arXiv:2601.06950v1 [math.RA] 11 Jan 2026

局部矩阵代数的保归一化秩与保行列式映射

OKSANA BEZUSHCHAK

Abstract. 设 A 是一个含幺局部矩阵代数。这类代数的例子包括：(1) 域 $\mathbb{F}$上矩阵代数的无限张量积 $\otimes M_{n_i}(\mathbb{F})$；(2) 特征不为 2 的代数闭域上无限维向量空间中非退化二次型的克利福德代数。

我们描述了保持归一化秩的含幺局部矩阵代数之间的线性映射 $A \to B$ 。当 $\mathbb{F}$ 是实数域或复数域时，我们还描述了保持归一化行列式的线性映射 $A \to A$ 。

1. Introduction

设 $\mathbb{F}$ 是一个域，令 $M_n(\mathbb{F})$表示 $\mathbb{F}$上 $n \times n$ 阶矩阵构成的代数。对于矩阵$a \in M_n(\mathbb{F})$, 分别用 $r(a)$和 $\det(a)$表示 a的秩和行列式。令a^t 为 a的转置矩阵。

线性映射 $\varphi\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ **保行列式**（分别地，**秩**）当

$$\det(a) = \det(\varphi(a)) \quad (\text{ respectively } r(a) = r(\varphi(a)))$$

对任意矩阵 $a \in M_n(\mathbb{F})$。

G. Frobenius [15] 证明了每个保行列式线性映射都具有如下形式

$$\varphi(a) = XaY, \quad a \in M_n(\mathbb{F}), \quad \text{or} \quad \varphi(a) = Xa^tY, \quad a \in M_n(\mathbb{F}),$$

其中 X, Y 是可逆的 $n \times n$ 矩阵，且 $\det(XY) = 1$.

G. Frobenius 的结果之后，出现了各个方向上的深入推广；例如参见 [11, 13, 18]。

华罗庚 [17], H.G. Jacob [20], 和 M. Marcus 与 B.N. Moyls [25]证明，每个秩保持线性映射 $\varphi\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ 都具有如下形式

$$\varphi(a) = XaY, \quad a \in M_n(\mathbb{F}), \quad \text{or} \quad \varphi(a) = Xa^tY, \quad a \in M_n(\mathbb{F}),$$

其中 X，Y是可逆的 $n \times n$ 矩阵。

2020 数学主题分类。15A15, 15A86, 47B49（主要）15A30, 15A66, 16W10（次要）。关键词和短语。克利福德代数、行列式保持映射、（无限）张量积、约当同态、局部矩阵代数、保持映射、秩保持映射。

M. Breˇsar 和 P. ˇSemrl [8], M. Omladiˇc 和 P. ˇSemrl [26], 以及 J. Huang、K. Kuday- bergenov 和 F. Sukochev [19]将这些结果推广到了算子代数的无限维情形。

设 A, B 为结合 $\mathbb{F}$-代数。称线性映射 $\varphi\colon A \to B$ 为**约当同态**，若对于任意元素 $a \in A$，都有 $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$。关于 Jordan 同态的更多信息和最新结果，参见 [10]。

上述定理的一个核心内容是，满足条件 $\varphi(1) = 1$, 的线性行列式（或秩）保持映射 $\varphi\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ 是一个约当同态。

本文将秩（或行列式）保持映射的描述推广到局部矩阵代数。

回顾一下，若结合 $\mathbb{F}$-代数 A 中的每个有限子集都包含于某个子代数中，且该子代数同构于某个矩阵代数 $M_n(\mathbb{F})$，其中 n，则称 A 为**局部矩阵代数**。若一个代数含有单位元，则称其为**含幺**代数。

设 $\mathbb{N}$ 为正整数集。**Steinitz数** [27] 是如下形式的无限形式乘积

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p}, \tag{1}$$

其中 $\mathbb{P}$ 是所有素数的集合，$r_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ 对所有 $p \in \mathbb{P}$ 均成立。我们可以按以下规则定义两个 Steinitz 数的乘积:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p} \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{k_p} = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p+k_p}, \quad r_p, k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\},$$

其中我们假设

$$r_p + k_p = \begin{cases} r_p + k_p, & \text{if } r_p < \infty \text{ and } k_p < \infty, \\ \infty, & \text{in other cases} \end{cases}.$$

对于带有单位元 1_A 的含幺局部矩阵代数 A，考虑集合

$$D(A) = \{\, n \geq 1 \mid \text{there exists a subalgebra } A' \text{ such that } 1_A \in A' \subset A,\ A' \cong M_n(\mathbb{F}) \,\}.$$

如果 $\mathbb{F}$代数 A 是无限维的，那么集合 $D(A)$是无限集。因此，$D(A)$中所有整数的最小公倍数是一个由素数组成的无穷乘积，即一个Steinitz数。我们称这个最小公倍数为该代数A 的**Steinitz数**，并记作$\mathbf{st}(A)$（参见 [6, 16]）。

J. Glimm [16]证明，两个含幺可数维局部矩阵代数 A和 B 同构，当且仅当$\mathbf{st}(A) = \mathbf{st}(B)$。对于不可数维代数，情况不再如此；参见 [6]。

下面来看一些含幺局部矩阵代数的例子。

例 1. 设 $A_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$、 $i \in I$ 是一族矩阵代数。那么，（无限）张量积

$$A = \bigotimes_{i \in I} A_i$$

是一个含幺局部矩阵代数，并且

$$\mathbf{st}(A) = \prod_{i \in I} n_i.$$

例 2. 设 V 是代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的一个无限维向量空间，特征$\mathbb{F} \neq 2$。设 $f\colon V \to \mathbb{F}$ 是一个非退化二次型。那么，克利福德代数 $\mathrm{Cl}(V, f)$ 是一个含幺局部矩阵代数，并且 $\mathbf{st}(\mathrm{Cl}(V, f)) = 2^{\infty}$.

G. K¨othe [22] 证明了，每个可数维含幺局部矩阵代数都同构于例1中的无限张量积。这些代数在一致超有限 $\mathbb{C}^*$代数 [16] 中稠密，并且在物理学中有重要应用；参见 [7]。

此外，在特征为 $\neq 2$ 的代数闭域上，Steinitz数为 2^{∞}的可数维含幺局部矩阵代数可以实现为例2中的克利福德代数。

设 A 为一个含幺局部矩阵代数。对于元素 $a \in A$，选取一个包含 1_A 和 a 的子代数$A' \subset A$ ，使得 $A' \cong M_n$（$\mathbb{F}$）。V. Kurochkin [23] 注意到，归一化秩

$$\overline{r}(a) = \frac{r(a)}{n}$$

不依赖于子代数 A'的选择。

现在设 $\mathbb{F}$为实数域或复数域。与上文一样，令 A 为一个含幺局部矩阵代数。对于元素 $a \in A$，选取一个包含 1_A 和 a 的子代数$A' \subset A$ ，使得$A' \cong M_n$（$\mathbb{F}$）。于是，**归一化行列式**定义为

$$\overline{\det}(a) = |\det(a)|^{\frac{1}{n}},$$

并且不依赖于子代数 A' 的选择；参见 [3]。

因此，含幺局部矩阵代数具有定义良好的归一化秩，并且在 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$的假设下，具有归一化行列式函数。

非幺局部矩阵代数已在 [1, 4, 12]中得到研究。这类代数最简单的例子是无限有限支撑矩阵代数。

设 $\dim_{\mathbb{F}} A = \aleph_0$。 $1 \in M_{n_1}(\mathbb{F}) \subset M_{n_2}(\mathbb{F}) \subset \cdots$是一个矩阵代数的递增链，使得

$$\bigcup_{i\geq 1} M_{n_i}(\mathbb{F}) = A.$$

$M_{n_i}(\mathbb{F})$的转置映射可扩张为 $M_{n_{i+1}}(\mathbb{F})$上的转置映射。因此，代数 A 配备了转置映射 t：$A \to A$.

结合代数 ψ： $A \to B$ 之间的线性映射称为**反同态**，如果对于任意元素 a_1， $a_2 \in A$, 都有 $\psi(a_1a_2) = \psi(a_2)\psi(a_1)$。转置是反同态的一个例子。

定理1。 设 A和 B 是域 $\mathbb{F}$ 上的含幺局部矩阵代数，且其特征不为2。设 φ： $A \to B$ 是一个保持归一化秩的线性映射。那么存在正交幂等元 $e_1, e_2 \in B$, $e_1 + e_2 = 1_B$； 一个同态φ_1： $A \to e_1Be_1$, $\varphi_1(1_A) = e_1$； 一个反同态 $\varphi_2 : A \to e_2Be_2$, $\varphi_2(1_A) = e_2$； 以及可逆元 $X, Y \in B$， 使得

$$\varphi(a) = X\big(\varphi_1(a) + \varphi_2(a)\big)Y.$$

注 1. [2]中描述了可数维含幺局部矩阵代数的含幺自同态。

推论1. 若满射线性映射 $\varphi : A \to B$ 保持归一化秩，则存在同构或反同构 $\psi : A \to B$ 以及可逆元$X, Y \in B$， 使得 $\varphi(a) = X\,\psi(a)\,Y$, $a \in A$.

事实证明，保归一化秩线性映射 $A \to A$的描述取决于 Steinitz数 $\mathbf{st}(A)$。

若 Steinitz数 (1) 满足以下条件，则称其为**局部有限**：对所有素数 p， $k_p < \infty$ 。

推论2. 若 *Steinitz*数 $\mathbf{st}(A)$ 是局部有限的，则每个保归一化秩线性映射 $A \to A$ 要么是同态，要么是反同态。若$\mathbf{st}(A)$ 不是局部有限的，且 维数$_{\mathbb{F}} A = \aleph_0$，则存在一个保归一化秩线性映射 $A \to A$， 它既不是同态，也不是反同态。

定理 2. </style}设 , 是域 或 上的含幺局部矩阵代数。设： $A \to B$ 是一个保持归一化行列式的满射线性映射。那么 φ 属于以下类型之一：

$$\varphi(a) = X\,\varphi_1(a)\,Y, \quad a \in A,$$

其中 $\varphi_1\colon A \to B$ 是一个同构，或者

$$\varphi(a) = X\,\varphi_2(a)\,Y, \quad a \in A,$$

其中 $\varphi_2\colon A \to B$ 是反同构；此处 X、$Y \in B$ 是可逆元，且 $\det(XY) = 1$。

2. Rank-preserving mappings

结合代数中的元素 e 称为**幂等元**，如果 $e^2 = e$。

引理 1. 设 $\varphi\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_m(\mathbb{F})$ 是一个保持归一化秩并将单位矩阵 I_n 映射为单位矩阵 I_m 的线性映射。那么 φ 是约当同态。

证明。众所周知，在一个 n 维空间上的线性变换 A 是幂等的，当且仅当 $V = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$。用矩阵术语表示，这意味着矩阵 $a \in M_n(\mathbb{F})$ 是幂等的，当且仅当

$$r(a) + r(I_n - a) = n,$$

或者，等价地，

$$\overline{r}(a) + \overline{r}(I_n - a) = 1.$$

这意味着，幂等元 $a \in M_n(\mathbb{F})$ 的像 $\varphi(a)$ 是 $M_m(\mathbb{F})$ 中的一个幂等元。

M. Breˇsar 和 P. ˇSemrl [9] 证明了，如果从 $M_n(\mathbb{F})$ 到任意结合 $\mathbb{F}$-代数的线性映射将幂等元映射为幂等元，那么它就是一个约当同态。这就完成了引理的证明。□

定理*1*的证明。设 $A' \subset A$ 是 A 的一个子代数，使得 $1_A \in A'$ 和 $A' \cong M_n(\mathbb{F})$。选取一个子代数 $B' \subset B$，使得 $\varphi(A') \subseteq B'$ 且 $B' \cong M_m(\mathbb{F})$。根据引理1，限制映射 $\varphi|_{A'}\colon A' \to B'$ 是一个约当同态。这意味着 $\varphi\colon A \to B$ 是一个约当同态。

对于任意整数 $n \in D(A)$，选取一个包含 1_A 的子代数 $A' \subset A$，使得 $A' \cong M_n(\mathbb{F})$。令 $C_A(A')$ 为代数 A中 A' 的中心化子。众所周知（见 [14]），A 同构于张量积 $A' \otimes_{\mathbb{F}} C_A(A')$；因此

$$A \cong M_n\big(C_A(A')\big).$$

现在，由 N. Jacobson 和 C. Rickart 关于矩阵代数上的 Jordan 同态的结果，定理1立即得证。这就完成了定理1的证明。□

推论*1*的证明。设满射线性映射 $\varphi\colon A \to B$ 保持归一化秩。若幂等元 $e_1, e_2 \in A$ （见定理1）均非零，则

$$\varphi(A) \subseteq e_1Be_1 + e_2Be_2, \quad \varphi(A) = B.$$

但是 $B \neq e_1Be_1 \oplus e_2Be_2$，因为代数 B 是单的。这个矛盾证明了该推论。□

推论*2*的证明。 假设 Steinitz数 $s = \mathbf{st}(A)$ 是局部有限的，并且$e_1, e_2 \in A$ 是满足 $e_1 + e_2 = 1_A$ 的非零正交幂等元。设 $\varphi_1\colon A \to e_1Ae_1$是一个同态，且 $\varphi_1(1_A) = e_1$；再设 $\varphi_2\colon A \to e_2Ae_2$ 是一个反同态，且 $\varphi_2(1_A) = e_2$。

如果 $1_A \in A' \subset A$ 是 A的局部矩阵子代数，那么 $\mathbf{st}(A')$ 整除 $\mathbf{st}(A)$。因此，$s \mid \mathbf{st}(e_1Ae_1)$ 和 $s \mid \mathbf{st}(e_2Ae_2)$. 令

$$s = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{k_p}, \quad k_p < \infty.$$

存在一个子代数 $M_n(\mathbb{F}) \subset A$，使得 $e_1, e_2 \in M_n(\mathbb{F})$，并且

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_t^{k_t}.$$

设 r_i 是矩阵代数 $M_n(\mathbb{F})$ 中幂等元 e_i 的秩， $i = 1, 2$. 在 [5] 中我们证明了

$$\mathbf{st}(e_iAe_i) = \frac{r_i}{n}\, s.$$

由于 $\varphi_1\colon A \to e_1Ae_1$ 是保单位嵌入，因此可得 $s \mid \frac{r_1}{n} s$。只有当 $r_1 = n$ 时这才可能，矛盾。我们已经证明， $e_1 = 1_A$ 或 $e_2 = 1_A$。在第一种情况下，φ 是同态；在第二种情况下， φ 是反同态。

注2。 显然，每个保单位（反）同态 $\varphi\colon A \to A$ 都保持归一化秩。***A. Kurosh*** [24] 证明了，每个可数维含幺局部矩阵代数都有一个并非满射的保单位端同态。关于这类自同态的另一种证明及其描述，参见 [2]。

现在假设代数 A 是可数维的，且 $\mathbf{st}(A) = p^\infty \cdot s'$。选取一个子代数 $1 \in M_p(\mathbb{F}) \subset A$。那么 $A \cong M_p(A')$，其中 A' 是子代数 $M_p(\mathbb{F})$ 的中心化子。我们有 $\mathbf{st}(A) = p \cdot \mathbf{st}(A')$，因此 $\mathbf{st}(A) = \mathbf{st}(A')$。根据 J. Glimm定理， $A \cong A'$。令 $\psi\colon A \to A'$ 为一个同构。

我们在上文已经证明，每个可数维含幺局部矩阵代数 A都有一个反自同构 $a \mapsto a^t$, $a \in A$。含幺同态

$$A \to A, \quad a \to \operatorname{diag}\big(\underbrace{\psi(a), \ldots, \psi(a)}_{p-1}, \psi(a^t)\big)$$

既不是同态，也不是反同态。这就完成了推论 2 的证明。

□

3. Determinant-preserving mappings: proof of Theorem 2

本节中，我们假设 $\mathbb{F}$ 是实数域或复数域。令 $\deg\ f(t)$ 表示多项式 $f(t) \in \mathbb{F}[t]$ 的次数。

引理 2. 设 $a \in M_n(\mathbb{F})$ 是一个 $n \times n$ 矩阵。那么

$$r = r(a) = \max\{\deg \det(ta + b) \mid b \in M_n(\mathbb{F})\}.$$

证明。 左侧和右侧在进行行列初等变换后均保持不变。因此，不失一般性，我们可以假设

$$a = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0), \quad \lambda_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq r.$$

对于任意矩阵 $b = (b_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{F})$，有

$$\det(ta + b) = t^r \lambda_1 \cdots \lambda_r \cdot \det \begin{bmatrix} b_{r+1,r+1} & \cdots & b_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,r+1} & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix} + \sum_{i<r} t^i (\cdots).$$

这就得到了该引理的结论。 □

引理3。我们有

$$\overline{r}(a) \leq \overline{r}(\varphi(a)) \tag{2}$$

对于任意元素 $a \in A$。

证明。 对于元素 $a \in A$，取一个包含单位元 1_A 和元素 a的子代数 $A' < A$ ，使得 $A' \cong M_n(\mathbb{F})$。存在一个子代数$B' \subset B$ ，使得 $\varphi(A') \subseteq B'$ 且 $B' \cong M_m(\mathbb{F})$。我们需要证明

$$\frac{r(a)}{n} \leq \frac{r(\varphi(a))}{m}.$$

首先，我们注意到

$$\det(ta + a')^m = \det\big(t\varphi(a) + \varphi(a')\big)^n \tag{3}$$

在 $\mathbb{F}[t]$ 中，对任意元素 a， $a' \in A'$，等式 (3) 两边都是多项式，而域 $\mathbb{F}$ 是无限的。因此，对于任意的 $\alpha \in \mathbb{F}$，我们有

$$\det(\alpha a + a')^m = \det\big(\alpha\varphi(a) + \varphi(a')\big)^n.$$

根据引理 2， $r(a) = \max\{\deg \det(ta + a') \mid a' \in A'\}$. 因此，

$$m\, r(a) = \max\{\deg \det(ta + a')^m \mid a' \in A'\}.$$

根据上述内容，

$$\det(ta + a')^m = \det\big(t\varphi(a) + \varphi(a')\big)^n.$$

因此，

$$m \cdot r(a) = n \cdot \max\{\deg \det(t\varphi(a) + \varphi(a')) \mid a' \in A\} \leq$$
$$n \cdot \max\{\deg \det(t\varphi(a) + b) \mid b \in B'\} = n \cdot r(\varphi(a)).$$

引理的证明至此完成。 □

推论 3。 该映射 φ 是一个双射。

事实上，不等式（2）意味着 $\ker \varphi = \{0\}$。
逆　　线性映射 φ^{-1} 也保持归一化行列式。因此　　e

$$\overline{r}(\varphi(a)) \leq \overline{r}(a), \quad a \in A,$$

因此

$$\overline{r}(a) = \overline{r}(\varphi(a)).$$

由定理1，存在同构或反同构 ψ: $A \to B$ 以及可逆元 X， $Y \in B$ ，使得 $\varphi(a) = X\psi(a)$ Y对所有 $a \in A$均成立。取 $a = 1_A$，可得$XY = \varphi(1_A)$，这意味着 $\det(XY) = 1$，从而完成定理 2 的证明。

Acknowledgment

作者感谢 Karimbergen Kudaybergenov 提请其关注这一问题，并感谢 Matej Bre˘sar 的宝贵讨论。

References

[1] A. A. Baranov, 《带对合的单结合代数直接极限的分类及相应的维数群》, J. Algebra **381** (2013), 73-95. 1[2] O. Bezushchak, 《局部矩阵代数的导子与自同构》, J. Algebra**576**(2021), 1-26. 1, 2[3] O.Bezushchak, 《周期无限矩阵群的同构》, Eur. J. Math. **9**(4) (2023), article number 89. 1[4] O. Bezushchak, 《局部矩阵代数的谱》, Algebra Discrete Math. **31**(1) (2021), 17-36. 1

[5] O. Bezushchak, B. Oliynyk, 《Morita 等价的含幺局部矩阵代数》, Algebra Discrete Math. 29(2) (2020), 173-179. 2[6] O. Bezushchak, B. Oliynyk, 《含幺局部矩阵代数与 Steinitz 数》, J. Algebra Appl. 19(9) (2020). 1[7] O. Bratteli, D. W. Robinson, 《算子代数与量子统计力学》, I & II, Springer Verlag, 2nd ed., (1987, 1997). 1[8] M. Breˇsar, P. ˇSemrl, 《B(X) 上的线性保持映射》, Banach Center Publications 38(1) (1997), 49-58. 1[9] M. Breˇsar, P. ˇSemrl, 《保持幂等元的映射、局部自同构与局部导子》, Can. J. Math. 45(3) (1993), 483-496. 2[10] M. Breˇsar, E. Zelmanov, 《Jordan 同态：综述》, arXiv:2510.16876v1 [math.RA] 1[11] J. Dieudonn´e, 《关于四变量正交群的一种推广》, Archiv d. Math. 1 (1948), 282-287. 1[12] J. Dixmier, 《Glimm 研究的某些 C^*-代数》, J. Funct. Anal. 1 (1967), 182-203. 1[13] G. Dolinar, P. ˇSemrl, 《矩阵代数上的保持行列式映射》, Linear Algebra Appl. 348(1-3) (2002), 189-192. 1[14] Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko, 《有限维代数》, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg– New York, (1994). 2.[15] G. Frobenius, 《有限群通过线性代换的表示》, Sitzungs- berichte der K¨oniglich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1897), 994-1015. 1[16] J. G. Glimm, 《关于某类算子代数》, Trans. Amer. Math. Soc. 95(2) (1960), 318-340. 1, 1[17] L. K. Hua, 《关于矩阵及其在 Grassmann 空间中的应用的一个定理》, Science Reports of the National Tsing Hua University, Ser. A 5 (1948), 150-181. 1[18] H. Huang, C.-N. Liu, P. Szokol, M.-C. Tsai, J. Zhang, 《矩阵的保持迹和行列式映射》, Linear Algebra Appl. 507 (2016), 373-388. 1[19] J. Huang, K. Kudaybergenov, F. Sukochev, 《II_1-因子上的秩度量等距映射与保持行列式映射》, arXiv:2506.11428. 1[20] H. G. Jacob, 《Kronecker 积上的相干不变映射》, Amer. J. Math. 77 (1955), 177-189. 1[21] N. Jacobson, C. E. Rickart, 《环的 Jordan 同态》, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 479-502. 2[22] G. K¨othe, 《中心上的无限秩斜域》, Math. Ann., 105 (1931), 15–39. 1[23] V. M. Kurochkin, 《关于局部单代数与局部正规代数理论》, Mat. Sb., Nov. Ser. 22(64)(3) (1948), 443-454. 1[24] A. Kurosh, 《单环的直分解》, Mat. Sb., Nov. Ser. 11(53)(3) (1942), 245-264. 2[25] M. Marcus, B. N. Moyls, 《矩阵代数上的线性变换》, Canad. J. Math. 11 (1959), 61-66. 1[26] E. Omladiˇc and P. ˇSemrl, 《保持秩一算子的加性映射》, Linear Algebra Appl. 182 (1993), 239-256. 1[27] E. Steinitz, 《域的代数理论》, Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik 137 (1910), 167-309. 1

Oksana Bezushchak: Faculty of Mechanics and Mathematics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Volodymyrska, 60, Kyiv 01033, Ukraine
电子邮件地址：bezushchak@knu.ua