arXiv:2601.06951v1 [math.DG] 11 Jan 2026

关于紧流形上第一个非零 Steklov 特征值下界的注记

Yiwei Liu 和 Yi-Hu Yang*

2026年1月13日

摘要

设 $(\Omega^{n+1},\ g)$ 是一个 $(n+1)$ 维光滑紧致连通黎曼流形，具有光滑边界 Σ，并满足 $\mathrm{Ric}_\Omega \geq 0$ 且 Σ 严格凸；更确切地说，其第二基本形式 $h \geq cg_\Sigma$，其中 c 为某个正数常数。Escobar [3] 研究了 $(\Omega^{n+1},\ g)$ 的第一个非零 Steklov 特征值 σ_1，并证明了当 $n=1$ 时 $\sigma_1 \geq c$，以及当 $n \geq 2$ 时 $\sigma_1 > \frac{c}{2}$。随后，他猜想 [4] 第一个非零 Steklov 特征值 $\sigma_1 \geq c$。最近，Xia and Xiong [21] 通过构造一个权函数并利用适当的积分恒等式，证明了在 Ω 具有非负截面曲率的情形下 Escobar 猜想成立。在本文中，我们在一定的截面曲率假设下构造了一个新的权函数，并给出了第一个非零 Steklov 特征值的一些新下界，这些结果可以看作是 Escobar 和 Xia-Xiong 结果的推广。作为该权函数的一个应用，我们还研究了共形变换下第一个非零 Steklov 特征值的下界估计。

1 引言

设 (Ω^{n+1}, g) 是一个 $(n+1)$ 维的 $(n \geq 1)$ 光滑紧致连通黎曼流形，其边界为光滑边界 $\partial\Omega = \Sigma$。Steklov特征值问题如下（见 [11] 和 [19]）

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u, & \text{on } \Sigma, \end{cases} \tag{1}$$

其中，Δ 是 Ω 的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，ν 是 Σ 上的外单位法向量。众所周知，特征值问题 (1) 的谱是非负的、离散的且无界：

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \to +\infty.$$

*部分得到中国国家自然科学基金（项目编号：12071283）的资助

对于第 第一个非零 Steklov 特征值 σ_1，我们还知道 that

$$\sigma_1 = \inf_{u\in C^\infty(\Sigma),\int_\Sigma u da=0} \frac{\int_\Omega |\nabla(\mathcal{H}u)|^2 dA}{\int_\Sigma u^2 da}, \tag{2}$$

其中， $\mathcal{H}u$ 是 u 在 Ω 中的调和延拓。有关 Steklov特征值问题的更多信息，感兴趣的读者也可以参阅 [6]。

本文通过构造新的权函数并运用适当的积分恒等式，给出了若干与第一个非零 Steklov 特征值 σ_1 相关的结果。

1.1 与 Escobar 猜想相关的第一个非零 Steklov 特征值下界估计

在 [16], 中，Payne 利用最大值原理证明：对于有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，如果边界曲线的测地曲率 k_g 满足 $k_g \geq c > 0$，那么 Ω 的第一个非零 Steklov 特征值 σ_1 满足 $\sigma_1 \geq c$，且等号成立当且仅当 Ω 是半径为 $\frac{1}{c}$ 的圆盘。后来，Escobar [3] 用类似的方法将 Payne 的结果推广到了高斯曲率非负的二维紧流形上。在高维情形中，他还通过运用 Reilly公式（见 [18]） [3] 为满足 $\mathrm{Ric}_\Omega \geq 0$ 和 $h \geq cg_\Sigma > 0$的紧流形（Ω^{n+1}， g）给出了一个非锐估计$\sigma_1 > \frac{c}{2}$，其中 $h \geq cg_\Sigma > 0$表示 $\Sigma \geq c > 0$的主曲率。

基于上述结果，Escobar 提出了以下猜想（见 [4]）。

Escobar 猜想：设(Ω^{n+1}, g) 是一个$(n+1)$维紧致、连通且边界光滑的黎曼流形，其边界为 Σ。假设 $Ric_\Omega \geq 0$且 $h \geq cg_\Sigma > 0$。那么，第一个非零 *Steklov* 特征值 σ_1满足

$$\sigma_1 \geq c.$$

此外，当且仅当Ω 与半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得球等距时，等号成立。

当 Ω 是赋予旋转不变度量的球时，Monta˜no [14] 已证明了这一猜想（另见 [23]）。我们还注意到，Monta˜no[15] 证明了这一猜想对欧氏椭球成立。后来，Xia and Xiong[21]证明了 Escobar 猜想对截面曲率非负的流形成立。值得指出的是，他们的方法主要基于加权 Reilly 型公式（见 [17]）、Pohozaev 型恒等式（见[22]）以及一个特殊的权函数

$$V = \rho - \frac{c}{2}\rho^2,$$

其中， $\rho = d(\cdot, \Sigma)$ 是到边界 Σ 的距离函数。感兴趣的读者还可以参阅 [2] 和 [12], 以了解有关 σ_1 的更多信息。

本文首先给出一些与 Escobar 猜想相关的结果。为方便起见，我们介绍必要的概念。

设 (Ω^{n+1}, g) 为一个 $(n+1)$ 维的 $(n \geq 2)$ 光滑紧致连通黎曼流形，其边界光滑，为 Σ，且 $\rho = d(\cdot, \Sigma)$ 是到 Σ 的距离函数。现在我们回顾割点的概念。对于 $p \in \Sigma$，考虑带弧长参数的测地线 $\gamma_p(t) = \exp_p(-t\nu(p))$。于是我们知道，点 $\gamma(t_0)$ 是 Σ 的割点，当且仅当

$$t_0 = \sup\{t > 0 \mid \rho(\gamma_p(t)) = t\}.$$

令 $\mathrm{Cut}(\Sigma)$ 表示 Σ 的所有割点组成的集合。我们知道，集合 $\mathrm{Cut}(\Sigma)$ 的 $(n+1)$ 维豪斯多夫测度为零，且函数 ρ 在 $\Omega \backslash \mathrm{Cut}(\Sigma)$ 上光滑。此外，对于 $\forall\, x \in \Omega \backslash \mathrm{Cut}(\Sigma)$，令 $\gamma\colon [0, \rho(x)] \to \Omega$ 为带弧长参数的极小测地线，使得当 $t \in [0, \rho(x)]$，时，$t = \rho(\gamma(t))$，其中$\gamma(0) \in \Sigma$ 且 $\gamma(\rho(x)) = x$。我们知道这条测地线是唯一的。基于这条唯一测地线，我们将 $K(x)$ 定义为

$$K(x) = \inf\{\mathrm{Sec}_\Omega(\gamma'(\rho(x)) \wedge X) \mid X \in T_x\Omega,\, |X| = 1,\, X \perp \gamma'(\rho(x))\},$$

其中，Sec_Ω 是 Ω 的截面曲率。我们称 $K(x)$ 为 x处径向截面曲率的下确界。令

$$K = \inf\{K(x) \mid x \in \Omega \setminus \mathrm{Cut}(\Sigma)\}.$$

现在，我们可以陈述我们的结果。通过构造新的权函数 V，运用适当的积分恒等式并结合 Escobar 的结果，我们首先针对满足 $\mathrm{Ric}_\Omega \geq 0$ 和 $h \geq cg_\Sigma > 0$ 的 $(n+1)$ 维 $(n \geq 2)$ 紧流形，给出一个关于下确界 K 和常数 $c > 0$ 的 σ_1 的一般下界。

定理 1.1。 设 (Ω^{n+1}, g) 是一个$(n+1)$维$(n \geq 2)$ 具有光滑边界 Σ 的光滑紧致连通黎曼流形。假设 $Ric_\Omega \geq 0$ 且 $h \geq cg_\Sigma > 0$。则第一个非零 *Steklov* 特征值 σ_1 满足

$$\sigma_1 \geq \sigma(c, K),$$

其中

$$\sigma(c, K) = \begin{cases} c, & K \geq 0, \\ c\cosh\left(\dfrac{\sqrt{|K|}}{c}\right) - \sqrt{|K|}\sinh\left(\dfrac{\sqrt{|K|}}{c}\right), & K_0 \leq K \leq 0, \\ \dfrac{c}{2}, & K \leq K_0, \end{cases}$$

且 $K_0 \in (-\infty, 0)$ 是满足下式的唯一数

$$c\cosh\left(\frac{\sqrt{|K_0|}}{c}\right) - \sqrt{|K_0|}\sinh\left(\frac{\sqrt{|K_0|}}{c}\right) = \frac{c}{2}.$$

此外，当且仅当Ω 与半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得球等距时，等号成立；此时，$K = 0$, $\sigma_1 = \sigma(c, K) = c$。

备注。 (1) 我们指出，当 $K \geq 0$ 时，定理 1.1 实际上是 Xia and Xiong 在 [21] 中的结果；当 $K \leq K_0$ 时，定理 1.1 就是 Escobar 在 [3] 中的结果。(2) 我们还指出，

$$\lim_{K\to 0}\left[c\cosh\left(\frac{\sqrt{|K|}}{c}\right)-\sqrt{|K|}\sinh\left(\frac{\sqrt{|K|}}{c}\right)\right]=c,$$

$$\lim_{K\to -\infty}\left[c\cosh\left(\frac{\sqrt{|K|}}{c}\right)-\sqrt{|K|}\sinh\left(\frac{\sqrt{|K|}}{c}\right)\right]=-\infty$$

且函数 $t\to c\cosh\left(\frac{t}{c}\right)-t\sinh\left(\frac{t}{c}\right)$ 在 $t>0$ 时严格单调递减，因此数值 K_0 唯一存在，我们的估计也可视为对 Escobar 的结果的改进。

(3) 在 [12], 中，作者实际上证明了当 $K<0$ 时，

$$\sigma_1 > \begin{cases} c+\dfrac{K}{c}, & -\dfrac{c^2}{2}\leq K<0, \\ \dfrac{c}{2}, & K\leq -\dfrac{c^2}{2}. \end{cases}$$

另一方面，利用函数 $c\cosh\left(\frac{t}{c}\right)-t\sinh\left(\frac{t}{c}\right)$ 在 $t>0$ 中严格单调递减这一性质，直接计算可得$K_0<-\frac{c^2}{2}$，且当 $K\in[-\frac{c^2}{2},0)$ 时，

$$c\cosh\left(\frac{\sqrt{|K|}}{c}\right)-\sqrt{|K|}\sinh\left(\frac{\sqrt{|K|}}{c}\right)>c+\frac{K}{c}.$$

因此，定理 1.1 实际上涵盖了 [12] 中的结果。

根据定理 1.1 的结论，我们得到以下刚性结果。

推论 1.2。 设(Ω^{n+1},g) 与定理 *1.1* 中相同，且 $K\geq K_0$。假设存在一个非恒定调和函数 $f\in C^\infty(\Omega)$ 以及定义在 Σ 上的正连续函数 $k\leq\sigma(c,K)$，满足

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}=kf.$$

那么，Ω 与半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得球等距，且函数 k 必须为 c。

定理 1.1 的证明主要基于积分恒等式以及一个更一般的权函数 V。下面简要介绍我们的思路。设 $(\Omega^{n+1},\ g)$ 是一个具有光滑边界 Σ 的 $(n+1)$ 维光滑紧致连通黎曼流形，且 $\rho=d(\cdot,\ \Sigma)$ 是到 Σ 的距离函数。设

$$\rho_{\max}=\max_{\Omega}\rho$$

并且 $f \in C([0,\rho_{\max}])$ 是一个连续函数。假设里奇曲率 $\mathrm{Ric}_\Omega \geq 0$、径向截面曲率 $K(x) \geq f(\rho(x))$ 的下确界、 $\forall x \in \Omega\backslash \mathrm{Cut}(\Sigma)$ 以及第二基本形式 $h \geq cg_\Sigma > 0$。令 $\theta \in C^2([0,\rho_{\max}])$ 为以下方程组的唯一解

$$\begin{cases} \theta'' + F\theta = 0, \\ \theta(0) = 1, \\ \theta'(0) = -c, \end{cases}$$

其中

$$F(t) = \min\{0, \min_{x\in[0,t]} f(x)\}$$

且 $V(t) = \int_0^t \theta(s)ds$。于是，权函数（也记作 V）由下式给出:

$$V(x) = V(\rho(x)) = \int_0^{\rho(x)} \theta(s)ds.$$

我们很容易证明，对于 $V \in C^3(\Omega\backslash \mathrm{Cut}(\Sigma))$，有.....。基于曲率假设以及关于 ρ 的 Hessian 比较定理（见[10]中的定理 2.31），我们可以证明

$$\nabla^2(-V)|_x(X,X) \geq c + (\widehat{F}V)(x)$$

^对于 $x \in \Omega\backslash \mathrm{Cut}(\Sigma)$ 以及任意单位 $X \in T_x\Omega$，均成立，其中 $F = F \circ \rho$。

应当指出，函数 V 可视为 Xia and Xiong 的权函数的一般化。事实上，若假设 $f \equiv 0$，容易证明

$$V = \rho - \frac{c}{2}\rho^2.$$

在定理 1.1 的证明中，通过选取 $f \equiv K$，我们可以证明

$$V = \begin{cases} \rho - \dfrac{c}{2}\rho^2, & K \geq 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{|K|}}\sinh(\sqrt{|K|}\rho) - \dfrac{c}{|K|}\cosh(\sqrt{|K|}\rho) + \dfrac{c}{|K|}, & K < 0. \end{cases}$$

为确保权函数 V可以用于积分恒等式，我们仍需考虑对 V进行适当的逼近。通过类似于 Xia and Xiong 的论证，我们可以证明存在 V的 Greene-Wu 型逼近$V_\epsilon \in C^3(\Omega)$，满足 $\nabla^2(-V_\epsilon) \geq (c + \widehat{F}V - \epsilon)g$，对任意充分小的 ϵ >0均成立。我们将在第 3 节详细介绍权函数及其 Greene-Wu 型逼近。

这里还要指出，如果我们加强关于里奇曲率的条件，就可以通过权函数和积分恒等式证实 Escobar 猜想。事实上，我们有如下

定理 1.3。 设 (Ω^{n+1}, g) 是一个 $(n+1)$维（$n \geq 2$）光滑紧致连通黎曼流形，具有光滑边界 Σ，且 $f \in C([0, \rho_{\max}])$是一个连续函数。假设

- 里奇曲率 $Ric_\Omega \geq |\widehat{F}|g$,
- 径向截面曲率的下确界 $K(x) \geq f(\rho(x))$，$\forall x \in \Omega \setminus Cut(\Sigma)$，
- 第二基本形式 $h \geq cg_\Sigma > 0$。则第一个非零 *Steklov* 特征值 σ_1 满足

$$\sigma_1 \geq c.$$

此外，当且仅当Ω 与半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得球等距时，等号成立；在此情况下 $f \equiv 0$。

备注。 定理 1.3 也可视为 Xia and Xiong 在 [21]中的结果的推广。

当 f 单调不增时，我们知道

$$F = \min\{0, f\}.$$

由定理 1.3 可得

推论 1.4。 设 (Ω^{n+1}, g) 是一个$(n+1)$维（$n \geq 2$）光滑紧致连通黎曼流形，其边界光滑，为 Σ，且 $f \in C([0, \rho_{\max}])$是一个单调不增的连续函数。假设

- 里奇曲率 $Ric_\Omega \geq |\min\{0, f \circ \rho\}|g$,
- 径向截面曲率的下确界 $K(x) \geq f(\rho(x))$，$\forall x \in \Omega \setminus Cut(\Sigma)$,
- 第二基本形式 $h \geq cg_\Sigma > 0$。

那么，第一个非零 *Steklov* 特征值 σ_1 满足

$$\sigma_1 \geq c.$$

此外，当且仅当Ω 与半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得球等距时，等号成立；此时 $f \equiv 0$。

1.2 共形变换下第一个非零 Steklov 特征值的下界估计

基于上一小节引入的权函数，我们还可以给出共形变换下第一个非零 Steklov 特征值 σ_1 的一个结果。我们继续使用上一小节中定义的常数 K。

设 (Ω^2, g) 是一个具有光滑边界 Σ的紧致曲面，且 $\widehat{g} = e^{2f}g$是与 g共形的度量，其中 $f \in C^\infty(\Omega)$ 是满足$f|_\Sigma = 0$的光滑函数。记 $\sigma_1(\widehat{g})$ 为相对于度量 $\widehat{g}$的第一个非零 Steklov 特征值。

在 [3], 中，基于狄利克雷积分是共形不变量这一事实，Escobar 证明了：如果高斯曲率 K_g 非负，且边界的测地曲率 k_g 满足 $k_g \geq c > 0$，那么第一个非零 Steklov 特征值 $\sigma_1(\widehat{g})$ 满足 $\sigma_1(\widehat{g}) = \sigma_1 \geq c$。事实上，对于任意 $u \in C^\infty(\Omega)$，我们有

$$\frac{\int_\Omega |\nabla_{\widehat{g}} u|^2 dA_{\widehat{g}}}{\int_\Sigma u^2 da_{\widehat{g}}} = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dA}{\int_\Sigma u^2 da}.$$

结论由最大值最小值原理以及 Escobar 关于二维情形的猜想即可得出。

受上述结果启发，我们考虑高维流形在共形变换下第一个非零 Steklov 特征值的下界估计。请注意，在这种情况下，Escobar 的方法并不奏效；但幸运的是，基于权函数 V，我们有如下结果

定理 1.5。设 (Ω^{n+1}, g) 是一个$(n+1)$维光滑紧致连通黎曼流形，其边界为 $n \geq 2$，且满足 $Ric_\Omega \geq 0$ 和 $h \geq cg_\Sigma > 0$。设 $f \in C^\infty(\Omega)$ 是一个满足 $f|_\Sigma = 0$ 且 $\nabla^2 f \leq \frac{1}{n-1}$最小值$\{0, K\}g$ 的光滑函数。则关于度量 $\widehat{g} = e^{2f} g$ 的第一个非零 *Steklov* 特征值 $\sigma_1(\widehat{g})$ 满足

$$\sigma_1(\widehat{g}) \geq c.$$

此外，当且仅当(Ω, g) 与半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得球等距，且 $f \equiv 0$时，等号成立。

对于具有 $K \geq 0$的流形，我们知道 $\min\{0, K\} = 0$。于是，由定理 1.5 可得

推论1.6。设(Ω^{n+1}, g) 是一个$(n+1)$维（$n \geq 2$）光滑紧致连通黎曼流形，其边界 Σ 光滑，满足 $Ric_\Omega \geq 0$, $K \geq 0$ 且 $h \geq cg_\Sigma > 0$。设 $f \in C^\infty(\Omega)$ 为满足 $f|_\Sigma = 0$的凹函数。则关于度量 $\widehat{g} = e^{2f} g$ 的第一个非零 *Steklov* 特征值 $\sigma_1(\widehat{g})$ 满足

$$\sigma_1(\widehat{g}) \geq c.$$

此外，当且仅当(Ω, g) 与半径为$\frac{1}{c}$ 的欧几里得球等距，且 $f \equiv 0$时，等号成立。

对于 $\sigma_1(\widehat{g}) > c$ 的情形，我们也可以给出一个例子。

例1.7。设 $\mathbb{B}^{n+1}$ 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个 $n+1$ 维单位球（）。$\mathbb{B}^{n+1}$ 的边界是一个 n 维单位球面 $\mathbb{S}^n$。在这种情况下，$c = 1$。由 *[21],* 中的命题 *3.3*可知，存在一个定义在Ω 上的光滑函数 f，满足

$$f|_{\mathbb{S}^n} = 0$$

and

$$\nabla^2 f \leq -\frac{1}{2} g_{euc} < 0,$$

其中 g_{euc} 是标准欧几里得度量。设 $\widehat{g} = e^{2f} g_{euc}$，于是我们知道

$$\sigma_1(\widehat{g}) > 1.$$

除了权函数外，定理 1.5 的证明还依赖于关于度量 $\widehat{g}$ 下拉普拉斯算子 $\Delta_{\widehat{g}}$ 的积分恒等式。这些恒等式由加权 Reilly 型公式、 Pohozaev 型恒等式，以及观察到 $\Delta_{\widehat{g}} = e^{-2f}\mathbb{L}_{-(n-1)f}$ 推导而来，其中 $\mathbb{L}_{-(n-1)f}$ 是加权拉普拉斯算子，其定义如下

$$\mathbb{L}_{-(n-1)f} = \Delta + (n-1)\langle \nabla f, \cdot \rangle.$$

基于 $\Delta_{\widehat{g}} = e^{-2f}\mathbb{L}_{-(n-1)f}$ 这一事实，我们还指出，第一个非零 Steklov 特征值 $\sigma_1(\widehat{g})$ 等于第一个非零 Steklov 型特征值 τ_1，其中 Steklov 型特征值问题如下（见 [1]）

$$\begin{cases} \mathbb{L}_{-(n-1)f} u = 0, & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \tau u, & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

我们的定理 1.5 还表明，第一个非零 Steklov 型特征值 $\tau_1 \geq c$。关于第一个非零 Steklov 型特征值 τ_1 的下界估计，读者可参见 [1]。

本文组织如下。第 2 节介绍一些基本定义以及后文所需的积分恒等式。第 3 节着重讨论权函数的构造及其 Greene-Wu 型逼近。第 4 节考察与 Escobar 猜想相关的第一个非零 Steklov 特征值下界，并证明定理 1.1 和定理 1.3。第 5 节研究共形变换下的第一个非零 Steklov 特征值，并给出定理 1.5 的证明。

2 预备知识

本节主要介绍后续证明所需的基本概念和积分恒等式。

设 (Ω^{n+1}, g) 是一个 $(n+1)$ 维光滑紧致连通黎曼流形，其边界 $\partial\Omega = \Sigma$ 光滑，且 g_Σ 是 Σ 上的诱导度量；记 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 Ω 上的内积，也表示 Σ。分别记 ∇^Ω、 ∇、 Δ 和 ∇^2 为 Ω 上的联络、梯度、拉普拉斯算子和海森矩阵；分别记 ∇_Σ 和 Δ_Σ 为 Σ 上的梯度和拉普拉斯算子。设 ν 为 Σ上的外单位法向量。分别记 h 和 H为相对于 ν的 Σ 的第二基本形式和平均曲率，其中

$$h(X, Y) = -\langle \nabla^\Omega_X Y, \nu \rangle$$

and

$$H = \mathrm{tr}_g h.$$

Σ 的主曲率定义为 h的特征值。令 Ric_Ω为 Ω 的里奇曲率张量。令 dA 和 da 分别为 Ω 和 Σ 的典范体积元。

设 ϕ 是 Ω 上的一个光滑函数。记 $\mathbb{L}_\phi$ 为 Ω 上的加权拉普拉斯算子，记 $\mathbb{L}_\phi^\Sigma$ 为 Σ 上的加权拉普拉斯算子，其中

$$\mathbb{L}_\phi = \Delta - \langle \nabla\phi, \nabla\cdot\rangle$$

and

$$\mathbb{L}_\phi^\Sigma = \Delta_\Sigma - \langle \nabla_\Sigma\phi, \nabla_\Sigma\cdot\rangle.$$

记 Ric^ϕ $_\Omega$为 Ω 的 Bakry-Émery-Ricci 张量，其中

$$\mathrm{Ric}_\Omega^\phi = \mathrm{Ric}_\Omega + \nabla^2\phi.$$

记 H_ϕ 为相对于 ν 的 Σ 的加权平均曲率，其中

$$H_\phi = H - \frac{\partial\phi}{\partial\nu}.$$

$(\Omega^{n+1}, g, e^{-\phi}dA)$ 通常称为光滑度量测度空间。关于度量测度空间的更多信息，请参阅 [20] 。

现在，我们介绍证明中将用到的积分恒等式。这些公式可通过标准计算直接证明，读者也可参阅 [1]。

第一个是加权拉普拉斯算子的以下加权 Reilly 型公式。

命题 2.1。 设 (Ω^{n+1}, g) 是一个$(n+1)$维的 $(n \geq 2)$ 光滑紧致连通黎曼流形，其边界光滑。设 Σ, V 是 Ω 上的几乎处处二阶可微函数，且 ϕ 是Ω上的光滑函数。那么，对于任意光滑函数 u，有

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega V\Big((\mathbb{L}_\phi u)^2 - |\nabla^2 u|^2\Big)e^{-\phi}dA \\
=&\int_\Sigma V\left[2(\mathbb{L}_\phi^\Sigma u)\frac{\partial u}{\partial\nu} + H_\phi\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 + h(\nabla_\Sigma u, \nabla_\Sigma u)\right]e^{-\phi}da \\
&+\int_\Sigma \frac{\partial V}{\partial\nu}|\nabla_\Sigma u|^2 e^{-\phi}da \\
&+\int_\Omega \Big((\nabla^2 V - \mathbb{L}_\phi V g + V Ric_\Omega^\phi)(\nabla u, \nabla u)\Big)e^{-\phi}dA.
\end{aligned} \tag{3}$$

备注。 我们指出，当 $V \equiv 1$ 时，(3) 是加权拉普拉斯算子的 Reilly 型公式（见 [13]）；当 $\phi =$ 为常数时，(3) 是 [17] 中的加权 Reilly 型公式；当 $V \equiv 1$ 和 $\phi =$ 为常数时，(3) 就是经典 Reilly 公式（见 [18]）。

第二个是以下关于加权拉普拉斯算子的 Pohozaev 型恒等式。

命题 2.2. 设 (Ω^{n+1}, g) 是一个$(n+1)$维紧致（$n \geq 2$）连通黎曼流形，具有光滑边界 Σ， X 是Ω 上的 *Lipschitz* 连续向量场， ϕ是Ω上的光滑函数。那么，对于任意满足 $\mathbb{L}_\phi u = 0$ 的光滑函数 u ，有

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\langle \nabla^\Omega_{\nabla u} X, \nabla u \rangle - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 div_\phi(X) \right) e^{-\phi} dA \\ =& \int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \langle X, \nabla u \rangle - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \langle X, \nu \rangle \right) e^{-\phi} da, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $div_\phi = div - \langle \nabla \phi, \cdot \rangle$ 表示Ω上的加权散度算子。

备注。 我们指出，当 $\phi =$ 为常数时，(4) 就是 [22] 中的 Pohozaev 型恒等式。

3 权函数的构造及其 Greene-Wu 型逼近

本节着重介绍权函数的构造及其 Greene-Wu 型逼近。

令 (Ω^{n+1}, g) 为一个 $(n+1)$ 维 $(n \geq 2)$ 光滑紧致连通黎曼流形，其边界为光滑边界 Σ，且 $\rho = d(\cdot, \Sigma)$ 为到 Σ 的距离函数。令

$$\rho_{\max} = \max_\Omega \rho$$

且 $f \in C([0, \rho_{\max}])$ 为一个连续函数。在 $\forall x \in \Omega \backslash \mathrm{Cut}(\Sigma)$ 中，我们定义了径向截面曲率 $K(x)$ 的下确界。

在本节中，我们始终假设里奇曲率 $\mathrm{Ric}_\Omega \geq 0$、径向截面曲率 $K(x)$ 的下确界 $\geq f(\rho(x))$、 $\forall x \in \Omega \setminus \mathrm{Cut}(\Sigma)$，以及第二基本形式 $h \geq c g_\Sigma > 0$。我们将为上述流形 Ω 提出权函数。

我们首先指出，根据曲率假设，我们有（见[5]）

$$\rho_{\max} \leq \frac{1}{c}. \tag{5}$$

定义 F 为

$$F(t) = \min\{0, \min_{x \in [0,t]} f(x)\},$$

于是我们知道， F 在 $[0,\rho_{\max}]$上非正、单调不增且连续，并且 $K(x) \geq F(\rho(x))$, $\forall x \in \Omega \setminus \mathrm{Cut}(\Sigma)$。令 $\theta \in C^2([0,\rho_{\max}])$为以下方程组的唯一解

$$\begin{cases} \theta'' + F\theta = 0, \\ \theta(0) = 1, \\ \theta'(0) = -c. \end{cases}$$

于是我们得到

命题 3.1。 $\forall t \in [0,\rho_{\max}]$，函数 θ 满足

$$\theta(t) \geq 1 - ct. \tag{6}$$

^证明。令 $\theta = 1 - ct$，于是我们得到

$$\begin{cases} \widehat{\theta}'' = 0, \\ \widehat{\theta}(0) = 1, \\ \widehat{\theta}'(0) = -c. \end{cases}$$

设 $\min \theta < 0$，令 $\theta_0 \in (0,\rho_{\max})$ 为 θ 的第一个零点，则在区间 $[0,\theta_0)$ 上，我们有

$$(\theta'\widehat{\theta} - \widehat{\theta}'\theta)' = \theta''\widehat{\theta} - \widehat{\theta}''\theta = -F\theta\widehat{\theta} \geq 0,$$

这表明

$$\frac{\theta'}{\theta} \geq \frac{\widehat{\theta}'}{\widehat{\theta}}. \tag{7}$$

由不等式 (7) 和初始条件可知

$$\theta(t) \geq 1 - ct, \ \forall t \in [0,\theta_0].$$

因此我们得到 $\theta_0 \geq \frac{1}{c} \geq \rho_{\max}$，这与假设矛盾。至此，证明完成。

□

令 $V(t) = \int_0^t \theta(s)ds$，并将权函数（也记作 V）定义为

$$V(x) = V(\rho(x)) = \int_0^{\rho(x)} \theta(s)ds.$$

容易证明， V 在 Ω 和 $V \in C^3(\Omega \setminus \mathrm{Cut}(\Sigma))$ 上是 Lipschitz 连续的。由命题 3.1，我们还可得出， $V > 0$ 在 Ω° 中成立，且 $V'(\rho) \geq 1 - c\rho \geq 0$。此外，直接计算可得

$$V|_\Sigma = 0$$

and

$$\frac{\partial V}{\partial \nu}|_\Sigma = -\theta(0) = -1.$$

对于这个权函数 V，我们还有

命题 3.2。 设 V 为上文讨论的权函数，则对于 $\forall\ x \in \Omega$和 $X \in T_x\Omega$，若 $|X| = 1$, 我们有

$$C(-V(\rho))(x;X) \geq c + (\widehat{F}V)(x), \tag{8}$$

其中

$$C(-V(\rho))(x;X) = \liminf_{r\to 0} \frac{-V(\rho(\exp_x(rX))) - V(\rho(\exp_x(-rX))) + 2V(\rho(x))}{r^2}$$

$\widehat{\ }$且 $F = F \circ \rho$。特别地，若 $x \in \Omega \setminus Cut(\Sigma)$，我们也有

$$\nabla^2(-V)|_x(X,X) \geq c + (\widehat{F}V)(x).$$

证明。 $\forall\ x \in \Omega \setminus \mathrm{Cut}(\Sigma)$，令 $\gamma\colon [0,l] \to \Omega$ 为唯一的极小测地线，并以弧长参数参数化，使得对于 $t \in [0,l]$, $t = \rho(\gamma(t))$，其中 $\gamma(0) \in \Sigma$且 $\gamma(l) = x$。

由于 $V'(\rho) \geq 1 - c\rho \geq 0$，我们知道 $-V$是关于ρ的非增函数。于是，根据曲率假设以及关于ρ 的海森矩阵比较定理（参见 [10]中的定理 2.31），我们得出，对于任意满足 $|X| = 1$ 的 $X \in T_x\Omega$,

$$\begin{aligned} C(-V(\rho))(x;X) &\geq -V''(l)\langle\gamma'(l),X\rangle^2 - V'(l)\frac{\theta'(l)}{\theta(l)}(1 - \langle\gamma'(l),X\rangle^2) \\ &= -\theta'(l) \\ &= c + \int_0^l F(s)\theta(s)ds \\ &\geq c + F(l)V(l) \\ &= c + (\widehat{F}V)(x). \end{aligned}$$

由于 ρ 在 $\Omega \setminus \mathrm{Cut}(\Sigma)$ 上光滑，因此我们知道

$$\nabla^2(-V)|_x(X,X) = C(-V(\rho))(x;X) \geq c + (\widehat{F}V)(x).$$

$\forall\ x \in \mathrm{Cut}(\Sigma)$，令 $\gamma\colon [0,l] \to \Omega$ 为一条极小测地线，并以弧长参数参数化，使得对于 $t \in [0,l]$, $t = \rho(\gamma(t))$，其中 $\gamma(0) \in \Sigma$ 且 $\gamma(l) = x$。于是我们知道 $\forall\ t \in [0,l)$, 径向截面曲率的下确界

$$K(\gamma(t)) \geq f(t) \geq F(t).$$

根据曲率张量的连续性，我们知道 $\forall\ Y \in T_x\Omega$ 满足$|Y| = 1$ 和 $Y \perp \gamma'(l)$,

$$\mathrm{Sec}_\Omega(\gamma'(l) \wedge Y) \geq f(l) \geq F(l).$$

证明的其余部分与针对点 $\Omega\setminus\mathrm{Cut}(\Sigma)$ 的证明相同，因此省略。

□

现在考虑 V 的 Greene-Wu 型逼近。首先回顾 ξ-凸函数和 η-凸函数的定义（参见 [9]），其中 ξ 是一个实数，η 是一个连续函数。

定义 3.3。设 M 是一个黎曼流形，$\psi\colon M\to\mathbb{R}$ 是 M 上的连续函数，ξ 是一个实数。若存在一个正数常数 δ，使函数 $\Psi($ $x=$ $\psi\ x\ -\frac{\xi+\delta}{2}d^2\ p\ x$ p η $M\to\mathbb{R}$ $)\ ()\ (,)$ 在 的某个邻域内为凸函数，则称 ψ 在点 $p\in M$ 处是 ξ-凸函数。设：是一个连续函数，若对每个 $p\in M$，ψ 在 p 处都是 $\eta(p)$-凸的，则称 ψ 在 M 上是 η-凸的。

我们选取 Cut(Σ) 的三个邻域 O_1、O_2 和 O_3，使得

$$O_1\subset\subset O_2\subset\subset O_3\subset\subset\Omega,$$

其中，对于两个集合 A 和 B，“$A\subset\subset B$”表示“$A\subset B$ 且 A 是紧的”。于是我们有

命题 3.4。 $\forall\epsilon>0$，函数 $-V$ 在 O_3 上是$(c+FV-\epsilon)$-凸的。

证明。固定一个 $\epsilon>0$ 和一点 $p\in O_3$，我们只需证明函数 $-V$ 在 p 处是 $(c+(FV)(p)-\epsilon)$- 凸的。

令 $\widehat{F}V$ 在 O_3 上连续，因此我们可以选取 ϵ 的一个邻域 U_1，使得 $\forall q\in U_1$，

$$|(\widehat{F}V)(p)-(\widehat{F}V)(q)|<\frac{\epsilon}{10}.$$

此外，由于

$$\nabla^2(d^2(p,\cdot))|_p=2g_p,$$

我们可以选取 p 的一个邻域 U_2，使得 $\forall q\in U_2$，

$$2(1-\widehat{\epsilon})g_q\le\nabla^2(d^2(p,\cdot))|_q\le 2(1+\widehat{\epsilon})g_q, \tag{9}$$

其中 $\widehat{\epsilon}\in(0,\ \min\{1,\frac{\epsilon}{20(C+\delta)}\})$。令 $U=U_1\cap U_2$，现在我们证明函数

$$\Psi(q)=-V(q)-\frac{c+(\widehat{F}V)(p)-\epsilon+\delta}{2}d^2(p,q)$$

在 U 上是凸的。事实上，我们只需证明，对于任意 $q\in U$ 和任意单位 $X\in T_q\Omega$，

$$\Psi(\exp_q(rX))+\Psi(\exp_q(-rX))-2\Psi(q)\ge 0$$

当 $r>0$ 充分小时成立。根据命题 3.2，我们知道，当 r 充分小时，

$$-V(\exp_q(rX))-V(\exp_q(-rX))+2V(q)\ge\left(c+(\widehat{F}V)(q)-\frac{\epsilon}{2}\right)r^2.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}&\Psi(\exp_q(rX))+\Psi(\exp_q(-rX))-2\Psi(q)\\ \ge&\left(c+(\widehat{F}V)(q)-\frac{\epsilon}{2}\right)r^2-\frac{c+(\widehat{F}V)(p)-\epsilon+\delta}{2}A(r),\end{aligned}$$

其中 $A(r) = d^2(p, \exp_q(rX)) + d^2(p, \exp_q(-rX)) - 2d^2(p, q)$。由 (9) 可知

$$2(1-2\widehat{\epsilon})r^2 \le A(r) \le 2(1+2\widehat{\epsilon})r^2$$

当 r 足够小时。现在，如果 $c + (FV)(p) - \epsilon + \delta \ge 0$，那么我们有

$$\begin{aligned}
&\Psi(\exp_q(rX)) + \Psi(\exp_q(-rX)) - 2\Psi(q)\\
\ge&\left(c + (\widehat{F}V)(q) - \frac{\epsilon}{2}\right)r^2 - (c + (\widehat{F}V)(p) - \epsilon + \delta)(1+2\widehat{\epsilon})r^2\\
=&\left(\frac{2\epsilon}{5} + (\widehat{F}V)(q) - (\widehat{F}V)(p) - 2\widehat{\epsilon}(c + (\widehat{F}V)(p) - \epsilon + \delta)\right)r^2\\
\ge&\frac{\epsilon}{5}r^2\\
\ge&0.
\end{aligned}$$

类似地，我们也可以证明，当 $c + (FV)(p) - \epsilon + \delta < 0$ 时，$\Psi(\exp_q(rX)) + \Psi(\exp_q(-rX)) - 2\Psi(q) \ge 0$。至此，证明完成。 □

现在我们考虑 Greene-Wu 引入的黎曼卷积（见 [7–9]）。事实上，我们有

$$\widehat{V}_\tau(x) = \frac{1}{\tau^{n+1}}\int_{v\in T_x\Omega} V(\exp_x v)k\left(\frac{|v|}{\tau}\right)d\mu_x,$$

其中，μ_x 是由点 x 处的黎曼度量 g 在 $T_x\Omega$ 上确定的勒贝格测度，且 $k: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个光滑非负函数，其支集包含于 $[-1,1]$，在 0 的某个邻域内为正数常数，并满足

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} k(|x|)dx = 1.$$

为确保函数 V_τ 在 O_3 上定义良好，我们总是假设 $\tau < d(O_3, \Sigma)$。于是我们知道 V_τ 是 O_3 上的光滑函数。

现在我们需要以下关于通过黎曼卷积逼近 η-凸函数的结果（见 [7–9]）。

命题 3.5。设 f 是黎曼流形 M上的一个 η-凸函数，且 K 是 M的紧子集，其中 $\eta: M\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数。那么，存在 K 的一个邻域和一个 $\tau_0 > 0$，使得对所有 $\tau\in(0,\tau_0)$，f 的黎曼卷积 f_τ 在该邻域上是 η-凸的。

由命题 3.4 和 3.5 可得

命题 3.6。$\forall\epsilon > 0$，存在 $\tau_0 > 0$，使得对所有 $\tau\in(0, \tau_0)$，函数 $-V_\tau$ 在 O_2 上是 $(c + FV - \epsilon)$-凸的。

命题 3.6 表明 $\forall \tau \in (0,\ \tau_0)$,

$$\nabla^2(-\widehat{V}_\tau)|_x(X,X) \geq c + (\widehat{F}V)(x) - \epsilon$$

对于任意 $x \in O_2$ 以及任意满足 $|X| = 1$ 的 $X \in T_x\Omega$。

本节末尾，我们通过拼接过程完成对 V 的逼近的构造。

设 ϕ 是一个光滑的非负截断函数，使得 supp $\phi \subset O_2$，并且 $\phi \equiv 1$ 在 O_1 上。合适的逼近 V_τ 定义为

$$V_\tau = \phi\widehat{V}_\tau + (1-\phi)V. \tag{10}$$

容易证明，$V_\tau \in C^3(\Omega)$，$V_\tau \geq 0$ 在 Ω 上，且 $V = V_\tau$ 在 $\Omega \setminus O_2$。此外，我们有

$$V_\tau - V = \phi(\widehat{V}_\tau - V). \tag{11}$$

因此，根据黎曼卷积的性质（见 [7–9]）以及 (11)，我们有

$$\lim_{\tau\to 0} ||V_\tau - V||_{C^0(\Omega)} = 0.$$

现在我们考虑 $-V_\tau$ 的海森矩阵。事实上，我们有如下结论

命题 3.7。 $\forall \epsilon > 0$，存在一个足够小的 $\tau(\epsilon) > 0$

$$\nabla^2(-V_{\tau(\epsilon)}) \geq (c + \widehat{F}V - \epsilon)g.$$

证明。固定一个 $\epsilon > 0$。在 $\Omega \setminus O_2$ 上，我们知道 $V_\tau = V$，由命题 3.2 可得

$$\nabla^2(-V_\tau) \geq (c + \widehat{F}V)g.$$

在 O_1 上，我们知道 $V_\tau = V_\tau$，由命题 3.6 可知

$$\nabla^2(-V_\tau) \geq (c + \widehat{F}V - \epsilon)g$$

当 τ 足够小时。在 $O_2 \setminus O_1$ 上，根据黎曼卷积的性质（见 [7–9]）以及 (11)，我们知道

$$\lim_{\tau\to 0} ||V_\tau - V||_{C^2(\overline{O}_2 \setminus O_1)} = 0.$$

因此，对于 $\epsilon > 0$，我们知道存在一个 $\tau(\epsilon) > 0$，使得

$$\nabla^2(-V_{\tau(\epsilon)})|_x(X,X) \geq \nabla^2(-V)|_x(X,X) - \epsilon \geq c + \widehat{F}V(x) - \epsilon$$

对于任意 $x \in \overline{O}_2 \setminus O_1$ 以及任意满足 $|X| = 1$ 的 $X \in T_x\Omega$。至此，我们完成证明。□

总之，我们可以给出以下命题

命题 3.8。 设Ω 和 V 为上文讨论的流形和函数。取Ω中 $Cut(\Sigma)$ 的一个邻域 O 。那么 $\forall \epsilon > 0$，存在一个非负函数 $V_\epsilon \in C^3(\Omega)$，使得 $V_\epsilon = V$ 在$\Omega \setminus O$ 上成立，并且

$$\nabla^2(-V_\epsilon) \geq (c + \widehat{F}V - \epsilon)g.$$

特别地，我们还有

$$\lim_{\epsilon \to 0} ||V_\epsilon - V||_{C^0(\Omega)} = 0.$$

4 定理 1.1 和定理 1.3 的证明

本节主要证明定理 1.1 和定理 1.3。我们先证明定理 1.1。

设 (Ω^{n+1}, g) 如定理 1.1 中所述。通过选择 $f \equiv K$，我们知道 θ 满足

$$\begin{cases} \theta'' + \overline{K}\theta = 0, \\ \theta(0) = 1, \\ \theta'(0) = -c, \end{cases}$$

其中 $\overline{K} = \min\{0, K\}$。由此我们得出

$$\theta = \begin{cases} 1 - ct, & K \geq 0, \\ \cosh(\sqrt{|K|}t) - \dfrac{c}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}t), & K < 0, \end{cases}$$

and

$$V = \begin{cases} \rho - \dfrac{c}{2}\rho^2, & K \geq 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}\rho) - \dfrac{c}{|K|} \cosh(\sqrt{|K|}\rho) + \dfrac{c}{|K|}, & K < 0. \end{cases}$$

此外，根据命题 3.8 以及 $V \in C^\infty(\Omega \setminus \mathrm{Cut}(\Sigma))$ 这一事实，我们有

命题 4.1。 设 (Ω^{n+1}, g) 如定理 *1.1* 中所述，且 V 为上文讨论的权函数。固定 Ω 中 $Cut(\Sigma)$ 的一个邻域 O 。则 $\forall \epsilon > 0$，存在一个非负函数 $V_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$，使得 $V_\epsilon = V$ 在 $\Omega \setminus O$ 上成立，并且

$$\nabla^2(-V_\epsilon) \geq (c + \overline{K}V - \epsilon)g.$$

特别地，我们还有

$$\lim_{\epsilon \to 0} ||V_\epsilon - V||_{C^0(\Omega)} = 0.$$

随后，我们可以为定理 1.1 的证明给出一个关键不等式。

命题 4.2。 设 (Ω^{n+1}, g) 如定理 *1.1* 中所述，且 u 是 Ω 上的调和函数。则有

$$\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 da \geq \int_{\Omega}(c+\overline{K}V)|\nabla u|^2 dA. \tag{12}$$

证明。 根据 V_ϵ 的构造，我们知道

$$V_\epsilon|_\Sigma = 0$$

and

$$\frac{\partial V_\epsilon}{\partial \nu}|_\Sigma = -1.$$

根据命题 2.1 中的加权 Reilly 型公式（令 $\phi \equiv 0$），我们有

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} V_\epsilon|\nabla^2 u|^2 dA &= -\int_{\Sigma}|\nabla_\Sigma u|^2 da \\ &+ \int_{\Omega}(\nabla^2 V_\epsilon - \Delta V_\epsilon g + V_\epsilon \mathrm{Ric}_\Omega)(\nabla u, \nabla u) dA. \end{aligned} \tag{13}$$

此外，根据命题 2.2 中的 Pohozaev 型恒等式（令 $\phi \equiv 0$ 和 $X = \nabla V_\epsilon$），我们有

$$\int_{\Omega}(2\nabla^2 V_\epsilon - \Delta V_\epsilon g)(\nabla u, \nabla u) dA = \int_{\Sigma}\left(|\nabla_\Sigma u|^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2\right) da. \tag{14}$$

由（13）和（14），我们有

$$\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 da = \int_{\Omega}\Big(-\nabla^2 V_\epsilon(\nabla u, \nabla u) + V_\epsilon|\nabla^2 u|^2 + V_\epsilon \mathrm{Ric}_\Omega(\nabla u, \nabla u)\Big) dA. \tag{15}$$

根据命题 4.1、定理 1.1 中的曲率假设，并令 $\epsilon \to 0$，我们知道

$$\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 da \geq \int_{\Omega}(c+\overline{K}V)|\nabla u|^2 dA.$$

□

定理 *1.1* 的证明：令 u 为对应于第一个非零 Steklov 特征值 σ_1的特征函数。于是有

$$\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 da = \sigma_1^2 \int_{\Sigma} u^2 da \tag{16}$$

and

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dA = \sigma_1 \int_{\Sigma} u^2 da. \tag{17}$$

注意到 $-V$ 是 ρ 和 $\rho_{\max} \leq \frac{1}{c}$ 的非增函数，我们得出对于任意 $x \in \Omega$,

$$\overline{K}V(\rho(x)) \geq \overline{K}V\left(\frac{1}{c}\right).$$

由 (12)、(16) 和 (17)，我们得到

$$\sigma_1 \geq c + \overline{K}V\left(\frac{1}{c}\right) = \begin{cases} c, & K \geq 0, \\ c\cosh\left(\frac{\sqrt{|K|}}{c}\right) - \sqrt{|K|}\sinh\left(\frac{\sqrt{|K|}}{c}\right), & K \leq 0. \end{cases}$$

结合 [3] 中的定理 8 和定理 1.1 的备注，我们得出

$$\sigma_1 \geq \sigma(c, K),$$

其中

$$\sigma(c,K) = \begin{cases} c, & K \geq 0, \\ c\cosh\left(\frac{\sqrt{|K|}}{c}\right) - \sqrt{|K|}\sinh\left(\frac{\sqrt{|K|}}{c}\right), & K_0 \leq K \leq 0, \\ \frac{c}{2}, & K \leq K_0, \end{cases}$$

且 $K_0 \in (-\infty, 0)$ 是满足下列条件的唯一数

$$c\cosh\left(\frac{\sqrt{|K_0|}}{c}\right) - \sqrt{|K_0|}\sinh\left(\frac{\sqrt{|K_0|}}{c}\right) = \frac{c}{2}.$$

当 Ω 与半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得球等距时，我们知道 $K = 0$ 和 $\sigma_1 = \sigma(c, K) = c$.

现在我们假设 $\sigma_1 = \sigma(c, K)$。由于 $\sigma_1 > \frac{c}{2}$，我们知道 $K \in (K_0, \infty)$。由 (15)，我们得到

$$\begin{aligned} \sigma(c,K)\int_\Omega |\nabla u|^2 dA &= \int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 da \\ &= \int_\Omega \Big(-\nabla^2 V_\epsilon(\nabla u, \nabla u) + V_\epsilon |\nabla^2 u|^2 + V_\epsilon \mathrm{Ric}_\Omega(\nabla u, \nabla u)\Big) dA \\ &\geq \int_\Omega \Big((\sigma(c,K) - \epsilon)|\nabla u|^2 + V_\epsilon |\nabla^2 u|^2 + V_\epsilon \mathrm{Ric}_\Omega(\nabla u, \nabla u)\Big) dA. \end{aligned} \tag{18}$$

然后令 $\epsilon \to 0$，我们得到

$$\int_\Omega \Big(V|\nabla^2 u|^2 + V\mathrm{Ric}_\Omega(\nabla u, \nabla u)\Big) dA = 0.$$

于是得到以下小畑方程

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma(c,K) u, & \text{on } \Sigma. \end{cases} \tag{19}$$

然后，根据 [21] 中的命题 4.3 以及 $c \geq \sigma(c, K)$ 这一事实，我们得出 Ω 与半径为 $\frac{1}{\sigma(c,K)}$ 的欧几里得球等距，这表明 $K = 0$ 且 $\sigma_1 = \sigma(c, K) = c$。 □

推论 *1.2* 的证明：在定理 1.1 的证明中，我们仍使用权函数 V 及其 Greene-Wu 型逼近 V_ϵ。由于 $K \geq K_0$，我们知道 $\sigma(c, K) = c + KV(\frac{1}{c})$。由 (15) 以及 f 是调和函数这一事实可得

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (kf)^2 da &= \int_\Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)^2 da \\ &= \int_\Omega \Big(-\nabla^2 V_\epsilon(\nabla f, \nabla f) + V_\epsilon |\nabla^2 f|^2 + V_\epsilon \mathrm{Ric}_\Omega(\nabla f, \nabla f)\Big) dA \\ &\geq \left(c + \overline{K} V\left(\frac{1}{c}\right) - \epsilon\right) \int_\Sigma k f^2 da + \int_\Omega V_\epsilon |\nabla^2 f|^2 dA.\end{aligned}$$

然后令 $\epsilon \to 0$，可得

$$0 = \int_\Sigma \left(c + \overline{K} V\left(\frac{1}{c}\right) - k\right) k f^2 da + \int_\Omega V |\nabla^2 f|^2 dA,$$

这表明，当 $f \neq 0$ 且 $\nabla^2 f = 0$时，$k = \sigma(c, K)$。不失一般性，我们可以假设 $|\nabla f|^2 = 1$，于是得到 $|\nabla_\Sigma f|^2 + k^2 f^2 = 1$，这表明 $f^{-1}(0) \cap \Sigma$ 是 Σ的一个 $(n-1)$ 维子流形。因此，由 k的连续性可知，

$$k \equiv \sigma(c, K).$$

于是我们得出，f 是对应于第一个非零 Steklov 特征值 σ_1 的特征函数，且 $\sigma_1 = \sigma(c, K)$。根据定理 1.1，我们知道 Ω 与半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得球等距，并且 $k \equiv c$。 □

现在给出定理 1.3 的证明。与命题 4.2 类似，我们有

命题 4.3. 设(Ω^{n+1}, g) 如定理 *1.3* 中所述，且 u 是Ω上的调和函数。则有

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 da \geq c \int_\Omega |\nabla u|^2 dA. \tag{20}$$

证明。令 V 为第 3 节中讨论的权函数，V_ϵ 为命题 3.8 中 V 的 Greene-Wu 型逼近。通过类似于命题 4.2 的证明，我们得到

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 da = \int_\Omega \Big(-\nabla^2 V_\epsilon(\nabla u, \nabla u) + V_\epsilon |\nabla^2 u|^2 + V_\epsilon \mathrm{Ric}_\Omega(\nabla u, \nabla u)\Big) dA. \tag{21}$$

由命题 3.8、定理 1.3 中的曲率假设，并令 $\epsilon \to 0$，我们得到

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 da \geq \int_\Omega (c + (\widehat{F} + |\widehat{F}|)V)|\nabla u|^2 dA \geq c\int_\Omega |\nabla u|^2 dA.$$

□

定理 *1.3* 的证明：设 u 是对应于第一个非零 Steklov 特征值 σ_1 的特征函数。于是有

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 da = \sigma_1^2 \int_\Sigma u^2 da$$

and

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dA = \sigma_1 \int_\Sigma u^2 da.$$

由 (20) 可得

$$\sigma_1 \geq c.$$

当 Ω 与半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得球等距时，我们知道 $f \equiv 0$ 和 $\sigma_1 = c$。

现在假设 $\sigma_1 = c$。由 (21) 可得

$$\begin{aligned} c\int_\Omega |\nabla u|^2 dA &= \int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 da \\ &= \int_\Omega \Big(-\nabla^2 V_\epsilon(\nabla u, \nabla u) + V_\epsilon |\nabla^2 u|^2 + V_\epsilon \mathrm{Ric}_\Omega(\nabla u, \nabla u)\Big) dA \\ &\geq \int_\Omega \Big((c + \widehat{F}V + |\widehat{F}|V_\epsilon - \epsilon)|\nabla u|^2 + V_\epsilon |\nabla^2 u|^2 \Big) dA. \end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0$，可得

$$\int_\Omega V|\nabla^2 u|^2 dA = 0.$$

于是有如下小畑方程

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = cu, & \text{on } \Sigma. \end{cases} \tag{22}$$

于是，由 [21], 中的命题 4.3 可知，Ω 与半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得球等距，这表明 $\widehat{F} \equiv 0$ 和 $f \equiv 0$。□

5 定理1.5的证明

本节中，我们证明定理 1.5。首先，我们给出关于共形度量下的拉普拉斯算子与加权拉普拉斯算子之间的关系。

引理5.1。设（M^{n+1}、g）为一个黎曼流形，且 $\widehat{g}=e^{2f}g$，其中$f\in C^{\infty}$（M）。则

$$\Delta_{\widehat{g}}=e^{-2f}\mathbb{L}_{-(n-1)f}, \tag{23}$$

其中， $\Delta_{\widehat{g}}$ 是关于度量 $\widehat{g}$的拉普拉斯算子。

证明。设（x_1， x_2，$\cdots$， x_{n+1}）是 M中的一个坐标，且度量具有如下形式

$$g=g_{ij}dx^idx^j.$$

于是有

$$\widehat{g}=\widehat{g}_{ij}dx^idx^j=e^{2f}g_{ij}dx^idx^j.$$

对于任意光滑函数 $u\in C^{\infty}$（M），有

$$\begin{aligned}\Delta_{\widehat{g}}u&=\frac{1}{\sqrt{\widehat{g}}}\partial_{x_i}(\sqrt{\widehat{g}}\widehat{g}^{ij}\partial_{x_j}u)\\&=\frac{1}{e^{(n+1)f}\sqrt{g}}\partial_{x_i}(e^{(n-1)f}\sqrt{g}g^{ij}\partial_{x_j}u)\\&=e^{-2f}(\Delta u+(n-1)\langle\nabla f,\nabla u\rangle)\\&=e^{-2f}\mathbb{L}_{-(n-1)f}u.\end{aligned}$$

□

结合引理5.1与命题2.1和2.2，我们得到关于相对于共形度量的拉普拉斯算子的以下两个积分恒等式。

命题5.2. 设(Ω^{n+1},g) 是一个带有光滑边界的$(n+1)$维（$n\geq 2$）光滑紧致连通黎曼流形， Σ 且 V 是定义在Ω上的几乎处处二阶可微函数。设 $\widehat{g}=e^{2f}g$，其中 $f\in C^{\infty}$(Ω)是Ω上的光滑函数。则对于任意光滑函数 u，有

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}V\left((e^{2f}\Delta_{\widehat{g}}u)^2-|\nabla^2u|^2\right)e^{(n-1)f}dA\\=&\int_{\Sigma}V\left(2L^{\Sigma}_{-(n-1)f}u\frac{\partial u}{\partial\nu}+H_{-(n-1)f}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2+h(\nabla_{\Sigma}u,\nabla_{\Sigma}u)\right)e^{(n-1)f}da\\&+\int_{\Sigma}\frac{\partial V}{\partial\nu}|\nabla_{\Sigma}u|^2e^{(n-1)f}da\\&+\int_{\Omega}\left((\nabla^2V-e^{2f}\Delta_{\widehat{g}}Vg+VRic^{-(n-1)f}_{\Omega})(\nabla u,\nabla u)\right)e^{(n-1)f}dA.\end{aligned} \tag{24}$$

命题 5.3. 设(Ω^{n+1}, g) 是一个带有光滑边界的$(n+1)$维（$n \geq 2$）光滑紧致连通黎曼流形， Σ 且 $V \in C^2(\Omega)$是Ω上的二阶连续可微函数。设 $\widehat{g} = e^{2f}g$，其中 $f \in C^\infty(\Omega)$ 是Ω上的光滑函数。则对于任意关于度量 $\widehat{g}$为调和函数的光滑函数 u ，有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(\nabla^2 V(\nabla u, \nabla u) - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 e^{2f}\Delta_{\widehat{g}} V\right) e^{(n-1)f} dA \\ =&\int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\langle \nabla V, \nabla u\rangle - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial \nu}|\nabla u|^2\right) e^{(n-1)f} da.\end{aligned} \tag{25}$$

定理 *1.5* 的证明：我们仍使用命题 4.1 中的权函数 V及其 Greene-Wu 型逼近 V_ϵ 。令 u为对应于第一个非零 Steklov 特征值 $\sigma_1(\widehat{g})$的特征函数。由于 $f|_\Sigma = 0$，我们知道

$$\begin{cases}\Delta_{\widehat{g}} u = 0, & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma_1(\widehat{g}) u, & \text{on } \Sigma.\end{cases}$$

于是，由命题 5.2 和 5.3 可得

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega V_\epsilon |\nabla^2 u|^2 e^{(n-1)f} dA \\ =&-\int_\Sigma |\nabla_\Sigma u|^2 da \\ &+\int_\Omega \left((\nabla^2 V_\epsilon - e^{2f}\Delta_{\widehat{g}} V_\epsilon g + V_\epsilon \mathrm{Ric}_\Omega^{-(n-1)f})(\nabla u, \nabla u)\right) e^{(n-1)f} dA.\end{aligned} \tag{26}$$

and

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(\nabla^2 V_\epsilon(\nabla u, \nabla u) - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 e^{2f}\Delta_{\widehat{g}} V_\epsilon\right) e^{(n-1)f} dA \\ =&\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(|\nabla_\Sigma u|^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2\right) da.\end{aligned} \tag{27}$$

结合 (26) 和 (27)，可得

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 da \\ \geq&\int_\Omega \left(V_\epsilon |\nabla^2 u|^2 + (-\nabla^2 V_\epsilon + V_\epsilon \mathrm{Ric}_\Omega^{-(n-1)f})(\nabla u, \nabla u)\right) e^{(n-1)f} dA \\ \geq&\int_\Omega \left((-\nabla^2 V_\epsilon + V_\epsilon \mathrm{Ric}_\Omega - (n-1)V_\epsilon \nabla^2 f)(\nabla u, \nabla u)\right) e^{(n-1)f} dA.\end{aligned} \tag{28}$$

由命题 4.1、定理 1.5 中的假设并令 $\epsilon \to 0$，可得

$$\sigma_1(\widehat{g})\int_\Sigma u\frac{\partial u}{\partial \nu} da \geq c\int_\Omega |\nabla u|^2 e^{(n-1)f} dA.$$

由式 (23) 以及加权拉普拉斯算子的散度定理，我们知道

$$\int_{\Sigma} u\frac{\partial u}{\partial \nu}da = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 e^{(n-1)f} dA.$$

因此，我们得出 $\sigma_1(\widehat{g}) \geq c$。

当 (Ω, g) 与半径为 $\frac{1}{c}$ 且 $f \equiv 0$ 的欧几里得球等距时，我们知道 $\sigma_1(\widehat{g}) = c$.

现在我们假设 $\sigma_1(\widehat{g}) = c$。通过定理 1.1 证明中的类似计算，我们得到

$$\nabla^2 u = 0, \text{ in } \Omega \tag{29}$$

and

$$\nabla^2 f(\nabla u, \nabla u) = \frac{1}{n-1}\min\{0, K\}|\nabla u|^2, \text{ in } \Omega. \tag{30}$$

由于 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = cu$，根据 [21]，中的命题 4.3，我们得出 (Ω, g) 与半径为 $\frac{1}{c}$ 的欧几里得球等距，这表明 $K = 0$，且 u 是在标准欧几里得度量 g_{euc} 下对应于第一个非零 Steklov 特征值 c 的特征函数。为方便起见，我们假设

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1}(x_i)^2 \leq \frac{1}{c^2}\right\},$$

and

$$u = x_1.$$

然后根据 (30) 以及 $f|_{\Sigma} = 0$ 这一假设，我们知道

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0, & \text{in } \Omega, \\ f = 0, & \text{on } \Sigma, \end{cases}$$

这表明 Ω 上的 $f \equiv 0$。 □

参考文献

[1] Y. L. Deng、F. Du、J. Mao 和 Y. Zhao。尖锐特征值估计及相关刚性定理。*arXiv* 预印本 *arXiv:2003.13231*，2020。

[2] Jonah A. J. Duncan 和 A. Kumar。非负里奇曲率且边界为凸边界的流形上的第一 Steklov 特征值。《几何分析杂志》，35(3)：第 95 号论文，18 页，2025。

[3] J. F. Escobar. 第一非零 Stekloff 特征值的几何。《泛函分析杂志》，150(2):544–556, 1997.

[4] J. F. Escobar. 等周不等式与第一 Steklov 特征值。《泛函分析杂志》, 165(1):101–116, 1999.[5] J. Ge. 平均凸边界流形的比较定理。《当代数学通讯》, 17(5):1550010, 12, 2015.[6] A. Girouard and I. Polterovich. Steklov 问题的谱几何。《谱理论杂志》, 7(2):321–359, 2017.[7] R. E. Greene and H. Wu. 关于测地凸函数的次调和性与多重次调和性。《印第安纳大学数学杂志》, 22(7):641–653, 1972/73.[8] R. E. Greene and H. Wu. C^∞ 凸函数与正曲率流形。《数学学报》, 137(3–4):209–245, 1976.[9] R. E. Greene and H. Wu. C^∞ 凸函数、次调和函数与´多重次调和函数的逼近。Annales Scientifiques de l' Ecole Normale Sup ´erieure. Quatri `eme S ´erie, 12(1):47–84, 1979.[10] A. Kasue. 拉普拉斯比较定理与完备黎曼流形的函数论性质。《日本数学杂志》。新系列, 8(2):309–341, 1982.[11]N. Kuznetsov, T. Kulczycki, M. Kwa´s nicki, A. Nazarov, S. Poborchi, I. Polterovich, and B. Siudeja. 弗拉基米尔·安德烈耶维奇·斯捷克洛夫的遗产。《美国数学会通报》, 61(1):9–22, 2014.[12] Y. W. Liu and Y. H. Yang. 紧流形上第一 Steklov 特征值的下界估计。《中国数学年刊 B 辑》 (2026), https://doi.org/10.1007/s11401-026-0010-2.[13] L. Ma and S. H. Du. Reilly 公式的推广及其在漂移拉普拉斯算子特征值估计中的应用。Comptes Rendus. Math ´ematique, 348(21-22):1203–1206, 2010.[14] ´O. A. Monta˜no Carre˜no. 球上旋转不变度量的 Stekloff 问题。《科学杂志》, 47(3):181—190, 2013.[15] ´O. A. Monta˜no Carre˜no. Escobar 猜想与 n椭球上的第一 Steklov 特征值。《科学杂志》, 20(2):55–61, 2016.[16] L. E. Payne. 调和函数的一些等周不等式。《工业与应用数学学会数学分析杂志》, 1(3):354–359, 1970.[17] G. H. Qiu and C. Xia. Reilly 公式的推广及其在一种新的 Heintze–Karcher 型不等式中的应用。《国际数学研究通报》, 2015(17):7608–7619, 2015.

[18] R. Reilly. 黎曼流形上海森矩阵算子的应用。《印第安纳大学数学杂志》，26(3):459–472，1977。[19] W. Stekloff. 关于数学物理中的基本问题。《高等师范学校科学年刊》´高等师范学校´学报，19:455–490，1902。[20] G. F. Wei 和 W. Wylie. Bakry-´Emery Ricci 张量的比较几何。《微分几何杂志》，83(2):337–405，2009。[21] C. Xia 和 C. W. Xiong. 关于第一个非零 Steklov 特征值最佳下界的 Escobar 猜想。《北京数学杂志》，7(2):759–778，2024。[22] C. W. Xiong. 黎曼流形中区域上的 Steklov 特征值与其边界上的拉普拉斯特征值的比较。《泛函分析杂志》，275(12):3245–3258，2018。[23] C. W. Xiong. 关于扭曲积流形上三个 Steklov 特征值问题的谱。《几何分析杂志》，32(5):论文编号153，35页，2022。

Yiwei Liu：上海交通大学数学科学学院，电子邮件：
lyw201611012@sjtu.edu.cn

Yi-Hu Yang：上海交通大学数学科学学院，电子邮件：
yangyihu@sjtu.edu.cn