arXiv:2601.06929v1 [math.RT] 11 Jan 2026

深层 Deligne–Lusztig 归纳与温和分歧环面

ALEXANDER B. IVANOV 和 SIAN NIE

Abstract. 深层德利涅–吕斯蒂希表示是经典德利涅–卢斯蒂格表示的自然类比，近年来在 p-进群不可约超尖表示的几何化中发挥了重要作用。本文提出温和分歧情形下深层德利涅–吕斯蒂希簇及其表示的构造，从而推广此前在非分歧情形下的构造。作为应用，在对剩余域作一个温和假设的条件下，我们证明每个正则不可约超尖表示都是某个深层德利涅–吕斯蒂希表示的紧支诱导；一般而言，每个不可约超尖表示都是某个深层德利涅–吕斯蒂希簇上同调的紧支诱导的直和项。

1. Introduction

经典 Deligne–Lusztig 理论 [DL76] 构造了有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的簇，这些簇带有李型有限群 $G(\mathbb{F}_q)$的作用。这些簇的上同调为此类群的所有不可约表示提供了统一的参数化。Lusztig [Lus79],开创了相关研究。过去十年间，与局部非阿基米德域 k 上的约化群 G相关的 Deligne–Lusztig 构造在文献中得到了深入研究。例如，近期的研究成果包括 [CS17, Cha20, CI23, CS23, Cha24, CO23, Nie24, IN25b, CO25] （及其中的参考文献）；这些工作考察了带有 $G(k)$的抛物型子群作用的深层德利涅–吕斯蒂希簇的上同调。此外， [Iva23]和 [CI23, §9], 构造了带有整个 p进群作用的 p-进 Deligne–Lusztig 空间。

任何（经典、深层次或 p-进）Deligne–Lusztig 构造都与一个有理极大环面 $T \subseteq G$ 相联系。由于其本身的性质，在局部域 k 的情形下，迄今为止该构造只对非分歧环面 T 产生了良好的结果。

本文提出了一种针对温和分歧极大环面 T 的 G新型 Deligne–Lusztig 型构造，并证明它实现了 $T(k$ 的光滑豪因子化特征与 $G(k$ 的光滑表示之间预期的对应关系。更准确地说，我们证明，在对 k的剩余域作出适度假设的条件下，J.-K. Yu 和 Kaletha 构造的所有不可约超尖点表示 [Yu01, Kal19] 均可通过这些簇的上同调中 $T(k$ 的权空间实现。我们将

[Sta11, Iva18,Iva20] 作为此前尝试为分歧环面构造合理的 Deligne–Lusztig 构造的相关工作。将我们的构造与这些现有方法进行比较，将会很有意义。

1.1. 构造与主要结果。 现在我们更详细地解释我们的结果。设 k 如上，并设 $\mathbb{F}_q$ 为 k的剩余域。记k 为 k的最大非分歧扩张的完备化，记 $\mathbb{F}_q$ 为 k的剩余域，并记 F 为 k 在 k上的 Frobenius 自同构。设 G 为定义在 k上的约化群。我们将 G 与 $G(\breve{k})$ 视为同一对象，从而 $G(k) = G^F$。

设 $s \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$。设 $G_s := G_{\mathbf{x},\,0}/G_{\mathbf{x},\,s+}$ 为抛物型子群 $G_{\mathbf{x}}$的第 s个莫伊–普拉萨德商$G_{\mathbf{x},\,0} \subseteq G$。我们将 G_s 视为定义在 $\mathbb{F}_q$上的线性代数群。利用正环函子，可以为任意闭子群 $M \subseteq G$ 关联一个 M_s 的闭子群 G_s，参见 §2.1。

设 $T \subseteq G$ 是定义在 k 上的椭圆极大环面，它在某个温和分歧扩张上分裂。固定 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和一个深度为 $\leq r$ 的光滑特征 $\phi\colon T(k) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$。假设 $p > 2$ 和 ϕ 存在 *Howe* 分解$(G^i, \phi_i)_{i=-1}^d$，其中由扭曲列维子群组成

$$T = G^{-1} \subseteq G^0 \subsetneq G^1 \subsetneq \cdots \subsetneq G^d = G$$

以及特征 $\phi_i\colon G^i(k) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$，其定义见 [Kal19，§3。6]受 Yu 构造不可约超尖点表示的启发，我们要求

$(*)$ T 是 $L := G^0$ 的最大非分歧椭圆极大环面。

我们将看到，这类配对 (T, ϕ) 足以满足我们的目的，即实现 $G(k)$ 的所有温和不可约超尖点表示。

遵循 [Yu01，§3]，可以将一个 Yu 型子群与 (T, ϕ) 相关联

$$\mathcal{K} \subseteq G_{\mathbf{x},0}$$

其在 G_r 中的自然像记为 $\mathcal{K}_r$。我们构造一个簇

$$Z_{\phi,r} \subseteq G_r$$

配备了自然的 $\mathcal{K}_r^F \times T_r^F$ 作用。下面进一步介绍其构造。首先，存在一个正规子群塔

$$G_{\mathbf{x},r+} \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{K} = \mathcal{H}L_{\mathbf{x},0},$$

以及短正合列

$$1 \longrightarrow \mathcal{K}^+/\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{H}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{H}/\mathcal{K}^+ \longrightarrow 1$$

给出了辛型空间 $\mathcal{H}/\mathcal{K}^+$的一个中心扩张。另一方面，根据（$*$），在 k 上存在一个 Borel 子群 $B = TU \subseteq L$，其幺正根基为 U。我们证明存在一个子群

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$$

使得 $\mathcal{L}/\mathcal{E}$ 是$\mathcal{H}/\mathcal{K}^+$ 中的一个拉格朗日空间的截面，二者都由 B_r正规化。然后我们令 $\mathcal{I}_r = U_r\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r U_r$ 并定义

$$Z_{\phi,r} = \{g \in \mathcal{K}_r; g^{-1}F(g) \in F\mathcal{I}_r\},$$

其允许 $\mathcal{K}_r^F \times T_r^F$的自然作用。

注 1.1. 的构造 $Z_{\phi,\ r}$ 将 [Nie24] 对非分歧情形的构造推广了（一般情形另见 [CS17、CS23] ）。类似的构造最早见于 [CKZ]。关于使用拉格朗日子空间的想法是 Xinwen Zhu 告知作者的。

实际中，我们令 $\mathbb{K} = \mathcal{K}/\mathcal{E}$，并将 $\mathbb{T}$、$\mathbb{L}$ 和 Z 分别记作 T_r、L_r 和 $\overline{Z}_{\phi,\ r}$ 在 $\mathbb{K}$ 中的自然像。上同调群 $H_c^i(Z,\ \mathbb{Q}_\ell)$ 继承了 $\mathbb{K}^F \times \mathbb{T}^F$的自然作用，我们将 $H_c^i(Z,\ \mathbb{Q}_\ell)[\phi]$ 记作 $\mathbb{T}^F$ 通过 ϕ作用的子空间。令

$$\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi) = H_c^*(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi] := \sum_i (-1)^i H_c^i(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi],$$

这是一个虚 $\mathbb{K}^F$-模，或通过膨胀得到的虚 $\mathcal{K}^F$-模。令$W_{L_r}(T_r) = \{g \in L_r:$ $gT_r g^{-1} = T_r\}/T_r$。注意， $W_{L_r}(T_r) = W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})$ 是 $\mathbb{L}$中 $\mathbb{T}$的魏尔群。我们始终将此群记作 $W_{\mathbb{T}}(\mathbb{L})$。

我们的第一个主要结果是以下关于 $\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$ 的麦基型公式。

定理 1.2。有

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi), \mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi) \rangle_{\mathbb{K}^F} = \sharp\{w \in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F; {}^w\phi|_{T_r^F} = \phi|_{T_r^F}\}.$$

为计算 $\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$，我们引入如下 Yu 型 $\mathbb{K}^F$-模

$$R_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi) = \kappa \otimes R_{T_0}^{L_0}(\phi_{-1}),$$

其中

- κ 是 [Fin21a，§25]（另见 [Yu01，§4 以及§11]）中所述的韦伊–海森堡表示，附属于 G^i，ϕ_i）$_{i=0}^d$ 的 Howe 分解的正深度部分（ ϕ;

- $R_{T_0}^{L_0}(\phi_{-1})$ 是与 L_0^F 的零深度部分 ϕ_{-1} 相关联的 ϕ的经典德利涅–卢斯蒂格表示。

我们的第二个结果如下。

定理 1.3。 假设 q 足够大。那么

$$\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi) \cong (-1)^{d(\phi)} R_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi^\dagger),$$

其中 $d(\phi)$ 是一个依赖于 ϕ、 $\phi^\dagger = \phi \cdot \varepsilon_\phi$和 $\varepsilon_\phi = \prod_{i=1}^d \epsilon_\sharp^{G^i/G^{i-1}}$ 的整数，$\mathbf{x}$是深度零二次特征 $\epsilon_\sharp^{G^i/G^{i-1}}$ 的乘积，$\mathbf{x}$ 是 T^F 的最大有界子群上的特征，如 [FKS23定义 3 中所述。1]。

注 1.4。 在非分歧情形下，定理 1.2 已在 [Nie24的命题 5 中得到证明。5], 而定理1.3已在 [LN25]中得到证明。

1.2. **应用**。 现在我们讨论关于 $G(k)$ 的不可约超尖点表示的应用。

设 (T,ϕ) 是 [Kal19 定义 3.7[5]] 意义下的温和椭圆正则对。特别地，我们的假设 $(*)$ 得以满足。根据 [Kal19，§37]，可以为 (T,ϕ) 关联一个 $\pi_{(T,\phi)}$ 的不可约超尖表示 $G(k)$，称为正则不可约超尖表示。

另一方面，通过推广 $\pi_{(T,\phi)}$在深度零情形下的几何构造（参见 [Kal19，§3.4[3]]），我们可以将 $\mathcal{K}^F$-模$H_c^i(Z,\mathbb{Q}_\ell)[\phi]$ 扩展为 $\mathcal{K}^F T^F$-模。因此，交替和

$$\hat{\mathcal{R}}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi) := H_c^*(Z,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi]$$

是一个虚 $\mathcal{K}^F T^F$-模。

我们的第一个应用是对正则不可约超尖表示的以下上同调实现。

定理 1.5。 假设 q 足够大，且 p 不整除 G 的魏尔群的阶。设 (T,ϕ) 是一个温和椭圆正则对。那么

$$\pi_{(T,\phi)} \cong (-1)^{d(\phi)+r_G-r_T}\, c\text{-ind}_{\mathcal{K}^F T^F}^{G^F} \hat{\mathcal{R}}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi^\dagger),$$

其中 r_G 和 r_T 分别是 G 和 T 的分裂秩。

对于一般的不可约超尖表示，我们有如下穷尽结果。

命题 1.6。 假设 q 充分大。对于每个 π 的驯不可约超尖表示 $G(k)$，存在一对(T,ϕ) 如*§1.1* 中所述，以及 $i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$使得 π 是紧支诱导的直和项

$$c\text{-ind}_{Z(G)^F\mathcal{K}^F}^{G^F} H_c^i(Z,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi].$$

这里我们将 $\mathcal{K}^F$-模 $H_c^i(Z,\mathbb{Q}_\ell)[\phi]$ 扩张为一个 $Z(G)^F\mathcal{K}^F$-模，在该模上$Z(G)^F$ 通过 ϕ作用。

备注 1.7。 在非分歧情形下，定理1.5 和定理1.6 分别由 [CO25] 和 [Nie24、LN25]独立证明。

注意，根据 Kim 和 Fintzen 的穷尽结果 [Kim07，Fin21b],当 $G(k)$-表示是驯的，如果 p不整除 G的绝对魏尔群的阶。

1.3. **策略**。 现在我们讨论主要结果证明背后的思路，这些证明结合了以下文献中的方法/策略： [Nie24]，[IN25c] 和[CO25]。下面我们详细说明。

为证明定理 1.3中的麦基型公式，我们仿照 [Nie24，命题 5 的证明[5]]，将问题归结为计算上同调群 $H_c^*(X^H,\mathbb{Q}_\ell)$，其中 $H\subseteq T_r\times T_r$ 是一个环面，而 X 是交织簇的某个 H-不变子集。在非分歧情形中，不动点集 X^H 是有限集，因此计算显而易见。而在温和分歧情形中， X^H 通常不再是有限集。

为克服这一困难，我们对 X^H 进行了详细研究，并根据 [IN25c]中的一个思路确定了其上同调。

为证明定理 1.3，我们遵循 [CO25] 的策略。该策略分为两步。首先，我们证明 $\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$ 和 $(-1)^{d(\phi)}R_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi^{\dagger}$分别按其对应的格林函数展开后，具有相同的展开式。这一步与 [CO25]中的方法类似。剩下的任务是证明这两类格林函数之间的相容性。正如[CO25], 中利用定理 1.2 以及关于 q 的充分大性假设所观察到的，只需证明

$$(\flat) \qquad \mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi) = \pm\kappa \otimes R_{T_0}^{L_0}(\phi_{-1}^{\dagger}) \text{ if } \pm\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi) \text{ is irreducible.}$$

在非分歧情形下，(♭) 的证明基于比较两边对 G_r 而言足够多的正则元素上的取值。然而，在我们的情形中，正则元素集合一般不再足够大。为处理这一困难，我们首先注意到 $\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi) = \pm\kappa\otimes\rho$ 对某个不可约L_0^F-模 ρ 成立。因此，只需证明 $\rho \cong \pm R_{T_0}^{L_0}(\phi_{-1}^{\dagger})$。为此，我们在 $\mathbb{K}_{ss}^F$ 上建立 $\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$ 的迹公式，其中 $\mathbb{K}_{ss}^F$ 是 $\mathbb{K}^F$ 中的半单元素集合。该公式建立在关于 Z 正深度部分上同调的集中定理之上（见定理 5.3），并将 [Nie24 在非分歧情形下的命题 6.2] 加以推广。随后，通过将其与 $\kappa\otimes\rho$ 的迹公式比较，我们推得 ρ 与 $\pm R_{T_0}^{L_0}(\phi_{-1}^{\dagger})$ 在 $\mathbb{K}_{ss}^F$ 上相等。由于 q 足够大， $\mathbb{K}_{ss}^F$ 对 L_0而言含有足够多的正则元素。得益于 [CO25，定理 1.2], ，两个不可约特征 ρ 和 $\pm R_{T_0}^{L_0}(\phi_{-1}^{\dagger})$ 如所求彼此相等。

1.4. 文章结构。本文安排如下。§2.1 中，我们介绍基本设定，并在 Yu 框架下引入与 Howe 分解相关的子群。§3 中，我们给出温和分歧情形下深层 Deligne–Lusztig 簇和表示的构造。§4 中，我们建立深层 Deligne–Lusztig 表示内积的麦基公式。§5 中，我们将 [Nie24] 关于上同调群的集中定理推广到温和分歧情形，这在证明主要结果时起着关键作用。§6 中，我们遵循 [DL76] 和 [CO25]的方法，证明$\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$的特征标公式。§7 中，我们引入并研究另一个表示 $\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi^{\dagger})$，作为 $\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$ 的对应对象。§8 中，我们遵循 [CO25]关于 $\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$ 和 $R_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi^{\dagger})$的格林函数的策略，证明定理 1.3 和定理 1.5。最后一节中，我们证明了不可约超尖点表示的穷尽性结果定理 1.6。

致谢。我们感谢 Xinwen Zhu 分享基于拉格朗日量的构造这一想法。我们也感谢 Tasho Kaletha 热心解答了若干技术问题。第一作者谨此感谢德国研究联合会（DFG）通过海森堡计划（资助编号 462505253）提供的支持。

2. Preliminaries

我们用 k 表示一个剩余域为 $\mathbb{F}_q$ 、特征为 p 的局部非阿基米德域。我们用 k 表示 k 的最大非分歧扩张的完备化，并用 F 表示 k 在 k 上的 Frobenius 自同构。我们分别用 $\mathcal{O}_k$ 和 $\mathcal{O}_{\breve{k}}$ 表示 k 和 k 的整数环。设 ϖ 是 k 的一个固定一致化元。

2.1. 正环。设 E/k 是一个有限温和分歧扩张。它自动是伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为循环伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(E/\breve{k}) = \langle\tau\rangle$。令 $\mathcal{O}_{\breve{E}}$ 表示 E的整数环。注意，E 和 k 具有相同的剩余域$\mathbb{F}_q$。令 $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ 表示完美 $\mathbb{F}_q$-概形的范畴。设 $\mathfrak{X}$ 是一个 $\mathcal{O}_E$-概形。$\mathfrak{X}$ 的正环函子（也称为喷泉概形）定义为

$$L^+_E\mathfrak{X}\colon \mathrm{Perf}^{\mathrm{op}}_{\mathbb{F}_q} \longrightarrow \mathrm{Sets}, \quad R \longmapsto \mathfrak{X}(W_{\mathcal{O}_E}(R)),$$

其中，当 $\mathrm{char}\ E > 0$时，$W_{\mathcal{O}_E}(R) = \mathcal{O}_E \otimes_{\mathbb{F}_q} R$；否则，$W_{\mathcal{O}_E}(R) = W(R) \otimes_{\breve{\mathbb{Z}}_p} \mathcal{O}_E$（此处，$W(R)$表示 R的 p典型 Witt 向量）。我们只考虑概形 $\mathfrak{X}$，它们在 $\mathcal{O}_E$上是仿射且有限型的；在这种情况下，$L^+_E\mathfrak{X}$ 由一个在$\mathbb{F}_q$ 上完美且具有有限表示的仿射概形表示。

当 $E = \breve{k}$ 时，我们也将 $L^+_E\mathfrak{X}$ 记作 $L^+\mathfrak{X}$ 。

2.2. 莫伊–普拉萨德商。设 G 是定义在 k 上的约化群，它在 k 的一个温和分歧扩张上分裂。设 $\mathbf{x}$ 是 G 在 k 上的布鲁哈–蒂茨建筑中的一个点。我们用 $\mathcal{G}_{\mathbf{x},0}$ 表示 G 所关联的抛物型 $\sim\mathcal{O}_k$-群模型。对于 $0 \leqslant r \in \mathbb{R} := \mathbb{R} \sqcup \{s+; s \in \mathbb{R}\}$，令 $\mathcal{G}_{\mathbf{x},r}$ 为 $\mathcal{G}_{\mathbf{x},0}$ 的第 r 个莫伊–普拉萨德子群。对于任意 $0 \leqslant s \leqslant r \in \mathbb{R}$，$L^+(\mathcal{G}_{\mathbf{x},r+} \times_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_{\breve{k}}) \subseteq L^+(\mathcal{G}_{\mathbf{x},s} \times_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_{\breve{k}})$ 是一个子群。我们定义

$$G_{s:r} = L^+(\mathcal{G}_{\mathbf{x},s} \times_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_{\breve{k}})/L^+(\mathcal{G}_{\mathbf{x},r+} \times_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_{\breve{k}}),$$

这是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的 pfp 完美光滑仿射群概形。注意，由于 F 固定 $\mathbf{x}$，它自然作用于 $G_{s:r}$，从而赋予其一个 $\mathbb{F}_q$-有理结构。此外，由于 $L^+\mathcal{G}_{\mathbf{x},r+}$ 连通，根据 Lang 定理，$H^1(\breve{k}/k, L^+\mathcal{G}_{\mathbf{x},r+}) = 0$，因此 $G^F_{s:r} = \mathcal{G}_{\mathbf{x},s}(\mathcal{O}_k)/\mathcal{G}_{\mathbf{x},r+}(\mathcal{O}_k)$。

更一般地，对于任意 E/k 如 §2.1 中所述的 $0 \leqslant s \leqslant r \in \mathbb{R}$，我们也可以构造 pfp 完美光滑仿射群概形

$${}^EG_{s:r} = L^+_E(\mathcal{G}_{\mathbf{x},s} \times_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_E)/L^+_E(\mathcal{G}_{\mathbf{x},r+} \times_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_E),$$

在 $\mathbb{F}_q$ 上。它带有 $\mathrm{Gal}(E/k) = \langle\tau\rangle$ 的自然作用。朗–斯坦伯格定理（原群版本）不适用，因为 τ-不动点并非 profinite，但我们仍有如下结论。

引理 2.1（见 [PR08]第 32 页）。我们有 $H^1(\mathrm{Gal}(E/\breve{k}), L^+_E\mathcal{G}_{\mathbf{x},\ r+}) = 0$。特别地，$({}^EG_{s:r})^\tau = G_{s:r}$（作为完美的 $\mathbb{F}_q$-群概形）。

证明。由于 $r+>0$，群 $L_E^+\mathcal{G}_{\mathbf{x},\,r+}(\mathbb{F}_q)\equiv\mathcal{G}_{\mathbf{x},\,r+}(\mathcal{O}_E)$ 是由若干群的逆极限，而这些群是由 $\mathcal{O}_E$-模迭代扩张得到的。由于 τ的阶与 p互素，每个滤过步骤的上同调均消失，因此根据 d´evissage，有$H^1(\mathrm{Gal}(E/\breve{k})L_E^+\mathcal{G}_{\mathbf{x},\,r+})=0$。引理的最后一项断言由非阿贝尔群上同调的正合列，以及完美光滑仿射群概形作为簇可由其 $\mathbb{F}_q$-点唯一确定这一事实得出。□

设 $H\subseteq G$ 是一个闭子群。按照 [CI19，§2。5] 可以用类似的方法构造一个 $\mathbb{F}_q$-有理闭子群 $H_{s:r}\subseteq G_{s:r}$。为简便起见，记$H_r=H_{0:r}$。此外，若 H 是一个 k-有理子群，则 $H_{s:r}$定义在 $\mathbb{F}_q$上，并且我们仍用 F 表示诱导在 H 或 $H_{s:r}$上的 Frobenius 自同构。类似地，我们有群 ${}^EH_{s:r}$ 和 ${}^EH_r$。若 H 连通，则 $({}^EH_{s:r})^\tau=H_{s:r}$。

2.3. 温和分歧环面。设 T 是 G的一个 k-有理极大环面，它在有限温和分歧扩张 K/k上分裂。设 k_f/k 是 K中的最大非分歧扩张。记 $[K:\ k]=ef$，其中 $e=[K:\ k_f]$ 是（与 p互素的）分歧指数，$f=[k_f:\ k]$ 是 K/k的惯性次数。存在 $a\in k_f$ 和 K 的一个一致化元 π，使得 $\pi^e=a\varpi$。

记 $E=Kk$ 为 K的最大非分歧扩张。于是 E/k是伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为阶数 e 的循环伽罗瓦群，我们将其个生成元之一记为 τ。那么，对于本原 e次单位根 $\zeta\in k$，有 $\tau(\pi)=\zeta\pi$。记 $E^\times=\mathcal{O}_E^\times$，并且对于 $r\geq 0$，记 $E_r^\times=1+\pi^{\lceil er\rceil}\mathcal{O}_E$。

我们用 $W=N_G(T)/T$表示 T 的魏尔群，用 $\Phi=\Phi(G_E,T_E)$表示 T_E 在 G_E 中的根集，用 ${}^EG^\alpha\subseteq G_E$ 表示 α 的根子群，并用 $\tilde{\Phi}=\Phi\times\frac{1}{e}\mathbb{Z}\cup\frac{1}{e}\mathbb{Z}_{\geq 0}$表示仿射根集。若 $f\in\Phi\times\frac{1}{e}\mathbb{Z}$，我们记作$\bar{\alpha}_f\in\Phi$，$n_f\in\frac{1}{e}\mathbb{Z}$，使得 $f=(\alpha_f,n_f)$。f 的仿射根子群为 ${}^EG^f=({}^EG^\alpha)^{n_f:n_f}$。若 $\alpha\in\Phi$，我们记 $\alpha^\vee:\mathbf{G}_{\mathrm{m},K}\to T_K$表示相应的余根，并用 $x\in E^\times,\alpha^\vee\otimes x$ 表示 x 在 $\alpha^\vee$ 下的像。若对某个 $r\in\widetilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}$有 $x\in E_r^\times$，我们也用 $\alpha^\vee\otimes x$表示 x 在 ${}^ET_{r:r'}$ 中的像（对某个 $r'\geq r$）。

我们为 (G_K,T_K) 固定一个 Chevalley 系统。回顾 [BT84，§4.2] or[Adl98，§1.2]，其中包含一组 K-有理同构 $u_\alpha:\mathbf{G}_{\mathrm{a},K}\to G^\alpha$，它们满足关于 $\alpha\in\Phi=\Phi(G_K,T_K)$ 的若干性质。对于满足 $\alpha\in\Phi$ 的仿射根$f=(\alpha,n_f)$，我们有如下参数化

$$\mathbf{G}_{\mathrm{a},\overline{\mathbb{F}}_q}\xrightarrow{\sim}{}^EG^f,\quad\text{induced by}\quad x\longmapsto u_\alpha(\pi^{en_f}[x]),\tag{2.1}$$

其中，当 $\mathrm{char}\,k>0$ 时，$[x]=x$；否则，$[x]$ 是 Teichm¨uller 提升。

注意，τ 作用于 Φ 以及 $\tilde{\Phi}$。我们有如下公式

$$\tau(u_\alpha(x))=u_{\tau(\alpha)}(a_\alpha\tau(x))\quad\forall x\in E$$

对于某个常数 $a_\alpha\in K^\times$。记 $a_\alpha=\pi^{v_E(a_\alpha)}\tilde{a}_\alpha$，其中 $\tilde{a}_\alpha\in\mathcal{O}_K^\times$。

引理 2.2。设 $f=(\alpha,n_f)$ 是一个仿射根，且满足 $\alpha\in\Phi$，于是 $\tau(f)=(\tau(\alpha),n_{\tau(f)})$。

(1) 我们有

$$\tau(u_f(y)) = u_{\tau(f)}(\zeta^{en_f}\bar{a}_\alpha y) \quad \forall y \in \overline{\mathbb{F}}_q \tag{2.2}$$

其中 $\bar{a}_\alpha = \tilde{a}_\alpha$ 模 $\pi\mathcal{O}_K \in \mathbb{F}_{q^f}^\times = (\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K)^\times$。

(2) 我们有 $a_{-\alpha} = a_\alpha^{-1}$和 $\bar{a}_{-\alpha} = \bar{a}_\alpha^{-1}$。*(3)* 令 $f \in \tilde{\Phi}$和 $s = f(\mathbf{x})$。假设存在某个 $N > 0$, $\tau^{2N}(f) = f$，且τ^{2N}在 ${}^EG^f$上作用平凡。那么 $\zeta^{2eNs} = 1$。

证明。(1) 由 (2.1) 以及上述 τ 在 $u_\alpha(x)$ 上的作用公式直接推出。对于 (2)，注意到 $u_\alpha(x)u_{-\alpha}(y)u_\alpha(x)$ 属于 $N_G(T)(E)$ 当且仅当 $xy = -1$。将 τ 作用于此表达式，并注意到 τ 保持$N_G(T)(E)$，可得 $a_\alpha \cdot a_{-\alpha} = 1$。第二个断言由 (1) 和第一个断言推出。为证明 (3)，首先注意到，由于 $\mathbf{x}$ 是 τ-不变的，因此我们有

$$2s = \tau^N(f)(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + n_{\tau^N(f)} + (-\alpha)(\mathbf{x}) + n_f = n_f + n_{\tau^N(f)}, \tag{2.3}$$

as α 是一个线性函数。接下来我们计算

$$\begin{aligned}
u_f(y) &= \tau^{2N}(u_f(y)) \\
&= \tau^N\left(u_{\tau^N(f)}\left(\zeta^{e\sum_{i=0}^{N-1} n_{\tau^i(f)}} \cdot \prod_{i=0}^{N-1} \bar{a}_{\tau^i(\alpha)} \cdot y\right)\right) \\
&= u_f\left(\zeta^{e\sum_{i=0}^{N-1} n_{\tau^i(f)} + n_{\tau^{i+N}(f)}} \cdot \prod_{i=0}^{N-1} (\bar{a}_{\tau^i(\alpha)}\bar{a}_{\tau^{i+N}(\alpha)}) \cdot y\right) \\
&= u_f\left(\zeta^{e\sum_{i=0}^{N-1} n_{\tau^i(f)} + n_{\tau^{i+N}(f)}} \cdot y\right) \\
&= u_f\left(\zeta^{2seN} \cdot y\right)
\end{aligned}$$

其中，第一个等式由假设得出，第二个和第三个等式由引理的第 (1) 部分得出，第四个等式由引理的第 (2) 部分得出，第五个等式由 (2.3) 得出。由于这对任意的 $y \in \mathbb{F}_q$都成立，结论得证。 □

2.4. **与环面特征相关的子群**。 我们沿用§2.3 中的设定，并进一步假设 T 在 G中是椭圆的。 我们假设 $p > 2$。我们固定一个 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$、一个深度为

$$\phi\colon T^F = T(k) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

为 $\leq r$ 的光滑特征，并将 ϕ 在 $T^F_{0:r}$ 上诱导的特征仍记作同一字母。此外，我们假设

(2.4) ϕ 存在一个 Howe 分解 $(G_i, r_i, \phi_i)_{i=-1}^d$，如 [Kal19，§3.6].

请回忆，这意味着

$$\phi = \phi_{-1}\prod_{i=0}^{d} \phi_i|_{T(k)},$$

其中， ϕ_{-1}是 $T(k)$的一个深度为零的特征，而 $\Lambda := (G_i,\ r_i,\ \phi_i)_{i=0}^d$是一般数据，由以下条件定义：

- $T = G^{-1} \subseteq G^0 \subsetneq G^1 \subsetneq \cdots \subsetneq G^d = G$ 是 G的 k-有理 Levi 子群;
- $0 =:$ 当 $d \geqslant 1$ 时为 $r_{-1} < r_0 < \cdots < r_{d-1} \leqslant r_d \leqslant r$，当 $d = 0$ 时为 $0 \leqslant r_0$;
- ϕ_i : $G^i(k) \twoheadrightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$ 是深度为 r_i 的特征，并且在 $G^i_{\mathrm{der}}(k)$ [1] 上平凡，其中 $-1 \leqslant i \leqslant d$;
- ϕ_i 的深度为 r_i ，且是（G^i, G^{i+1}）意义下的一般元素，符合 [Yu01，§9] 对 $0 \leqslant i \leqslant d-1$ 的定义。

注 2.3. 若 p 既不是 G 的坏素数，也不整除 $|\pi_1(G_{\mathrm{der}})|$，则任意特征 ϕ 都存在一个由 [Kal19，命题 3.6 给出的 Howe 分解。7]。

Levi 子群 G^0 的作用有些特殊，我们常常将其记作

$$L = G^0.$$

此外，对于 $0 \leq i \leq d$，我们记

$$s_i = \frac{r_i}{2}.$$

记 $T^i{}_{\mathrm{der}} = G^i_{\mathrm{der}} \cap T$。根据 [Yu01]（另见 [Nie24，§3.2] 和 [IN25a，§4]），我们为一般数据 Λ 关联以下子群： G。

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{K}}_\Lambda &= G^0_{[\mathbf{x}]} G^1_{\mathbf{x},s_0} \cdots G^d_{\mathbf{x},s_{d-1}} \\
\mathcal{K}_\Lambda &= G^0_{\mathbf{x},0} G^1_{\mathbf{x},s_0} \cdots G^d_{\mathbf{x},s_{d-1}} \\
\mathcal{H}_\Lambda &= G^0_{\mathbf{x},0+} G^1_{\mathbf{x},s_0} \cdots G^d_{\mathbf{x},s_{d-1}} \\
\mathcal{K}^+_\Lambda &= G^0_{\mathbf{x},0+} G^1_{s_0+} \cdots G^d_{\mathbf{x},s_{d-1}+} \\
\mathcal{T}_\Lambda &= (T^0_{\mathrm{der}})_{\mathbf{x},0+} (T^1_{\mathrm{der}})_{\mathbf{x},r_0+} \cdots (T^d_{\mathrm{der}})_{\mathbf{x},r_{d-1}+}.
\end{aligned}$$

这里， [**x**]是**x** 在 G^0的约化 Bruhat-Tits 建筑中的自然像，而 $G^0_{[\mathbf{x}]}$ 表示 [**x**] 在 G^0中的稳定子。

我们如下定义另一个子群 $\mathcal{E}_\Lambda$ 。首先，令

$${}^E\mathcal{E}_\Lambda = ({}^EG^0_{\mathrm{der}})_{\mathbf{x};0+,0+} ({}^EG^1_{\mathrm{der}})_{\mathbf{x};r_0+,s_0+} \cdots ({}^EG^d_{\mathrm{der}})_{\mathbf{x};r_{d-1}+,s_{d-1}+} {}^EG_{\mathbf{x},r+},$$

其中 $({}^EG^i_{\mathrm{der}})_{\mathbf{x};r_{i-1},\ s_{i-1}}$ 是由 $({}^EG^i_{\mathrm{der}})_{r_{i-1}+}$ 和 ${}^EG^{f\sim}$ $\sim$ $\sim$生成的子群，其中 $f \in \Phi_{G^i} \setminus \Phi_{G^{i-1}}$ 满足 $f(\mathbf{x}) > s_{i-1}$。这里， Φ_{G^i} 表示 T_E 在 G^i_E 中的根系，其中 $0 \leqslant i \leqslant d$。注意， ${}^E\mathcal{E}_\Lambda$ 是 τ-稳定的，并记

$$\mathcal{E}_\Lambda = ({}^E\mathcal{E}_\Lambda)^\tau,$$

它是 $\mathcal{K}^+_\Lambda$ 的一个子群。

我们置 $\widetilde{\mathcal{K}}_{\Lambda,\ r} = \widetilde{\mathcal{K}}_\Lambda / G_{\mathbf{x},\ r+}$ 以及 ${}^E\widetilde{\mathcal{K}}_{\Lambda,\ r} = {}^E\widetilde{\mathcal{K}}_\Lambda / {}^EG_{\mathbf{x},\ r+}$。其他子群 $\mathcal{K}_{\Lambda,\ r}$、 ${}^E\mathcal{K}_{\Lambda,\ r}$ 等也以相同方式定义。注意到 $\mathcal{K}^+_{\Lambda\ ,\ r} = \mathcal{E}_{\Lambda,\ r} \cdot T_{0+:r}$ ，因此 $\mathcal{K}^+_{\Lambda\ ,\ r} / \mathcal{E}_{\Lambda,\ r} = T_{0+:r} / \mathcal{T}_{\Lambda,\ r}$。

[1]在 [Kal19，定义 3.6 中，2]， ϕ_i 只要求在 $G^i_{\mathrm{sc}}(k$ 上是平凡的。然而， [Kal19，引理 3.6]9] 表明， ϕ_i 可以选为在 $G^i_{\mathrm{der}}(k$ 上是平凡的。

最后，我们记录一个引理，它保证与上文的 ϕ 相关联的子群——因而本文其余部分的所有构造也一样——均与 T 的（温和分歧）分裂域 K/k 的选取无关。这一点似乎是专家们熟知的，但我们在文献中找不到相关出处。

引理 2.4。设 K/k 和 K'/k 是分裂 T 的两个有限温和分歧扩张。我们可以典范地等同 $\Phi = \Phi(G_K, T_K) = \Phi(G_{K'}, T_{K'})$。于是，对于每个 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，我们有

$$\{\alpha \in \Phi \colon \phi \circ N_{K/k} \circ \alpha^\vee(K_r^\times) = 1\} = \{\alpha \in \Phi \colon \phi \circ N_{K/k} \circ \alpha^\vee(K_r'^\times) = 1\}.$$

换言之，集合 R_r 以及 [Kal19，式 (3.6.1)]，，从而所有 *Levi* 子群 G^i 都与分裂域 K/k 的选择无关 T。

证明。K 与 K' 的复合域对 k 仍是有限温和扩张，并且分裂 T。因此，用这个复合域替换 K' 后，不妨设 $K \subseteq K'$。由于 $\alpha^\vee \circ \mathrm{Nm}_{\mathbb{G}_m, K'/K} = \mathrm{Nm}_T$，$_{K'/K} \circ \alpha^\vee$，由范数映射的传递性以及 $N_{K'/K}(K_r'^\times) = K_r^\times$ 这一事实，结论随即得到。后一个等式成立，是因为 $r > 0$ 与 K'/K 是温和分歧的。事实上，只需证明 K'/K 是非分歧或全分歧的情形即可。在第一种情形下，结论由 [Ser79，第 V 章命题 3 的推论] 得出；在第二种情形下，则由 [Ser79，第 V 章命题 5 的推论 3] 得出。□

2.5. **模 $\mathcal{E}_{\Lambda,\ r}$**。我们引入以下便于使用的记号。固定 r 以及 ϕ_{-1}，Λ 的 Howe 分解 ϕ，如 §2.4 所述，定义

$$\widetilde{\mathbb{K}} = \widetilde{\mathcal{K}}_{\Lambda,r}/\mathcal{E}_{\Lambda,r} \quad \text{and} \quad {}^E\widetilde{\mathbb{K}} = {}^E\widetilde{\mathcal{K}}_{\Lambda,r}/{}^E\mathcal{E}_{\Lambda,r}.$$

~我们用 $\mathbb{K}$、$\mathbb{H}$、$\mathbb{L}$、$\mathbb{T}$、$\mathbb{T}^s$（其中 $0 \leqslant s \leqslant r \in \mathbb{R}$）表示 $\mathcal{K}_\Lambda$、$_r$、$\mathcal{H}_\Lambda$、$_r$、L_r、T_r、$T_{s:r}$ 在 $\widetilde{\mathbb{K}}$ 中的自然像。子群 ${}^E\mathbb{H}$、${}^E\mathbb{L}$、${}^E\mathbb{T}$ 和 ${}^E\mathbb{T}^s$ 的定义方式类似。注意，由定理 2.1 可知，对于 ? $\in\{\mathbb{H}, \mathbb{L}, \mathbb{T}, \mathbb{T}^s, \dots\}$，有 $({}^E?)^\tau = ?$。

注意到 $\mathbb{H}/\mathbb{K}^+$ 和 ${}^E\mathbb{H}/{}^E\mathbb{K}^+$ 是线性 $\mathbb{F}_q$-空间，我们将它们记作

$$V = \mathbb{H}/\mathbb{K}^+ \quad \text{and} \quad {}^EV = {}^E\mathbb{H}/{}^E\mathbb{K}^+.$$

此外，采用以下记法也很方便

$$\hat{V} = \mathbb{H} \quad \text{and} \quad {}^E\hat{V} = {}^E\mathbb{H}.$$

表示我们将 $\mathbb{H}$ 中的元素视为 V 的提升。

2.6. 设置概述。与特征 ϕ 相关联的群如下。子群 $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{K}$ 是 $\mathbb{K}$ 的幺正根基，且有 $\mathbb{K}/\mathbb{H} \cong L_0$ 和 $\mathbb{K} = \mathbb{L}\mathbb{H}$。此外，我们还有一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{K}^+ \longrightarrow \hat{V} = \mathbb{H} \longrightarrow V = \mathbb{H}/\mathbb{K}^+ \longrightarrow 0, \tag{2.5}$$

素数 p 群，其中 $\mathbb{K}^+ \cong \mathbb{T}^{0+} \cong T_{0+:r}/\mathcal{T}_{\phi,\ r}$。这是阿贝尔群的一个扩张，因此 $\mathbb{H}$ 的交换子配对诱导出一个取值于 $\mathbb{K}^+$的辛

配对，定义在 V上。我们将在下文 §3 中研究这一配对。对于 （2.5）中的序列以及 ${}^{E}\mathbb{K}$ 及其相应子群，也有类似的情形。

3. Deligne–Lusztig construction in a Heisenberg group

我们沿用§2.3 - 2.6中的设定。群 $\hat{V} = \mathbb{H}$ 与 ${}^{E}\hat{V} = {}^{E}\mathbb{H}$非规范同构于海森堡群。我们利用序列（2.5）的 Yu 分裂，为 ${}^{E}\hat{V}$构造一个显式同构，并证明它是 τ-等变的。在§3.3 中，我们为群 $\mathbb{K}$定义一个 Deligne–Lusztig 型子簇。

3.1. **海森堡群的同构**。设

$$\pi : {}^{E}\hat{V} \longrightarrow {}^{E}V$$

表示投影同态。注意， ${}^{E}V$ 是$\mathbb{F}_q$上的线性空间。 ${}^{E}\hat{V}$的中心是 ${}^{E}\mathbb{K}^{+} \cong {}^{E}T_{0+:r}/{}^{E}\mathcal{T}_{\phi,\ r}$。

设 $\alpha \in \Phi \smallsetminus \Phi_L$。我们令 $1 \leqslant i_\alpha \leqslant d$使得 $\alpha \in \Phi_{G^i} \smallsetminus \Phi_{G^{i-1}}$，并置 $r_\alpha = r_{i_\alpha - 1}$，其中 $\Phi_{G^i} = \Phi(G^i_E,\ T_E)$是 G^i 关于 $0 \leqslant i \leqslant d$的根系。我们令 $({}^{E}\mathbb{K}^{+})_\alpha \subseteq {}^{E}\mathbb{K}^{+}$ 为 $\alpha^\vee(E^\times_{r_\alpha})$的自然像。记由仿射根子群 ${}^{E}G^f$ 的自然像生成的子群为 ${}^{E}V_\alpha \subseteq {}^{E}V$和 ${}^{E}\hat{V}_\alpha \subseteq {}^{E}\hat{V}$，其中$\alpha_f = \alpha$ 和 $f(\mathbf{x}) \geqslant r_\alpha/2$（注意，两者都是 $\mathbb{F}_q$-向量空间）。注意， π 限制后给出线性空间之间的同构

$$ {}^{E}\hat{V}_\alpha \cong {}^{E}V_\alpha,$$

它们都同构于维数为 $\leqslant 1$ 的线性空间 $(G^\alpha)^{r_\alpha:r_\alpha}$。 — —

注意，对任意 $\alpha, \beta \in \Phi$，都有 $[{}^{E}\hat{V}_\alpha, {}^{E}\hat{V}_\beta] = \delta_{\alpha,-\beta}({}^{E}\mathbb{K}^{+})_\alpha$（克罗内克 δ）。因此，映射 $(x, y) \mapsto [x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ 诱导出一个斜对称配对

$$\kappa : {}^{E}\hat{V} \times {}^{E}\hat{V} \longrightarrow {}^{E}\mathbb{K}^{+}.$$

它自然下降为 ${}^{E}V$ 上的一个配对，我们仍将其记为 κ。于是有

$$ {}^{E}V \cong \bigoplus_{\alpha\in\Phi} {}^{E}V_\alpha, \qquad {}^{E}V \cong {}^{E}\mathbb{K}^{+} \prod_{\alpha\in\Phi} {}^{E}\hat{V}_\alpha,$$

其中，乘积按任意固定顺序计算。

Let

$$ {}^{E}V^\sharp = {}^{E}V \times {}^{E}\mathbb{K}^{+}$$

设其为与 $({}^{E}V, \kappa)$ 相关联的海森堡群，其乘法律由下式给出

$$(x, a)(y, b) = (x + y, a + b + \frac{1}{2}\kappa(x, y)), \text{ for } (x, a), (y, b) \in {}^{E}V \times {}^{E}\mathbb{K}^{+}.$$

注意， L_r 通过以下方式作用于 ${}^{E}V^\sharp$： $(x,\ a) \mapsto (\mathrm{ad}(g)x,\ a)$，其中 $g \in L_r$，且$(x,\ a) \in {}^{E}V^\sharp$。

设 $D \subseteq \Phi \setminus \Phi_L$。定义

$$ {}^E V_D = \bigoplus_{\alpha \in D} {}^E V_\alpha \quad \text{and} \quad {}^E \hat{V}_D = \prod_{\alpha \in D} {}^E \hat{V}_\alpha, $$

在后一种情况下，我们假设 $D \cap -D = \varnothing$，因此 ${}^E\hat{}V_D$ 是 ${}^E\hat{}V$的交换子群。此外，如果 D 是 τ-不变的，那么 ${}^E V_D$ 也如此，并且我们定义 $V_D = ({}^E V_D)^\tau$。提醒读者，我们尚未定义 $\hat{}\, V_D$，这将在 §3.3 中定义；此外，$\hat{}\, V_D$ 不等于 $({}^E\hat{}V_D)^\tau$。

设 $P = LU_P \subseteq G$ 是一个定义在 K 上的抛物子群，其 Levi 子群为 $L \subseteq G$，幺正根基为 U_P。记 $\Phi_{U_P} \subseteq \Phi$ 为 U_P 中出现的根集。设 $W_1 = {}^E\hat{}V_{\Phi_{U_P}}$ 且 $W_2 = {}^E\hat{}V_{-\Phi_{U_P}}$。那么 $W_1 \cap {}^E\mathbb{K}^+ = W_2 \cap {}^E\mathbb{K}^+ = \{0\}$，并且 ${}^E\hat{}V$ 的每个元素都能唯一表示为 $w_1 w_2 z$，其中 $w_1 \in W_1$、$w_2 \in W_2$ 和 $z \in {}^E\mathbb{K}^+$。

命题 3.1。存在一个同时具有 ${}^E L_{[\mathbf{x}]}$等变性（相对于$\breve{}$伴随作用）和$\mathrm{Gal}(E/k)$等变性的群同构

$$ j : {}^E\hat{V} \xrightarrow{\sim} {}^E V^\sharp $$

由 $w_1 w_2 z \mapsto (\pi(w_1 w_2)\ z + \frac{1}{2}\kappa(w_1, w_2))$ 给出，其中 $w_1 \in W$、$w_2 \in W_2$ 和 $z \in {}^E\mathbb{K}^+$。

证明。Yu01 中的 [Yu01，引理 10.1 和 10.2] 证明了 j 是一个 ${}^E L_{[\mathbf{x}]}$-等变群同态。我们证明 j 是 $\mathrm{Gal}(E/k)$-等变的。

令 $\tau \in \mathrm{Gal}(E/k)$，$w_1 \in W_1$、$w_2 \in W_2$ 和 $z \in {}^E\mathbb{K}^+$。注意到对于 $\alpha \in \Phi \setminus \Phi_L$，$\tau({}^E\hat{}V_\alpha) = {}^E\hat{}V_{\tau(\alpha)}$，于是有 $\tau(w_1) = x_1 x_2$ 和 $\tau(w_2) = y_1 y_2$，其中存在某些 $x_1, y_1 \in W_1$ 和 $x_2, y_2 \in W_2$，使得 $\kappa(x_1, x_2) = \kappa(y_1, y_2) = 0$。因此，

$$ \begin{aligned} j(\tau(w_1 w_2 z)) &= j(x_1 x_2 y_1 y_2 \tau(z)) \\ &= j((x_1 y_1)(x_2 y_2)(\tau(z) + \kappa(x_2, y_1))) \\ &= (\pi(x_1 y_1 x_2 y_2), \tau(z) + \frac{1}{2}(\kappa(x_1, y_2) + \kappa(x_2, y_1))) \\ &= (\pi(\tau(w_1 w_2)), \tau(z) + \frac{1}{2}\kappa(x_1 x_2, y_1 y_2))) \\ &= (\pi(\tau(w_1 w_2)), \tau(z) + \frac{1}{2}\kappa(\tau(w_1), \tau(w_2)) \\ &= (\tau(\pi(w_1 w_2)), \tau(z) + \frac{1}{2}\tau(\kappa(w_1, w_2))) \\ &= \tau(j(w_1 w_2 z)), \end{aligned} $$

其中，第三个等式由 $\kappa(x_1, x_2) = \kappa(y_1, y_2) = 0$ 得出；第四个等式由 $\kappa(x_1, y_1) = \kappa(x_2, y_2) = 0$ 得出；第六个等式则由 τ 与 π 和 κ 可交换得出。证明完毕。□

3.2. **一个拉格朗日子空间。** 在本文余下部分，我们进一步假设 T 是 L 的最大非分歧极大环面（定义见 [Kal19,§3.4.1]。（若 (T,ϕ) 是 [Kal19, Definition 3.7.5] 意义下的温和椭圆正则对，则此条件成立。）特别地，存在一个由 τ 固定的 Borel 子群 $B=TU$，它属于 L，且其幺正根基为 U。

回顾一下，τ 是 $\mathrm{Gal}(E/\check{k})$ 的一个生成元，且 $\mathbb{K}^+=({}^E\mathbb{K}^+)^\tau$, $V=({}^EV)^\tau$和 $\hat{}V=({}^E\hat{}V)^\tau$。注意，$\kappa$: ${}^EV\times{}^EV\to{}^E\mathbb{K}^+$限制为一个配对$V\times V\to\mathbb{K}^+$，我们仍将其记作 κ。

令 $\mathcal{C}$ 为满足 $V_C\neq 0$ 的 $\Phi\smallsetminus\Phi_L$ 的 τ-轨道 C的集合，其中 $V_C=({}^E\hat{}V_C)^\tau$。我们有

$$V\cong\bigoplus_{C\in\mathcal{C}}V_C,\qquad \hat{V}\cong\mathbb{K}^+\prod_{C\in\mathcal{C}}\hat{V}_C.$$

引理 3.2。 令 C 为 $\Phi\smallsetminus\Phi_L$ 的一个 τ-轨道。我们有

(1) 维数 $V_C\leqslant 1$; *(2)* $V_C\neq 0$ 当且仅当 ${}^EV_C\neq 0$ 且 $\tau^{|C|}$ 在 ${}^EV_C$ 上平凡作用; *(3)* $\kappa(V_C,V_{C'})=0$ 若 $C\neq -C'$; *(4)* $V_C=0$ 若 $C=-C$; *(5)* $V_C\neq 0$ 当且仅当 $V_{-C}\neq 0$，在此情况下，$\kappa(V_C,V_{-C})\neq 0$。

我们注意到，在 F-不变子空间上，定理 3.2的 (4) 已在[DS18，第66]页中得到证明。

证明。令 $\alpha\in C$，使得 $C=\{\tau^i(\alpha)\}_{i=0}^{|C|-1}$。由 (2.2)，$\tau$ 在 ${}^EV_C$ 上的作用由 $(x_i)_{i=0}^{|C|-1}\mapsto(c_{i-1}x_{i-1})_{i=0}^{|C|-1}$ 给出，其中 $c_i\in\mathbb{F}_q^\times$ 是某个常数。结论 (1) 和 (2) 可由此描述直接推出。对于 (3)，只需证明 $\kappa({}^EV_C,{}^EV_{C'})=0$。不妨设 ${}^EV_C\neq 0\neq{}^EV_{C'}$，否则无须证明。只需验证对任意 $\alpha\in C$、$\alpha'\in C'$，都有 $\kappa({}^EV_\alpha,{}^EV_{\alpha'})=0$。令 f（分别为 f'）为位于 α（分别为 α'）之上的唯一仿射根，满足 $f(\mathbf{x})=\frac{r_\alpha}{2}$（分别满足 $f'(\mathbf{x})=\frac{r_\alpha}{2}$）。那么，$[{}^EG^f,{}^EG^{f'}]$ 在 $\mathcal{K}_\Lambda^+{}_{,r}$ 中的像包含于 ${}^EG^{f+f'}$ 的自然像。因此，它在 ${}^E\mathbb{K}^+\cong{}^ET_{0+:r}/{}^E\mathcal{T}_{\Lambda,r}$ 中的像为零。这就证明了 (3)。为证明 (4)，假设 $V_C\neq 0$ 且 $C=-C$。令 $\alpha\in C$。写作 $s=r_\alpha/2$。根据假设，存在一个位于 α 之上的（唯一）仿射根 $f=(\alpha,n_f)$，使得 $f(\mathbf{x})=s$。于是存在某个 $N>0$，使得 $\tau^N(\alpha)=-\alpha$。由于 $f(\mathbf{x})=s=r_\alpha/2$，定理 2.2 推出 $\zeta^{eNr_\alpha}=1$。

现在令 $x \in \overline{\mathbb{F}}_q$，使得 $1+\pi^{er_\alpha} \in E^\times_{r_\alpha:\, r_\alpha}$。于是我们在 $T_{r_\alpha:\, r_\alpha}$ 中计算：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Nm}_{K/k_f}(\alpha^\vee \otimes 1+\pi^{er_\alpha}x)\\
=&\sum_{i=0}^{2N-1}\tau^i(\alpha^\vee \otimes 1+\pi^{er_\alpha}x)\\
=&\sum_{i=0}^{N-1}\tau^i(\alpha^\vee \otimes 1+\pi^{er_\alpha}x)+\sum_{i=0}^{N-1}\tau^{i+N}(\alpha^\vee \otimes 1+\pi^{er_\alpha}x)\\
=&\sum_{i=0}^{N-1}\tau^i(\alpha^\vee \otimes 1+\pi^{er_\alpha}x)+\sum_{i=0}^{N-1}\tau^{i}(-\alpha^\vee \otimes 1+\zeta^{Ner_\alpha}x)\\
=&\sum_{i=0}^{N-1}\tau^i(\alpha^\vee \otimes 1+\pi^{er_\alpha}x)-\sum_{i=0}^{N-1}\tau^{i}(-\alpha^\vee \otimes 1+\pi^{er_\alpha}x)\\
=&\,0,
\end{aligned}$$

如 $\zeta^{Ner_\alpha}=1$。换言之，$\mathrm{Nm}_{K/k_f}\alpha^\vee(E^\times_{r_\alpha})=1$。由分解式 $\mathrm{Nm}^{K/k}=\mathrm{Nm}_{k_f/k}\circ\mathrm{Nm}^{K/k_f}$，我们还可推出

$$\mathrm{Nm}_{K/k}\circ\alpha^\vee(E^\times_{r_\alpha})=1,$$

因此也有 $\phi\circ\mathrm{Nm}_{K/k}\circ\alpha^\vee(E^\times_{r_\alpha})=1$，这与 $r_\alpha=r_{i_\alpha-1}$ 的定义矛盾。这就证明了 (4)。(5) 的第一部分由 (2)、公式 (2.2) 和定理 2.2 得出。对于 (5) 的第二部分，设 $V_C\neq 0$，并令 $C=\{\tau^i(\alpha)\}_{i=0}^{|C|-1}$。记 $s=r_\alpha/2$。令 $f=(\alpha,n_f)$ 和 $f'=(-\alpha,n_{f'})$ 分别为满足 $f(\mathrm{x})=s$ 和 $f'(\mathrm{x})=s$ 的唯一仿射根。于是 ${}^EV_C\simeq\bigoplus_{i=0}^{|C|-1}{}^EG^{\tau^i}(f)$ 是根子群的乘积。根据假设，$V_C\neq 0$，定理 2.2(1) 表明，在此同构下，V_C 恰由以下元组组成

$$X=(x,\,\zeta^{en_f}\bar{a}_\alpha x,\,\zeta^{e(n_f+n_{\tau(f)})}\bar{a}_\alpha\bar{a}_{\tau(\alpha)}x\,,\,\ldots\,,\,\zeta^{e\sum_{j=0}^{|C|-2}n_{\tau^j(f)}}\cdot\prod_{j=0}^{|C|-2}\bar{a}_{\tau^j(\alpha)}\cdot x)$$

其中 $x\in\mathbb{F}_q$ 任意。此外，由第 (2) 部分可知

$$\zeta^{e\sum_{j=0}^{|C|-1}n_{\tau^j(f)}}\prod_{j=0}^{|C|-1}\bar{a}_{\tau^j(\alpha)}=1. \tag{3.1}$$

令 $Y\in V_{-C}$ 为一个类似的元组，其中 x 被 y 替换，且 f 在所有地方都被 f' 替换。将（3.1）与关于 α 的类似表达式相乘，并利用$V_C\neq 0$ 以及定理 2.2，可得 $\zeta^{er_\alpha|C|}=1$。现在，我们计算

在 $T_{r_\alpha:\ r_\alpha}$:

$$[X,Y]=\sum_{i=0}^{|C|-1}\tau^i(\alpha)^\vee\otimes 1+\pi^{er_\alpha}xy\zeta^{e\sum_{j=0}^{i-1}(n_{\tau^j(f)}+n_{\tau^j(f')})}\cdot\prod_{j=0}^{i-1}\bar{a}_{\tau^j(\alpha)}\bar{a}_{-\tau^j(\alpha)}$$
$$=\sum_{i=0}^{|C|-1}\tau^i(\alpha)^\vee\otimes 1+\pi^{er_\alpha}xy\zeta^{ier_\alpha}.$$

其中，第二个等式由定理 2.2(2) 以及 $n_{\tau^j(f)}+n_{\tau^j(f')}=r_\alpha$ 得出。因此，只需证明存在某些 $x,y\in\mathbb{F}_q$，使得该表达式在 $T_{r_\alpha:r_\alpha}$ 中不为零。根据 $\overline{r}_\alpha$ 的定义，我们有 $\phi\circ\mathrm{Nm}_{K/k}\circ\alpha^\vee(K^\times_{r_\alpha})\neq 1$，且 $\phi\circ\mathrm{Nm}_{K/k}\circ\alpha^\vee(K^\times_{r_\alpha+})=1$。注意到 $\phi\circ\mathrm{Nm}_{K/k}\circ\alpha^\vee$ 可经由 $\mathrm{Nm}_{K/k_f}\circ\alpha^\vee$ 分解，这意味着存在某个 $z\in\mathbb{F}_q$，使得 $\sum_{\lambda=0}^{e-1}\tau^\lambda(\alpha^\vee\otimes 1+\pi^{er_\alpha}z)\neq 1$ 属于 $T_{r_\alpha:r_\alpha}$。令 $d:=\frac{e}{|C|}$。我们在 $T_{r_\alpha:r_\alpha}$ 中计算

$$\begin{aligned}1\neq\sum_{\lambda=0}^{e-1}\tau^\lambda(\alpha^\vee\otimes 1+\pi^{er_\alpha}z)&=\sum_{i=0}^{|C|-1}\sum_{i'=0}^{d-1}\tau^{i+i'|C|}(\alpha^\vee\otimes 1+\pi^{er_\alpha}z)\\&=\sum_{i=0}^{|C|-1}\tau^i(\alpha^\vee\otimes 1+\pi^{er_\alpha}\sum_{i'=0}^{d-1}\zeta^{er_\alpha|C|i'}z)\\&=\sum_{i=0}^{|C|-1}\tau^i(\alpha^\vee\otimes 1+\pi^{er_\alpha}dz)\\&=\sum_{i=0}^{|C|-1}\tau^i(\alpha)^\vee\otimes 1+\pi^{er_\alpha}\zeta^{ier_\alpha}dz\end{aligned}$$

其中第二个等式由 $\tau^{|C|}(\alpha)=\alpha$ 得出，第三个等式由 $\zeta^{er_\alpha|C|}=1$ 得出，最后一个等式则来自 τ 对仿射余根的作用。注意到 d 在 $\mathbb{F}_q$ 中是可逆的（因为 e 也是如此），任取 x，y 使得 $xy=dz$。这就完成了（5）的证明。

由与（2.3）中相同的计算可知，对于任意 j，有 $n_{\tau^j(f)}+n_{\tau^j(f')}=2s=r_{\alpha_0}$。因此

$$[X,Y]=\sum_{i=0}^{|C|-1}\alpha^\vee\otimes 1+\pi^{er_\alpha}x_fy_{f'}\sum_{i=0}^{|C|-1}\zeta^{ier_\alpha}$$

其中第二个等式由定理 2.2（2）得出。 □

回顾一下，$\mathcal{C}$ 是满足 $V_C\neq 0$ 的、$\Phi\smallsetminus\Phi_L$ 中的 τ-轨道 C 的集合。置 $\Psi=\Psi_\phi=\cup_{C\in\mathcal{C}}C$。回顾一下，$B=TU\subseteq L$ 是一个 Borel 子群，其幺正根基为 U。

命题3.3。 存在一个子集 $\Psi_+\subseteq\Psi$，使得 $\Psi=\Psi_+\cup-\Psi_+$、$\Psi_+\cap-\Psi_+=\varnothing$ 和 V_{Ψ_+} 被 B_0 正规化。

证明。 由定理 3.2 (4)，只需归纳地构造一个子集序列 $\varnothing = \Psi_{0,+} \subseteq \Psi_{1,+} \subseteq \cdots \subseteq \Psi_{|\mathcal{C}|/2,+} \subseteq \Psi$，使得 $\Psi_{i,+} \setminus \Psi_{i-1,+}$ 是 Ψ 的一个 τ-轨道，$\Psi_{i,+} \cap -\Psi_{i,+} = \varnothing$，并且对于 $1 \leqslant i \leqslant |\mathcal{C}_i|/2$，$V_{\Psi_{i,+}}$ 被 $B_0 \subseteq L_0$ 正规化。

事实上，我们令 $\Psi_{0,+} = \varnothing$ 并假设 $\Psi_{i,+}$ 已经按所需性质构造完成。假设 $i < |\mathcal{C}|/2$，并按如下方式构造 $\Psi_{i+1,+}$。令

$$V_{\Psi_{i,+}}^{\perp} := \{v \in V; \kappa(v, V_{\Psi_{i,+}}) = 0\} = V_{\Psi \setminus -\Psi_{i,+}},$$

其中第二个等式由定理3.2得出。由归纳假设，$V_{\Psi_{i,+}}$ 是B_0-不变的。因此，$V_{\Psi_{i,+}}^{\perp}$ 也是 B_0-不变的。

令 $\Phi_L^+ \subseteq \Phi_L$ 为由 B 确定的正根集合。对于 $\alpha, \beta \in \Phi$，若 $\beta - \alpha$ 是 Φ_L^+ 中若干根之和，则记作 $\alpha \leqslant \beta$。令 α_{i+1} 为 $\Psi \setminus (\Psi_{i,+} \cup -\Psi_{i,+})$ 中关于偏序 $\leqslant$的一个极大根。令 C_{i+1} 为 α_{i+1} 的τ-轨道，并设 $\Psi_{i+1,+} = \Psi_{i,+} \cup C_{i+1}$。考虑以下集合

$$D_{i+1} := \{\alpha \in \Phi; \alpha \geqslant \gamma \text{ for some } \gamma \in C_{i+1}\} = \{\alpha \in \Phi; \tau^i(\alpha) \geqslant \alpha_{i+1} \text{ for some } i \in \mathbb{Z}\},$$

第二个等式由 Φ_L^+ 是 τ-不变的这一点得出。根据 α_{i+1} 的选取，我们有

$$(\Psi \setminus -\Psi_{i,+}) \cap D_{i+1} \subseteq \Psi_{i+1,+}.$$

根据定义，

$$\mathrm{Ad}(B_0)(V_{C_{i+1}}) \subseteq V_{\Psi_{i,+}}^{\perp} \cap {}^E V_{D_{i+1}} = V_{\Psi \setminus -\Psi_{i,+}} \cap {}^E V_{D_{i+1}} = V_{(\Psi \setminus -\Psi_{i,+}) \cap D_{i+1}} \subseteq V_{\Psi_{i+1,+}}.$$

Thus $V_{\Psi_{i+1,+}}$ is B_0-invariant, and the induction procedure is finished. □

3.3. **一种 Deligne–Lusztig 型构造**。 记号与第3.2节相同。设 Ψ_+ 如定理3.3中所述。

回顾定理 j 给出的同构3.1。取 τ-不变部分后，它诱导出一个同构 $j\colon {}^\wedge V \xrightarrow{\sim} V^\sharp$。现在，$V^\sharp \cong V \times \mathbb{K}^+$ 包含一个典范的副本 $V \times \{0\}$，它来自 V。对于任意 τ-等变子集 $D \subseteq \Phi \setminus \Phi_L$，我们定义 ${}^\wedge V_D = j^{-1}(V_D \times \{0\}) \subseteq {}^\wedge V$。根据定理 3.1 和定理 3.3，${}^\wedge V_{\Psi_+}$ 是一个由 $B_0 = T_0 U_0$ 正规化的交换群，因此其乘积

$$\mathbb{I} := U_0 \hat{V}_{\Psi_+} \subseteq \mathbb{K}$$

是子群。于是，附带的深层 Deligne–Lusztig簇定义为

$$Z = Z_{\Lambda,B,\Psi_+,r} = \{g \in \mathbb{K}; g^{-1} F(g) \in F\mathbb{I}\}.$$

由于 $\mathbb{I}$被 $\mathbb{T}$正规化，簇 Z 具有由$\mathbb{T}^F$ 给出的自然作用，具体为 $t\colon\ x \mapsto xt$。令

$$H_c^i(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi] \subseteq H_c^i(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

表示 Z 的 i阶 ℓ-进上同调中 $\mathbb{T}^F$ 通过特征 ϕ作用的子空间。

注意， Z 还具有由 $g\colon\ x \mapsto gx$ 给出的 $\mathbb{K}^F$ 的第二个作用，该作用与先前的 $\mathbb{T}^F$ 作用可交换。因此，权空间 $H_c^i(Z, \mathbb{Q}_\ell)[\phi]$

是 $\mathbb{K}^F$ 的自然表示。我们定义如下虚拟 $\mathbb{K}^F$-模

$$\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi) := H_c^*(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi] := \sum_i (-1)^i H_c^i(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi].$$

通过膨胀，我们也将 $\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$ 隐式地视为一个虚 $\mathcal{K}_\Lambda^F$-模。

3.4. 一个扩张。由于 T 在 G 中是椭圆的，我们有由 s 诱导的 T^F 在 $\mathbb{K}$ 上的自然伴随作用：$x \mapsto sxs^{-1}$。此外，此作用保持子群 $\mathbb{I}$，因而也保持簇 Z。

按照 [Kal19，§3.4]，，我们考虑 $\mathcal{K}_\Lambda^F \rtimes T^F$ 在 Z 上由 $g \rtimes z$ 给出的作用：$x \mapsto gzxz^{-1}$。此作用与此前 $T_{\mathbf{x},0}^F$ 通过右乘在 Z 上的作用相交换。因此，权空间 $H_c^i(Z, \mathbb{Q}_\ell)[\phi]$ 是 $\mathcal{K}_\Lambda^F \rtimes T^F$ 的自然表示。考虑张量积

$$H_c^i(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi] \otimes \phi,$$

其中，ϕ 通过自然投影 $\mathcal{K}_\Lambda^F \rtimes T^F \to T^F$ 被视为 $\mathcal{K}_\Lambda^F \rtimes T^F$ 的一个特征。由于 $T \subseteq L$ 是最大非分歧极大环面，我们有 $\mathcal{K}_\Lambda^F \cap T^F = L_{\mathbf{x},0}^F \cap T^F = T_{\mathbf{x},0}^F$。于是根据定义，$z \in T^F$ 对 $H_c^i(Z, \mathbb{Q}_\ell)[\phi] \otimes \phi$ 的作用 $z \rtimes z^{-1}$ 是平凡的。因此，$H_c^i(Z, \mathbb{Q}_\ell)[\phi] \otimes \phi$ 下降为 $\mathcal{K}_\Lambda^F T^F$ 的一个表示。我们定义

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi) := H_c^*(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi] \otimes \phi$$

作为一个虚拟 $\mathcal{K}_\Lambda^F T^F$-模。注意，$\hat{\mathcal{R}}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)|_{\mathcal{K}_\Lambda^F} = \mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$。

4. Mackey formula

沿用§3.3中的记号。回忆一下，$B = TU$ 是 L的一个 Borel 子群 L，记 $\mathbb{L}$，$\mathbb{U}$ 和 $\mathbb{T}$ 分别为 L_r，U_r 和 T_r 在 $\mathbb{K}$中的自然像。令 $N_{\mathbb{L}}(\mathbb{T}) = \{x \in \mathbb{L};\ {}^x\mathbb{T} = \mathbb{T}\}$ 和 $W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T}) = N_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})/\mathbb{T}$。那么

$$\mathbb{L} = \sqcup_{w \in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})} \mathbb{U}\dot{w}\mathbb{T}\mathbb{U},$$

其中 $\dot{w}$ 是 w 在 $N_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})$ 中的一个提升。

令 $\Psi = \Psi_+ \sqcup -\Psi_+$ 如定理3.3中所述。设 $\Psi_- = -\Psi_+$，则有

$$\mathbb{H} = \hat{V} = \hat{V}_{\Psi_+} \hat{V}_{\Psi_-} \mathbb{T}^{0+}.$$

Thus

$$\mathbb{K} = \mathbb{H}\mathbb{L} = \bigsqcup_{w \in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})} \mathbb{U}\hat{V}\dot{w}\mathbb{T}\mathbb{U} = \bigsqcup_{w \in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})} \mathbb{I}\hat{V}_{\Psi_- \cap {}^w\Psi_-}\dot{w}\mathbb{T}\mathbb{I}.$$

令 $C \subseteq \Psi$。特别地，$V_C \neq 0$。设 $i_C = i_\alpha$ (见§3.1)以及 $r_C = r_\alpha$对某个/任意 $\alpha \in C$。定义

$$(\mathbb{K}^+)_C = \kappa(V_C, V_{-C}) \subseteq \mathbb{T}^{r_C},$$

它是一个一维的 $\mathbb{F}_q$-线性空间，由定理 3.2给出。

4.1. 辅助结果。 设 D_1, $D_2 \subseteq \Psi$ 是两个 τ-稳定子集，使得$D_i \cap -D_i = \varnothing$ 对 $i = 1, 2$ 成立。设 $\dot{w} \in \mathbb{L}^F$ 将 $\mathbb{T}$正规化。映射 $(y_1, y_2) \mapsto y_1 y_2$ 给出一个仿射空间纤维化

$$\gamma : \hat{V}_{D_1} \times \hat{V}_{D_2} \longrightarrow \hat{V}_{D_1}\hat{V}_{D_2} \cong \hat{V}_{D_1 \smallsetminus D_2}\hat{V}_{D_2},$$

$\hat{}$其纤维同构于 $V_{D_1 \cap D_2}$。考虑以下簇

$$X = X_{D_1,D_2,w} = \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z) \in \hat{V}_{D_1} \times \hat{V}_{D_2} \times \hat{V}_{D_1} \times \hat{V}_{D_2} \times \mathbb{T}; {}^{\dot{w}}(x_1 x_2)L(z) = y_1 y_2\};$$
$$Y = Y_{D_1,D_2,w} = \{(x, z) \in (\hat{V}_{D_1}\hat{V}_{D_2}) \times \mathbb{T}; {}^{\dot{w}}(x)L(z) \in \hat{V}_{D_1}\hat{V}_{D_2}\},$$

其中 $L\colon\ \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 表示由 $z \mapsto z^{-1}F(z)$ 给出的 Lang映射。注意，$\mathbb{T}^F \times \mathbb{T}^F$ 分别通过以下方式作用于 X 和 Y

$$(s, t) : (x_1, x_2, y_1, y_2, z) \longmapsto ({}^s x_1, {}^s x_2, {}^{w(s)} y_1, {}^{w(s)} y_2, w(s) z t)$$
$$(s, t) : (x, z) \longmapsto ({}^s x, w(s) z t).$$

由于 γ是一个仿射空间纤维化，因此 $\mathbb{T}^F \times \mathbb{T}^F$-等变映射也是如此

$$X \longrightarrow Y, \quad (x_1, x_2, y_1, y_2, z) \longmapsto (x_1 x_2, z).$$

特别地，对于 $\mathbb{T}^F$ 的另一个特征 ψ，我们有一个同构

$$H_c^*(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi \boxtimes \phi] \cong H_c^*(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi \boxtimes \phi].$$

令 $D_i' = D_i \cap {}^{w^{-1}}(D_1 \cup D_2)$ 表示 $i = 1, 2$。由于 ${}^w(D_1' \cup D_2') \subseteq D_1 \cup D_2$，我们有 ${}^{\dot{w}}(\hat{}V_{D_1'}\hat{}V_{D_2'}) \subseteq \hat{}V_{D_1}\hat{}V_{D_2}\mathbb{T}$。令 $\mathrm{pr}_T\colon\ \hat{}\,V_{D_1}\hat{}V_{D_2}\mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 为自然投影。我们考虑由 $x \mapsto \mathrm{pr}_T({}^{\dot{w}}x)$ 给出的映射 $\delta\colon\ \hat{}\,V_{D_1'}\hat{}V_{D_2'} \to \mathbb{T}$。

引理 4.1. 我们有如下笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & \mathbb{T} \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -L} \\ \hat{V}_{D_1'}\hat{V}_{D_2'} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{T}, \end{array}$$

$\hat{}$ $\hat{}$其中 $\mathrm{pr}1\colon\ Y \to V_{D_1}V_{D_2}$ 和$\mathrm{pr}2\colon\ Y \to \mathbb{T}$ 分别是由$(x, \tau) \mapsto x$和$(x, \tau) \mapsto \tau$给出的投影。

$\hat{}\,\hat{}$证明。 设 $(x, \tau) \in Y \subseteq (V_{D_1}V_{D_2}) \times \mathbb{T}$。通过取自然投影 $\hat{}\pi\colon\ V \to V$，根据定义可得

$$\pi(x) \in V_{w^{-1}(D_1 \cup D_2)} \cap V_{D_1 \cup D_2} = V_{D_1' \cup D_2'}.$$

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 由于 π 限制为一个双射 $V_{D_1}V_{D_2} \cong V_{D_1 \cup D_2}$，因此有 $x \in V_{D_1'}V_{D_2'}$。于是由 Y的定义即可得到所述结论。□

我们在 $D_1' \cup D_2'$ 的 τ-轨道上固定一个线性序 $\preceq$，使得若 $C_1 \subseteq D_1' \smallsetminus D_2'$ 且 $C_2 \subseteq D_2'$，则 $C_1 \prec C_2$。于是我们得到一个簇之间的同构

$$\chi : \prod_C \hat{V}_C \longrightarrow \hat{V}_{D_1'}\hat{V}_{D_2'}, \quad (x_C)_C \longmapsto \prod_C x_C,$$

其中 C 遍历 $D_1' \cup D_2'$ 的 τ-轨道，乘积是相对于 $\preceq$ 取的。

我们回顾以下结果，出自 [Boy12，命题 2。10]。

命题 4.2。设 A为一个连通交换代数群，$\mathcal{L}$ 为其上的乘法秩一局部系统。设 Z_1 为一个簇，且$\xi\colon\ Z = Z_1 \times \mathbb{G}_a \to A$ 为如下形式的态射

$$(z, y) \longmapsto \eta(z, y)\zeta(z)$$

使得对任意 $z \in Z_1$，由 $y \mapsto \eta(z, y)$ 给出的态射 $\eta_z\colon\ \mathbb{G}_a \to A$ 是群同态。则有

$$H_c^i(Z \smallsetminus Z', \xi^*\mathcal{L}) = 0,$$

其中 $Z' \subseteq Z$ 是由满足 $\eta_z^*\mathcal{L}$ 为平凡的点$(z, y) \in Z$ 组成的闭子簇。

证明。令 $p\colon\ Z \to Z_1$ 表示自然投影。由于 $\mathcal{L}$ 具有乘法性，故 $\xi^*\mathcal{L} \simeq \eta^*\mathcal{L} \otimes p^*\zeta^*\mathcal{L}$。由投影公式可得 $Rp_!(\xi^*\mathcal{L}) \simeq Rp_!\eta^*\mathcal{L} \otimes \zeta^*\mathcal{L}$。现在只需证明，$Rp_!\eta^*\mathcal{L}$ 限制在 $Z_1 \smallsetminus p(Z')$ 上为零。令 $p_z\colon\ \{z\} \times \mathbb{G}_a \to \{z\}$ 表示 p 在 $z \in Z$上的纤维。由适当基变换，$Rp_!(\eta^*\mathcal{L})_z = Rp_{z!}(\eta_z^*\mathcal{L})$；当 $z \in Z \smallsetminus Z'$时，由 [Boy10 引理 9.4]可知其为零。□

设 $D = (D_2 \cap -D_1) \cap {}^{w^{-1}}(D_1 \cap -D_2)$。

引理 4.3. 利用上面的同构 χ，映射 $\delta : V_{D_1'}V_{D_2'} \to \mathbb{T}$ 由下式给出

$$(x_C)_C \longmapsto \sum_{C_2} {}^{\dot{w}}[x_{-C_2}, x_{C_2}],$$

其中 C_2 遍历 D 的 τ-轨道。

证明。 根据定义以及对于 $i = 1,2$ 的 $[V_{D_i}, V_{D_i}] = 0$，我们有

$$\delta((x_C)_C) = \sum_{C_1, C_2} {}^{\dot{w}}[x_{C_1}, x_{C_2}],$$

其中 C_1 和 C_2 分别遍历 $D_1 \smallsetminus D_2$ 和 D_2 的 τ-轨道，且满足 $w(C_1) \subseteq D_2$ 和 $w(C_2) \subseteq D_1 \smallsetminus D_2$。注意到除非 $C_1 = -C_2$，否则 $[x_{C_1}, x_{C_2}] = 0$，即可得证。□

命题 4.4. 我们有

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} H_c^*(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi^{-1} \boxtimes \phi] = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} H_c^*(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi^{-1} \boxtimes \phi] = \delta_{w^{-1}\psi, \phi}.$$

证明。 首先我们考虑 ϕ-权空间 $H_c^i(Y,\mathbb{Q}_\ell)[\phi]$ 的 $\{1\} \times \overline{\mathbb{T}^F}$对于$i \in \mathbb{Z}$。根据定理 4.1 我们有

$$H_c^i(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi] = H_c^i(\hat{V}_{D_1'}\hat{V}_{D_2'}, \delta^*\mathcal{L}_\phi).$$

令 C 为 Ψ 和 $u \in V_{-C}$ 的一个 τ-轨道，映射

$$\delta_u : \hat{V}_C \cong \mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbb{T}, \quad v \longmapsto [u, v]$$

是一个群同态，并且拉回 $\delta_u^*\mathcal{L}_\phi$ 非平凡当且仅当 $u=0$。根据定理 4.2 和定理 4.3，我们有

$$H_c^i(Y\smallsetminus Y',\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi]\cong H_c^i((\hat{V}_{D_1'}\hat{V}_{D_2'})\smallsetminus\hat{V}_{D_1'\smallsetminus -D}\hat{V}_{D_2'},\delta^*\mathcal{L}_\phi)=0,$$

其中 $Y'=\{(x,\ \tau)\in Y;\ x\in{}^\wedge V_{D_1'\smallsetminus -D}{}^\wedge V_{D_2'}\}={}^\wedge V_{D_1'\smallsetminus -D}{}^\wedge V_{D_2'}\times\mathbb{T}^F$。特别地，

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}H_c^*(Y,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi^{-1}\boxtimes\phi]=\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}H_c^*(Y',\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi^{-1}\boxtimes\phi].$$

由于自然投影 $Y'={}^\wedge V_{(D_1'\cup D_2')\smallsetminus -D}\times\mathbb{T}^F\to\mathbb{T}^F$ 是一个 $\mathbb{T}^F\times\mathbb{T}^F$-等变仿射空间纤维化，因此我们有

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}H_c^*(Y',\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi^{-1}\boxtimes\phi]=\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}H_c^*(\mathbb{T}^F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\psi^{-1}\boxtimes\phi]=\delta_{w^{-1}\psi,\phi}.$$

证明结束。 □

4.2. 内积计算。现在我们陈述虚 $\mathbb{K}^F$-模的内积的麦基公式

定理 4.5。我们有

$$\langle\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi),\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)\rangle_{\mathbb{K}^F}=\sharp\{w\in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F;{}^w\phi=\phi\}.$$

这里我们将 ϕ 与其限制 $\phi|_{\mathbb{T}^F}$等同。

证明。对于 $w\in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})$，我们定义

$$\Sigma_w=\{(x,x',v,\bar{v},\tau,u)\in F\mathbb{I}\times F\mathbb{I}\times\mathbb{I}\times\hat{V}_{\Psi_-\cap{}^w\Psi_-}\times\mathbb{T}\times\mathbb{I};xF(\bar{v}\dot{w}\tau)=v\bar{v}\dot{w}\tau ux'\}.$$

记 $\Sigma_w=\Sigma_w'\sqcup\Sigma_w''$，其中 Σ_w' 和 Σ_w'' 分别由条件 $\bar{v}\neq 0$和 $\bar{v}=0$ 定义。注意，$\mathbb{T}^F\times\mathbb{T}^F$ 通过以下方式作用于 Σ_w

$$(s,t):(x,x',v,\bar{v},\tau,u)\longmapsto(sxs^{-1},tx't^{-1},svs,s\bar{v}s^{-1},\dot{w}^{-1}(s)\tau t^{-1},tut^{-1}).$$

与 [Nie24命题 5 的证明中一样，5],只需证明

$$\dim H_c^*(\Sigma_w'',\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi^{-1}\boxtimes\phi]=\delta_{w,F(w)}\cdot\delta_{{}^w\phi,\phi}$$

且维数为 $H_c^*(\Sigma_w',\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi^{-1}\boxtimes\phi]=0$。

令 $H=\{(s,t)\in\mathbb{T}\times\mathbb{T};\ s^{-1}F^{-1}(s)=\dot{w}t^{-1}F^{-1}(t)\,\dot{w}^{-1}\}$，它通过以下方式作用于$\Sigma_w''$

$$(s,t):(x,x',v,\tau,u)\longmapsto(sxs^{-1},tx't^{-1},svs,\dot{w}^{-1}(s)\tau t^{-1},tut^{-1}).$$

令 H°_{red} 和 $\mathbb{T}_{\mathrm{red}}$ 分别为 H° 和 $\mathbb{T}$ 的单位连通分支的约化部分。由于 $\mathbb{I}^{\mathbb{T}_{\mathrm{red}}}={}^\wedge V_D$ 且 $D=\{\alpha\in\Psi;\ \alpha(\mathbb{T}_{\mathrm{red}})=\{1\}\}$。由此可知，只有当 $F(w)=w$ 时，$(\Sigma_w'')^{H^\circ_{\mathrm{red}}}\neq\varnothing$ 才成立，而在此情形下，我们有

$$(\Sigma_w'')^{H^\circ_{\mathrm{red}}}\cong X_{D,FD,w^{-1}}$$

作为 $\mathbb{T}^F\times\mathbb{T}^F$-簇，其中 $X_{D,FD,w^{-1}}$ 如 §4.1 所述。由定理 4.4 可知，$\dim_{\mathbb{Q}_\ell}H_c^i((\Sigma_w'')^{H^\circ_{\mathrm{red}}},\mathbb{Q}_\ell)[\phi^{-1}\boxtimes\phi]=\delta_{{}^w\phi,\phi}$。因此，$\dim H_c^*(\Sigma_w'',\mathbb{Q}_\ell)[\phi^{-1}\boxtimes\phi]=\delta_{w,F(w)}\cdot\delta_{{}^w\phi,\phi}$，正如所求。

剩下要证明 $H_c^*(\Sigma'_w,\mathbb{Q}_\ell)[\phi^{-1}\boxtimes\phi]=0$。注意到

$$\hat{V}_{\Psi_-\cap{}^w\Psi_-}=\bigoplus_{C\in(-\mathcal{C})\cap(-{}^w\mathcal{C})}\hat{V}_C.$$

对于 $\bar{v}\in V_{\Psi_-\cap{}^w\Psi_-}$ 和 $C\in(-\mathcal{C})\cap(-{}^w\mathcal{C})$，令 $\bar{v}_C\in V_C$ 满足 $\bar{v}=\sum_C\bar{v}_C$。我们在 $(-\mathcal{C})\cap(-{}^w\mathcal{C})$ 上固定一个全序 $\leqslant$。令 $\hat{V}^C_{\Psi_-\cap{}^w\Psi_-}$ 为满足 $\bar{v}_C\neq0$ 且对所有 $C'<C$ 均有 $\bar{v}_{C'}=0$ 的元素 $\bar{v}$ 所成的子集。于是有

$$\hat{V}_{\Psi_-\cap{}^w\Psi_-}\smallsetminus\{0\}=\bigsqcup_C\hat{V}^C_{\Psi_-\cap{}^w\Psi_-}.$$

上述分解诱导出一个分解

$$\Sigma'_w=\bigsqcup_C\Sigma'^{,C}_w.$$

尚需证明，对于所有 $C\in(-\mathcal{C})\cap(-{}^w\mathcal{C})$，都有 $H_c^*(\Sigma'^{,C}_w,\mathbb{Q}_\ell)[\phi^{-1}\boxtimes\phi]=0$。

令 $C\in(-\mathcal{C})\cap(-{}^w\mathcal{C})$。考虑 $\mathbb{T}^F\cong\mathbb{T}^F\times\{1\}\subseteq\mathbb{T}^F\times\mathbb{T}^F$ 在 $\Sigma'^{,C}_w$ 上的限制作用，由

$$s:(x,x',v,\bar{v},\tau,u)\longmapsto(sxs^{-1},x',svs^{-1},s\bar{v}s^{-1},w^{-1}(s)\tau,u).$$

只需证明 ϕ^{-1}-权子空间 $H_c^*(\Sigma'^{,C}_w,\mathbb{Q}_\ell)[\phi^{-1}]$ 是平凡的。令 $\bar{v}\in\hat{V}^C_{\Psi_-\cap{}^w\Psi_-}$。我们固定一个同构

$$\lambda_{\bar{v}}:\hat{V}_{-C}\xrightarrow{\sim}(\mathbb{K}^+)_C,\quad\zeta\longrightarrow\kappa(\bar{v},\zeta).$$

考虑子群

$$H=\{s\in\mathbb{T}^{r_C};s^{-1}F^{-1}(s)\in(\mathbb{K}^+)_C\}.$$

对于 $s\in H$，我们定义一个同构 $f_s:\Sigma'^{,C}_{{}^w}\to\Sigma'^{,C}_w$，定义为

$$f_s:(x,x',v,\bar{v},\tau,u)\longmapsto(x_s,x'F(\dot{(w\tau)}^{-1}\zeta),svs^{-1},s\bar{v}s^{-1},w^{-1}(s)\tau,u)$$

其中 $\zeta=\lambda_{\bar{v}}^{-1}(sF^{-1}(s)^{-1})$，使得

$$x_sF(\bar{v}\dot{w}\tau)=sv\bar{v}\dot{w}\tau ux'F(\dot{(w\tau)}^{-1}\zeta).$$

f_s 在每个子空间 $H_c^i(\Sigma'^{,C}_w,\mathbb{Q}_\ell)$ 上的诱导映射，对于每个 $s\in N_F^{F^n}((\mathbb{K}^+)_C^{F^n})\subseteq H^\circ$，都是平凡的。这里 $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant1}$，使得 $F^n(C)=C$，且 $N_F^{F^n}:\mathbb{T}^{r_C}\to\mathbb{T}^{r_C}$ 是由 $s\mapsto sF(s)\cdots F^{n-1}(s)$ 给出的映射。另一方面，我们有

$$\phi|_{N_F^{F^n}((\mathbb{K}^+)_C^{F^n})}=\phi_{i_C-1}|_{N_F^{F^n}((\mathbb{K}^+)_C^{F^n})},$$

这是非平凡的，因为 ϕ_{i_C-1} 是 (G^{i_C-1},G^{i_C})-一般的。因此，$H_c^*(\Sigma'^{,C}_w,\mathbb{Q}_\ell)[\phi^{-1}]$ 如所需为平凡的。□

5. A concentration theorem

本节中，我们沿用 [Nie24 的方法§5]，证明温和分歧情形下 Z 的“正深度部分”上同调的集中定理。这将是证明 $\mathbb{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)$ 的特征标公式的关键要素。

5.1. **Boyarchenko–Weinstein计算的一种变体**。回忆一下，自然映射 $\mathrm{Gal}(K/k) \to \mathrm{Gal}(k_f/k)$ 存在一个分裂。因此，$\mathrm{Gal}(K/k)$ 由 τ 和 Frobenius 的一个提升 F 生成，且满足 $F^f = 1$。注意，对于某个单位根 $a \in k_f$，有 $\pi^e = a\varpi$。令 $\sigma\colon \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$，$x \mapsto x^q$ 为由 F 诱导的 Frobenius映射。

令 $C \subseteq \Psi$ 为一个 τ-轨道。特别地，根据定理 3.2，$V_C \neq 0$ 且 $C \neq -C$。我们将 ${}^E T_{r_C\colon r_C}$ 与 $\mathbb{F}_q$-线性空间 $X_*(T) \otimes \mathbb{F}_q \pi^{er_C}$ 识别。对于 $\alpha \in C$，我们定义一个同构

$$\theta_\alpha : \mathbb{G}_a \longrightarrow (\mathbb{K}^+)_C, \qquad x \longmapsto \sum_{i=0}^{|C|-1} \tau^i(\alpha^\vee) \otimes \xi^{ier_C} x \pi^{er_C}.$$

令 N 为满足 $F^N(C) = C$ 的最小正整数。假设 N 为偶数且 $F^{N/2}(C) = -C$。令 $\alpha \in C$ 和 $j \in \mathbb{Z}$ 使得

$$F^{N/2} \circ \tau^j(\alpha) = -\alpha.$$

特别地，对于 $\gamma = \pm\alpha$ 和 $x \in \mathbb{F}_q$，我们有

$$F^{N/2}(\theta_\gamma(x)) = \theta_{-\gamma}(\eta\sigma^{N/2}(x)),$$

其中，η 是 $F^{N/2}(\xi^j)(F(\pi)/\pi)^{er_C}$ 在 $\mathbb{F}_q$ 中的自然像。令 $\zeta \in \mathbb{F}_q$ 使得 $\zeta\sigma^{N/2}\zeta^{-1} = \eta\sigma^{N/2} \in \mathbb{F}_q \rtimes \langle\sigma\rangle$。则对于 $i \in \mathbb{Z}$，我们有 $F^{iN}(\theta_\alpha(x)) = \theta_\alpha(\zeta\sigma^{iN}\zeta^{-1}(x))$。

由于 $F^f = 1 \in \mathrm{Gal}(K/k)$，对于每个 $x \in \mathbb{F}_{q^f}$，我们有

$$\theta_\alpha(x) = F^f(\theta_\alpha(x)) = \theta_\alpha(\zeta\sigma^f\zeta^{-1}(x)),$$

这意味着 $\zeta = \sigma^f(\zeta)$，从而得到 $\zeta \in \mathbb{F}_{q^f}$。

引理5.1。设 C、N、α 和 ζ 如上所述。则有

$$N_{K/k} \circ \alpha^\vee(K^\times_{r_C}) = (\sum_{i=0}^{N-1} F^i) \circ \theta_\alpha(\zeta\mathbb{F}_{q^N}).$$

证明。 设 $x \in \mathbb{F}_{q^f}$。我们有

$$\begin{aligned}
&N_{K/k}(\alpha^\vee \otimes x\pi^{er_C}) \\
&= (\sum_{i=0}^{f-1} F^i)(\sum_{l=0}^{e-1} \tau^l)(\alpha^\vee \otimes x\pi^{er_C}) \\
&= \frac{e}{|C|}(\sum_{i=0}^{f} F^i)(\theta_\alpha(x)) \\
&= \frac{e}{|C|}(\sum_{i=0}^{N-1} F^i)(\sum_{l=0}^{\frac{f}{N}-1})(F^{lN}(\theta_\alpha(x))) \\
&= \frac{e}{|C|}(\sum_{i=0}^{N-1} F^i)(\sum_{l=0}^{\frac{f}{N}-1} \theta_\alpha(\zeta\sigma^{lN}(\zeta^{-1}x))) \\
&= \frac{e}{|C|}(\sum_{i=0}^{N-1} F^i)(\theta_\alpha(\zeta \operatorname{tr}_{\mathbb{F}_{q^f}/\mathbb{F}_{q^N}}(\zeta^{-1}x))).
\end{aligned}$$

由于 $\zeta \in \mathbb{F}_{q^f}$ 且 $\frac{e}{|C|}$ 在$\mathbb{F}_q$中可逆，我们推得

$$N_{K/k}(\alpha^\vee \otimes \mathbb{F}_{q^f} \pi^{er_C}) = (\sum_{i=0}^{N-1} F^i) \circ \theta_\alpha(\zeta \operatorname{tr}_{\mathbb{F}_{q^f}/\mathbb{F}_{q^N}}(\mathbb{F}_{q^f})) = (\sum_{i=0}^{N-1} F^i) \circ \theta_\alpha(\zeta \mathbb{F}_{q^N}).$$

因此结论成立。 □

设 H 是特征为 p的有限域 $\mathbb{F}_Q$上的连通交换代数群。对于任意特征 $\chi: H(\mathbb{F}_Q) \to \mathbb{Q}_\ell^\times$，记 $\mathcal{L}_\chi$ 为其在 H 上的相应秩一局部系统。

设 $\phi_+ = \phi|_{(\mathbb{T}^{0+})^F}$。

命题 5.2. 设 C、 N、 α 和 ζ 如上所述。则有

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} H_c^i(\mathbb{G}_a, \iota^*\mathcal{L}_{\phi_+}) = \begin{cases} q^{N/2} & if\ i = 1; \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

这里 ι： $\mathbb{G}_a \to \mathbb{T}_+$ 由 $x \mapsto \theta_\alpha(\zeta x^{q^{N/2}+1})$ 给出。

证明。 令 ϑ： $\mathbb{G}_a \to \mathbb{T}^{0+}$ 由 $x \mapsto \theta_\alpha(\zeta x)$ 给出。注意，对于 $x \in \mathbb{F}_q$，有 $F^N\theta_\alpha(x) = \theta_\alpha(\zeta\sigma^N\zeta^{-1}x)$。因此， ϑ 是定义在 $\mathbb{F}_{q^N}$上的代数群同态。考虑以下特征

$$\psi : \mathbb{F}_{q^N} \xrightarrow{\vartheta} (\mathbb{T}^{0+})^{F^n} \xrightarrow{N_F^{F^N}} (\mathbb{T}^{0+})^F \xrightarrow{\phi_+} \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times,$$

其中 $N_F^{F^N}$： $\mathbb{T}^{0+} \to \mathbb{T}^{0+}$ 由 $x \mapsto xF(x)\cdots F^{N-1}(x)$ 给出。于是我们有

$$\mathcal{L}_\psi \cong \vartheta^*\mathcal{L}_{\phi_+ \circ N_F^{F^N}} \cong \vartheta^*\mathcal{L}_{\phi_+},$$

其中第二个同构是由以下结论得到的 $\mathcal{L}_{\phi_+\circ N_F^{F^N}} \cong \mathcal{L}_{\phi_+}$ 根据 [IN25c，引理 5。8]。

根据定理 5.1，我们令

$$\mathrm{Im}\,\psi = \phi_+\circ(\sum_{i=1}^{N-1} F^i)(\mathrm{Im}\,\vartheta) = \phi_{i_C-1}\circ(\sum_{i=1}^{N-1} F^i)(\mathrm{Im}\,\vartheta) = \phi_{i_C-1}\circ N_{K/k}\circ\alpha^\vee(K_{r_C}^\times) \neq \{1\},$$

其中最后一个不等式是因为 ϕ_{i_C-1} 是 (G^{i_C-1}, G^{i_C})-一般的。因此，ψ 非平凡。另一方面，对于 $x \in \mathbb{F}_{q^{N/2}}$，我们有

$$\begin{aligned} N_F^{F^N}\vartheta(x) &= N_F^{F^N}\theta_\alpha(\zeta x) \\ &= (\sum_{i=0}^{N/2-1} F^i)(\theta_\alpha(\zeta x) + F^{N/2}\theta_\alpha(\zeta x)) \\ &= (\sum_{i=0}^{N/2-1} F^i)(\theta_\alpha(\zeta x) + \theta_{-\alpha}(\zeta\sigma^{N/2}(x))) \\ &= (\sum_{i=0}^{N/2-1} F^i)(\theta_\alpha(\zeta x) + \theta_{-\alpha}(\zeta x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

特别地，ψ 在 $\mathbb{F}_{q^{N/2}}$上是平凡的。设 $f\colon \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ 由 $x \mapsto x^{q^{N/2}+1}$给出。我们有 $\iota = \vartheta\circ f$，因此

$$\iota^*\mathcal{L}_{\phi_+} \cong f^*\vartheta^*\mathcal{L}_{\phi_+} \cong f^*\mathcal{L}_\psi.$$

那么，该结论由 [BW16，命题 6.6。1]。 □

5.2. **集中性结果**。设 $s \in \mathbb{K}$。我们用 $\mathrm{Ad}(s)\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$表示由 $x \mapsto sxs^{-1}$诱导的伴随作用。设 H 为$\widetilde{\ }$的商群，其中$\widetilde{\ }$是 $\mathbb{K}$ 的两个由 $\mathrm{Ad}(s)$保持的闭子群。我们用 H^s 表示 H中 $\mathrm{Ad}(s)$-不动点构成的群，并用 $H^{s,\circ}$ 表示 H^s的单位连通分支。

我们将 T 的元素的自然像记为 $t \in \bar{T}^F$。令 $t \in \bar{T}^F$。我们设定$\Phi^t = \{\gamma \in \Phi;\ \gamma(\hat{t}) = 1 \in \pi\mathcal{O}_E\}$，其中 $\hat{t} \in T^F$ 是 t 的任意一个提升。定义

$$d(\phi, t) = |(\Psi \cap \Phi^t)/\mathrm{Gal}(E/k)|,$$

其中 $\Psi \subseteq \Phi$ 与 §3.2 中相同。令 κ_t 表示与一般数据 $\Lambda = (G^i, \phi_i)_{i=0}^d$ 相关联的 $\widetilde{\mathbb{K}}^t$ 的韦伊–海森堡表示，其意义见 Yu01，§4]，；另见 Fin21a，§2]。若 $t = 1$，我们记 $d(\phi, t) = d(\phi)$ 和 $\kappa_t = \kappa$。

命题 5.3。设 $t \in \mathbb{T}^F$。则存在一个整数 $n_{\phi,t}$ 使得

$$H_c^i(Z \cap \mathbb{H}^t, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi_+] \neq 0 \Longleftrightarrow i = n_{\phi,t}.$$

此外，$\dim H_c^{n_{\phi,t}}(Z \cap \mathbb{H}^t, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi_+] = |(V^t)^F|^{\frac{1}{2}}$ 以及 $n_{\phi,t} \equiv d(\phi, t)$ 模 2。

证明。 其证明方法与 [LN25，定理 4 相同。1]使用定理5.2即可。

□

6. A character formula for $\hat{\mathcal{R}}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$

沿用前几节中的记号。本节的主要目的是按照 $\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$ 和 $\hat{\mathcal{R}}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$ 中所采用的方法，建立 [DL76]和 [CO25]的特征标公式。

首先，我们需要两个辅助引理。

引理 6.1。 对于 $t \in \bar{T}^F$，共轭作用 $\mathrm{Ad}(t)$ 在 $\mathbb{K}$ 上的作用是半单的，并且其有限阶与 $\mathbb{F}_q$的特征互素。

证明。 该结论由以下事实得出： $\mathbb{K}$由 $\mathbb{T}$生成，并且由 $\mathbb{F}_q$ 上的一维加法子群生成；这些子群在 $\mathrm{Ad}(s)$作用下保持不变。□

引理 6.2. 设 $s \in \mathbb{K}^F\bar{T}^F$和 $x \in \bar{T}^F$。映射 $(h, y) \mapsto hy$ 诱导一个双射

$$\theta : \{h \in \mathbb{K}^F; shx = h\} \times_{(\mathbb{K}^{x,\circ})^F} (Z \cap \mathbb{K}^{x,\circ}) \cong \{g \in Z; sgx = g\}.$$

证明。 首先注意，映射 θ 是良定义的。若 $\theta(h, y) = \theta(h', y')$，则 $h'^{-1}h = y'y^{-1} \in (\mathbb{K}^{x,\circ})^F$，因此 θ 是单射。接下来只需证明 θ 是满射。

取 $g \in Z$ 使得 $sgx = g$。则 $g^{-1}F(g) \in F\mathbb{I}$ 且

$$g^{-1}F(g) = x^{-1}(sg)^{-1}F(sg)F(x) = s^{-1}g^{-1}F(g)s,$$

这意味着 $g^{-1}F(g) \in (F\mathbb{I})^x = F\mathbb{I}^x$。

根据定理 6.1， $x \in T$ 在 $\mathbb{K}$ 上的共轭作用是半单的，这意味着 $\mathbb{I}^x$ 是连通的（注意到 x 正规化幺幂群 $\mathbb{I}$，由此可从 [Bor91，命题 9.3]推出），因此 $F\mathbb{I}^x \subseteq \mathbb{K}^{x,\circ}$。根据 Lang 定理，存在 $y \in \mathbb{K}^{x,\circ}$ 使得 $y^{-1}F(y) = g^{-1}F(g) \in F\mathbb{I}$。令 $h = gy^{-1}$。则有 $h \in \mathbb{K}^F$, $g = hy$ 且 $shx = sgy^{-1}x = sgxy^{-1} = gy^{-1} = h$，如所需。因此 θ 是满射，证明完成。□

引理 6.3. 设 $g \in \mathbb{K}^F\bar{T}^F$。则存在 $z \in \bar{T}^F$、 $u \in \mathbb{K}^F$ 和 $s \in \mathbb{K}^F\bar{T}^F$，使得 $g = su = us$、$u \in \mathbb{K}$ 是幺幂的，且 $(sz^{-1}) \rtimes \mathrm{Ad}(z) \in \mathbb{K}^F \rtimes \langle \mathrm{Ad}(z) \rangle$ 的阶有限且与 p 互素。

此外，若 $g \in \mathbb{K}^F$，我们可以取 $z = 1$，且 $g = su = us$ 是 $\mathbb{K}$ 中的*Jordan*分解。

证明。假设 $g = g'z$，其中 $g \in \mathbb{K}^F$ 且 $z \in \bar{T}^F$。由定理 6.1，半直积 $\mathbb{K} \rtimes \langle \mathrm{Ad}(z) \rangle$ 是一个线性代数群。令 $x = g' \rtimes \mathrm{Ad}(z) \in \mathbb{K} \rtimes \langle \mathrm{Ad}(z) \rangle$，并令 $x = x_u x_s$ 为通常的 Jordan 分解，其中 x_u 为幺幂部分， x_s 为半单部分。由于 $z \in \bar{T}^F$， $\mathbb{K}$ 的 Frobenius 自同构可平凡地扩张为 $\mathbb{K} \rtimes \langle \mathrm{Ad}(z) \rangle$ 的一个自同构。由 Jordan 分解的唯一性可知， $x_u, x_s \in \mathbb{K}^F \rtimes \langle \mathrm{Ad}(z) \rangle$。由于 x_u 的阶是素数 p 的幂，根据定理 6.1， x_u 在自然投影 $\mathbb{K} \rtimes \langle \mathrm{Ad}(z) \rangle \to \langle \mathrm{Ad}(z) \rangle$ 下的像是平凡的，

这意味着 $x_u \in \mathbb{K}^F$。令 $u = x_u$ 和 $s = \delta z$，其中 $\delta \in \mathbb{K}^F$ 满足 $x_s = \delta \rtimes \mathrm{Ad}(z)$。注意， x_s 的阶与 p 互素。因此，元素 z、 u 和 s 满足我们的要求。□

令 $\mathbb{T}_{\mathrm{red}}$ 为 $\mathbb{T}$的约化部分。我们有 Jordan 分解$\mathbb{T}^F \cong \mathbb{T}^F_{\mathrm{red}} \times (\mathbb{T}^{0+})^F$。回忆 $\phi_+ = \phi|_{(\mathbb{T}^{0+})^F}$，并回忆虚$\bar{T}^F\mathbb{K}^F$模 $\hat{\mathcal{R}}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi) = H^*_c(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi] \otimes \phi$在§3.4中定义。

与 [DL76、Che18、CO25], 类似，我们有如下特征标公式。

命题 6.4. 记号同定理*6.3*。假设 $p \nmid |W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F|$ 若$g \in \mathbb{K}^F\bar{T}^F \setminus \mathbb{K}^F$。则

$$\hat{\mathcal{R}}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)(g) = \frac{1}{|\mathbb{T}^F_{\mathrm{red}}|} \sum_{h \in \mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,\ {}^hs \in \bar{T}} \phi({}^hs)\,\mathrm{tr}({}^hu; H^*_c(Z \cap \mathbb{K}^{{}^hs,\circ}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi_+]).$$

证明。 根据定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{R}}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)(g)\\
&= \phi(z)\,\mathrm{tr}((gz^{-1}) \rtimes \mathrm{Ad}(z); H^*_c(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi])\\
&= \phi(z)\frac{1}{|\mathbb{T}^F|}\sum_{t \in \mathbb{T}^F} \phi(t^{-1})\,\mathrm{tr}((gz^{-1}) \rtimes \mathrm{Ad}(z), t); H^*_c(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))\\
&= \phi(z)\frac{1}{|\mathbb{T}^F|}\sum_{t \in \mathbb{T}^F} \phi(t)^{-1}\,\mathrm{tr}((u, t''); H^*_c(Z^{((sz^{-1}) \rtimes \mathrm{Ad}(z), t')}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)),
\end{aligned}$$

其中 $t = t't''$ 是 Jordan 分解，满足 $t' \in \mathbb{T}_{\mathrm{red}}$ 和 $t'' \in (\mathbb{T}^{0+})^F$，且

$$Z^{((sz^{-1}) \rtimes \mathrm{Ad}(z), t')} = \{g \in Z; sz^{-1}(zgz^{-1})t' = sgz^{-1}t' = g\}$$

是 Z 中由 $((sz^{-1}) \rtimes \mathrm{Ad}(z)\ t')$ 的作用所固定的点集。根据定理 6.2,

$$Z^{((sz^{-1}) \rtimes \mathrm{Ad}(z), t')} = \bigsqcup_{h \in \mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F, {}^hs = zt'^{-1}} h^{-1}(Z \cap \mathbb{K}^{{}^hs,\circ}).$$

若 $g \in \mathbb{K}^F$和 $g = su$ 是Jordan分解，则 ${}^hu \in \mathbb{K}^{{}^hs,\circ}$，因为 $\mathbb{K}$是连通的。否则，由于 $p \nmid |W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F|$ （根据假设），且u 的阶是 素数 p 的幂，我们仍有 ${}^hu \in \mathbb{K}^{{}^hs,\circ}$。因此，

$$\mathrm{tr}((u, t''); H^*_c(Z^{((sz^{-1}) \rtimes \mathrm{Ad}(z), t')}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = \sum_{h \in \mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F, {}^hs = zt'^{-1}} \mathrm{tr}(({}^hu, t''); H^*_c(Z \cap \mathbb{K}^{{}^hs,\circ}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)).$$

代入这个等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{R}}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)(g)\\
&=\phi(z)\frac{1}{|\mathbb{T}^F|}\sum_{t'\in\mathbb{T}^F_{\mathrm{red}}}\sum_{t''\in\mathbb{T}^F_{\mathrm{unip}}}\phi(t't'')^{-1}\sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,\,{}^hs=zt'^{-1}}\mathrm{tr}(({}^hu,t'');H_c^*(Z\cap\mathbb{K}^{{}^hs,\circ},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))\\
&=\phi(z)\frac{1}{|\mathbb{T}^F|}\sum_{t''\in(\mathbb{T}_{\mathrm{unip}})^F}\phi(t'')^{-1}\phi(z^{-1}{}^hs)\sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,\,{}^hs\in\bar{T}}\mathrm{tr}(({}^hu,t'');H_c^*(Z\cap\mathbb{K}^{{}^hs,\circ},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))\\
&=\frac{1}{|\mathbb{T}^F_{\mathrm{red}}|}\sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,\,{}^hs\in\bar{T}}\phi({}^hs)\,\mathrm{tr}({}^hu;H_c^*(Z\cap\mathbb{K}^{{}^hs,\circ},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi_+]).
\end{aligned}$$

证明完成。 □

设 Φ_{L_0} 为 L_0 中 T_0 的根集。若对所有 $\alpha\in\Phi_{L_0}$，$\alpha(s)\neq 1$，则称 $s\in\mathbb{T}^F_{\mathrm{red}}$ 对 L_0 正则。

推论 6.5。设 $s\in\mathbb{T}^F_{\mathrm{red}}$ 对 L_0 正则。那么

$$\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)(s)=(-1)^{d(\phi,s)}|(V^s)^F|^{\frac{1}{2}}\sum_{w\in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F}\phi({}^ws).$$

证明。由于 $s\in\mathbb{T}^F_{\mathrm{red}}$ 对 L_0 正则，我们有 $\mathbb{K}^{s,\circ}=\mathbb{TH}^s$ 以及

$$\{h\in\mathbb{K}/\mathbb{K}^{s,\circ};{}^hs\in\bar{T}\}\cong\{h\in\mathbb{L}/\mathbb{L}^{s,\circ};{}^hs\in\bar{T}\}\cong W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F.$$

应用定理 6.4，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)(s)&=\frac{1}{|\mathbb{T}^F_{\mathrm{red}}|}\sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,\ {}^hs\in\mathbb{T}}\phi({}^hs)\,\mathrm{tr}(1;H_c^*(Z\cap\mathbb{K}^{{}^hs,\circ},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi_+])\\
&=\frac{1}{|\mathbb{T}^F_{\mathrm{red}}|}\sum_{w\in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F}\phi({}^ws)\,\mathrm{tr}(1;H_c^*(Z\cap\mathbb{K}^{{}^ws,\circ},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi_+])\\
&=\frac{1}{|\mathbb{T}^F_{\mathrm{red}}|}\sum_{w\in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F}\phi({}^ws)\,\dim H_c^*(\bigsqcup_{\gamma\in\mathbb{T}^F_{\mathrm{red}}}\gamma(Z\cap\mathbb{H}^{{}^ws}),\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi_+]\\
&=\sum_{w\in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F}\phi({}^ws)\,\dim H_c^*(Z\cap\mathbb{H}^{{}^ws},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi_+]\\
&=\sum_{w\in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F}\phi({}^ws)(-1)^{d(\phi,{}^ws)}|(V^{{}^ws})^F|^{\frac{1}{2}}\\
&=(-1)^{d(\phi,s)}|(V^s)^F|^{\frac{1}{2}}\sum_{w\in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F}\phi({}^ws),
\end{aligned}$$

其中第三个等式由此得出

$$Z\cap\mathbb{K}^{{}^ws,\circ}=\bigsqcup_{\gamma\in\mathbb{T}^F_{\mathrm{red}}}\gamma(Z\cap\mathbb{H}^{{}^ws}),$$

第五个等式由定理 5.3得出，最后一个等式由此得出 $d(\phi,s)=d(\phi,{}^w s)$ 以及 $|(V^s)^F|=|(V^{{}^w s})^F|$。证明完毕。□

7. The module $\hat{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi^\dagger)$

本节中，我们介绍并研究另一个 $\bar{T}^F\mathbb{K}^F$-模 $\hat{}R^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi^\dagger)$，它是 $\hat{}\mathcal{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)$ 的对应物。

考虑以下 $\bar{T}^F\mathbb{K}^F$-模

$$\hat{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)=\kappa|_{\bar{T}^F\mathbb{K}^F}\otimes\hat{R}^{L_0}_{T_0}(\phi_{-1}),$$

其中，$\hat{}R^{L_0}_{T_0}(\phi_{-1})$ 是$\bar{T}^F\mathbb{K}^F$的扩展经典 Deligne–Lusztig 表示，构造见 [Kal19, §3.4。4]。

根据 [CO23], let

$$\varepsilon_{\phi_+}=\prod_{i=1}^{d}\epsilon_{\sharp,\mathbf{x}}^{G^i/G^{i-1}},$$

其中 $\epsilon_\sharp^{G^i/G^{i-1}}$，$\mathbf{x}$ 表示 $\bar{T}^F$ 在 [FKS23 定义 3. 中的二次特征1]，它通过 $T^F/T^F_{\mathbf{x}0+}$ 因子化。令 $\phi^\dagger=\varepsilon_{\phi_+}\cdot\phi$。于是 $(\phi^\dagger)^\dagger=\phi$。

令 $\phi_{\geqslant 0}=\prod_{i=0}^{d}\phi_i$。以下结果实质上已在 [CO25 命题 7.4] 中证明。

命题 7.1。采用定理 *6.3* 中的记号，并假设 $s\in\bar{T}^F$。则

$$\kappa(g)=(-1)^{d(\phi)-d(\phi,s)}\kappa_s(u)\varepsilon_{\phi_+}(s)\phi_{\geqslant 0}(s).$$

特别地，

$$\kappa(s)=(-1)^{d(\phi)-d(\phi,s)}|(V^s)^F|\varepsilon_{\phi_+}(s)\phi_{\geqslant 0}(s).$$

引理 7.2。设 $s\in\mathbb{K}\bar{T}^F$，使得作用 $\mathrm{Ad}(s)$ 在 $\mathbb{K}$ 上的阶与 p互素。则自然商映射 $\pi:\mathbb{K}\to L_0$ 诱导一个双射

$$\alpha:\{h\in\mathbb{K}/\mathbb{K}^{s,\circ};{}^h s\in\mathbb{T}\bar{T}^F\}\cong\{x\in L_0/L_0^{s,\circ};{}^x\pi(s)\in T^F/T^F_{\mathbf{x},0+}\}.$$

证明。首先证明 α 是单射。可以假设 $s\in\mathbb{T}\bar{T}^F$。于是自然投影 $\mathbb{L}^{s,\circ}\to L^{s,\circ}$ 是满射。设 $h\in\mathbb{K}$ 满足 ${}^h s\in\mathbb{T}\bar{T}^F$ 且 $\pi(h)\in L^{s,\circ}$。我们需要证明 $h\in\mathbb{K}^{s,\circ}$。设 $h'\in\mathbb{L}^{s,\circ}$ 是 $\pi(h)$ 在该投影下的一个提升。将 h 替换为 hh'^{-1}后，可以假设 $h\in\ker\pi$，即 $h\in\mathbb{H}$。于是条件 ${}^h s\in\bar{T}$ 蕴含$h\in\mathbb{H}^s=\mathbb{H}^{s,\circ}$。因此 α 是单射。

现在我们证明 α 是满射。我们不妨假设 $s\in\mathbb{H}\bar{T}^F$和 $x=1\in L_0$。写作 $s=\delta t$，其中 $\delta\in\mathbb{H}$ 且 $t\in\mathbb{T}\bar{T}^F$。由于 $\mathrm{Ad}(t)$ 在 $\mathbb{H}$ 上的作用是半单的，且 $[\mathbb{H},\mathbb{H}]$ 位于 $\mathbb{H}$的中心，通过将 s 替换为一个适当的 $\mathbb{H}$-共轭元，我们不妨假设 $s=\delta t=t\delta$。假设$\delta\notin\mathbb{T}$。令 N 为 $\mathrm{Ad}(s)$ 的阶。我们有 $s^N=\delta^N t^N$。由假设，$p\nmid N$，因此 $\delta^N\notin\mathbb{T}$。于是，$\mathrm{Ad}(\delta^N t^N)=\mathrm{Ad}(s^N)=\mathrm{Ad}(s)^N$ 在 $\mathbb{H}$ 上的作用非平凡，这就产生了矛盾。因此，$\delta\in\mathbb{T}$，且 α 如所求为满射。□

我们有如下特征标公式。

命题 7.3。 设记号与定理*6.3*中的相同。则

$$\hat{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi^{\dagger})(g)=(-1)^{d(\phi)}\sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,{}^h s\in\bar{T}^F}(-1)^{d(\phi,{}^h s)}Q_{{}^h s,\phi_+}({}^h u)\phi({}^h s).$$

证明。 根据定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\hat{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi^{\dagger})(g)\\
&=\kappa(g)\hat{R}_{T_0}^{L_0}(\phi_{-1}^{\dagger})(g)\\
&=\kappa(g)\sum_{x\in L_0^F/(L_0^{s,\circ})^F,{}^x\pi(s)\in T^F/T_{\mathbf{x},0+}^F}\phi_{-1}^{\dagger}({}^x s)Q_{L_0^{s,\circ},T_0}({}^x u)\\
&=\sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,{}^h s\in\bar{T}^F}\kappa({}^h g)\phi_{-1}^{\dagger}({}^h s)Q_{L_0^{{}^h s,\circ},T_0}({}^h u)\\
&=\sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,{}^h s\in\bar{T}^F}(-1)^{d(\phi)-d(\phi,{}^h s)}\kappa_{{}^h s}({}^h u)\phi_{\geqslant 0}({}^h s)\varepsilon_{\phi_+}({}^h s)\phi_{-1}^{\dagger}({}^h s)Q_{L_0^{{}^h s,\circ},T_0}({}^h u)\\
&=(-1)^{d(\phi)}\sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,{}^h s\in\bar{T}^F}(-1)^{d(\phi,{}^h s)}\kappa_{{}^h s}({}^h u)Q_{L_0^{{}^h s,\circ},T_0}({}^h u)\phi({}^h s)\\
&=(-1)^{d(\phi)}\sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,{}^h s\in\bar{T}^F}(-1)^{d(\phi,{}^h s)}Q_{{}^h s,\phi_+}({}^h u)\phi({}^h s),
\end{aligned}$$

其中，第三个等号由定理 7.2得出，第四个等号由定理7.1得出。 □

8. 格林函数

本节将介绍与 $\mathbb{K}^F$-模$\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)$ 和 $R_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi$相关的格林函数，并基于 定理 1.3 的策略证明 [CO25]。

对于 $t\in\bar{T}^F$，我们考虑以下虚拟 $(\mathbb{K}^{t,\circ})^F$-模

$$\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}^{t,\circ}}(\phi)=H_c^*(Z\cap\mathbb{K}^{t,\circ},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi],\quad R_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}^{t,\circ}}(\phi)=\kappa_t|_{(\mathbb{K}^{t,\circ})^F}\otimes R_{T_0}^{L_0^{t,\circ}}(\phi_{-1}),$$

其中 $R^{L^{t,\circ}_0}_{T_0}(\phi_{-1})$ 表示与对 $(L^{t,\circ}_0)^F$ 相关联的 $(T_0,\ \phi)$ 的经典德利涅–卢斯蒂格表示。遵循 [DL76，§4] 和 [CO25，§6-7], 我们对 $t\in\bar{T}^F$ 考虑以下深层格林函数

$$\mathcal{Q}_{t,\phi_+}=\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}^{t,\circ}}(\phi)|_{(\mathbb{K}^{t,\circ}_{\mathrm{unip}})^F}\text{ and }Q_{t,\phi_+}=R_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}^{t,\circ}}(\phi)|_{(\mathbb{K}^{t,\circ}_{\mathrm{unip}})^F}.$$

这里 $\mathbb{K}^{t,\circ}$幺幂 表示 $\mathbb{K}^{t,\circ}$中幺幂元的集合。若 $t=1$，则记 $\mathcal{Q}_{t,\ \phi_+}=\mathcal{Q}_{\phi_+}$ 和 $Q_{t,\ \phi_+}=Q_{\phi_+}$。 根据定义，

$$Q_{t,\phi_+}=\kappa_t|_{(\mathbb{K}^{t,\circ}_{\mathrm{unip}})^F}\cdot Q_{L_0^{t,\circ},T_0}.$$

此处 $Q_{L^{t,\circ}_0,\ T_0}$ 表示按照 $L^{t,\circ}_0$， T_0的定义，与配对 ([DL76]) 相关联的经典格林函数。

命题 8.1。 $\mathcal{Q}_{\phi_+}$ 和 Q_{ϕ_+} 都只依赖于 ϕ的正深度部分 ϕ_+ 。

证明。 令 $u \in \mathbb{K}^F_{\rm unip}$。由定理 6.4 可得

$$\mathcal{Q}_{\phi_+}(u) = \mathcal{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)(u) = \frac{1}{|\mathbb{T}^F_{\rm red}|}\,\mathrm{tr}(u; H^*_c(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi_+]),$$

它只取决于 ϕ_+ ，如所需。另一结论由经典格林函数 $R^{L_0}_{T_0}(\phi_{-1})|_{(L_0)^F_{\rm unip}}$ 不依赖于 ϕ_{-1} 这一事实以及[DL76，定理 42]得出。 □

定理 8.2。 采用与定理 *6.4*相同的记号和假设，则

$$\hat{\mathcal{R}}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)(g) = \sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,\ {}^hs\in\bar{T}^F} \phi({}^hs)\mathcal{Q}_{{}^hs,\phi_+}({}^hu).$$

证明。 应用定理6.4 可得

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{R}}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)(g) &= \sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,\ {}^hs\in\mathbb{T}} \phi({}^hs)\frac{1}{|\mathbb{T}^F_{\rm red}|}\,\mathrm{tr}({}^hu; H^*_c(Z\cap\mathbb{K}^{{}^hs,\circ}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi_+])\\ &= \sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,\ {}^hs\in\mathbb{T}} \phi({}^hs)\,\mathrm{tr}({}^hu; H^*_c(Z\cap\mathbb{K}^{{}^hs,\circ}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi])\\ &= \sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,\ {}^hs\in\mathbb{T}} \phi({}^hs)\mathcal{Q}_{{}^hs,\phi_+}({}^hu).\end{aligned}$$

证明完毕。 □

我们称 ϕ 对 L_0 是正则的，如果 $\phi|_{\mathbb{T}^F}$ 在 $W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F \cong W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F$ 中的稳定子是平凡的。

命题 8.3。若 ϕ 对 L_0是正则的，则存在一个不可约L^F_0-模 ρ ，使得

$$\pm\mathcal{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi) \cong \kappa\otimes\rho.$$

特别地， $\pm\mathcal{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)$ 是一个不可约的 $\mathbb{K}^F$-模。

证明。由定理4.5， $\pm\mathcal{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)$ 是一个不可约的 $\mathbb{K}^F$-模。根据构造，$(\mathbb{K}^+)^F \cong (\mathbb{T}^{0+})^F$ 属于 $\mathbb{K}$ 的中心，因此通过特征 $\pm\mathcal{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)$ 作用于 ϕ。因此，限制表示 $\pm\mathcal{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)|_{\mathbb{H}^F}$ 是与 $\kappa|_{\mathbb{H}^F}$同构的海森堡表示之和。特别地，

$$\hom_{\mathbb{K}^F}(\mathrm{ind}^{\mathbb{K}^F}_{\mathbb{H}^F}\kappa|_{\mathbb{H}^F}, \pm\mathcal{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)) = \hom_{\mathbb{H}^F}(\kappa|_{\mathbb{H}^F}, \pm\mathcal{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)|_{\mathbb{H}^F}) \neq 0.$$

由投影公式，$\mathrm{ind}^{\mathbb{K}^F}_{\mathbb{H}^F}\kappa|_{\mathbb{H}^F} \cong \kappa\otimes\mathrm{ind}^{\mathbb{K}^F}_{\mathbb{H}^F}1$ ，因此它是形如 $\kappa\otimes\rho$ 的 $\mathbb{K}^F$-模的直和，其中 ρ 遍历 $\mathrm{ind}^{\mathbb{K}^F}_{\mathbb{H}^F}1$ 的不可约直和项（计重数）。结论随即由 $\pm\mathcal{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)$ 是一个不可约 $\mathbb{K}^F$-模得出。 □

命题 8.4。 假设 q 足够大。那么 $\mathcal{Q}_{t,\ \phi_+} = (-1)^{d(\phi,t)}Q_{t,\ \phi_+}$对 $t\in\bar{T}^F$成立。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $t=1$。由于 q 足够大，存在一个正则特征 $\psi:\ T^F\to\mathbb{Q}_\ell^\times$ 使得 $\psi_+=\phi_{+\circ}$。根据定理 8.1，用 ψ 替换 ϕ后，我们还可以进一步假设 ϕ是正则的。

根据定理 8.3，存在一个不可约 L_0^F-模 ρ 使得 $\pm\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)\cong\kappa\otimes\rho$。令 $s\in\mathbb{T}^F$，其对于 L_0是正则的。根据定理 6.5 和定理 7.3，我们有

$$\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)(s)=(-1)^{d(\phi,s)}|(V^s)^F|^{\frac{1}{2}}\sum_{w\in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F}\phi({}^ws);$$
$$(\kappa\otimes\rho)(s)=(-1)^{d(\phi)-d(\phi,s)}|(V^s)^F|^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\phi_+}(s)\phi_{\geqslant 0}(s)\rho(s).$$

由于 $\phi=\phi_{-1}\phi_{\geqslant 0}$ 且 $\pm\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)\cong\kappa\otimes\rho$，我们推得

$$\pm\rho(s)=\sum_{w\in W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F}\phi_{-1}^\dagger({}^ws)=\sum_{w\in W_{L_0}(T_0)^F}\phi_{-1}^\dagger({}^ws)=R_{T_0}^{L_0}(\phi_{-1}^\dagger)(s).$$

另一方面，由于 ϕ 是正则的，因此 ϕ_{-1} 和 $\phi_{-1}^\dagger$也都是正则的。因此 $\pm R_{T_0}^{L_0}(\phi_{-1}^\dagger)$ 是不可约的。由于 q 足够大，由 [CO25，定理 3.2]可知 $\rho=\pm R_{T_0}^{L_0}(\phi_{-1}^\dagger)$，因此

$$\pm\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)=\kappa\otimes R_{T_0}^{L_0}(\phi_{-1}^\dagger)=R_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi^\dagger).$$

通过比较两边的迹，我们推得 $\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)=(-1)^{d(\phi)}R_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi^\dagger)$，如所需。□

定理 8.5。 假设 q 充分大。那么我们有

$$\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)=(-1)^{d(\phi)}R_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi^\dagger).$$

此外，若 $p\nmid|W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})^F|$，则 $\hat{}\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)=(-1)^{d(\phi)}\hat{}R_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi^\dagger)$。

证明。 我们只证明第一个结论。第二个结论的证明方法相同。记号沿用定理6.4中的记号。结合定理7.3、定理8.2 和定理 8.4 ，我们有

$$\begin{aligned}R_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi^\dagger)(g)&=(-1)^{d(\phi)}\sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,\,{}^hs\in\mathbb{T}^F}(-1)^{d(\phi,{}^hs)}Q_{{}^hs,\phi_+}({}^hu)\phi({}^hs)\\&=(-1)^{d(\phi)}\sum_{h\in\mathbb{K}^F/(\mathbb{K}^{s,\circ})^F,\,{}^hs\in\mathbb{T}}\mathcal{Q}_{{}^hs,\phi_+}({}^hu)\phi({}^hs)\\&=(-1)^{d(\phi)}\mathcal{R}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{K}}(\phi)(g).\end{aligned}$$

证明结束。 □

8.1. **正则超尖点表示**。 依据 [Kal19，§3.7],我们进一步假设 $(T,\ \phi)$ 是一个温和椭圆正则对，并令 $\pi_{(T,\phi)}$表示 Kaletha 与 $(T,\ \phi)$ 相关联的正则超尖点表示。

推论 8.6。 假设 $p \nmid |W_{\mathbb{L}}(\mathbb{T})|$ 且 q 充分大。那么$(-1)^{d(\phi)+r_L-r_T}\hat{\mathcal{R}}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)$ 是一个不可约的 $\mathcal{K}^F_\phi T^F$-模，并且

$$\pi_{(T,\phi)} \cong c\text{-ind}^{G^F}_{\mathcal{K}^F_\Lambda T^F}(-1)^{d(\phi)+r_L-r_T}\hat{\mathcal{R}}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi^\dagger).$$

这里， r_L 和 r_T 分别表示 L和 T 的分裂秩。

证明。 注意，$(-1)^{r_L-r_T}\hat{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)$ 是一个不可约 $\mathcal{K}^F_\Lambda T^F$-模。根据 [CO23，引理 3，10] 我们有

$$\pi_{(T,\phi)} \cong \text{c-ind}^{G^F}_{\mathcal{K}^F_\Lambda T^F}(-1)^{r_L-r_T}\hat{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi).$$

注意，$(\phi^\dagger)^\dagger = \phi$ 和 $d(\phi) = d(\phi^\dagger)$。由定理 8.5 知，$\hat{\mathcal{R}}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi^\dagger) = (-1)^{d(\phi)}\hat{R}^{\mathbb{K}}_{\mathbb{T}}(\phi)$。□

9. Supercuspidal representations

本节中，我们将证明，在对 p和 q作出温和假设的条件下， G^F 的所有不可约超尖点表示都可以由我们的簇的上同调实现。

首先回顾，Yu 数据是一个三元组 $\Sigma = (\Lambda, \mathbf{x}\ \widetilde{\rho})$，满足

- $\Lambda = (G^i, \phi_i, r_i)_{i=0}^d$是 §§2.4中所述的一般数据；
- $Z(G^0)/Z(G)$ 是各向异性的；
- $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(G^0, k)$ 是一个顶点；
- $\widetilde{\rho}$ 是 $(G^0_{[\mathbf{x}]}/G_{\mathbf{x}\,0+})^F$ 的尖点表示。

我们固定上述 Yu 数据 $\Sigma = (\Lambda, \mathbf{x}\ \widetilde{\rho})$，并为简便起见令 $L = G^0$。设

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}_\Lambda \subseteq \widetilde{\mathcal{K}}_\Lambda =: \widetilde{\mathcal{K}}$$

是与 Λ相关联的 Yu 型子群，参见 §2.4。令 κ 为 $\widetilde{\mathcal{K}}^F$ 意义下的 Weil–Heisenberg 表示，参见 [Yu01]。

定理 9.1 ([Yu01，Kim07，Fin21b])。假设 p 不整除 G的绝对魏尔群的阶。则映射

$$\Sigma \longmapsto \pi_\Sigma := c\text{-ind}^{G^F}_{\widetilde{K}^F}\kappa \otimes \widetilde{\rho}$$

在 *Yu* 数据的等价类与 G^F 的不可约超尖点表示的同构类之间诱导出一个双射。

根据假设，限制 $\widetilde{\rho}|_{Z(G)^F L^F_{\mathbf{x},\,0}}$ 有一个不可约尖点直和项 ρ。由 [DL76], , 存在一个椭圆环面 $\mathbf{T} \subseteq L_0$ 和一个特征θ： $\mathbf{T}^F \to \mathbb{Q}_\ell^\times$， 使得 $\rho|_{L^F_{\mathbf{x},\,0}}$出现在 $R^{L_0}_{\mathbf{T}}(\theta)$ 的膨胀中。由 [Kal19，引理 3.4.4], , 存在 L 的一个最大非分歧椭圆极大环面 T，使得 $\mathbf{x} \in \mathcal{A}(T, \check{k})$ 且 $\mathbf{T} \cong T_0$。通过膨胀，我们将 θ 视为 $T^F_{\mathbf{x},\,0}$ 的特征。令 ω 为 $\widetilde{\rho}$ 的中心特征。根据构造， ω 和 θ 在 $Z(G)^F \cap T^F_{\mathbf{x},\,0}$ 上一致。

由于 $Z(L)/Z(G)$是各向异性的， T 在 G中也是椭圆的。下述引理表明，商群 $T^F/(Z(G)^F T^F_{\mathbf{x},\,0})$是有限群。

引理 9.2。 对于椭圆环面 $T \subseteq G$，商群 $T^F/(Z(G)^F T^F{}_{\mathbf{x},\,0})$ 是有限的。

证明。伊瓦萨瓦子群 $T^F_{\mathbf{x}},0$ 在 $T(k)$ 的最大有界子群 $T(k)_b$ 中具有有限指数，这是由 [KP23，引理 2.5.14] 得出的。因此，只需证明 $T(k)/(Z(G)(k)T(k)_b)$ 是有限的。令 $T_{\mathrm{der}} = T \cap G_{\mathrm{der}}$。则 T_{der} 是各向异性的，因此根据 [KP23，命题 2.5.8]，有 $T_{\mathrm{der}}(k)_b = T_{\mathrm{der}}(k)$。令 $D = G/G_{\mathrm{der}}$。对短正合列 $T_{\mathrm{der}} \hookrightarrow T \twoheadrightarrow D$ 取伽罗瓦不动点，并利用 $T_{\mathrm{der}}(k)_b \subseteq T(k)_b$（根据 [KP23，命题 2.5.9]），以及 $H^1(k, T_{\mathrm{der}})$ 是有限的（根据 [Ser97，第三章，定理 4]），可知只需证明复合映射 $Z(G)(k) \to T(k) \to D(k)$ 的像在 $D(k)$ 中具有有限指数。但这可由对短正合列 $Z(G) \cap G_{\mathrm{der}} \hookrightarrow Z(G) \twoheadrightarrow D$ 取伽罗瓦上同调，以及 $H^1(k, Z(G) \cap G_{\mathrm{der}})$ 的有限性得到。□

令 ϕ_{-1} 为 T^F 的一个特征，它同时延拓了 ω 和 θ。特别地，ϕ_{-1} 的深度为 0。令

$$\phi = \phi_{-1} \prod_{i=0}^{d} \phi_i|_{T^F}.$$

于是，(ϕ_{-1}, Λ) 是 ϕ 的一个 Howe 分解。令 Z 为在 §3.3 中构造的深层次 Deligne–Lusztig 簇。我们将 $\mathcal{K}^F$-模 $H^i_c(Z, \mathbb{Q}_\ell)[\phi]$ 延拓为 $Z(G)^F\mathcal{K}^F$-模，使得 $Z(G)^F$ 通过 ϕ_{-1} 或 ω 作用。

定理 9.3。 沿用上述记号。假设 q 足够大。则 π_Σ 是某个整数 $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 对应的 $c\text{-ind}_Z^{G^F}{}_{Z(G)^F\mathcal{K}^F} H^i_c(Z, \mathbb{Q}_\ell)[\phi^\dagger]$ 的一个直和项。

证明。 令 H 为一个群，M 为 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的虚 H-模。假设 $M = \sum_\chi c_\chi \chi$，其中 $c_\chi \in \mathbb{Z}$，而 χ 遍历不可约 H-模的同构类。记 $|M| = \sum_\chi |c_\chi| \chi$，它是一个真正的 H-模。

我们将虚拟 $L^F_{\mathbf{x},0}$-模 $R^{L_0}_{\mathsf{T}}(\theta)$ 视为自然的 $Z(G)^F\mathcal{K}^F$-模，其中 $\mathcal{H}^F_\Lambda$ 平凡作用，而 $Z(G)^F$ 通过 ϕ_{-1}作用。由构造可得

$$\hom_{\widetilde{\mathcal{K}}^F}(\mathrm{ind}^{\widetilde{\mathcal{K}}^F}_{Z(G)^F\mathcal{K}^F}\rho, \widetilde{\rho}) \cong \hom_{Z(G)^F\mathcal{K}^F}(\rho, \widetilde{\rho}) \neq 0.$$

由于 ρ 出现在 $R^{L_0}_{\mathsf{T}}(\theta)$ 中，因此 $\kappa \otimes \widetilde{\rho}$ 出现在

$$\kappa \otimes \mathrm{ind}^{\widetilde{\mathcal{K}}^F}_{Z(G)^F\mathcal{K}^F}|R^{L_0}_{\mathsf{T}}(\theta)| \cong \mathrm{ind}^{\widetilde{\mathcal{K}}^F}_{Z(G)^F\mathcal{K}^F}\kappa \otimes |R^{L_0}_{\mathsf{T}}(\theta)| \cong \mathrm{ind}^{\widetilde{\mathcal{K}}^F}_{Z(L)^F\mathcal{K}^F}|\kappa \otimes R^{L_0}_{\mathsf{T}}(\theta)|.$$

另一方面，由定理 8.5 可得 $\pm\kappa \otimes R^{L_0}_{\mathsf{T}}(\theta) = H^*_c(Z, \mathbb{Q}_\ell)[\phi^\dagger]$。特别地，存在 $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，使得 $\kappa \otimes \widetilde{\rho}$ 是 $\mathrm{ind}\,^{\widetilde{\mathcal{K}}^F}_Z{}_{(G)^F\mathcal{K}^F} H^i_c(Z, \mathbb{Q}_\ell)[\phi^\dagger]$ 的一个直和项。因此，$\pi_\Sigma = \text{c-ind}^{G^F}_{\widetilde{\mathcal{K}}^F}\kappa \otimes \widetilde{\rho}$是

$$\text{c-ind}^{G^F}_{\widetilde{\mathcal{K}}^F}\mathrm{ind}^{\widetilde{\mathcal{K}}^F}_{Z(G)^F\mathcal{K}^F} H^i_c(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi^\dagger] \cong \text{c-ind}^{G^F}_{Z(G)^F\mathcal{K}^F} H^i_c(Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\phi^\dagger].$$

证明完成。 □

References

[Adl98] Jeffrey D. Adler, *Refined anisotropic K-types and supercuspidal representations*, 《太平洋数学杂志》185（1998），第 1 期，1–32。[Bor91] Armand Borel, *Linear algebraic groups*, 数学研究生教材，第 126 卷，Springer-Verlag，1991。[Boy10] Mitja Boyarchenko, *Characters of unipotent groups over finite fields*, 《数学精选》（新系列）16（2010），第 4 期，857–933。[Boy12] , *Deligne-Lusztig constructions for unipotent and p-adic groups*, 预印本（2012），arXiv:1207.5876。[BT84] Fran

———. *Groupes réductifs sur un corps local II.* cois Bruhat 和 Jacques *Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée.*
Tits, ，高等科学研究所出版物：数学 60（1984），197–376。[BW16] Mitja Boyarchenko 和 Jared Weinstein, *Maximal varieties and the local Lang*
lands correspondence for GL n **29** 2016 177 236 （），《美国数学会杂志》（），–。[Cha20] Charlotte Chan,

The cohomology of semi-infinite Deligne–Lusztig varieties, 《纯粹与应用数学杂志》（Crelle）2020（2020），第 768 期，93–147。[Cha24] ,

The scalar product formula for parahoric Deligne-Lusztig induction, 预印本（2024），arXiv:2405.00671。[Che18] Zhe Chen, *Green functions and higher Deligne-Lusztig characters*, 《数学文献》 **23** 2018 2027 2041 3907799 （），–。MR CI Charlotte Chan 和 Alexander B. [19]
Ivanov, *Cohomological representations of parahoric subgroups* **25** 2019 1 26 ，《表示论》（），–。[CI23] , *On loop Deligne–Lusztig varieties of Coxeter type for GL_n*, 《剑桥数学杂志》11（2023），第 2 期，441–505。[CKZ] Charlotte Chan、Tasho Kaletha 和 Xinwen Zhu, *To appear*。[CO 23] Charlotte Chan 和 Masao Oi, *Geometric L-packets of Howe-unramified*
toral supercuspidal representations 2023 1 62, ，《欧洲数学学会杂志》（），–。DOI 10.4171/JEMS/1396。[CO25] ,

Green functions for positive-depth Deligne–Lusztig induction, 预印本（2025），arXiv:2506.04449。[CS17] Zhe Chen 和 Alexander Stasinski, *The algebraisation of higher Deligne–Lusztig*
representations **23** 2017 4, 2907 2926 ，《数学精选》（），第 –

———. *The algebraisation of higher level Deligne–Lusztig representations II:*
期。[CS23] , *odd levels* 2023 2311 05354 ，预印本（），arXiv:。[DL76] Pierre Deligne 和 George Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields* **103** 1976 1, 103 161 ，《数学年刊》（），第 –

———
期。[DS18] Stephen DeBacker 和 Loren Spice, *Stability of character sums for positive-depth supercuspidal representations* **2018** 2018 47 78 ，《纯粹与应用数学杂志》（），–。[Fin21a] Jessica Fintzen, *On the construction of tame supercuspidal representations*, 《组合数学》 **157** 2021 12, 2733 2746 4357723 （），第 – 期。MR Fin b, ，《数学年刊》（2 1, 303 193 2021 346 4199732）（），第 – 期。MR [FKS23] Jessica Fintzen、Tasho Kaletha 和 Loren Spice, *A twisted Yu construction* [21] *Types for tame p-adic groups*
Harish-Chandra characters **172** 2023 2241 *and endoscopy*, 《杜克数学杂志》（），– 2301。[IN25a] Alexander B. Ivanov 和 Sian Nie, *An alternative construction of character*
sheaves on parahoric subgroups 2025 2509 18442 ，预印本（），arXiv:。[IN25b] *Convex elements and cohomology of deep level Deligne-Lusztig varieties*, 预印本（2025），arXiv:2503.13412。[IN25c] *The cohomology of p-adic Deligne–Lusztig schemes of Coxeter type*, 《Jussieu 数学杂志》12（2025），第 4 期，1429–1462。

[Iva18] Alexander B. Ivanov, *Ramified automorphic induction and zero-dimensional affine Deligne-Lusztig varieties* **288** 2018 439 490 , 《数学杂志》（），–。[Iva20] , *Ordinary $GL_2(F)$-representations in characteristic two via affine Deligne-Lusztig constructions* **27** 2020 1, 141 187 , 《数学研究快报》（），第 – 期。[Iva23] , *Arc-descent for the perfect loop functor and p-adic Deligne–Lusztig spaces* **2023** 2023 794, 1 54 ,《纯粹与应用数学杂志》（Crelle）（），第 – 期。[Kal19] Tasho Kaletha, *Regular supercuspidal representations*, 《美国数学会杂志》32（2019），1071–1170。[Kim07] Ju-Lee Kim, *Supercuspidal representations: an exhaustion theorem*, 《美国数学会杂志》**20** 2007 2, 273 320 2276772 （），第 – 期。MR KP Tasho Kaletha 和 [23] Gopal Prasad, *Bruhat–tits theory: A new approach*, 《新数学专著》第44卷，剑桥大学出版社，英国剑桥，2023年。[LN25] Ben Liu 和 Sian Nie, *An explicit decomposition of higher deligne-lsuztig representations* 2025 2506 12918 , 预印本（），arXiv: .。[Lus79] George Lusztig, *Some remarks on the supercuspidal representations of p-adic semisimple groups* , 载于《自守形式、表示与 L 函数》，《纯粹数学专题讨论会论文集》33卷第1部分（俄勒冈州科瓦利斯，1977）（1979），171–175。[Nie24] Sian Nie, *Decomposition of higher Deligne-Lusztig representations*, 预印本（2024），arXiv:2406.06430。[PR 08] George Pappas 和 Michael Rapoport, *Twisted loop groups and their affine flag varieties* **219** 2008 118 198 , 《数学进展》（），–。[Ser79] Jean-Pierre Serre, *Local fields*, 《数学研究生教材》第67卷，施普林格，1979年，由 Marvin Jay Greenberg 从法文译出。[Ser97] , *Galois cohomology*, 施普林格数学专著，施普林格出版社，柏林、海德堡，1997年， *Cohomologie Galoisienne* 的英文译本。[Sta11] Alexander Stasinski, *Extended Deligne-Lusztig varieties for general and special linear groups* **226** 2011 3, 2825 2853 , 《数学进展》（），第 – 期。[Yu01] Jiu-Kang Yu, *Construction of tame supercuspidal representations*, 《美国数学会杂志》14（2001），579–622。

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, D-44780 Bochum, Germany.
Email address: a.ivanov@rub.de

Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sci-ences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*Email address*: niesian@amss.ac.cn