稳定性

引言

1970 年，Palis 和 Smale Palis 和 Smale [1970]证明，莫尔斯–斯梅尔梯度向量场在光滑流形 M 上的所有梯度场 Grad(M) 集合中，关于 C^k 拓扑（$k \geq 3$）具有结构稳定性。此外，莫尔斯 – 斯梅尔向量场 MS(M) 在 Grad(M) 中既是开集也是稠密集。余维一梯度向量场是指在标准的梯度向量场单参数族中出现、但不属于莫尔斯 – 斯梅尔场的向量场。1983 年，Palis 和 Takens Palis 和 Takens [1983] 证明，这些向量场可分为两类：SN场，具有一个鞍结奇点；以及 SC场，包含一个鞍连接。除这些奇点外，它们与莫尔斯–斯梅尔梯度场具有相同特征。具体而言，它们在集合 Grad(M) $\setminus$ MS(M) 中具有结构稳定性，并且在该空间中也构成一个开且稠密的子集。

在闭流形上，向量场总是产生一个流。对于带边界流形，只有当向量场与边界相切时，才会定义一个流。如果生成这些流的向量场分别具有梯度、莫尔斯–斯梅尔或余维一的性质，则相应的流就被称为梯度流、莫尔斯–斯梅尔流或余维一流。Labarca 和 Pacifico [1990], 对带边界流形上的莫尔斯–斯梅尔流进行了描述，而 Kibkalo and Yokoyama [2022] 则研究了余维一流。此外，这些流在相关空间中的结构稳定性，以及它们在这些空间中的集合的开性和整体稠密性，也已得到证明。
可以为流的拓扑分类建立完全拓扑不变量。这些不变量通常表现为具有特定性质并附有额外信息的图。此外，若两个流的图之间存在保留这些信息的同构，则称这两个流拓扑等价。这些不变量的有效性取决于它们能否识别出给定奇点数量时动力系统的所有结构。

对于莫尔斯–斯梅尔流，分界线图可作为完整的拓扑不变量 Fleitas [1975], Leontovich 和 Mayer [1955], Oshemkov 以及 Sharko [1998],Peixoto [1973]。

[*] http://orcid.org/0009-0000-3262-2291
[†]https://sites.google.com/view/prof-prishlyak, https://orcid.org/0000-0002-7164-807X

我们可以为莫尔斯流（即缺少闭轨道的莫尔斯–斯梅尔流）进一步细化这一不变量；这类莫尔斯流在拓扑上等价于莫尔斯函数的梯度流。该不变量表现为嵌入曲面中的一个图，其中顶点表示源，边对应于鞍点的稳定流形。

Gross and Tucker [1987] 的旋转系统常用于定义曲面上的图嵌入。对于莫尔斯流而言，这构成了 Peixoto 不变量 Peixoto [1973] 。当处理具有单个源点的流时，弦图是一种便捷的表示方式 Kybalko 等人 [2018]。要构造弦图，需要使用编码，即由弦的编号组成；沿圆移动时，这些弦的端点彼此相连。然而，对弦进行编号或选择起点时可能存在多种方式，这会使比较所得的不变量变得困难。

此外，针对表现出梯度动力学的流，二维 Prishlyakand Prus [2020] 和三维 Prishlyak [2002]中的完全拓扑不变量已经建立。在 Prishlyak and Loseva [2020], Prishlyak 等人 [2021], 中，研究了球面上的集体动力学流；除哈密顿区域外，这些流还是带孔球面上的莫尔斯流。在这种情况下，梯度区域边界上的鞍点包含三个双曲扇区，这不同于我们所研究的流：对于这类点，我们考虑的流包含两个双曲扇区。
莫尔斯流的拓扑结构也可以借助李雅普诺夫函数来研究，这些函数都是莫尔斯函数。其分类见 Hladysh and Prishlyak [2019 a,b], Khohliyk andMaksymenko [2020], Kravchenko and Maksymenko [2019], Prishlyak [2001, 2015, 2000],Reeb [1946], Hatamian and Prishlyak [2020]。
本文旨在为带孔球面上的莫尔斯流和梯度余维一流构造一个完备不变量，该不变量类似于莫尔斯流的弦图。这个不变量在示意图中有一个标记点，使我们能够明确定义该流的数字编码。我们构造的不变量（区分图和流编码）是 Peixoto 的区分图和 Oshmankov-Shark 编码的推广，后两者是为闭曲面上的莫尔斯流而提出的。
本文的结果已发表于 Prishlyak and Ovtsynov [2025a,b,c]。

1 莫尔斯流的拓扑不变量

紧致二维流形上的典型向量场是莫尔斯–斯梅尔场。在梯度场中，这类场是莫尔斯场，或不含闭轨道的类梯度莫尔斯–斯梅尔场。它们满足以下三个性质：
1) 临界点均为非退化点；
2) 二维流形内部不存在分离曲线连接；
3) 每条轨线的 α极限集（ω极限集）都是一个临界点。
回顾一下，除中心之外，孤立临界点的邻域可由轨线划分为若干扇区，这些扇区分为三种类型：1) 椭圆型（轨线的 α极限集和 ω极限集均为该临界点）；2) 双曲型（轨线的 α极限集和 ω极限集均非该临界点）；3) 抛物型（轨线的α极限集或 ω极限集中仅有一个是该临界点）。分界线指与某个临界点的双曲型扇区边界相交的一条内部轨线。
梯度流（向量场）的分界线图是一个曲面，其中突出标示了临界点、边界轨线、分界线以及这些轨线的指定定向。为便于说明，我们将从鞍点出发并终止于汇点的分界线（不稳定分离轨）绘制为绿色，将从源点出发并终止于鞍点的分界线（稳定分离曲线）绘制为红色。

分界线图是紧曲面上莫尔斯流的完全拓扑不变量。然而，可以通过移除内部汇点和不稳定（绿色）分界线来简化这一不变量。剩余的临界点是 0-胞腔，其余的边界轨线和红色（稳定）分界线是 1-胞腔，而 0-胞腔与 1-胞腔的补集的连通分支是 2-胞腔。每个 2-胞腔都有一个唯一的汇点：它或者是边界上的某个临界点，或者是一个内部点。由于在同胚意义下，可以将胞腔边界上的鞍点通过彼此不相交的曲线唯一地连接到该汇点，因此，我们所描述的胞腔分解与分界线图携带了关于流结构的相同信息。

1.1 莫 Morse 流的区分图

与闭流形上的莫尔斯流一样，分界线图是此类流的完全拓扑不变量。它由嵌入曲面中的有向图构成。图的顶点是临界点，边则是分界线以及属于边界的轨线。边的定向由相应轨线上的运动方向决定，

即沿相应轨线运动的方向。进入鞍点的分界线称为稳定分界线，离开鞍点的则称为不稳定分界线。为了定义该流，可以简化示意图：从图中移除不稳定分界线，并收缩内部鞍点（将一个内部鞍点及其两条稳定分界线替换为一条边），同时收缩边界上的 b-鞍点。边界上剩余的临界点分为三种颜色：1）汇点为白色，2）a-鞍点为黑色，3）源点为灰色。
对于嵌入曲面中的所得图，我们可以使用旋转系统。为了定义每个源顶点处半边的循环次序，我们进行一项额外的构造。对于每个源点，我们取一个足够小且边界光滑的正则邻域，使每条轨线与其至多相交于一点。我们将该邻域的边界涂成第二种颜色（虚线）。我们去掉这些邻域的内部，而它们的边界与分界线及边界轨线的交点构成图的新顶点，并将这些顶点涂成黑色（第二种颜色）。

与分界线相交的边涂成第一种颜色（细黑线），而属于边界的边涂成第三种颜色（粗黑线）。因此，我们得到一张图，其中所有顶点分为两种颜色，边分为三种颜色。我们将这张图称为莫尔斯流的区分图。

区分图的一个边界环称为移除第一种颜色的边后所得图的一个连通分支。曲面的定向决定了每个边界环的定向。

图1展示了一个区分图的示例。在此图及其他图中，外边界环的定向由逆时针运动定义，而内边界环的定向由顺时针运动定义。

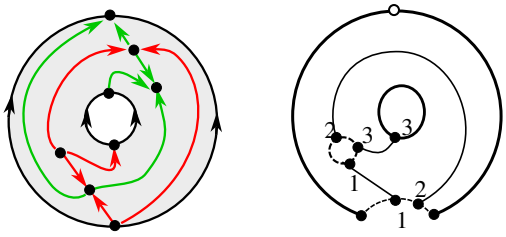


图1：编码为 {12]0[}[123]{3}.的莫尔斯流的分界线图和区分图

定理 1 两个莫尔斯流拓扑等价，当且仅当它们的区分图之间存在一个同构，该同构保持顶点和边的颜色，并且要么保持所有边界环的定向，要么同时反转所有边界环的定向。

证明。 必要性。拓扑等价 h 是一个同胚，它在特殊点、分界线和边界分支之间诱导一个双射，从而定义图的一个同构。根据构造，对应顶点和边的颜色相同。如果 h 保持曲面的定向，则所有边界环的定向都保持不变；如果 h 反转曲面的定向，则所有边界分支的定向都同时反转。

充分性。我们将区分图 G 双重化。为此，我们将不连通并 $G \sqcup G$ 上第三种颜色的边上的点识别起来。这样，我们便在一个闭曲面上构造出双重化流的区分图。双重化曲面上的流都是 Ω-稳定流，而区分图的等价（保持颜色和定向的同构）定义了这些流的拓扑等价。这些同胚在曲面一半上的限制，就是所求的拓扑等价。

1.2 莫尔斯流编码

本节讨论带有区分图指定顶点的莫尔斯流，并假定曲面已给定定向（这等价于指定一个（因而也指定所有）边界环 C_1，C_2，.....上的定向。所有鞍点都将编号，其稳定流形也采用相同编号。编码由沿曲面边界分支定向遍历时遇到的分界线编号列表（列表置于花括号内），或沿源点邻域边界遍历时遇到的分界线编号列表（列表置于方括号内）组成。

如果顶点属于边界或边界上某个源点的邻域，我们以左花括号开始编码；如果顶点属于内部鞍点的边界，则以左方括号开始编码。如果该

指定顶点属于一条分界线，我们将相应的鞍点（及其分界线）编号为 1，并将其纳入编码。如果在该顶点处，沿边界环的定向 C_1 移动时，颜色从第三种变为第二种，则在编码中对应符号 $[$, ; 如果从第二种变为第三种，则对应符号 $]$。对于所有此类顶点，我们都应用这一规则。我们从指定顶点移动到下一个顶点。如果该顶点属于某个尚未编号的鞍点的分界线，则为其分配下一个编号（如果尚未给任何鞍点编号，则编号为 1），并将其纳入编码。如果该顶点对应于一个已经编号的鞍点，或对应于符号 $[,]$, ，则将该编号或符号纳入编码。我们继续这一过程，直到到达指定点。最后用相应的花括号或方括号闭合列表。

如果区分图只有一个边界环，则编码构造过程就完成了。假设这样的边界环有多个。由于区分图是连通的，必然存在一条第一种颜色的边，将第一个边界环与其他边界环连接起来。在所有这类边中，我们选取编号最小的边 e。对应的边界环是第二个周期轨道 C_2，属于 C_2 的 e 端点是 C_2 上的指定顶点。对于周期轨道 C_2，列举过程与 C_1 相同。按照同一原则，我们继续处理下一个边界环。遍历完所有边界环后，编码书写即告完成。若遍历边界环时遇到白色顶点，则在相应位置填入 0。如果列表中有两个数字相邻出现，则用逗号将它们隔开。如果流中少于 10 个座位（所有数字都是个位数），编码中就不使用逗号。

因此，编码中有两类列表：1）内部列表，位于方括号内且不包含在花括号中（也不包含其他括号）；2）边界列表，位于花括号内（且不包含其他花括号）。如果边界列表包含方括号，我们会循环 rearrange 其元素，使其以左方括号开头。编码的子列表定义为修改后的边界列表中位于左方括号和右方括号之间的序列，前提是其中不包含其他方括号。

例1 设与下方鞍点的下部分隔线对应的一个顶点在图*1*的区分图中被高亮显示，并令外部边界环的定向为逆时针方向。则编码如下：$\{12]0[\}[123]\{3\}$.它由三个列表组成，并包含一个子列表。

定理2 当且仅当两个区分图具有相同的编码时，存在一个区分图之间的同构，将高亮顶点映射到另一个高亮顶点，并保持顶点颜色、边颜色以及边界环的定向不变。

证明。 必要性。高亮顶点的选择以及边界圈的定向，使得能够唯一地为区分图的顶点编号，这些顶点对应于流的鞍特殊点。区分图的边颜色之间的对应关系，定义了编码中方括号与花括号之间的对应关系。因此，这些图的编码相同。

充分性。设这些流具有相同的编码。我们构造它们的区分图之间的一个同构。图的边界圈分别对应于编码中的列表。我们定义保持定向的周期轨道之间的同胚，将编码中编号相同且位置相同的顶点映射到编号和位置均相同的顶点。我们将所构造的同胚延拓到内部边上。之所以能够做到这一点，是因为根据构造，编号相等意味着所构造的同胚与内部边的端点相容，而线段端点的映射可以延拓为它们之间的同胚。于是，我们得到区分图的一个同构。由于边的第二种和第三种颜色由方括号的位置决定，所构造的图同构保持边颜色不变。编号为 0 的顶点具有不同于编号为正整数的顶点的颜色。因此，顶点颜色也得以保持。

我们将源列表 称为这样一个数字列表：这些数字位于左方括号和右方括号之间，或者位于花括号内符号的某个循环置换所对应的一对方括号之间。

对于该编码，我们写出一个圈系。要构成一个周期轨道，我们在某个列表中固定一个数字（记作 a_1）：它是周期轨道中的第一个数字。周期轨道中的下一个数字是固定列表中（按循环顺序）紧接着的数字，我们将其记为 a_2。接下来，我们在编码中找到另一个包含数字 a_2 的列表（或者找到同一个列表中位于不同位置的 a_2），并转到该列表。我们取（按循环顺序）下一个数字 a_3，然后重复这一过程。当我们从另一个 a_1回到同一列表中同一位置的初始 a_1 时，周期轨道便构成完毕。若列举过程中遇到 0，就将其纳入周期轨道，并继续从同一列表中取下一个数字。该周期轨道对应于胞腔分解中二维胞腔的边界。

定理3 莫尔斯编码具有以下性质：

1. 每个 n 除*0*以外，每个数都在编码中出现两次，并且至少包含在一个源列表中 *s.*

2. 每个周期轨道至多包含一个 *0*。

3. 对于编码中的任意两个列表，都存在一个列表序列，使得该序列中每对相邻列表包含相同的数字。

4. 如果 V 是列表的数量（花括号对以及不在花括号内的方括号对），E 是数字的数量（不包括 *0*），而 F 是周期轨道的数量，则欧拉公式成立：

$$V - E + F = 2.$$

证明。1. 编码中的非零数字对应于位于曲面内部的鞍点的稳定流形。有两种可能：1）内部鞍点；2）边界上的鞍点。第一种情况下，稳定流形由两条分界线组成，每条分界线都始于一个源点。源点列表中有两个相同的数字。第二种情况下，稳定流形是一条分界线。对应的数字中，一个位于源点列表中，另一个是边界上鞍点的编号。

2. 由于一个周期轨道对应于区分图的一个单元（面），且每个面只包含一个汇点，因此，如果该汇点属于边界，则周期轨道中有一个0；如果汇点是内部点，则周期轨道中没有0。

3. 这一条件等价于区分图的连通性，而这由曲面的连通性可知。

4. 利用莫尔斯流，我们构造球面的胞腔分解。为此，我们将每个边界分支收缩为一个点。0-胞腔是流的源点以及收缩为一个点的边界分支。它们对应于列表。1-胞腔是鞍点的稳定流形。它们对应于数字。2-胞腔对应于周期轨道。于是，对于球面的欧拉示性数，$\chi(S^2) = V - E + F = 2.$

定理4 给定一个列表集合，其中的整数取自*0*到*n>0*，每个列表或者写在*1*）花括号中，或者写在*2*）方括号中；花括号中的列表还可以包含写在方括号中的子列表（并对列表元素进行后续循环置换）。如果这些列表集合满足前一定理的性质*1—4*，那么就存在一个亏格为*0*的紧曲面（带孔球面）上的莫尔斯流，使这些列表成为该流的编码。

证明。 我们根据编码构造一个区分图。为此，我们取 n 个圆的不交并，其中 n是列表的数量。因此，每个列表对应一个圆。我们任意为每个圆指定一个定向（运动方向）。在每个圆上，我们选取与数字和内部方括号对应的点（顶点），使得沿定向行进时，这些点的顺序与对应列表中元素的顺序一致。我们用线段连接数字相同的顶点（不逐点相交）。将这些线段的边涂成第一种颜色，将对应于列表和花括号内子列表的圆的边涂成第二种颜色，其余边涂成第一种颜色。对应于 0 的顶点涂成第二种颜色，其余顶点涂成第一种颜色。按照定理 1 的方法，将区分图加倍后，我们在加倍曲面上构造一个流。该流在曲面一半上的限制就是所需的莫尔斯流。

根据构造，流的编码取决于初始特殊点以及曲面（边界）的定向。改变初始点会改变顶点的编号，也就是说，顶点编号集合中会发生一次替换。此外，在每个列表中，改变初始点可能会导致列表元素发生循环置换。编码中各列表的顺序也可能改变。如果曲面的定向改为相反方向，则每个列表中元素的顺序都会反转（也可能发生循环置换）。

2 带孔球面上梯度流的典型单参数分岔

在典型的向量场单参数族中，莫尔斯流的三个条件之一可能遭到破坏。第一条条件遭到破坏会导致奇点处发生余维一分岔，而第二条条件遭到破坏则会产生鞍连接。第三条条件不可能遭到破坏，因为根据庞加莱-本迪克松定理，球面上每条轨线的 α极限集（ω极限集）要么是一个奇点、一个周期轨道，要么是一个多边环。由于梯度场不存在周期轨道或多边环，这个集合必定是一个奇点。

Kibkalo and Yokoyama, 2022, 定理 I 中描述了梯度流单参数族中所有可能的典型分岔 []。这些分岔包括：1）鞍结（内部）SN，2）边界鞍结 BSN，3）边界上的退化鞍点（半鞍点）HS，4）边界上的退化结点（半结点）HN，5）双重化

边界上的鞍点 BDS，6）鞍连接（内部）SC，7）半边界鞍点连接（半边界）HSC，8）边界鞍点连接 BSC。分岔 1）–5）通常称为局部分岔，而 6）–8）则被视为全局分岔。

我们考察依赖于参数 a 的向量场族 $V = V(x,\ y,\ a)$，$a \in [-1, 1]$ 在奇点 $(x = 0, y = 0)$ 的 U 附近发生的局部分岔，其中 $a = 0$ 为分岔点。我们选择参数 a 的方向，使得当 $a < 0$ 时，U 附近的向量场有两个奇点。在所有情况下，向量场 $V(x,\ y,\ 0)$ 都可以由 $V(x,\ y,\ -1)$ 通过压缩为一条连接这两个奇点的轨线而得到。因此，在 $a = 0$ 处，我们得到一个余维一流（向量场）。
要定义具有余维一特殊点的流，可以采用以下两种方法之一：A）在分岔前向量场的拓扑不变量中，确定一条收敛于某一点的轨线；或者 B）指出分岔后流中分岔的位置、分岔类型，以及分岔过程中分界线图中发生变化的其他元素。第一种方法较简单，但需要定义的流比余维一流多一个特殊点。因此，要用第一种方法找出具有 n 个特殊点的所有余维一流结构，必须了解具有 $n+1$ 个特殊点的所有莫尔斯流结构。对于第二种方法，只需了解具有 n 和 $n-1$ 个特殊点的莫尔斯流结构。因此，对于 1）–5）每一种流类型，我们都构造两种编码：A码和B码。

2.1 鞍结（内部）SN

当梯度分岔具有一个余维一的内部退化特殊点，且导数矩阵的一个特征向量等于 0、另一个不为 0 时，就会发生鞍结分岔（SN）。若结点为源点（分岔 SN_+），则可用方程（标准形）$V(x,\ y,\ a) = \{x, y^2 + a\}$ 描述；若结点为汇点（分岔 SN_-），则可用方程 $V(x,\ y,\ a) = \{-x, -y^2 + a\}$ 描述。这里，a 是一个参数。分岔SN_+ 如图 2 所示。如果在分岔 SN_+中，所有轨线上的运动方向都反转，就会得到SN_-。

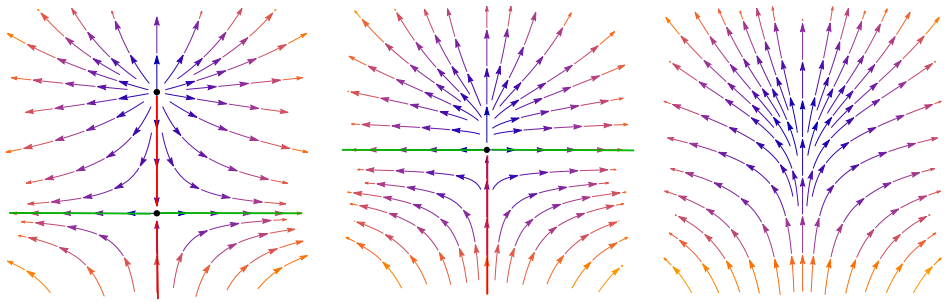


图 2：鞍结分岔 SN_+

当 $a < 0$ 时，我们得到分岔前的流；当 $a > 0$ 时，我们得到分岔后的流；当 $a = 0$ 时，我们得到分岔瞬间的流（余秩 1 的流）。需要指出的是，鞍结分岔对应于函数 $f(x,\ y,\ a) = \pm\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + ay$的一种典型单参数突变（变形）：

$$\text{grad}\ (\pm\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + ay) = \{\pm x, y^2 + a\}.$$

要定义分岔 SN_+，我们可以采用以下任一种方式：1）分岔前的莫 Morse 流（$a = -1$），或 2）分岔后的莫尔斯流（$a = -1$）。
1）考察特殊鞍源点的稳定流形（图 2 中的红色分离曲线）。它不能从这个同一特殊点出发，因为梯度场不包含环。这意味着，参与鞍源分岔的稳定鞍流形不会形成闭环。因此，要在分岔前莫尔斯流的区分图（位于 $a = -1$）上确定鞍源分岔，我们需要在源点的边界环上标出一个顶点。曲面的定向有两种定义方式，且与该分岔无关。因此，SN 有两种 A码。

例如，对于图1中从内节点发出的第一条分界线上的流，其 A码如下：$SN_+^A[123]\{12]0[\}\{3\}.$

2) 设 γ 是属于 SN_+、 $\alpha(\gamma) = z$ 的一条分界线。鞍点分岔产生的鞍点分界线始于 z。为了在莫尔斯流的分界线图上表示 SN_+ 的分岔，这些轨线必须在分岔后突出显示。在编码中，我们用括号将它们标出。

例2 对于 *A* 码中描述的同一分岔，*B* 码如下： $SN_+^B\{(12)1]0[\}\{2\}.$

在分岔发生的瞬间（$a = 0$），流的分界线图确定了分岔的结构。

类似地，如果分岔前鞍点的不稳定流形不构成闭环，则可能发生 SN_- 的分岔。在分岔前的莫尔斯流分界线图中，应突出显示不稳定分离轨。在胞腔分解中，相应的 1-胞腔位于两个不同的 2维胞腔之间。要定义这种分岔，必须突出显示一对单元：一个闭包属于曲面内部的单元，以及两个相邻 2维胞腔中的一个。此外，相邻的 2维胞腔边界上不应包含汇点，并且只能在一侧与该 1-胞腔相邻。

此外，为了定义这类流的结构，可以反转流中所有轨线的运动方向，并使用为 SN_+-流构造的编码。

例如，对于图1中从第一个鞍点发出的分界线，内部汇点编码如下：$SN_-^A[123]\{1]0[3\}\{2\}$ 和 $SN_-^B\{(12)]0[2\}\{1\}$。

注1。SN流的A码以方括号开头，而被拉出的分界线对应于1。在B码中，圆括号要么位于内部源点列表（即方括号内的列表）中，要么位于某个子列表中；它们出现在编码开头，紧跟在方括号或花括号之后。

注2。莫尔斯理论中的鞍结分岔对应于点压缩操作，或压缩相邻指标的互补把手。

2.2 边界鞍结 BSN

当奇点位于边界上、属于边界的特征向量为零且横向于边界的分量非零时，就会发生边界鞍结分岔。如果结点是源点（分岔 V），其标准形为 $V(x,\ y,\ a) = \{x^2 + a, y\}$,

$y \geq 0$ BSN_+ $V\ x\ y\ a\ = \{-x^2 + a, -y\}\ y \geq 0$ ；如果结点是汇点（分岔 BSN_-），则由方程 (, ,) , , 给出。

注意，边界鞍结分岔对应于函数 $f(x,\ y,\ a) = \pm\frac{1}{3}x^3 + ax \pm \frac{1}{2}y^2$ 的变形。 –

–

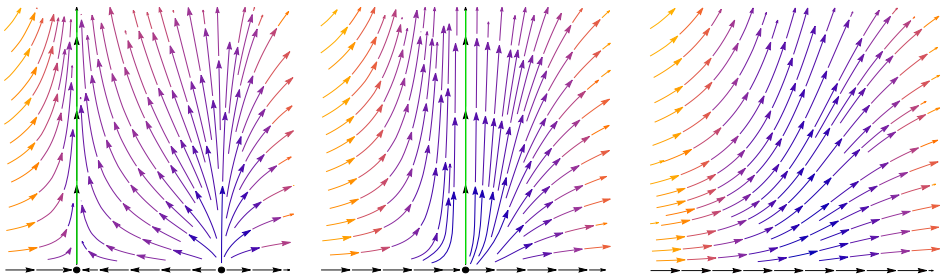


图 3: BSN_+ 分岔

分岔 SN 具有 Z_2 不变性（有一条对称轴），而 BSN 可以看作 SN 在该群作用下的因式分解。换言之，如果在任意时刻沿对称轴（ ）切开流 $SN(V(\{pmx, \pm y^2 + a\}$ $x = 0$ BSN y , ,))的相图，那么每一部分都会发生分岔。

对于 BSN_+，源点和鞍点合并为一个点。图3 a) 显示分岔前的流（$a = -1$），图3 b) 显示分岔发生时的流（$a = 0$），图3 c) 显示分岔后的流（$a = 1$）。

对于 BSN_-，鞍点和汇点合并为一个点，随后消失。

与内部鞍结一样，分岔 BSN 的结构可以由分岔发生时的分界线图来定义。

为了写出 A码，我们使用分岔前的判别流图来定义分岔，并突出显示作为吸引轨道的边界轨道。突出显示的点是鞍点，而边界的定向则由从突出显示的鞍点到结点的运动方向确定。

需要注意的是，包含吸引轨道的边界分支必须至少包含 4 个特殊点（如果点数更少，那么分岔后边界上会出现闭轨道或闭环，这对于梯度分岔来说是不可能的）。

例3 在图*11 ??? (9)*中，我们突出显示了具有较低源点和左侧鞍点的边界轨道。这条轨道对应编码中的第一个左方括号（*[*）。因此，编码如下： $BSN^A_+\{[1]0[]\}[1]$。

对于分岔后区分莫尔斯流图上的B码，我们需要突出显示边界边 a。如果 α（a）是源点，那么我们需要突出显示在分岔时从BSN产生的分界线。编码中突出显示的分界线紧接在对应边 a的括号 [, 之后。如果 α（a）是鞍点，且 γ 是该鞍点的分界线，那么 α（γ）是源点，我们需要突出显示位于 γ一侧的该源点的分界线，而 γ也是边 a。在这种情况下， γ 是第一个突出显示的分界线。

在 B码 中，和 SN 一样，我们突出标示从吸引源点或起始 γ 发出的分界线编号（括号内）。如果没有这样的分界线，括号内留空。

例4 对于上一个例子中描述的同一分岔，*B*码为： $BSN^B_+\{[(1)]0\}[1]$。

例5 对于图*13 ???* 中的莫尔斯流 *6)*，我们突出标示右侧外部半圆。若突出标示右侧红色分界线，*B*码如下： $BSN^B_+\{10\}\{12]0[(3)\}$。若没有突出标示任何分界线，*B*码为： $BSN^B_+\{10\}\{12]0[3()\}$。

构造编码 BSN_- 时，和构造 SN 一样，我们使用反向流。

边界上余秩 1 特殊点的接下来两种情况，对应于这样的情形：线性部分矩阵中属于边界的特征向量非零，而边界的横截向量为零。此时，向量场的标准形可写为 $V(x, y, a) = \{\pm x, \pm y^2 + ay\}, y \geq 0$。这些分岔可描述为：一条收缩至一点的分界线，其一端位于边界上，另一端是曲面的内部点。

2.3 边界上的退化鞍点 HS

对于这类分岔，边界上的退化鞍点有两种类型，它们出现在 $a = 0$ 处： HS_- 的标准形为 $V($ $x\ y\ a\ =$ $V\ x\ y\ a\ = \{-x, y^3 + ay\}$ $,,) = \{-x, y^2 + ay\}, y \geq 0$ （见图 4）； HS_+ 的标准形为 $V(,,)$，以及 。它们在拓扑上等价于分岔（,,）和$V(x, y, a) = \{x, -y^3 - ay\}, y \geq 0$，这两者关于坐标轴 $y = 0$对称。 HS_+ 是 HS_-的逆过程。 $\{x, -y^2 - ay\}$ $y \geq 0$ HS_+

请注意，边界鞍结的分岔对应于函数 $f($ $x\ y\ a\ =$ $\mp\frac{1}{3}x^3 + ax \pm \frac{1}{2}y^2$ $,,)$ 的变形。

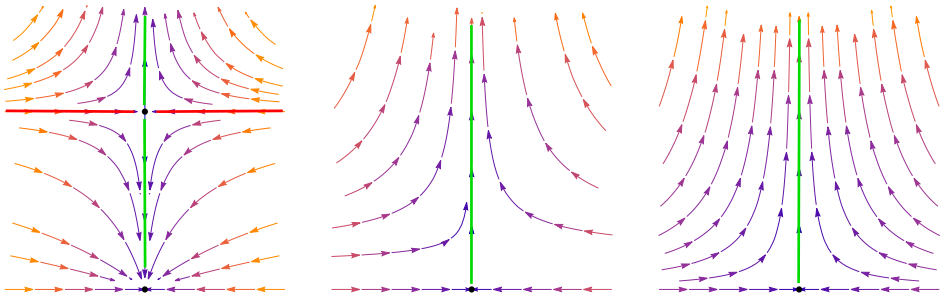


图1： HS_- 分岔

要构造 HS_+ 流的A码，必须在分岔前的流图中标出边界上的源点及其产生的分界线。

例如 ，对于图1中的流和第一条分界线，编码记录为 $HS^A_+\{12]0[\}[123]\{3$ $\}.$

要构造 HS_+ 流的B码，必须在分岔后的流图中标出其中一个在分岔时刻退化的鞍点。

例如，如果图1中的流将边界上的鞍点3标记出来，那么在重新对鞍点编号后，B码的形式为： $HS^B_+\{1\}[123]\{23]0[\}.$

A 型与 B 型分岔 流的编码是通过构造相应的反向 HS_+ 流的编码得到的。

2.4 边界上的退化结点 HN

这类分岔在边界上会产生两种类型的退化结点：源点 HN_+，其标准形为 $V(x,\ y,\ a) = \{x, y^2 - ay\}$，$y \geq 0$（见图 5）；以及汇点 HN_-，其标准形为 $V(x,\ y,\ a) = \{-x, -y^2 + ay\}, y \geq 0$。与它们拓扑等价的是分岔 $V(x,\ y,\ a) = \{x, y^3 - ay\}$ 和 $V(x,\ y,\ a) = \{-x, -y^3 + ay\}, y \geq 0$，它们关于坐标轴 $y = 0$ 对称。 HN_- 是 HN_+ 的逆过程。
需要指出的是，边界上退化结点的分岔对应于函数 $f(x,\ y,\ a) = \pm\frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}y^3 \mp \frac{1}{2}ay^2$ 的变形。

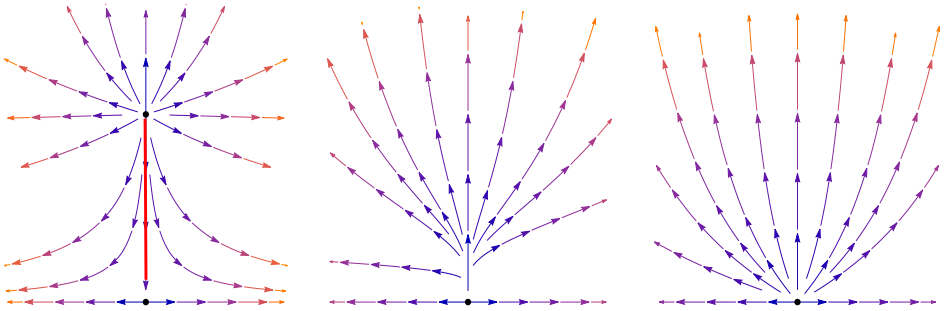


图5：HN 分岔

为了构造 HN_+ 流的 A码，必须在分岔前的流图上标出边界上的鞍点以及进入该鞍点的分界线。

例如，对于图1中的流以及重新编号鞍点后的第三条分界线，A码形式如下： $HN_+^A\{1\}[123]\{23\}0[\}$.

为了构造 HN_+ 流的 B码，必须在分岔后标出边界上的一个源点，该源点在分岔发生时是退化的。

例如，若标出图1中边界上的下方源点，则该流的 B码记为：$HN_+^B\{[12]0\}[123]\{3\}$.

HN_- 流的 A 码和 B 码构造为相应反向 HN_+ 流的编码。

2.5 边界上的双鞍点 BDS

在这种分岔中，线性部分矩阵的两个特征值均为 0。当一条属于边界并连接两个鞍点的莫尔斯场轨线收缩为一点时，就会发生这种分岔。其标准形为 $V(x,\ y,\ a) = \{x^2 - y^2 + a, -2xy\}$（见图 6）。它可以实现为以下函数族的梯度：$f(x,\ y,\ a) = \mathrm{Re}(x + \mathrm{i}\ y)^3 + ax$。

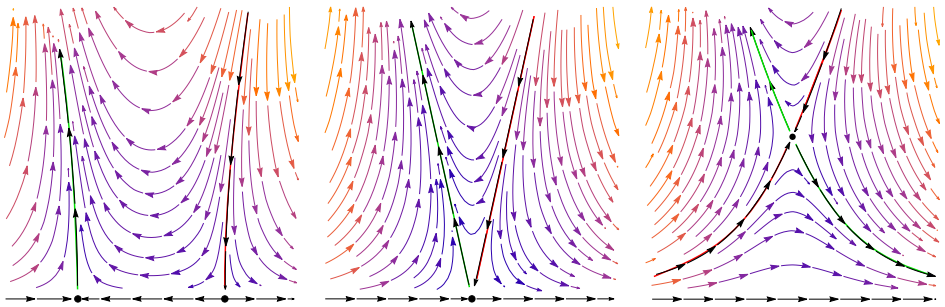


图 6：BDS 分岔

在这种分岔中，会出现一个内部特殊点，因为将向量场加倍到球面上时，根据 Poincaré–Hopf定理，庞加莱指标之和在分岔过程中不会改变，因此边界上的两个鞍点（指标为 -1）会在每个半平面中各产生一个鞍点。

为了定义合并鞍点之间的 A码，有必要标出包含分界线的那个鞍点，并将包含该分界线的边界方向设定为沿鞍点之间轨线运动的方向。

例如，假设在图11的示意图6）中，标出了下方鞍点与左侧鞍点之间的轨线。那么，A码如下： $BDS^A\{120\}[1][2]$。

为了写出分岔后该流的 B码，有必要标出鞍点（分界线）以及边界上与其相接的轨线。在这种情况下，鞍点和边界轨线必须属于同一个单元（一个周期轨道）。分界线的编号从选定的边界轨线开始进行。这也决定了边界分支的定向。鞍点对应的分界线编号（属于该单元的分界线）写在括号中。

例如，对于图1中的流，上方的鞍点以及内侧边界分支的左侧轨线，其 B码如下： $BDS^B\{1\}[12(3)]\{23\}0[]$。

与无边界流形一样，在典型的单参数向量场族中，除了局部分岔外，还有一种唯一可能的全局分岔类型：鞍连接。在这种情况下，可能出现以下情形：1）两个鞍点都是内部鞍点（内部鞍连接）；2）一个是内部鞍点，另一个位于边界上（半边界鞍点连接）；3）两个鞍点都属于边界（半边界鞍点连接）。

2.6 鞍点连接（内部）SC

鞍连接分岔如图7所示。它可以用方程 $V(x,\ y,\ a) = \{x^2 - y^2 - 1,\ -2xy + a\}$ 描述。下面描述一种在典型的单参数梯度族中出现这种分岔的可能情形

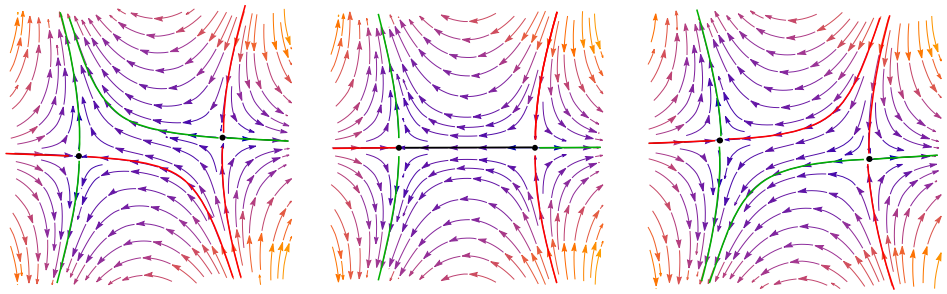


图 7：鞍连接

向量场。设 p、q 是函数 f 的鞍型临界点，且 $f(p) < f(q)$，区间 $[\frac{f(p)+f(q)}{2} - \varepsilon,\ \frac{f(p)+f(q)}{2} + \varepsilon]$ 不包含 f 的临界值。设 L 是等值线 $f^{-1}(\frac{f(p)+f(q)}{2})$ 的分支，u 是 p 的分界线，v 是 q 的分界线，二者相交于 L。

根据莫尔斯理论，$f^{-1}([\frac{f(p)+f(q)}{2} - \varepsilon,\ \frac{f(p)+f(q)}{2} + \varepsilon])$ 同胚于圆柱面 $S^1 \times [0,1]$；在坐标 (s,t) 中（其中 s 是圆上的极角），轨线由 $s = \text{const}$ 线段给出。考虑由公式 $(s,t) \to (s+a,t)$ 定义的圆柱面扭转（其中 a 是变形参数）。此时，轨线将转变为螺旋线。随着参数 a 的连续变化，轨线 u 与圆 $\frac{f(p)+f(q)}{2} + \varepsilon$ 的交点将围绕该圆连续旋转。轨线 v 与此圆的交点保持不变。根据介值定理，存在某一时刻 a，这些交点重合。鞍连接分岔正是在这一时刻发生的。

请注意，上述构造可以通过改变黎曼度量（调整视为垂直的角度）来实现，而无需改变函数本身。

在莫尔斯理论中，鞍连接分岔对应于添加把手的操作（将一个把手滑过另一个相同指标的把手）。

在示意图中，鞍连接分岔表示为一条边，该边垂直粘合于另一个四面体的中部（呈字母 T 的形状）。包含分界线连接的粘合边（1-胞腔）

称为下边，而字母 T 中的另外两条边称为侧边。因此，余维一流对应于包含 T形顶点和下边的区分图。

编写SN流编码时，我们从下边开始，并将其编号为1。上边编号为2。其他所有鞍点及其对应的稳定分界线，从下端T开始，按照与莫尔斯流相同的原则，从3开始编号。

例如，图12中的流6)的编码为： $SC\{12]0[\}[2]$。

2.7 半边界鞍点连接 HSC

半边界鞍点连接可以用与 SC相同的公式描述，但需限制所考虑的区域。该区域通过沿着一个不包含该分离曲线连接的鞍点的稳定或不稳定流形，在该分离曲线连接周围进行切割而形成。如果分离曲线连接进入边界轨道，则得到分岔 HSC_+；如果它离开边界轨道，则得到 HSC_-。若沿图7中左侧鞍点的不稳定流形切开该分岔并取右侧区域，则得到 hSC_+ ；而沿图7中右侧鞍点的稳定流形取左侧区域，则得到 HSC_- 。

对于 HSC_+ 流，T形子图由分离曲线连接和内部鞍点的稳定流形构成。基底T（下边的下端）位于边界上。在编码中，它对应于 1。分离曲线连接的内部鞍点对应于 2。

例如，对于图12中的流8)，其编码如下： $HSC\{10[2]0\}[2]$。

2.8 边界鞍点连接 BSC

边界鞍点连接 BSC 可以用与 SC相同的公式描述，但对其考察区域有所限制。该区域通过沿一个鞍点的稳定流形和另一个鞍点的不稳定流形，在分离曲线连接周围进行切割而形成，并确保这些流形不包含该分离曲线连接。沿图7中左侧鞍点的不稳定流形和右侧鞍点的稳定流形切割分岔，并取中间部分，可得到 BSC 。

在区分图中，我们将分离曲线连接表示为一条高亮显示的（黑色）有向边，其端点位于曲面边界上。在编码中，分离曲线连接的两个端点都标记为1，并且我们从分离曲线连接的起点开始书写编码。

例如，图18中的示意图1）的编码如下： $BSC\{12\}\{1\}\{2]0[\}$。

3 余维一流的拓扑分类

余维一梯度流的结构（分岔点处的流）决定了分岔的结构。为了明确无误地书写编码，除了起点之外，还必须指定曲面定向。我们列出由流确定的规范定向：对于 BSN 和 BDS，边界的定向由边界点处的运动方向决定，这些边界点位于边界退化特殊点附近。所有其他流都没有规范定向，因为流与其自身存在拓扑等价，而这种等价会改变定向（图..中流的轴对称）。在这些情况下书写编码时，我们采用平面子集的右定向。对于相反定向书写的编码称为给定编码的对称编码。如果对平面的一个紧区域及其上定义的流施加轴对称，就会得到一个具有对称编码的流（这里采用平面默认的右定向）。

定理5 *BSN* 和 *BDS* 流拓扑等价，当且仅当它们的编码相同。*SN*、鞍点连接、*HN*、*HC*、*HSC* 和 *BSC* 流拓扑等价，当且仅当它们具有相同的（无序）编码及其对称编码组成的数对。

证明。必要性。对于 BSN 和 BDS 流，边界存在一种规范定向，它与沿边界轨线的运动方向相反；在分岔时，该轨线收缩为一个点。这种定向由分岔时刻特殊点相邻轨线上的运动方向决定。因此，这类流的拓扑等价会保持这些轨线上的运动方向，从而保持曲面定向，进而使编码相等。对于其他类型的分岔，拓扑等价可能会反转定向。若定向得以保持，则这些流的编码相等，其反向编码也相等。然而，若定向被反转，则一个流的编码等于另一个流的反向编码。

充分性。如果 A 型流的编码相等，那么分岔前的莫尔斯流之间存在拓扑等价，进而确定分岔时刻流的拓扑等价（因为这些流是将其中一条轨线收缩为一个点后，在因子空间上得到的流）。

对于 B 型编码相同的情形，只需证明它们的 A 码也相同。对于编码 SN_+^B，将除 0 以外的所有数字都加 1。删除括号中的子列表（连同括号），并在原处插入 1。我们从 SN_+^A 开始，接着写出 $[1,$，然后写出括号中数字加 1 后的子列表，合上方括号 $],$，再写出修改后的列表 SN_+^B。因此，如果编码 SN_+^B 相同，那么恢复得到的 SN_+^A 编码也相同，且这些流拓扑等价。对于 $BSN+$ 分岔，恢复 A 码的方法类似，但需注意，$BSN+A$ 编码以 $\{[$ 开头。

B编码 HS 的流 HN 本质上是具有固定特殊点的莫尔斯流编码。因此，流的拓扑等价性可直接由定理 1 和定理 2 得出。

按照以下方式将 BDS^B-编码转换为 BDS^A-编码：如果数字 k 位于括号内，我们就将 k 替换为 1，并将所有小于 k 的数字都加 1。然后去掉圆括号及其中的元素，并在第一个列表的首位（左花括号之后）加上 1；接着循环调整各列表中元素的顺序，使其以最小元素开头，并按首元素排列列表（如果两个列表的首个非零数字相同，则保留它们原有的相对顺序）。例如，编码 $BDS^B\{1\}[12(3)]\{23]0[\}$ 会转换为 $BDS^A\{12\}\{1]0[3\}[23]$。因此，如果 BDS^B-编码相等，那么 BDS^A-编码也相等，且这些流拓扑等价。

带分隔符的流编码与莫尔斯流编码一样，由对应于区分图各元素的元素组成，这一点与莫尔斯流相同。唯一的区别在于存在一个分隔符：对于编码 SC 和 HSC_+，它从鞍点 2 开始，到鞍点 1 结束。与莫尔斯流的情形一样，定理表明，这些编码相等意味着区分图等价，且流拓扑等价。根据编码的构造以及定理3，可得

推论 1 每个 *t* *1*-流的编码具有与莫尔斯流编码相同的性质，此外还具有以下（*ing* 补充）性质：

1）以以下片段之一开头：

$$SN_+^A[1,\ SN_-^A[1,\ BSN_+^A\{[1,\ BSN_-^A\{[1,\ BSN_+^B\{1,\ BSN_-^B\{1,\ HS_+^A\{1,\ BSN_-^B\{1,\ HS_+^B\{1,\ HS_-^B\{1,\ HN_+^A\{1,\ HN_-^A\{1,\ HN_+^B\{[1,\ HN_-^BA\{[1,\ BDS^A\{1,\ BDS^B\{1,$$

2）BSN_+^B和 BSN_-^B在方括号内各包含一对圆括号。

在 HS_+^A 和 HS_-^A中，第一个单元在第一个列表的元素经过循环置换后置于方括号内；而在 HS_+^B 和 HS_-^B 中，第一个单元不置于方括号内。

在 HN_+^A和 HN_-^A中，第二个单元置于外层方括号内。

证明。 由定理4和余维1编码的定义可知

推论2 如果一个序列满足上述性质，那么就存在一个余维*1*流以该序列为编码。

因此，带孔球面上可能出现以下类型的梯度分岔：

SN – 内部鞍结；

SC – 内部鞍连接；

BSN – 边界鞍结；

BDS – 边界双鞍；

HN – 半边界鞍结点（结点）；

HS – 半边界鞍结点（鞍点）；

HSC – 半边界鞍点连接；

BSC——边界处的鞍连接。

对于鞍结分岔，这种分岔由分岔时的分界线图来定义，该图突出显示了鞍点与结点之间即将坍缩为一点的轨线（分界线）。要定义鞍连接分岔，只需提供分岔发生时的分界线图即可。

4 二圆盘上的典型流与分岔结构

寻找所有可能的奇点数不超过 6 的莫尔斯流结构，我们使用以下记号:

N – 奇点总数,

A – 内部源点的数量 ,

B – 边界源点的数量,

S – 内部鞍点的数量,

T – 边界鞍点的数量,

Y – 内部汇点的数量,

Z – 边界汇点的数量。

注意，所有这些数都是非负的，且 $A+B+S+T+Y+Z=N$。根据莫尔斯流的条件，我们还得到:

$$A+B>0, \quad Y+Z>0, \quad B+T+Z>1, \quad \text{B+T+Z is even,}$$

由 Poincaré–Hopf定理可得

$$2A-2S+2Y+B-T+Z=\chi(DF),$$

其中， $\chi(DF)$ 是双曲面的欧拉示性数。特别地，对于二圆盘， $\chi(DF)=2$。

若 T_+ 是类型为 HS_+（具有一条稳定分离轨）的边界鞍点数，且 T_1 是类型为 HS_+（具有一条不稳定分离轨）的边界鞍点数，则有以下等式:

$$T_+ + T_- = T, \quad B + T_+ = Z + T_-.$$

由这些等式和不等式可得出 $2 \le N \le 6$ 中各类奇点数的所有可能组合。它们列于表中。

nn	N	A	B	S	T_+	T_-	Y	Z	图8
1	2	0	1	0	0	0	0	1	**1**
2	3	1	0	0	1	0	0	1	2
3	4	1	0	0	1	1	1	0	**3**
4	4	1	1	1	0	0	0	1	4
5	4	0	2	0	0	1	0	1	5
6	5	2	0	1	1	0	0	1	6
7	5	1	1	1	0	1	1	0	7
8	5	1	0	0	2	0	0	2	8
9	5	1	1	0	1	1	0	1	9
10	5	0	2	1	0	0	0	2	**10**
11	6	2	0	2	1	1	1	0	11
12	6	2	1	2	0	0	0	1	12, 14
13	6	1	1	2	0	0	1	1	13,**15**
14	6	2	0	0	2	1	0	1	16
15	6	1	1	0	1	2	1	0	17
16	6	1	1	1	1	0	0	2	18, 20
17	6	1	2	1	0	1	0	1	19
18	6	0	2	0	1	1	0	2	**21**
19	6	0	1	0	2	0	0	3	22

图8展示了具有不超过6个奇点的二圆盘上莫尔斯流的所有可能的分界线图（在同胚意义下）。下面以两个组合为例，说明如何得到这些图。

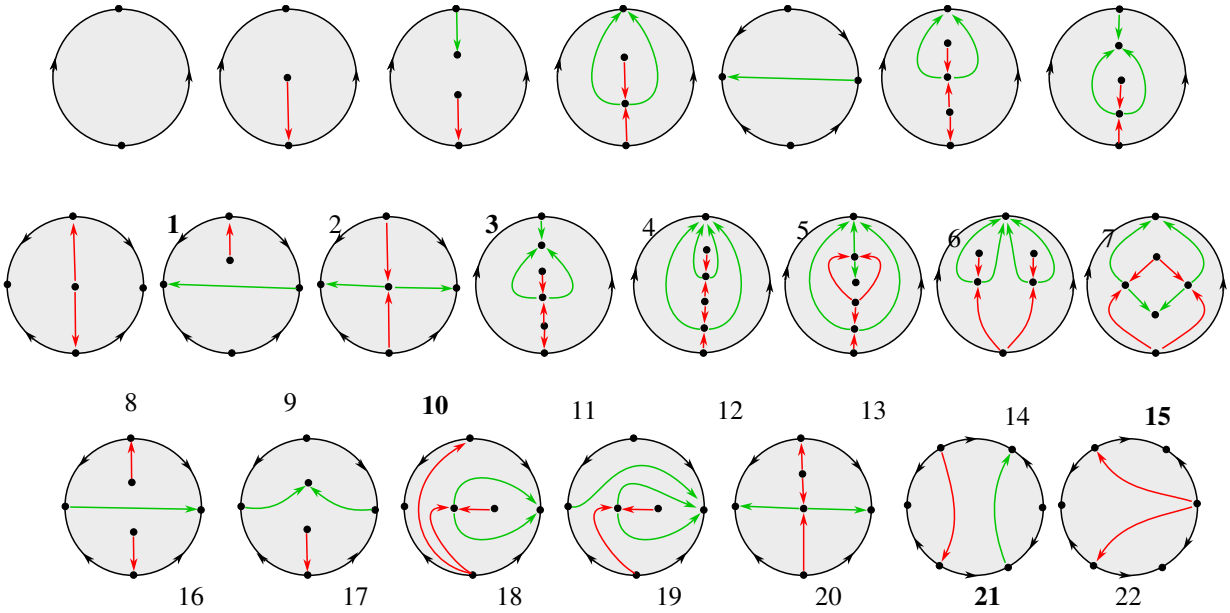


图8： D^2 上至少有6个奇点的莫尔斯流

在组合6中，有三个内部特殊点：两个源点 v_1， v_2 和一个鞍点 v_3；此外还有两个边界点：一个汇点 v_4 和一个带有稳定分离轨的鞍点 v_5。由于该流中有一个汇点，从 v_3 发出的分界线都终止于 v_4。因此，它们并集的闭包是一个有界区域 U的边界。进入 v_3的分界线起源于 v_1和 v_2。为清楚起见，令 $v_1 \in U, v_2 \in D^2 \setminus U$。由于 $v_5 \in D^2 \setminus U$，进入 v_5 的分界线始于 v_2。由此，我们唯一确定了所有特殊点和分界线的相对位置。因此，存在唯一一个具有此布局的分界线图，如图8.6所示。

在组合13中，我们有四个内部点：一个源点 v_1、一个汇点 v_2和两个鞍点 v_3， v_4；此外还有两个边界点：一个源点 v_5 和一个汇点 v_6。如果没有分界线从 v_1发出，那么区分图就是不连通的，这是不可能的。四条分界线从 v_1发出也不可能，因为这会导致鞍点的稳定流形的闭包将 D^2 分成三个区域，而每个区域都必须包含一个汇点，这与该流只有两个汇点相矛盾。因此，还剩下三种可能：1）一条分界线从 v_1发出 γ，2）两条分界线 γ_1， γ_2，3）三条分界线 γ_1， γ_2， γ_3。

在第一种情况下，为便于说明，假设 $\omega(\gamma) = v_3$。那么其余分界线从 v_5 出发。设 U 是一个边界为 $\partial U = W^s(v_4)$ 的有界区域。那么 v_1， v_2， $v_3 \in U$。因此，在前一种情况下，存在唯一的流。

在区分图连通性的第二种变体中，可知 γ_1 和 γ_2 终止于不同的鞍点。这意味着存在一个集合 $U \subset D^2$，使得 $\partial U = W^s(v_3) \cup W^s(v_4)$，其中 $v_2 \in U$。因此，所有奇点和分界线的排列方式唯一，这表明在该变体中存在唯一的流（见图8.15）。

在第三种变体中，三条分界线中的两条（设为 γ_1 和 γ_2）终止于同一个鞍点（记为 v_3）。那么存在一个集合 $U \subset D^2$，使得 $\partial U = W^s(v_3)$，其中 $v_2 \in U$。因此，在该变体中，所有奇点和分界线的排列方式唯一（如图8.13所示）。由于总体而言，源点的数量等于汇点的数量（内部和边界上的情况均如此），因此应检查所得示意图是否互为逆。结果发现，第一种和第三种变体互为逆，而第二种变体是自反的。因此，我们在列表中保留两幅示意图（第二种和第三种变体）。

在图 8 所示的示意图列表中，自反的示意图为 1、3、10、15 和 21。对于其他示意图，我们只画出了两个示意图中的一个。

定理 6 在二维圆盘上，典型单参数梯度分岔可能具有以下结构：

- 在分岔时有两个奇点——两个 *HN* 分岔；

- 在分岔时有三个奇点：一个 SN_+、一个 BSN_+、一个 HS_+、一个 HN_+，且没有 BDS、 SC、 HSC_+、BSC;
- 在分岔时刻有四个奇点：三个 SN_+、一个 BSN_+、两个 HS_+、三个 HN_+，且没有 BDS、 SC、 HSC_+、BSC;
- 在分岔时刻有五个奇点： *12* SN_+、 *10* BSN_+、 *3* HS_+、 *4* HN_+、 *5* BDS，没有SC、 *2* HSC_+，也没有 BSC;
- 在分岔时刻有六个奇点： *25* SN_+、 *11* BSN_+、 *11* HS_+、 *22* HN_+、 *22* BDS、*7*SC、 *3* HSC_+，以及一个 BSC。

证明。 首先，我们说明如何确定不含分离曲线连接的分岔数。如果分岔时刻的特殊点数量 n 少于 6，我们就使用含有 $n+1$ 个特殊点的莫尔斯流图，并指出一条在分岔时刻收缩为一点的分界线或边界轨道。例如，要确定示意图中自反的分岔 BSN_+（1、3、10、15、21），我们需要指出一条红色分离曲线，其两端都是内部点。在其余示意图中，我们指出任意一条两端均为内部点的分界线。在所有情况下，将指定的分界线收缩为一点后，剩余的分界线不得形成环或有向闭曲线（因为梯度流不可能出现这种情况）。因此，可能的分岔数等于我们可以用这种方式识别出的分界线数量。我们还必须考虑示意图可能存在的对称性：如果示意图的某种对称变换将一条已识别的分界线变换为另一条，则只计一次（例如示意图 14、15）。在示意图 4（一条）、6（两条）、7（一条）、11（两条）、12（三条）、13（一条）、15（一条）、18（一条）、18（一条）、20（一条）中可以找到这类红色分界线；而绿色分界线出现在示意图 13（一条）、14（一条）中。因此，在示意图 3 至 5 中，只有一条分界线；在 6 至 10 中，有三条分界线；在 11 至 22 中，有 12 条分界线。

采用相同的方案，我们找到了其余不是分离曲线连接的分岔。

要找到具有分离曲线连接的分岔，可以采用以下两种方法之一：1）变换莫尔斯流图，使其具有分离曲线连接；或 2）使用我们寻找莫尔斯流图时所采用的相同方法，找出所有具有分离曲线连接的示意图。

在第一种情况下，要重构莫尔斯流图，必须存在一个单元，其边界包含一条连通路径，该路径由一个鞍点 s_1、其稳定分离轨 γ_1、一个源点 $v=\alpha(\gamma_1)$、一条分界线或边界轨道 $\gamma_2(\alpha(\gamma_2)=v,\ \omega(\gamma_2)=s_2)$、一个鞍点 s_2及其不稳定分离轨 γ_3组成。沿所述构造中的轨线反转所有运动方向，也可以得到一条鞍连接。在这种情况下，我们移除分界线 γ_1 和 γ_3，并将其替换为 s_1 和 s_2之间的分离曲线连接。

例如，在图 8 的示意图 6 中，这样一条路径依次经过边界上的鞍点（下方顶点）、下方红色分界线、下方内部源点、中间的红色分界线、内部鞍点以及右侧的绿色分界线。将这两条分界线替换为一条分离曲线连接后，我们得到图 9 的示意图 1。

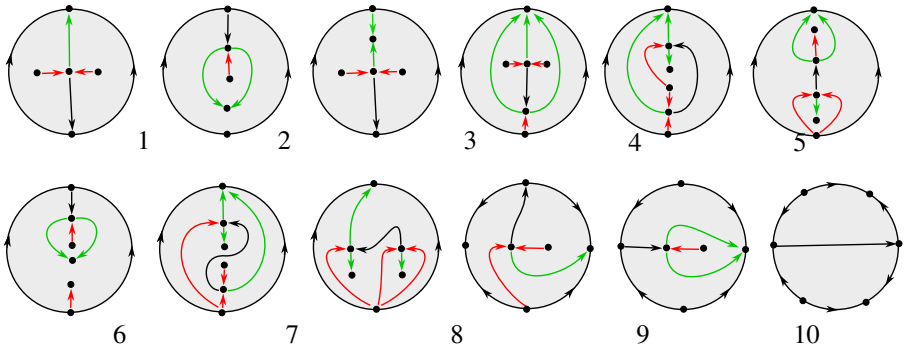


图 9： D^2 上的鞍点连接

具有不超过 6 个奇点的二维圆盘上所有可能的分界线连接都绘于图 9。特别地，示意图 2、3 和 4 分别由图 8 中的示意图 7、11 和 12 得出。反向流的示意图可通过改变分界线的所有方向和颜色（绿色与红色互换）从这些图中获得。经过这种替换，示意图 6 和 10 将恢复原状（它们各自定义一种流）。其余示意图各自定义两种流。

5 圆柱面上的典型流与分岔的结构

由于每个边界分支上至少必须有两个奇点，因此如果这类奇点总数为 4，那么它们都位于边界上。

如果奇点总数为 5，那么其中一个位于内部，且每个边界分支上都有两个奇点（每个边界分支上的奇点数量为偶数，因为当流限制在边界上时，源点和汇点交替出现）。

对于不同类型奇点的数量，我们使用与 D^2 相同的记号。因此，以下等式和不等式对它们成立：

$$A+B+S+T+Y+Z=N,\quad A+B>0,\quad Y+Z>0,\quad B+T+Z>3,\quad \text{B+T+Z is even},$$
$$2A-2S+2Y+B-T+Z=0,\quad T_++T_-=T,\quad B+T_+=Z+T_-.$$

根据这些等式和不等式，我们找出了 $2\le N\le$ 中每种类型奇点数量的所有可能组合。它们列于表中。

nn	N	A	B	S	T_+	T_-	Y	Z	图10
1	4	0	1	0	1	1	0	1	**1,2**
2	5	1	0	0	2	1	0	1	3
3	5	0	2	1	0	1	0	1	4
4	6	1	1	1	1	1	0	1	5,6
5	6	0	2	2	0	0	0	2	**7,8**
6	6	0	2	0	1	2	0	1	9–12

定理 7 在圆柱面上，存在两种具有四个奇点的拓扑不等价莫尔斯流（图*10.1*、*2*），四种具有五个奇点的莫尔斯流（图*10.3*、*4*），以及十四种具有六个奇点的莫尔斯流（图*10.5–12*）。此外，在圆柱面上，以下典型单参数梯度分岔的结构是可能的：

- 在分岔时刻具有四个奇点：两个 HS_+、两个 HN_+、一个 BSC；
- 在分岔时刻具有五个奇点：$2\,SN_+$、$7\,BSN_+$、$4\,HS_+$、$4\,HN_+$、$2\,BDS$、$0\,SC$、$1HSC_+$、$2\,BSC$；
- 在分岔时刻具有六个奇点：$16\,SN_+$、$17\,BSN_+$、$16\,HS_+$、$19\,HN_+$、$11\,BDS$、$2SC$、$10\,HSC_+$、$9\,BSC$。

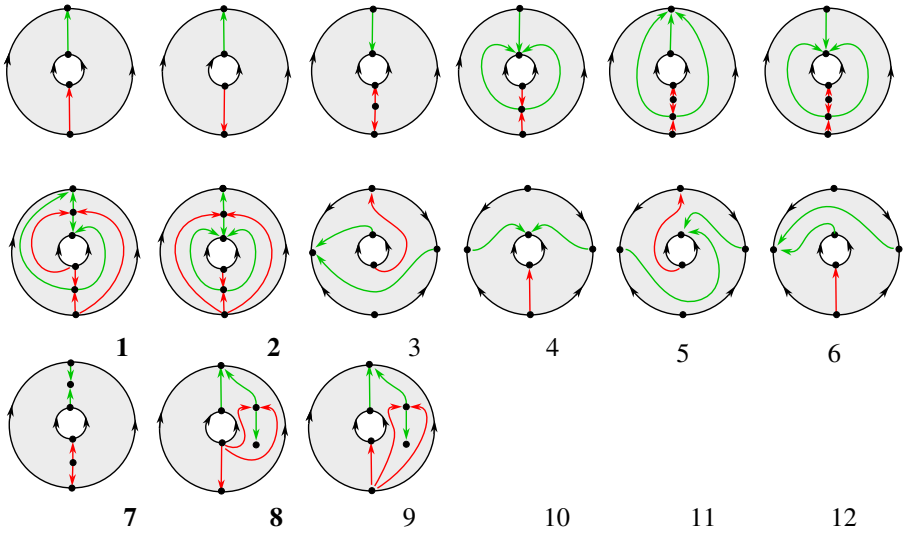


图 10：圆柱面上的莫尔斯流

证明。图10描绘了圆柱面上临界点不超过6个的莫尔斯流的所有可能的（相差一个同胚）分界线图。下面以组合5为例，说明这些图是如何得到的。

设该流有两个内部鞍点和4个边界点。由于双曲面的欧拉示性数为0，边界点中没有鞍点。因此，其中两个是源点，另外两个是汇点。对于四条红色分界线，有两种情况：1）每个源点各有两条分界线发出（图10.7）；2）一个源点发出三条分界线，另一个源点发出一条（图10.8）。一个源点发出4条分界线的情况是不可能的，因为这些分界线会形成两个闭环，将圆柱面分成三个区域，其中只有两个区域包含边界。第三个内部区域必须有一个内部汇点，这与该流的条件矛盾。

与 D^2 一样，要找出在多一个点的示意图上类型为 SN_+、BSN_+、BDS 的分岔数量，我们需要找出在分岔过程中收缩为一点的相应分界线或边界轨线。对于 Morse 流图上的分岔 HS 和 HN，我们标出边界上相应的临界点。例如，对于 HS_+，我们需要标出自逆图（1、2、7、8）中边界上带有稳定分离轨的鞍点，以及其余示意图中边界上的两类鞍点。具体而言，在示意图 1 和 2 中，各有一个这样的鞍点，因此产生两个具有四个临界点的分岔 HS_+。此外，示意图 3 的边界上有三个鞍点，示意图 4 上有一个，因此总共有四个具有五个临界点的 HS_+。最后，示意图 5（两个）、6（两个）和 9–12（各三个）的边界上也有鞍点。总计有 16 个具有六个临界点的 HS_+ 分岔。

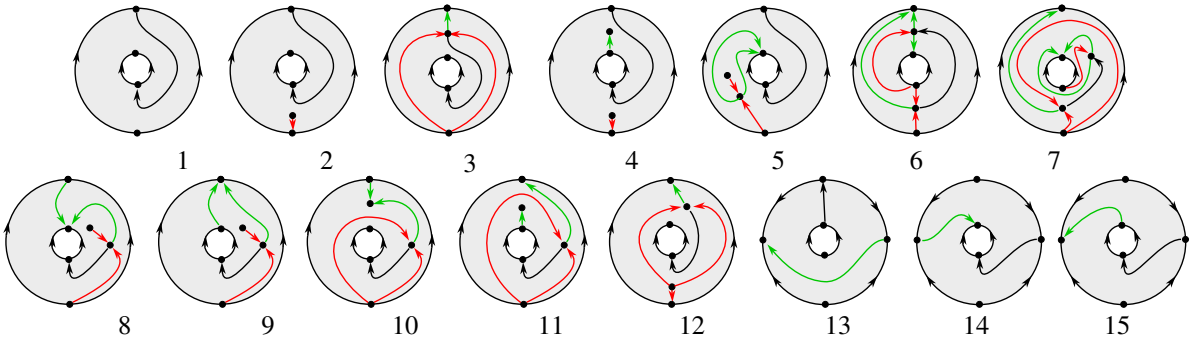


图11：圆柱面上的鞍点连接

图11展示了圆柱面上临界点不超过六个的流的所有可能鞍点连接。与圆柱面上的情况一样，可以通过莫尔斯图得到这些连接：在莫尔斯图中，突出显示一条由三条轨线组成的路径，其中第一条和第二条轨线作为分界线，并在分岔过程中被一条鞍点连接取代；也可以考察所有满足与莫尔斯流相同条件的流。例如，若一个流有4个临界点，它们都位于边界上。其中有一个源点、一个汇点和两个鞍点。鞍点连接连接这两个鞍点。若这两个鞍点位于同一个边界分支上，则该边界分支上的一条轨线与鞍点连接会构成一个闭环，而梯度流中不可能出现这种情况。因此，唯一剩下的可能是两个鞍点位于不同的边界分支上（图11.1）。

考虑图 10.3 中有5个临界点的莫尔斯流。我们用一条鞍点连接替换绿色分界线和一条红色分界线。由于其两端必须分别位于不同的边界分支上，我们得到唯一可能的示意图（图 11.2）。同理，由图 10.3 可得到图 11.3。

6 三孔球面上的典型流与分岔结构 s

我们考 虑将三孔球面视为平面上的三重穿孔区域（一个带有两个孔的二圆盘） .

由于必定有两 个特殊点位于每个孔处，因此具有 6 个特殊点的流不会有其他特殊点。因此 ，
不存在内部的 o 本例中的半边界分岔。

将三孔球面加倍后得到一个亏格为 2 的曲面。除一个源点和一个汇点外，其余所有点都是鞍点（否则就会违背关于指标总和的 Poincaré–Hopf定理）。本例中只有两种可能的莫尔斯流结构。第一种情况下，源点和汇点位于同一个边界分支上；第二种情况下，它们位于不同的分支上（见图 18）。

由于每个边界分支上只有两个特殊点，并且若不改变曲面的拓扑类型就无法压缩任何分界线，因此本例中不存在鞍结分岔。

我们得到鞍点连接 通过沿一条分界线滑动另一条分界线所产生的分岔。所有可能的 4 种情况均见图 6 .

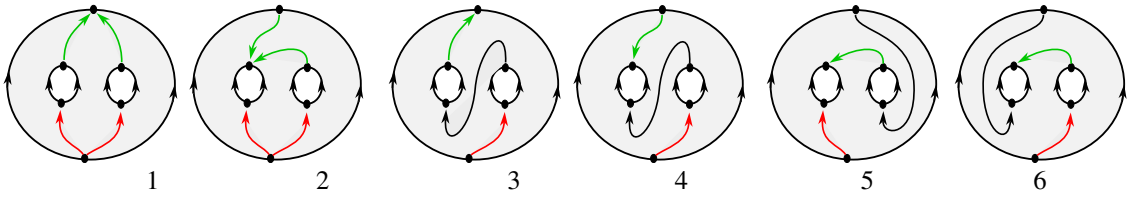


图1 2：树形孔洞二球面上的分岔

因此，以下陈述是正确的。

定理 8 在三孔球面上，分岔发生时有 *5* 个奇点的鞍结型梯度分岔不存在，但存在四种有 *6* 个奇点的边界鞍点连接分岔。

结论

我们已找到含不超过六个奇点的带孔球面上莫尔斯流的所有可能结构及典型单参数分岔。我们希望本研究能够推广到其他曲面以及奇点数量更多的情形。

suf,n\bif	SN_+	BSN_+	HS_+	HN_+	BDS	SC	HSC_+	BSC	$\sum$
D^2, 3	1	1	1	1	0	0	0	0	8
D^2, 4	3	1	2	3	0	0	0	0	18
D^2, 5	12	10	3	4	5	0	2	0	69
D^2, 6	25	11	11	22	22	7	3	1	173
$S^1 \times I$, 4	0	0	2	2	0	0	0	1	9
$S^1 \times I$, 5	2	7	4	4	2	0	1	2	40
$S^1 \times I$, 6	16	17	16	19	11	2	10	9	168
$F_{0,3}$, 6	0	0	4	3	0	0	0	4	18

致谢

我们谨向帮助我们核实计算准确性的同事和学生表示感谢：Svitlana Bilun、Olena Myshneva 和 Vladislav Si nitsyn。

参考文献

J. Palis 和 S. Smale。结构稳定性定理。整体分析（纯数学研讨会论文集，第 *XIV* 卷，加利福尼亚州伯克利，*1968*），14:223–231，1970。doi:10.1142/9789812792822_0023。J. Palis 和 F. Takens。参数化梯度向量场族的稳定性。《数学年刊》第二辑，，118(3):383–421，1983年11月。R. Labarca 和 M. J. Pacifico。带边界流形上莫尔斯–斯梅尔向量场的稳定性。《拓扑学》，29(1): 57–81，1990。V. Kibkalo 和 T. Yokoyama。曲面上莫尔斯–斯梅尔流及一般位置下非莫尔斯–斯梅尔流的拓扑刻画。《离散与连续动力系统》，42(10):47–87，2022。ISSN 1553-5231。doi:10.3934/dcds.2022072。G. Fleitas。二维和三维上的梯度型流分类。巴西数学学会公报，6(2):155–183，1975。E. Leontovich 和 A. Mayer。关于定义轨道分解拓扑结构的图式。苏联科学院通报，103(4):557–560，1955。A. A. Oshemkov 和 V. V. Sharko。二维流形上莫尔斯–斯梅尔流的分类。数学文集，189(8):93–140，1998。M.M. Peixoto。关于二维流形上的流的分类。动力系统（巴伊亚大学研讨会论文集，巴西萨尔瓦多，*1971*），第389–419页，1973。

J. Gross 和 T. Tucker。拓扑图论。Wiley，1987。ISBN 0471049263。Z. Kybalko、A. Prishlyak 和 R. Shchurko。闭曲面上最优莫尔斯流的轨迹等价。国际几何中心论文集，11(1):12–26，2018。ISSN 2072-9812。doi:10.15673/tmgc.v11i1.916。A. Prishlyak 和 A. Prus。带边界紧曲面上莫尔斯流的三色图。数学科学杂志，249(4):661–672，2020。doi:10.1007/s10958-020-04964-1。A. Prishlyak。三维流形上具有 beh2 的莫尔斯–斯梅尔向量场的拓扑等价。乌克兰数学杂志，54(4):603–612，2002。A. Prishlyak 和 M. Loseva。闭可定向曲面上具有集体动力学的最优流的拓扑。国际几何中心论文集，13(2):50–67，2020。ISSN 2072-9812。doi:10.15673/tmgc.v13i2.1731。A. Prishlyak、A. Prus 和 S. Huraka。球面上的集体动力学流。国际几何中心论文集，14(1):61–80，2021。ISSN 2072-9812。doi:10.15673/tmgc.v14i1.1902。B. Hladysh 和 A. Prishlyak。带边界可定向曲面上的简单莫尔斯函数。数学物理、分析与几何杂志，15(3):354–368，2019a年6月。ISSN 1817-5805。doi:10.15407/mag15.03.354。B. I. Hladysh 和 O. O. Prishlyak。带边界可定向曲面上最优函数的一般位置变形。乌克兰数学杂志，71(8):1173–1185，2019b。doi:10.1007/s11253-019-01706-8。O. Khohliyk 和 S. Maksymenko。保持莫尔斯–博特函数不变的微分同胚。数学探索，31 (2):185–203，2020年3月。ISSN 0019-3577。doi:10.1016/j.indag.2019.12.004。A. Kravchenko 和 S. Maksymenko。二维球面上莫尔斯函数的克朗罗德–里布图的自同构。国际几何中心论文集，11(4):72–79，2019年4月。ISSN 2072-9812。doi:10.15673/tmgc.v11i4.1306。A. Prishlyak。三维流形上莫尔斯–斯梅尔函数与向量场的拓扑等价。拓扑与几何。乌克兰数学大会论文集，第29–38页，2001。URL http: // www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/topolog_pryshljak.pdf。A. Prishlyak。流形拓扑。基辅大学，2015。A.O. Prishlyak。取值于直线和圆的曲面上莫尔斯函数的共轭。乌克兰数学杂志，52(10):1623–1627，2000。doi:10.1023/A:1010461319703。G. Reeb。关于完全可积的 Pfaff 形式或数值函数的奇点。巴黎科学院院刊，222:847—849，1946。Ch. Hatamian 和 A. Prishlyak。亏格 1 和亏格 2 的不可定向三维流形上的海加德图与最优莫尔斯流。国际几何中心论文集，13(3):33–48，2020。ISSN 2072-9812。doi:10.15673/tmgc.v13i3.1779。10.15673/tmgc.v13i3.1779。A. Prishlyak 和 I. Ovtsynov。闭曲面上的最优余维一梯度流。载于第二十三届国际科学与实践会议《舍甫琴科之春》论文集，第44–45页，2025a。A. Prishlyak 和 I. Ovtsynov。带孔球面上具有内部鞍连接的梯度流结构。*AGMA-2025*国际会议论文集，2025b。A. Prishlyak 和 I. Ovtsynov。闭曲面上的最优余维一梯度流。国际几何中心论文集，18(1):69–101，2025年4月。ISSN 2072-9812。doi:https://doi.org/10.15673/pigc.v18i1.2835。