显式宇称-时间对称性破缺释放的隐性能量

Hong Qin,[1,2,*] William Dorland,[1,3,†] 和 Ben Y. Israeli[4,‡]
[1]美国新泽西州普林斯顿 *08540*，普林斯顿大学普林斯顿等离子体物理实验室
[2]美国新泽西州普林斯顿 *08540*，普林斯顿大学天体物理科学系
[3]美国马里兰州大学公园市 *20742*，马里兰大学物理系
[4]以色列雷霍沃特，魏茨曼科学研究所复杂系统物理系

arXiv:2601.06952v1 [physics.plasm-ph] 11 Jan 2026

摘要

研究表明，熟知的双流不稳定性是保守系统中自发宇称-时间（PT）对称性破缺的结果；更重要的是，黏度导致的显式PT对称性破缺，能够使系统在某些参数范围内变得不稳定，而这些范围在黏度为零时是稳定的。这揭示了复杂系统可能具有受PT对称性保护的隐藏自由能，而黏度虽具有耗散性，却能通过显式破坏PT对称性，使系统暴露于这些自由能之中。此过程伴随着不稳定性和全变差增长。

等离子体动力学复杂性的一个重要来源，是等离子体中不同带电组分之间的相互作用。由电磁场或静电场介导的两个带电组分之间的双流相互作用，已针对许多应用与器件得到广泛识别和研究 [1–9], 其中包括经典的开尔文-亥姆霍兹不稳定性和尾部隆起不稳定性等特殊情形。它还被用作数值算法和理论方法的标准基准。在本研究中，我们表明，保守的双流相互作用具有宇称-时间（PT）对称性，而熟知的双流不稳定性是由自发PT对称性破缺驱动的（见图1a）。更重要的是，我们表明有限黏度会显式破缺PT对称性（见图1b），这可能在某些参数范围内导致不稳定性；在没有黏度引起的显式PT对称性破缺时，这些参数范围内的动力学原本是稳定的。

黏度通过显式PT对称性破缺触发不稳定性的物理基础在于：PT 对称性对系统动力学施加了严格约束，只允许通过自发PT对称性破缺产生不稳定性。当黏度或其他耗散机制解除这些动力学约束后，系统会变得不那么“僵硬”或更加“滑脱”，从而可能在某些对于保守系统而言稳定的参数范围内产生不稳定性。

黏度带来的这一效应虽不令人意外，却颇为有趣；与之形成对照的是，在由标量双曲守恒律支配的简单系统中，黏度会使全变差不增。主要区别在于，双流相互作用的动力学更为复杂，包含更多自由度。包括黏度和摩擦在内的耗散效应会明确打破 PT 对称性的约束，使动力学暴露于低能态，而跃迁至低能态的过程伴随着不稳定性，因而导致全变差增

长。相比之下，较简单的系统不存在这类隐藏的低能态，黏度只会使场变量的全变差不增。

我们从以下含黏度的一维双流体方程组出发，

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(n_j v_j\right) = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_j}{\partial z} - \nu_j\frac{\partial^2 v_j}{\partial z^2} - \frac{q_j}{m_j}E + \frac{q_j}{n_j m_j}\frac{\partial p_j}{\partial z} = 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_j}{(m_j n_j)^{\gamma_j}}\right) = 0\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} - \sum_j 4\pi q_j n_j = 0\,. \tag{4}$$

其中，$j = 1,\ 2$ 为组分的指标，而 $q_j,\ m_j,\ \gamma_j$，以及 ν_j 分别表示各组分的电荷、质量、多方指数和黏度。方程（1）-（3）描述各组分的密度、速度和压力的动力学。两个组分之间的耦合由静电场介导，该电场由泊松方程（3）自洽地确定。假设平衡态（n_{j0}，v_{j0}，p_{j0}，E_0）是均匀的，且两个组分在 z 方向上均具有差分平衡流，即 $v_{10} \neq v_{20}$. 不存在平衡电场，即 $E_0 = 0$，其中 $\sum_j q_j n_{j0} = 0$。考虑密度、速度、压力和静电场的小扰动，其形式为

$$\tilde{n}_j, \tilde{v}_j, \tilde{p}_j, \tilde{E} \sim \exp(ikz - i\omega t). \tag{5}$$

该系统的线性动力学可以写成薛定谔方程的形式，

$$H\psi = \omega\psi\,, \tag{6}$$

$$H = \begin{pmatrix} v_{10} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & v_{20} & 0 & 1 \\ \omega_1^2 + v_{t1}^2 & -\omega_1^2 & v_{10} - i\nu_1 & 0 \\ -\omega_2^2 & \omega_2^2 + v_{t2}^2 & 0 & v_{10} - i\nu_2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\psi = \left(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2\right)^T\,. \tag{8}$$

在推导方程（6）—（7）时，采用了泊松方程（4）和能量方程（3作为约束条件˜，以消去 E 和 $\tilde{p}_j$，并用 $\tilde{n}_j$. 表示。所有量均为无量纲量。选取特征速度 V 对所有速度场进行归一化，所有频率

变量（包括 H）均由 kV 归一化。密度扰动 $\tilde{n}_j$ 由 n_{j0} 归一化， ν_j 由 k/V 归一化， $\omega_j^2 = 4\pi n_{j0} q_j^2/m_j k^2 V^2$ 是归一化等离子体频率的平方， $v_{tj}^2 \equiv \gamma_j p_{j0}/m_j V^2$ 是归一化热速度的平方。该系统由 8 个无量纲参数确定： $(\nu_1, \nu_2, v_{t1}, v_{t2}, v_{10}, v_{20}, \omega_1, \omega_2)$。

方程（6）呈现薛定谔方程的形式，但哈密顿量 H 显然不是厄米的，这在经典系统中很常见。非厄米系统的特征之一，例如辛 [10, 11], 伪哈密顿量 [12–17], 以及 PT 对称 [18–24] 系统，是它们存在不稳定性，即本征频率 ω 满足 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$. 非厄米系统的动力学更为复杂。对于双流相互作用，要绘制 8 维参数空间中的稳定性图颇具挑战性。PT 对称性分析 [24–27]为系统分析不稳定性对参数的依赖关系提供了一种方法。下面我们简要概述这一方法。

对于非厄米哈密顿量 H，我们可以探讨它是否遵循其他具有重要物理意义的对称性。其中一种对称性是 PT 对称性，它源自洛伦兹群——平直时空的齐次对称群。 PT 变换是洛伦兹群 $O(1, 3)$中的一个离散元素；该群作为拓扑流形，包含 4 个互不连通的分支。一般而言，我们预期物理规律仅在其中一个分支下保持不变，即保时定向洛伦兹群 $SO^+(1, 3)$。整个洛伦兹群$O(1, 3)$是 $SO^+(1, 3)$ 与离散子群 $\{1, \mathrm{P}, \mathrm{T}, \mathrm{PT}\}$ 的半直积，即

$$O(1,3) = SO^+(1,3) \rtimes \{1, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}\}, \tag{9}$$

其中 $\mathrm{P} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$， $\mathrm{T} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$。已知物理规律在 P 变换或 T 变换下并非不变，我们可以提出一个较弱的问题：物理规律在 PT 变换 [28]下是否不变？Bender 开创了研究与 PT 变换 [18–24]相关物理规律的研究计划。研究发现，对于保守经典系统，包括中性流体和等离子体中的系统，PT 对称性可能源于可逆性 [24–27]。这一发现与 Bender 最初对 PT 对称性的描述一致，即两个耦合子系统之间的损耗-增益平衡。若哈密顿量 H 与 PT 算符对易，则称其为 PT对称，

$$PTH - HPT = 0, \tag{10}$$

其中， T表示复共轭， P是宇称算符，即 $P^2 = I.$。请注意，这里我们已将洛伦兹群中的 P 元推广为任意宇称算符。PT

对称 H 系统的谱必须关于实轴对称，即对于每个不稳定模态 $\omega_R + i\omega_I (\omega_I > 0)$，必定存在一个阻尼模态 $\omega_R - i\omega_I$。谱空间中的这一拓扑约束规定，稳定的PT对称系统若要在系统参数变化时变得不稳定，其实轴上的稳定本征模态必须先发生碰撞（共振）。最近有证明表明[24]，在伪厄米系统中，这种碰撞恰好就是克赖因碰撞 [14, 15, 17]。这一过程如图1a 所示，也是 PT 对称系统变得不稳定的唯一途径。克赖因碰撞是不稳定性的必要条件，但非充分条件。只有负作用模态（图1a 中以蓝色表示）与正作用模态（以红色表示）之间的碰撞才会导致不稳定性。稳定本征模态本身在 PT变换下保持不变，但不稳定或阻尼本征模态则不然，尽管控制方程始终具有 PT 对称性。因此，系统通过克赖因碰撞而失稳的过程会自发打破 PT 对称性。此前，在未考虑其几何性质的情况下，人们将触发不稳定性的参数空间位置称为例外点或阈值。在 PT 对称系统中，稳定模态不能自行偏离实轴而变得不稳定。图1b 所示的失稳途径受到 PT 对称性的禁止。

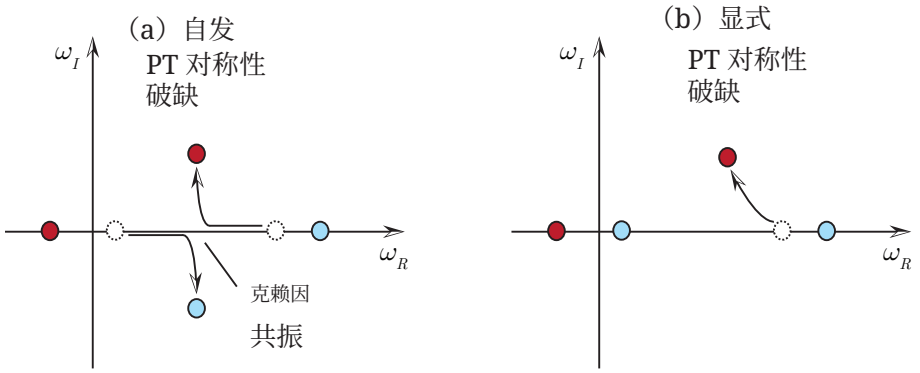

图 1. 四维系统中 PT 对称性的自发破缺（a）和显式破缺（b）。红色和蓝色圆圈分别表示正作用模态和负作用模态。（b）所示的失稳路径受到 PT 对称性的禁止。

然而，如果 PT 对称性条件遭到显式破缺，例如由黏度或摩擦等耗散机制导致，那么要求谱关于实轴对称的约束便不复存在，图1b 中被 PT 对称性禁止的通往不稳定性的途径

便成为可能。这就是通过显式 PT 对称性破缺导致耗散诱导的不稳定性的机制。

由耗散驱动的不稳定性是一种引人入胜的现象 [29, 30]。在等离子体物理学中，包括撕裂模和电阻壁模在内的电阻率诱导的不稳定性就属于这一类。然而，这里显然存在一个问题或疑问：耗散按定义总是从系统中带走能量；它怎么可能驱动系统变得更加不稳定呢？文献尚未令人满意地解决这一问题。这里提出的物理图像强调了耗散所导致的显式PT对称性破缺的作用。保守系统可能拥有低能态，但由于PT 对称性约束，这些状态无法被访问。耗散显式地打破了这些约束，使系统能够接触到低能态，尽管这一过程可能需要消耗能量。当所释放的能量降落超过耗散时，系统便会失稳。

回到由式（7）所规定的双流相互作用哈密顿量。当黏度 ν_1 和 ν_2 消失时，对于 $P = I$. 系统显然是PT对称的。谱由色散关系决定

$$\frac{\omega_1^2}{(\omega - v_{10})^2 - v_{t1}^2} + \frac{\omega_2^2}{(\omega - v_{20})^2 - v_{t2}^2} = 1\,. \tag{11}$$

如上所述，不稳定性的唯一途径是正作用模态与负作用模态之间发生克赖因碰撞 [8]。不稳定性触发时，PT 对称性会自发破缺。图 2a 和 2b 展示了两个带电组分的质量比为 100 时数值计算得到的两个示例；图 3a 和 3b 则展示了质量比为 1 时的示例。图 2a 和 3a 绘出了 4 个特征频率的虚部随相对平衡速度变化的关系 $\Delta v \equiv v_{20} - v_{10}$. 图 2b 和 3b 展示了特征频率的实部。图 2a 和 2b 中的系统参数为 ($\nu_1, \nu_2, v_{t1}, v_{t2}, v_{10}, v_{20}, \omega_1, \omega_2$) =(0, 0, 0, 6, 0, Δv, 0.04, 4)。图 2a 中在 $\Delta v = 2.44$ 和 $\Delta v = 4.96$处发生了两次克赖因碰撞，且系统在 $2.44 < \Delta v < 4.96$. 时不稳定。图 3a 和 3b 中的系统参数为 ($\nu_1, \nu_2, v_{t1}, v_{t2}, v_{10}, v_{20}, \omega_1, \omega_2$) =(0, 0, 1, 1, 0, Δv, 1, 1)。图 3a 中在 $\Delta v = 2$和 $\Delta v = 3.46$处发生了两次克赖因碰撞，且系统在 $2 < \Delta v < 3.46$. 时不稳定。请注意，图 2a 和 3a 中的谱始终关于实轴对称，这正是 PT 对称性所要求的。

对于 H 在方程（7）中定义的系统，当黏度不为零时，系统的 PT 对称性被显式破缺。可以证明，不存在宇称算符 P 使得

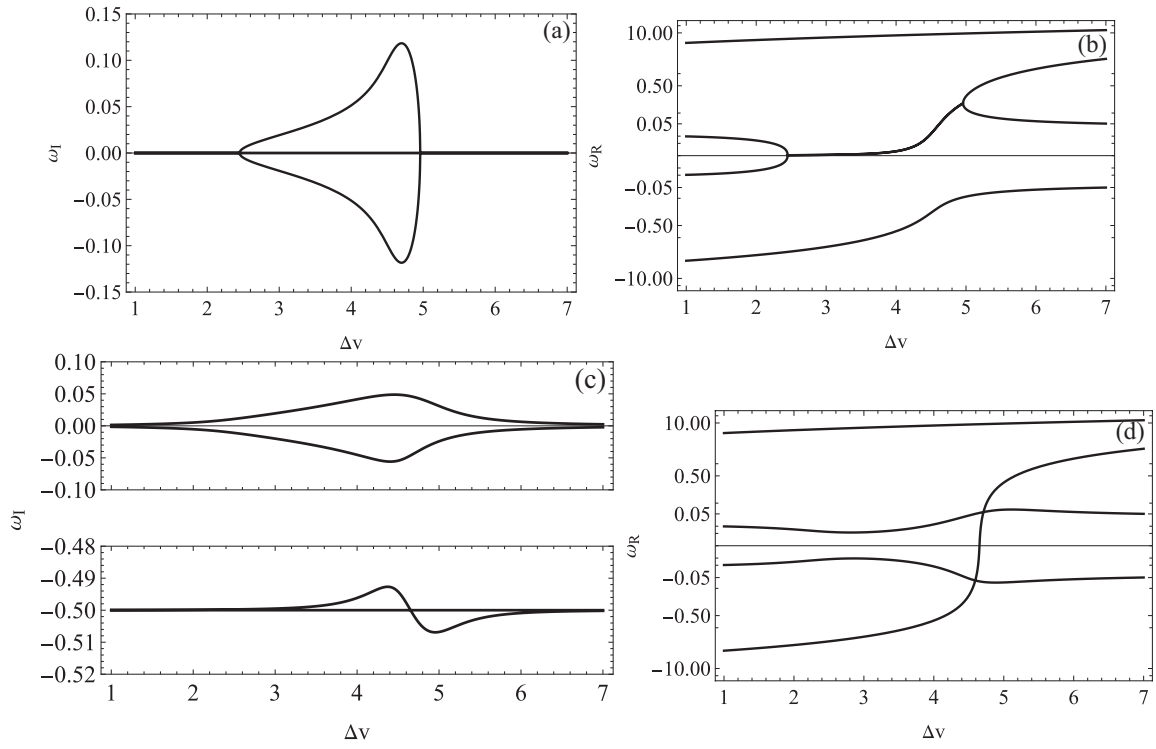

图2. $\omega_2/\omega_1 = 100$. 的双流不稳定性。图中绘出了系统的四个特征频率 $\omega_R + i\omega_I$随速度差 Δv的变化。对于(b)和(d)，采用了绝对值对数刻度。为提高分辨率，(c)中省略了 $-1.48 < \omega_I < -0.10$ 之间的大段空白区域。(a)和(b)的系统参数为($\nu_1, \nu_2, v_{t1}, v_{t2}, v_{10}, v_{20}, \omega_1, \omega_2$) =(0, 0, 0, 6, 0, Δv, 0.04, 4)。(a)中在 $\Delta v = 2.44$ 和 $\Delta v = 4.96$处发生了两次克赖因碰撞。(c)和(d)的系统参数为(ν_1, ν_2, v_{t1}, $v_{t2}, v_{10}, v_{20}, \omega_1, \omega_2$) =(0, 1, 0, 6, 0, Δv, 0.04, 4)。

that $PTH = HPT$. 此类情况见图 2c、2d、3c 和 3d。图 2c 和 2d 的系统参数为 (ν_1, ν_2, $v_{t1}, v_{t2}, v_{10}, v_{20}, \omega_1, \omega_2$) =(0, 1, 0, 6, 0, Δv, 0.04, 4)，除非零的 ν_2 外，其余参数与图 2a 和 2b 相同。由于系统不再具有 PT 对称性，其谱不再关于实轴对称，因此图 1b 所示的不稳定性演化路径现在成为可能。在所绘制的整个 $1 < \Delta v < 7$ 区间内，系统均不稳定。特别是，当黏度为零时，区间$1 < \Delta v < 2.44$ 和 $4.96 < \Delta v < 7$ 是稳定区域。这两个区域中的双流不稳定性由有限黏性引起的显式PT对称性破缺所触发。图 3c 和 3d 中也出现了类似情况，其系统参数为 ($\nu_1, \nu_2, v_{t1}, v_{t2}, v_{10}, v_{20}, \omega_1, \omega_2$) =(0, 0.3, 1, 1, 0, Δv, 1, 1)，除非零的 ν_2 外，其余参数与图 3a 和 3b 相同。现在系统在

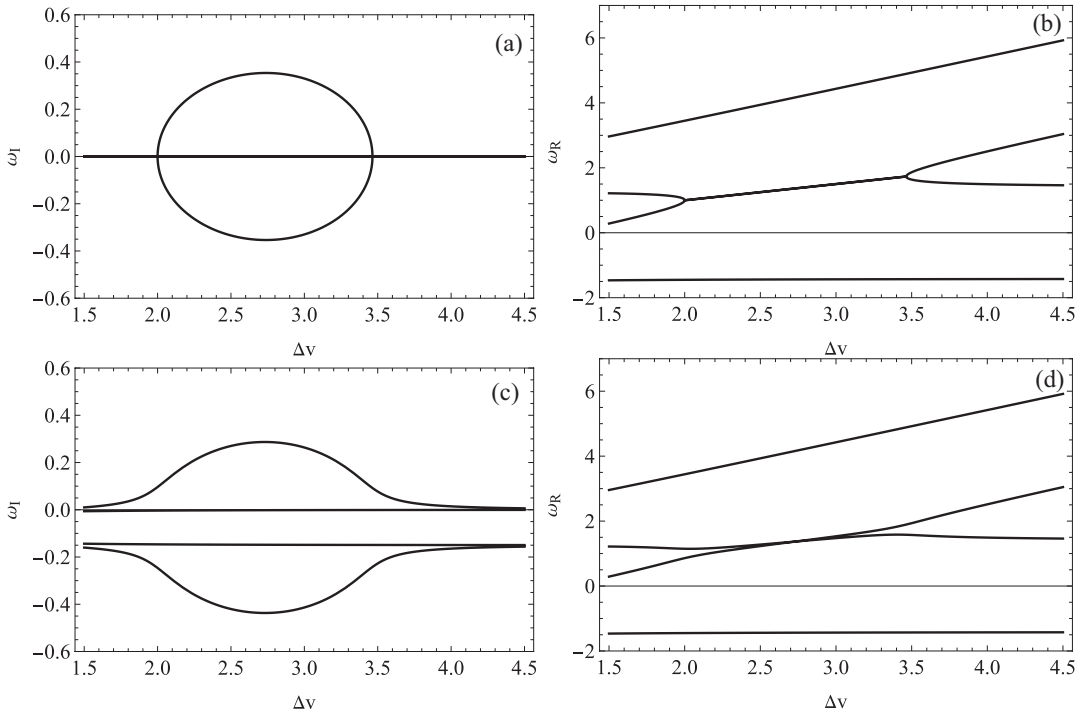

图 3. $\omega_2/\omega_1 = 1$. 的双流不稳定性。图中绘出了系统的四个特征频率 $\omega_R + i\omega_I$随速度差 Δv变化的关系。(a) 和 (b) 的系统参数为 ($\nu_1, \nu_2, v_{t1}, v_{t2}, v_{10}, v_{20}, \omega_1, \omega_2$) =(0, 0, 1, 1, 0, Δv, 1, 1)。(a) 中在 $\Delta v = 2$和 $\Delta v = 3.46$处发生了两次克赖因碰撞。(c) 和 (d) 的系统参数为 ($\nu_1, \nu_2, v_{t1}, v_{t2}, v_{10}, v_{20}, \omega_1, \omega_2$) =(0, 0.3, 1, 1, 0, Δv, 1, 1)。

$1.5 < \Delta v < 4.5$的整个绘图区间，其中包括两个区间 $1.5 < \Delta v < 2$和 $3.46 < \Delta v < 7$; 在没有黏度时，这两个区间均为稳定区域。

如上所述，黏度诱导的不稳定性表明，黏度除了是一种耗散效应之外，还能降低动力学刚性，从而向系统中注入自由能。在当前语境下，这种刚性由保守系统的 PT 对称性约束体现。一般而言，自由度较多的复杂系统更可能具有这类受 PT 对称性约束保护的隐性能量。式（1）至（4）所描述的双流相互作用就是这样一种系统。具体而言，如式（11）所示，自由能隐藏在两个组分之间的差分平衡流和压力中。相比之下，由双曲守恒律支配的标量场$u(t, z)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} f(u) = 0 \tag{12}$$

并不具有这类可通过黏度释放的自由能。这里， $f(u)$ 是 u 的给定函数。事实上，可以严格证明以下结果[31]：设 $\nu > 0$，且 $u^\nu(t,z)$ 是以下初值问题的解，

$$\frac{\partial u^\nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} f(u^\nu) = \nu \frac{\partial^2 u^\nu}{\partial z^2}\,, \tag{13}$$

$$u^\nu(t=0,z) = u_0(z)\,, \tag{14}$$

那么， u^ν 的全变差定义为

$$\mathrm{TV}[u^\nu] \equiv \sup_h \int \left| \frac{u(z+h) - u(z)}{h} \right| dz \tag{15}$$

随时间单调不增。假设 u^ν 是光滑的，我们有

$$\mathrm{TV}[u^\nu] = \int \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| dz\,, \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt} TV\left[u^\nu\right] = \frac{d}{dt} \int \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| dz \le 0\,. \tag{17}$$

对于标量双曲守恒律（12），熵解定义为$u(t,\ z) \equiv \lim_{\nu\to 0} u^\nu(t,\ z)$ 。数值求解方程（12）以获得熵解时，最好采用一种算法，使精确熵解的全变差保持单调不增 [32–34]。

如果愿意，可以将方程（13）视为方程（1）-（4）所描述的双流系统的极度简化版本，其中两个组分均为冷态（$p_j = 0$）且彼此不相互作用（$E = 0$），这会剥除所有可能的隐性能量，因此全变差不会增长。

显然，对于由方程（1）-（4）描述的一般双流系统，有限黏性下全变差不增的性质并不成立。正如我们所展示的，在某些参数范围内，原本稳定的系统可因有限黏性引发的显式PT对称性破缺而在线性动力学上失稳。对于这些情况，在平衡态（n_{10}，n_{20}，v_{10}，v_{20}，p_{10}，p_{20}），当初始扰动较小时，在短时间内 $0 < t < \delta.$，系统动力学由线性本征模主导。如果初始扰动取为具有给定 k 和 $\omega = \omega_R + i\omega_I$ （$\omega_I > 0$）的不稳定本征模形式，那么我们有

$$\frac{d}{dt} \int \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right| dz \sim \omega_I e^{\omega_I t} \int |kE|\, dz > 0\,, \tag{18}$$

也就是说，电场 E 的全变差随时间增加。所有其他场变量也有相同的结果。当然，在零黏度下，双流相互作用可能因自发PT对称性破缺而在物理上失稳，从而同样导致全变差增长。在设计或选择用于数值解的算法时，需要考虑具有不同带电组分的等离子体中动力学的复杂性。

本研究获得美国能源部（DE-AC02-09CH11466）资助。

* hongqin@princeton.edu

† dorland@pppl.gov

‡ ben.israeli@weizmann.ac.il[1] C. S. Kueny 和 P. J. Morrison，等离子体物理学 2，1926（1995年）。[2] H. Qin、R. C. Davidson 和 W. W. Lee，《物理评论专题：加速器与束流》3，084401（2000年）。[3] R. C. Davidson 和 H. Qin，《高能加速器中的强带电粒子束物理学》（帝国理工学院出版社和世界科技出版公司，新加坡，2001年）。[4] F. Zimmermann，《物理评论专题：加速器与束流》7，124801（2004年）。[5] C. N. Lashmore-Davies，等离子体物理学 14，092101（2007年）。[6] P. J. Morrison 和 G. I. Hagstrom，载于《非线性物理系统》，O. N. Kriillov 和 D. E. Pelinovsky 编（Wiley，2014年）。[7] H. Qin 和 R. C. Davidson，等离子体物理学 21，064505（2014年）。[8] R. Zhang、H. Qin、R. C. Davidson、J. Liu 和 J. Xiao，等离子体物理学 23，072111（2016年）。[9] B. Y. Israeli、A. Bhattacharjee 和 H. Qin，实验室及天体物理尘埃等离子体中由阻力和静电相互作用介导的共振不稳定性（2023年），arXiv:2303.13640[physics.plasm-ph]。[10] V. I. Arnold，《经典力学的数学方法》（施普林格出版社，纽约，1989年）。[11] M. de Gosson，《辛几何与量子力学》（Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2006年）。[12] P. A. Dirac，《伦敦皇家学会会刊：A辑，数学与物理科学》180，1（1942年）。[13] W. Pauli，《现代物理评论》15，175（1943年）。

[14] M. Krein，《苏联科学院院报》N.S. 73，445（1950年）。[15] I. M. Gel’fand 和 V. B. Lidskii，《数学科学进展》10，3（1955年）。[16] T. Lee 和 G. Wick，《核物理B》9，209（1969年）。[17] V. Yakubovich 和 V. Starzhinskii，《周期系数线性微分方程》，第 I 卷（Wiley，纽约，1975年）。[18] C. M. Bender 和 S. Boettcher，《物理评论快报》80，5243（1998年）。[19] C. M. Bender，《物理学进展报告》70，947（2007年）。[20] C. M. Bender、D. C. Brody、H. F. Jones 和 B. K. Meister，《物理评论快报》98，040403（2007年）。[21] C. M. Bender 和 P. D. Mannheim，物理快报A 374，1616（2010年）。[22] A. Felski、C. M. Bender、S. Klevansky 和 S. Sarkar，《物理评论D》104，085011（2021年）。[23] C. M. Bender、M. Gianfreda 和 S. Klevansky，《物理评论A》90，022114（2014年）。[24] R. Zhang、H. Qin 和 J. Xiao，《数学物理学杂志》61，012101（2020年）。[25] H. Qin、R. Zhang、A. S. Glasser 和 J. Xiao，等离子体物理学 26，032102（2019年）。[26] Y. Fu 和 H. Qin，《新物理学杂志》22，083040（2020年）。[27] H. Qin、Y. Fu、A. S. Glasser 和 A. Yahalom，《物理评论E》104，015215（2021年）。[28] C. M. Bender（2019年），私人通信。[29] O. N. Kirillov，《英国皇家学会哲学汇刊A辑》371，20120051（2013年）。[30] O. N. Kirillov，《现代物理学中的非保守稳定性问题》，《数学物理研究》第14卷（Walter de Gruyter，2013年）。[31] C.-W. Shu，《双曲守恒律的数值方法》（2006年），布朗大学讲义。[32] A. Harten，《计算物理学杂志》49，357（1983年）。[33] H. Yee、R. Warming 和 A. Harten，《计算物理学杂志》57，327（1985年）。[34] B. Cockburn 和 C.-W. Shu，《计算数学》52，411（1989年）。