波包系统及其与极限算子谱分析的联系

Kevin Hughes数学系 爱丁堡龙比亚大学爱丁堡，英国
khughes.math@gmail.com

Arie Israel数学系 德克萨斯大学奥斯汀分校奥斯汀，得克萨斯州，美国
arie@math.utexas.edu

Azita Mayeli数学系 纽约市立大学纽约，美国
amayeli@gc.cuny.edu

arXiv:2601.06945v1 [math.CA] 11 Jan 2026

摘要—**我们探讨了“波包系统”的设计，这类系统在相空间中具有很强的集中性质。我们将这一问题与信号处理中的相关课题联系起来，这些课题涉及空间限制算子和频率限制算子的谱行为。研究结果在医学成像、地球物理学和天文学中具有工程应用价值。**

索引词—**波包、极限算子、特征值分布**

I. 引言

我们用 $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\exp(-ix\cdot\xi)dx$ 表示 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 的傅里叶变换。给定一个可测集 $S \subset \mathbb{R}^d$，我们用 $\mathcal{PW}(S)$ 表示 S 的 Paley-Wiener空间，它由所有满足 $\widehat{f}(\xi) = 0$ （几乎处处对 $\xi \in \mathbb{R}^d \backslash S$ 成立）的 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 组成。 $\mathcal{PW}(S)$ 中的函数，其傅里叶变换支撑在 S 上。因此，我们称函数 $f \in \mathcal{PW}(S)$ 为S-带限函数。

若 S 有界，则 $\mathcal{PW}(S)$ 中的函数 $f(x)$ 关于 x解析；因此，它们不可能具有紧支撑。然而，我们可以探究带限函数 $f \in \mathcal{PW}(S)$ 在给定有界集 $F \subset \mathbb{R}^d$ 上能够集中到何种程度。这个问题可以通过 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上某个紧算子的特征值行为来刻画。

给定 $\mathbb{R}^d$ 中具有正勒贝格测度的有界可测集 F 和 S，设 $P_F\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ 为到子空间 $L^2(F)$ 上的正交投影；该子空间由所有支撑在 F 上的 L^2 函数组成。再设 $B_S : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ 为到 $\mathcal{PW}(S)$ 上的正交投影。极限算子 由交替应用这些投影算子定义如下：

$$\mathcal{T}_{F,S} = B_S P_F B_S. \tag{I.1}$$

该算子是自伴的、正定的且紧的，并具有一个递减的特征值序列$\{\lambda_k(F, S)\}$，其值属于 $(0, 1)$，且满足 $\lambda_k(F, S) \to 0$，当 $k \to \infty$ 时。

$\mathcal{T}_{F,S}$ 构成标准正交基$\{\Psi_k = \Psi_k(F, S): k \geq 1\}$ 对于 $\mathcal{PW}(S)$，并且满足双重正交性质——具体而言，它们关于 $L^2(\mathbb{R}^d)$内积相互正交，同时它们在 F 上的限制函数关于 $L^2(F)$内积也相互正交 [18]。这使得它们成为许多实际问题中的重要工具，例如用于开发带限函数的稳定外推方法（见 [10]）。

与 $\mathcal{T}_{F,S}$ 对应的最大特征值的特征函数，以及由这些特征函数张成的子空间中的任意函数，都是带限的，并且在区域 F 上实现最优能量集中。事实上，根据特征值的变分刻画，子空间 $V_k := \mathrm{Span}\{\Psi_1, \cdots, \Psi_k\} \subset \mathcal{PW}(S)$ 和特征值 $\lambda_k = \lambda_k(F, S)$ 满足以下优化问题：

$$\lambda_k = \max_{V \subset \mathcal{PW}(S)} \min_{f \in V\backslash\{0\}} \left\{ \int_F |f(x)|^2 dx / \|f\|^2 : \dim V = k \right\}.$$

特征函数 Ψ_k 及其相关子空间 V_k 在成像等应用中发挥着重要作用，其中 F 和 S 的形状由各种采集约束 [17, 13, 14, 18, 19]所决定。出于阈值处理和去噪等实际需求，需要确定此类子空间的维数。因此，统计接近 1 的特征值 $\lambda_k(F, S)$ 以及远离 1 和 0 的特征值至关重要。一般而言，该问题的解取决于空间和频率域的几何性质。

在一维情形下，区间 I、$J \subset \mathbb{R}$ 对应的极限算子 $\mathcal{T}_{I,J}$ 的特征函数被称为长旋转椭球波函数，而特征值 $\lambda_k(I, J)$仅取决于时频带宽的乘积 $c = |I| \cdot |J|$。因此，我们将这些特征值表示为 $\lambda_k(c)$。在 [17,13, 14],中，人们证明了这些特征值满足很强的聚集性质：对于任意 $\epsilon \in (0, 1/2)$，大约有 $c/2\pi - O_\epsilon(\log(c))$ 个特征值位于 $[1-\epsilon, 1)$ 中；位于“骤降区”$(\epsilon, 1-\epsilon)$中的特征值少于 $O_\epsilon(\log(c))$ 个；其余位于 $(0, \epsilon]$ 中的特征值则以指数速度衰减至 0。此外，已知序列 $\lambda_k(c)$ 在 $\lambda = 1/2$ 处穿越 1，其中 k 与 $c/2\pi$ 的向下取整值或向上取整值之差至多为 1 [12]。因此，在 $k = c/2\pi$处会发生相变：当 $k \lesssim c/2\pi$ 时，特征值 $\lambda_k(c)$指数级接近 1（当 c 足够大时）；而当 $k \gtrsim c/2\pi$时，$\lambda_k(c)$指数级接近 0。当 $k \sim c/2\pi$时，特征值处于 0 和 1 之间的中间大小。近期研究取得了尖锐的定量界，使这些表述更加精确——参见 [7, 16, 4, 2, 9]。

设 $Q = [0, 1]^d$ 为单位超立方体， $S \subset \mathbb{R}^d$ 为一个凸域。我们假设 S 是按坐标

A. Israel 获得了美国空军科学研究办公室的资助，资助编号为 FA9550-19-1-0005。A. Mayeli 部分获得了 AMS-Simons 研究提升基金和 PSC-CUNY研究资助的支持。

对称的——也就是说，对于每个 $x \in S$ 及任意坐标反射 τ_j ，都有 $\tau_j(x) \in S$ ： $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $1 \le j \le d$,$\tau_j(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_d) = (x_1, \cdots, -x_j, \cdots, x_d)$。我们用$B(x,r) \subset \mathbb{R}^d$ 表示以 $x \in \mathbb{R}^d$ 为中心、半径为 $r > 0$的欧几里得球。我们用 $S(r) := \{rx : x \in S\}$ 表示 S的 r倍扩张。

以下定理此前已发表于 [8]。

定理 I.1. 设 $Q = [0,1]^d$, 且设 $S \subset B(0,1)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的紧致坐标对称凸集。

存在一个维数常数 $C_d > 0$ （与 S 无关），使得对于任意 $\epsilon \in (0, 1/2)$ 和 $r \ge 1$,

$$\#\{k : \lambda_k(Q, S(r)) \in (\epsilon, 1-\epsilon)\} \le C_d E_d(\epsilon, r), \qquad \text{(I.2)}$$

其中 $E_d(\epsilon, r) := \max\{r^{d-1}\log(r/\epsilon)^{5/2}, \log(r/\epsilon)^{5d/2}\}$。

在下一节中，我们将介绍波包系统，推广经典的 Gabor 系统和小波系统，并讨论函数族在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的集中性质和填充性质。随后，我们将使用波包为 $L^2([0,1]^d)$ 构造一个具有强集中性质的标准正交基。最后，我们将给出定理 I.1 的证明。

II. 方法与主要结果

A. 波包系统

信号分析中的一种经典技术是将信号分解为局部化于物理（时间）和频域中的分量。在分析中，人们希望构造具有良好集中性质的正交系统（或更一般地说，框架）。信号分析中常用的两种方法是短时傅里叶变换（STFT）和小波变换。与这些变换相关的概念分别是 Gabor 系统和小波系统。

定义 II.1. 闭子空间 $H \subset L^2(\mathbb{R}^d)$的一个框架 是由函数 $\{\psi_\nu\}$ 构成的族，属于 H ，并满足以下条件:

$$A\|f\|^2 \le \sum_\nu |\langle f, \psi_\nu\rangle|^2 \le B\|f\|^2 \quad \forall f \in H.$$

我们将常数 $0 < A \le B < \infty$ 称为 $\{\psi_\nu\}$的（下、上）框架界。单位范数框架还满足 $\|\psi_\nu\| = 1$。

框架条件断言， $\{\psi_\nu\}$ 是 H的冗余（超完备）张成集。

设 $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 是一个光滑窗函数，在 ∞处快速衰减，并设 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $\mathcal{S}_1 = \{x_\nu\}_{\nu\in\mathcal{I}}$, $\mathcal{S}_2 = \{\xi_\mu\}_{\mu\in\mathcal{J}}$ 是一组由空间平移和频率调制构成的配对。由 g 和 $\mathcal{S}$ 生成的 ***Gabor*** 系统，是通过对窗函数施加平移和调制得到的,

$$\mathcal{G}(g, \mathcal{S}) := \left\{ g_{\nu\mu}(x) = e^{i(x-x_\nu)\cdot\xi_\mu} g(x - x_\nu) \right\}_{\nu\in\mathcal{I}, \mu\in\mathcal{J}}. \quad \text{(II.1)}$$

在文献中，人们经常研究一种特殊情形： $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 是 $\mathbb{R}^d$ [5] 中的格点。

如果对 $\mathcal{S}$ 进行适当构造（通常取充分稠密格点的笛卡尔积），则系统 $\mathcal{G}(g, \mathcal{S})$ 是完备的在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中，甚至构成一个框架。应将 $g_{\nu\mu}$视为在物理域中局部化于区域 $|x - x_\nu| < 1$ ，并在频域中局部化于区域 $|\xi - \xi_\mu| < 1$ 。Gabor 系统广泛用于信号处理，以实现信号的局部化。给定信号 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，内积 $\{\langle f, g_{\nu\mu}\rangle\}$ 捕捉了信号在相空间 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 中、点集 $\{(x_\nu, \xi_\mu)\}$ 附近的局部空间和频率内容。如果系统 $\{g_{\nu\mu}\}$ 在$L^2(\mathbb{R}^d)$中构成一个框架，则可以根据内积 $\{\langle f, g_{\nu\mu}\rangle\}$重构信号 f。这一恢复问题通过合成算子求解，该算子利用适当的对偶框架定义。因此，Gabor 系统为执行模数转换提供了便利工具。

小波表示中的函数也有局部化的例子。从一个函数 g 出发，它通常被称为 “ 母小波 ”，通过对其施加一族平移和二进膨胀，可定义如下函数族:

$$\mathcal{W}(g) := \left\{ w_{j,\vec{k}}(x) = 2^{-jd/2} g(2^{-j}x - \vec{k}) \right\}_{j\in\mathbb{Z}, \vec{k}\in\mathbb{Z}^d}. \quad \text{(II.2)}$$

在对 g 施加适当条件时，可以证明该系统 $\mathcal{W}(g)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的一个子空间的标准正交基。应将函数 $w_{j,\vec{k}}$ 视为在频域中的区域 $2^{-j-1} < |\xi| < 2^{-j}$ 以及物理域中的区域 $|x - \vec{k}2^j| < 2^j$ 内局部化。给定一个信号 f，内积 $\langle f, w_{j,\vec{k}}\rangle$ 衡量了 f 在相空间 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 的相应区域内的含量。

现在我们引入波包系统的概念，以统一前面的例子。令 $\Theta = \{\theta_\nu : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)\}_{\nu\in\mathcal{I}}$ 为一族满足一致衰减估计 $|\theta_\nu(x)| \le C_d/(1+|x|^d)$ 的 C^∞ 函数，其中 C_d 与 ν 无关，并将其归一化，使得 $\|\theta_\nu\| = 1$。固定一族仿射映射 $\mathcal{A} = \{T_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$，满足 $T_\nu(x) = A_\nu(x - x_\nu)$，其中 $x_\nu \in \mathbb{R}^n$ 且 $A_\nu \in GL_n(\mathbb{R})$。固定一族频率调制向量 $\Xi = \{\xi_\mu \in \mathbb{R}^n\}_{\mu\in\mathcal{J}}$。定义与这些族相关联的波包系统 如下:

$$\mathcal{P}(\Theta, \mathcal{A}, \Xi) = \{ g_{\nu\mu}(x) = c_\nu e^{iT_\nu(x)\cdot\xi_\mu} \theta_\nu(T_\nu(x)) \}, \quad \text{(II.3)}$$

其中 $c_\nu = |\det A_\nu|^{1/2}$ 的选取使得 $\|g_{\nu\mu}\| = 1$。通常，令 $\theta_\nu = \theta$ 与 ν 无关会比较方便。注意，Gabor 系统 (II.1) 是波包系统的一个特例，其中映射 T_ν 只是平移，$x \mapsto x - x_\nu$。此外，小波系统 (II.2) 也是波包系统的一个特例，其中仿射映射 T_ν 指定了一族二进膨胀以及沿二进格点的平移，且不存在频率调制， $\Xi = \{0\}$。一般而言，应将一个波包$g_{\nu\mu}$ 视为在物理空间中局部化于椭球区域 $A_\nu^{-1}(B(0,1)) + x_\nu$，并在频率空间中局部化于对偶区域 $A_\nu^T(B(0,1)) + \xi_\mu$。

我们以陈述若干与 $\mathbb{R}^d$ 中函数系统的集中性质相关的问题来结束本节。在讨论这些问题时，我们固定区域 F, $S \subset \mathbb{R}^d$。我们将把$F \times S$ 视为相空间 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 中的一个区域。相空间以 $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 参数化。我们感兴趣的是构造一个位于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的函数系统 $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\mathcal{I}}$，使其在空间域和频率域 F 中高度集中

以及 S（尽管其未必能完全支撑于其中任何一个域）。下面的定义将对此作出精确定义。

定义 II.2 (ϵ-集中系统)。 由单位范数函数 $\{\psi_\nu\}$构成的有限系统，其中函数属于 $L^2(\mathbb{R}^d)$，称为在$F\times S$ 上 ϵ-集中，若

$$\sum_\nu \|\psi_\nu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\setminus F)} + \sum_\nu \|\widehat{\psi_\nu}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\setminus S)} \le \epsilon^2.$$

注意，前面的定义并未对 $\{\psi_\nu\}$ 施加任何正交性约束。

定义 II.3 (ϵ-打包)。 给定紧集 F、$S\subset\mathbb{R}^d$以及 $\epsilon>0$，若由单位范数函数$\mathcal{F}=\{\psi_\nu\}_{\nu\in\mathcal{I}}$ 构成的有限族属于 $L^2(\mathbb{R}^d)$，则称其为 $F\times S$ 的 ϵ-打包，若

1) $\{\psi_\nu\}$ 在 $F\times S$上是 ϵ-集中系统。*2)*

对所有 ν、ν'、$\nu\neq\nu'$，$|\langle\psi_\nu,\ \psi_{\nu'}\rangle|<\epsilon$。

打包定义中的条件 2 断言，该族 $\{\psi_\nu\}$ 近似正交。当然，每个区域 $F\times S$ 都允许空打包 $\mathcal{F}=\emptyset$。在前面的定义中，我们希望构造基数 $\#\mathcal{F}$较大的打包。我们将此称为打包问题。理想情况下，我们希望得到关于 $\#\mathcal{F}$ 的界，该界以 ϵ 以及 F 和 S的勒贝格测度为依据。

下面的引理已在 [9] 中基本得到证明——参见第 4 节的讨论。它将打包问题与极限算子特征值的下界联系起来。我们在此给出证明，以说明变分技巧。

引理 II.4. 设 $\mathcal{F}=\{\psi_\nu\}$ 是 $F\times S$ 的一个 ϵ-打包，满足 $n:=\#\mathcal{F}$，且 $\epsilon<\frac{1}{2n}$。那么 $\lambda_n(P_FB_SP_F)>1-5\epsilon n^{1/2}$。

证明。 记 $\mathcal{F}=\{\psi_1,\cdots,\psi_n\}$，并令 $V\subset L^2(\mathbb{R}^d)$ 为由 $\mathcal{F}$ 张成的子空间。我们断言 $\mathcal{F}$ 是一个线性无关集。事实上，令 G 为 $\mathcal{F}$的 $n\times n$ 格拉姆矩阵，即 $G_{\nu\nu'}=\langle\psi_\nu,\ \psi_{\nu'}\rangle$，$1\le\nu,\ \nu'\le n$。 G 的对角元均为 1，而 G 的非对角元的模至多为 ϵ。令 I 表示 $n\times n$ 单位矩阵。注意，$I-G$ 的弗罗贝尼乌斯范数至多为 $\epsilon n<1/2$。谱范数不超过弗罗贝尼乌斯范数，因此$\|I-G\|<1/2$，从而 G 可逆，故 $\mathcal{F}$ 线性无关。因此，$\dim V=n$。

根据特征值的变分刻画（极大-极小定理），界 $\lambda_n(F,S)>1-C\epsilon n^{1/2}$ 可由下式推出

$$\frac{\|P_FB_SP_F\psi\|}{\|\psi\|}>1-C\epsilon n^{1/2}\quad\forall\psi\in V,\ \psi\neq0.$$

声称 $\{\psi_\nu\}$ 在 $F\times S$ 上是 ϵ-集中的，这意味着对于所有 ν，$\|(Id-P_F)\psi_\nu\|\le\epsilon$ 且 $\|(Id-B_S)\psi_\nu\|\le\epsilon$。注意到 $Id-P_FB_SP_F=(Id-P_F)+P_F(Id-B_S)+P_FB_S(Id-P_F)$。由于 P_F和 B_S是投影算子，根据三角不等式可得 $\|(Id-P_FB_SP_F)\psi_\nu\|\le3\epsilon$。

设 $\psi\in V$，并记作 $\psi=\sum_\nu a_\nu\psi_\nu$。根据三角不等式以及上一段中的估计，我们有 $\|(Id-P_FB_SP_F)\psi\|\le3\epsilon\sum_\nu|a_\nu|$，这意味着

$$\|P_FB_SP_F\psi\|\ge\|\psi\|-3\epsilon\sum_\nu|a_\nu|\ge\|\psi\|-3\epsilon n^{1/2}\sqrt{\sum_\nu|a_\nu|^2}.$$

展开内积后，可写为

$$\|\psi\|^2=\sum_\nu|a_\nu|^2+\sum_{\nu\neq\mu}a_\nu\overline{a_\mu}\langle\psi_\nu,\psi_\mu\rangle\ge(1-n\epsilon)\sum_\nu|a_\nu|^2,$$

在最后一个不等式中，我们使用了 $\left|\sum_{\nu\neq\mu}a_\nu a_\mu\right|\le(\sum|a_\nu|)^2\le n\sum_\nu|a_\nu|^2$，以及 $\mathcal{F}$的近似正交性。结合前面的估计，

$$\frac{\|P_FB_SP_F\psi\|}{\|\psi\|}\ge1-3\epsilon n^{1/2}(1-n\epsilon)^{-1/2}\ge1-5\epsilon n^{1/2}.$$

此估计对任意非零 $\psi\in V$ 都成立。引理的证明至此完成。□

在维数为 $d=1$ 时，当 I，$J\subset\mathbb{R}$ 为区间时，[9] 给出了利用一族厄米多项式与高斯窗的乘积的时频平移来构造 $I\times J$ 打包的方法。为陈述他们的结果，固定 $c:=|I|\cdot|J|$ 使其足够大。给定 $\delta<1$，存在 $\alpha(\delta)<1$，以及 $I\times J$ 的一个 ϵ-打包 $\mathcal{F}$，使得 $\epsilon=\alpha(\delta)^c$ 且 $\#\mathcal{F}\ge(1-\delta)c/2\pi$。

如 [9], 中所述，这些结果和引理 II.4 表明，对于任意 $\delta>0$，存在 $\alpha=\alpha(\delta)<1$，使得对 $c=|I|\cdot|J|$，

$$\lambda_n(\mathcal{T}_{I,J})=\lambda_n(P_IB_JP_I)\ge1-5\alpha^c c^{1/2}\quad\forall\, n\le(1-\delta)c/2\pi.$$

在“骤降区”之前（即对于 $n<c/2\pi$），这给出了一维时频限制算子的特征值迄今最锐利的下界。

开放问题 1： 设 I，$J\subset\mathbb{R}$ 是区间，且 $c:=|I|\cdot|J|$ 足够大。给定 $\delta<1$，是否存在一个波包系统 $\mathcal{F}$，属于 $L^2(\mathbb{R})$，它由单个 光滑窗函数的时频平移组成，并且是 $I\times J$的一个 ϵ-打包，其中 $\#\mathcal{F}\ge(1-\delta)c/2\pi$，且 $\epsilon=\alpha^c$适用于 $\alpha=\alpha(\delta)<1$? 此外，这一结果能否推广到高维，以实现对笛卡尔积欧几里得球的打包?

下一个引理是证明定理 I.1 的关键工具。它将集中系统的存在性与极限算子的特征值集合上的界联系起来。

引理 II.5. 假设存在一个单位范数框架 $\mathcal{F}=\{\psi_\nu\}$，其框架为 $L^2(F)$，框架常数为 $0<A\le B<\infty$，且该框架可划分为三个子族 $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{low}\cup\mathcal{F}_{hi}\cup\mathcal{F}_{res}$，使得 $\mathcal{F}_{low}$在 $F\times S$上是 $\sqrt{A-\epsilon}$-集中系统，$\mathcal{F}_{hi}$在 $F\times(\mathbb{R}^d\setminus S)$上是 $\sqrt{A/4}\cdot\epsilon$-集中系统，并且族 $\mathcal{F}_{res}$是有限的。那么，算子 $P_FB_SP_F$的特征值集合满足以下谱界：

$$\#\{\lambda_k(P_FB_SP_F)\in(\epsilon,1-\epsilon)\}\le(2/A)\#\mathcal{F}_{res}.$$

这个引理通过变分原理证明，该引理的变体此前已见于文献中——对于 $\mathcal{F}$ 是正交归一系统的相关结果，请参见 [7] 中的引理 1。对于一般框架，这一结果可由 [15]中的引理 3.1推出（我们将在下文给出约化过程）。

引理 *II.5* 的证明。由于 $\mathcal{F}\subset L^2(F)$，我们对所有 $\psi\in\mathcal{F}$ 都有 $P_F\psi=\psi$。由于 P_F 是一个投影，因此

$$\|(Id-P_FB_SP_F)\psi\|=\|P_F(Id-B_S)\psi\|\le\|(Id-B_S)\psi\|$$

并且 $\|P_F B_S P_F \psi\| \le \|B_S \psi\|$。因此，根据 Plancherel 定理以及 $\mathcal{F}_{low}$ 和 $\mathcal{F}_{hi}$ 的集中性质，

$$\sum_{\psi\in\mathcal{F}_{low}} \|(Id - P_F B_S P_F)\psi\|^2 + \sum_{\psi\in\mathcal{F}_{hi}} \|P_F B_S P_F \psi\|^2$$
$$\le \sum_{\psi\in\mathcal{F}_{low}} \|\widehat{\psi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\setminus S)} + \sum_{\psi\in\mathcal{F}_{hi}} \|\widehat{\psi}\|^2_{L^2(S)} \le \frac{A}{2}\epsilon^2.$$

于是，由 [15] 的引理 3.1 可得该结果。 □

B. 单位立方体上的集中波包系统。

1) Coifman-Meyer 局部正弦基：我们为 $L^2([0,1])$ 引入一个正交归一基，该基由紧支撑函数组成，其傅里叶变换具有快速衰减的尾部。在此，我们将使用 Coifman-Meyer 的局部正弦基 [3] 的一个变体。

定义 $\mathcal{W}$ 为 (0,1) 的*Whitney* 分解的一种实现。也就是说，族 $\mathcal{W}$ 由区间组成，它们构成 (0,1) 的一个划分，具体定义如下：

$$\mathcal{W} = \{[2^{-j-1}, 2^{-j})\}_{j\ge1} \cup \{[1-2^{-j}, 1-2^{-j-1})\}_{j\ge1}.$$

令 $\delta_L \in$ (0,1) 表示区间 $L \in \mathcal{W}$ 的长度。

对于 $a > 0$，定义“包络函数” $\Psi_a(\xi) :=\exp(-a\cdot|\xi|^{2/3})$。本节的主要结果如下：

命题 II.6。存在一个标准正交基 $\mathcal{B}^1 =\{\phi_{L,k}\}_{(L,k)\in\mathcal{W}\times\mathbb{N}}$，其属于 $L^2([0,1])$，其中每个 $\phi_{L,k}$ 都是一个 C^∞ 函数，且其支集包含于 L 的某个邻域内，并满足傅里叶衰减条件：对所有 $\xi\in\mathbb{R}$，以及某些常数 C、$a>0$，

$$|\widehat{\phi_{L,k}}(\xi)| \le C\sqrt{\delta_L} \sum_{\sigma\in\{\pm1\}} \Psi_a\left(\delta_L\xi - \sigma\pi(k+1/2)\right). \quad \text{(II.4)}$$

我们概述命题 II.6 的证明——详细内容见[8]。系统 $\{\phi_{L,k}\}$ 是 $L^2([0,1])$的局部正弦基的一个变体（见 [3, 1]）。我们选取截断函数 θ_L，其中每个 θ_L 的支集都包含于区间 $L\in\mathcal{W}$的某个邻域内。我们定义一个由 $L\in\mathcal{W}$ 和 $k\in\mathbb{N}$索引的族，

$$\phi_{L,k}(x) = c_L\theta_L(x)\sin(\pi(k+1/2)(x-x_L)/\delta_L),$$

其中 x_L 是 L的左端点，c_L 是选取的归一化常数，使得$\|\phi_{L,k}\|=1$。Coifman 和 Meyer 证明了，由此得到的族是 $L^2([0,1])$的标准正交基。命题 II.6 中的支集条件源于截断函数 θ_L 的支集条件。如果截断函数具有适当的正则性——具体而言，如果它们属于 Gevrey 类 $G^{3/2}$ ——那么衰减条件 (II.4) 将得到满足。我们的命题 II.6 证明概述到此结束。

注意，$\phi_{L,k}$ 严格来说并不构成波包系统，而是调制频率符号相反的两个波包的加权组合。这可由恒等式 $\sin(t) = (-i/2)(e^{it}-e^{-it})$ 得出。

2) 张量系统：我们为$L^2([0,1]^d)$构造一个标准正交基。令 $\mathcal{W}^{\otimes d} = \{\mathbf{L} = L_1\times\cdots\times L_d:\ L_1,\cdots,L_d\in\mathcal{W}\}$ 为 d重笛卡尔积的集合，其中各因子为$\mathcal{W}$中的区间。$\mathcal{W}^{\otimes d}$ 中的元素$\mathbf{L}$ 是长方体。图 1 展示了族 $\mathcal{W}^{\otimes d}$。

对于$\mathbf{L} = L_1\times\cdots\times L_d\in\mathcal{W}^{\otimes d}$和$\mathbf{k} =(k_1,\cdots,k_d)\in\mathbb{N}^d$，我们在 $L^2(\mathbb{R}^d)$中定义 $\psi_{(\mathbf{L},\mathbf{k})}$ 如下：

$$\psi_{(\mathbf{L},\mathbf{k})}(x_1,\cdots,x_d) = \phi_{L_1,k_1}(x_1)\cdots\phi_{L_d,k_d}(x_d),$$

其中 $\mathcal{B}^1 = \{\phi_{L,k}\}_{(L,k)\in\mathcal{W}\times\mathbb{N}}$ 与命题 II.6 中的相同。

令 $\mathcal{B}^d = \{\psi_{(\mathbf{L},\mathbf{k})}\}$。那么 $\mathcal{B}^d = (\mathcal{B}^1)^{\otimes d}$ 是基 $\mathcal{B}^1$ 的 d 重张量积，该基对应于 $L^2([0,1])$。我们将 $L^2([0,1])$ 的 d 重张量幂与 $L^2([0,1]^d)$ 等同。

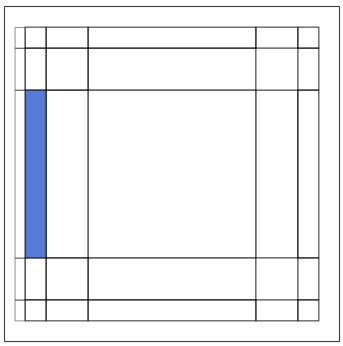


图 1. 将正方形分解为维数为 $d=2$ 的矩形 $\mathbf{L}$。

根据希尔伯特空间张量积的性质，$\mathcal{B}^d$ 是 $L^2([0,1]^d)$ 的标准正交基。每个$\psi_{(\mathbf{L},\mathbf{k})}$ 都支撑在盒子 $\mathbf{L}$ 的一个邻域内，而 $\psi_{(\mathbf{L},\mathbf{k})}$ 是 2^d 个波包之和。利用衰减条件 (II.4)，可以得到以下结论：

命题令 $Q = [0,1]^d$。令 $S\subset B(0,1)$ 为凸且坐标对称。令$\epsilon\in(0,1/2)$ 和 $r\ge1$ 为给定对象。系统 $\mathcal{B}^d = \{\psi_{(\mathbf{L},\mathbf{k})}\}$ 是 $L^2(Q)$的标准正交基，并可划分为三个部分 $\mathcal{B}^d = \mathcal{B}^d_{low}\cup\mathcal{B}^d_{res}\cup\mathcal{B}^d_{hi}$，由$S$、$r$、$\epsilon$确定，且满足：

$$\sum_{\psi\in\mathcal{B}^d_{hi}} \|\widehat{\psi}\|^2_{L^2(S(r))} + \sum_{\psi\in\mathcal{B}^d_{low}} \|\widehat{\psi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\setminus S(r))} \le \epsilon^2/4 \quad \text{(II.5)}$$

其中 $\#\mathcal{B}^d_{res} \le C_d\max\{r^{d-1}\log(r/\epsilon)^{5/2}, \log(r/\epsilon)^{(5/2)d}\}$。这里，$C_d$ 是一个仅由 d决定的维数常数。

证明命题 II.7 时，我们在 [8]中应用命题 5.3，其中 $\delta = c_d\epsilon^2/r^d$。关于 (II.5) 的证明，参见 [8]中引理 5.4 和 5.6 的估计。

定理 *I.1* 的证明。算子 $\mathcal{T}_{F,\,S} = B_S P_F B_S$ 和$P_F B_S P_F$ 具有相同的特征值（参见 [11] 中引理 1 的证明）。由引理 II.5 和命题 II.7 可得此界。 □

开放问题 2： 超越张量系统，将前述构造推广，以证明命题 II.7 的一个类似结论，其中 Q 和 S 是欧几里得球，即 $Q = B(0,1)$，$S(r) = B(0,r)$。也就是说，我们要构造一个系统 $\mathcal{B}^d$，使其成为 $L^2(B(0,1))$ 的框架，并且对每个 $\epsilon>0$，$\mathcal{B}^d$ 都存在一个分解 $\mathcal{B}^d = \mathcal{B}^d_{low}\cup\mathcal{B}^d_{res}\cup\mathcal{B}^d_{hi}$，满足 (II.5)，其中 $\#\mathcal{B}^d_{res} \le C_d r^{d-1}\log(r/\epsilon)^J$，且某个指数为 J。

根据 [15],引理 3.1，此界可恢复关于局部化算子$\mathcal{T}_{Q,\,S(r)}$ [15, 6]的已知谱估计。此外，我们预计相关框架还可进一步用于信号处理任务，例如信号恢复和去噪。

参考文献

[1] P. Auscher、G. Weiss 和 V. Wickerhauser。《Coifman 和 Meyer 的局部正弦与余弦基及光滑小波的构造》。载于：《小波：理论与应用教程》（1993），第 237–256 页。[2] A. Bonami、P. Jaming 和 A. Karoui。“sinc 核算子谱的非渐近行为及相关应用”。载于：《数学物理杂志》62（2021），第 033511 页。[3] R.R. Coifman 和 Y. Meyer。“关于傅里叶分析 ´a fen´ etre 的几点说明”。载于：《巴黎科学院院报》312（1991），第 259–261 页。[4] M.A. Davenport、S. Karnik 和 J. Romberg。“长旋转椭球波函数与离散长椭球序列特征值的改进界”。载于：《应用与计算调和分析》55（2021），第 97–128 页。[5] K. Gr¨ochenig。《时频分析基础》。施普林格科学与商业媒体，2001。[6] K. Hughes、A. Israel 和 A. Mayeli。“高维时空谱限制算子的特征值分布，II”。载于：*arXiv:2403.13092*；即将在 *JFAA* 发表（2025）。[7] A. Israel。“时频局部化算子的特征值分布”。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:1502.04404*（2015）。[8] A. Israel 和 A. Mayeli。“高维时空谱限制算子的特征值分布”。载于：《应用与计算调和分析》70（2024），第 101620 页。[9] A. Kulikov。“骤降区之前时频局部化算子特征值的指数下界”。载于：《应用与计算调和分析》71（2024），第 101639 页。[10] H.J. Landau。“时域与频域限制概述”。载于：《傅里叶技术与应用》（1985），第 201–220 页。[11] H.J. Landau。“某些整函数的采样与插值的必要密度条件”。载于：《数学学报》117（1967），第 37–52 页。[12] H.J. Landau。“相空间展开的密度”。载于：*IEEE* 信息论汇刊39.4（1993），第 1152–1156 页。[13] H.J. Landau 和 H.O. Pollak。“长旋转椭球波函数、傅里叶分析与不确定性——II”。载于：《贝尔系统技术期刊》40.1（1961），第 65–84 页。[14] H.J. Landau 和 H.O. Pollak。“长旋转椭球波函数、傅里叶分析与不确定性——III：本质上受时域和频带限制的信号空间维数”。载于：《贝尔系统技术期刊》41.4（1962），第 1295–1336 页。[15] F. Marceca、J.L. Romero 和 M. Speckbacher。“两个区域上的傅里叶集中算子的特征值估计”。载于：《理性力学与分析档案》248.35（2024）。[16] A. Osipov. “关于长旋转椭球波函数相关特征值的若干上界”。载于：《应用与计算调和分析》35.2 (2013)，第 309–340 页。[17] H.O. Pollak 和 D. Slepian. “长旋转椭球波函数、傅里叶分析与不确定性——I”。载于：《贝尔系统技术期刊》40.1 (1961)，第 43–64 页。[18] D. Slepian. “长旋转椭球波函数、傅里叶分析与不确定性——IV：推广到多维；广义长旋转椭球函数”。载于：《贝尔系统技术期刊》43.6 (1964)，第 3009–3058 页。[19] D. Slepian. “长旋转椭球波函数、傅里叶分析与不确定性——V：离散情形”。载于：《贝尔系统技术期刊》57.5 (1978)，第 1371–1430 页。