arXiv:2601.06954v1 [cs.CC] 11 Jan 2026

狄利克雷问题解的算术复杂性

Holger Boche[a, b]，Volker Pohl[a]，H. Vincent Poor[c]

[a]慕尼黑工业大学，*Arcisstr. 21*，德国慕尼黑 *80333*[b]*BMBF* 研究中心 *6G-life*，德国慕尼黑 *80333*[c]电气与计算机工程系，普林斯顿大学，美国新泽西州普林斯顿 *08544*

摘要

单位圆盘上的经典狄利克雷问题可以通过不同的数值方法求解。最常见、最流行的两种方法是对相应的泊松积分进行积分，以及应用狄利克雷原理求解一个特定的最小化问题。实际应用中，这些方法需要在具体的计算平台上实现。本文研究了如何在图灵机上实现这些方法；图灵机是数字计算机的基本模型。我们证明，在这一计算平台上，即使边界函数是可计算的，采用这两种方法求解狄利克雷问题通常也会得到一个非图灵可计算的解。随后，本文以郑–魏劳赫层级为框架，对这种不可计算性进行了精确刻画。对于这两种方法，我们都推导出了郑–魏劳赫层级中不可计算程度的下界和上界。

关键词：调和分析、可计算性、边值问题、狄利克雷原理、优化、郑–魏劳赫层级

*本研究部分由德国联邦研究、技术与航天部（BMFTR）通过联合项目 6G-life 下的“主权、数字化、互联”计划资助，资助编号为 16KISK002。H. V. Poor 的研究部分由美国国家科学基金会资助，资助编号为 CNS-2128448 和 ECCS-2335876。电子邮箱地址：boche@tum.de（Holger Boche）、volker.pohl@tum.de（Volker Pohl）、poor@princeton.edu（H. Vincent Poor）

1. 引言

狄利克雷问题在工程学和应用数学的众多领域中发挥着核心作用。这类问题旨在寻找满足某个区域内特定偏微分方程、并在该区域边界上取给定值的函数。最简单的情形可能是这样的狄利克雷问题：求解单位圆盘上的拉普拉斯方程，并在单位圆上给定函数值（精确定义见第 5 节）。求解这一问题的一项重要工具是狄利克雷原理。该原理指出，狄利克雷问题的解可以通过变分方法求得 [11] ，其基础是最小化狄利克雷能量。由于狄利克雷能量等价于索博列夫空间范数$W^{1,\,2\,0}$，因此这一方法可归结为一个凸优化问题，已有多种数值方法可用于求解 $[4,5]$。此外，狄利克雷原理也是基于变分法发展现代计算方法的一块基石 $[13,22]$ ，例如里兹方法 $[18,23]$, 、伽辽金方法 $[12,15]$,、有限元法 $[1,6,9]$,或边界元法 [7], ，这里只举几例。除优化技术外，也可以基于泊松积分计算狄利克雷问题的解。

原则上，求解狄利克雷问题有许多不同的方法：既可以采用基于狄利克雷原理的优化技术，也可以采用基于泊松积分的数值积分。这两种方法都是调和分析和傅里叶分析中的活跃研究领域，而一个重要的实际问题是，这些理论方法能否在某种计算平台上实现为具体算法。因此，“算法”这一概念在很大程度上取决于其所依托的计算平台。于是，某种数学方法可能可以在一个计算平台上实现，却无法在另一个计算平台上实现。如今，原则上存在若干不同的计算平台，例如数字计算、量子计算或神经形态计算。在这些不同的平台中，数字计算是迄今应用最广泛的平台，而针对这一平台的相应算法理论（即图灵计算理论）也是迄今最为成熟的计算理论。

本文研究能否在图灵机上实现前述两种求解单位圆盘上狄利克雷问题的方法（即采用泊松积分的方法和变分方法

基于狄利克雷原理的方法）。因此，我们要探究图灵机上是否存在能够计算相应解的算法。由于图灵机只能使用有理数进行计算，图灵机上的算法通常只能计算真实解的（有理数）近似值。显然，任何图灵机都必须在有限步之后停止。因此，根据图灵可计算性定义，若达到所要求的近似误差，图灵机上的任何算法都必须在有限次运算后停止对真实解的近似过程。只有当这种依赖于近似误差的受控终止成为可能时，才能说该算法有效收敛到解，并且该解是图灵可计算的。这种有效的误差控制对于安全性要求严格的应用尤为重要，也适用于需要在无人协助的情况下自主保证误差界限的自主系统。

本文研究是否能够通过极小化技术或在图灵机上计算泊松积分，找到有效算法来求解狄利克雷问题。研究针对两类自然的边界函数：1）具有有限狄利克雷能量的可计算连续函数；2）能够通过调和级数在（狄利克雷）能量范数下有效逼近的连续函数。本文证明，对于第一类中的所有边界函数，不存在能够有效求解与狄利克雷问题相关的最小化问题的图灵机算法；同时也证明，对于第二类中的所有边界函数，都无法有效计算泊松积分（以求解狄利克雷问题）。因此，在这两种情形下，狄利克雷问题的解通常都不是图灵可计算的。正如图灵度刻画某些问题的不可判定性一样，郑–魏劳赫层级提供了一种刻画图灵不可计算度的方式。基于郑–魏劳赫层级，我们将推导出这两种情形下狄利克雷问题解的不可计算度的精确下界和上界。

本文所研究的问题也具有相当普遍的理论意义。在科学中，人们通常会建立一般的物理理论，例如麦克斯韦方程组，用来描述经典电动力学和静电学中的现象。这些理论通常基于某些一般的物理原理，并有相应的精确数学表述——

例如，最小能量原理，即狄利克雷原理[20, 23], ，会引出变分法。类似地，最大值原理 会通过泊松积分导出狄利克雷问题的解。于是，一个有趣的问题是：这些物理理论是否与某种计算模型相容？具体而言，假设某个物理理论中的问题有自然定义的可计算输入（相对于该计算模型而言），那么该问题的物理性能指标（例如最小能量或最大值）是否也能在这一计算模型中计算？本文的结果将表明，对于数字计算，也就是图灵机，答案通常是否定的。

本文其余部分安排如下：第 2 节阐明一般记号，第 3 节回顾可计算性分析的基本概念，第 4 节简要介绍郑–魏豪赫非可计算性层级。完成这些准备后，第 5 节对 $\mathbb{D}$ 上的狄利克雷问题作出精确表述，并详细陈述问题。随后，第 6 节研究基于最小化狄利克雷能量求解狄利克雷问题的解的可计算性，第 7 节研究通过对泊松积分进行积分得到的解的可计算性。本文最后在第 8 节作简要总结。

2. 一般记号与函数空间

我们采用调和分析和泛函分析中的标准记号（例如参见 [19, 25, 31]），尤其是，$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ 表示 } |z| < 1\}$，而 $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ 表示 } |z| = 1\}$：它们分别是复平面 $\mathbb{C}$中的单位圆盘和单位圆。接着，我们用 $\mathbb{D} = \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ 表示 $\mathbb{C}$中的闭单位圆。对于任意 $1 \le p \le \infty$，$L^p(\partial\mathbb{D})$表示定义在 $\partial\mathbb{D}$上的通常的 p-可积函数空间。赋予一致范数 $\|f\|_\infty = \max_{\zeta\in\partial\mathbb{D}} f(\zeta)$后，定义在 $\partial\mathbb{D}$ 上的连续函数所构成的巴拿赫空间记为 $\mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$。

对于任意 $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$，其傅里叶系数 为

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta\,, \quad n = 1, 2, 3, \dots\,, \end{aligned} \tag{1}$$

an任意 $f \in L^2(\partial\mathbb{D}) \subset L^1(\partial\mathbb{D})$ 都可以通过其傅里叶系数恢复

利用调和级数

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(f)\cos(n\theta) + b_n(f)\sin(n\theta) \right] , \tag{2}$$

其中，级数在 $L^2(\partial\mathbb{D})$ 的范数下收敛，而式 (2) 中的等号表示在 $L^2(\partial\mathbb{D})$ 中相等。根据帕塞瓦尔恒等式，有

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right) .$$

通常，尤其是在信号处理中，这个值称为 f 的能量，因此 $L^2(\partial\mathbb{D})$ 被称为 $\partial\mathbb{D}$ 上具有有限能量的函数空间。然而，从物理角度来看，所谓的狄利克雷能量[3, 24] 往往具有更重要的物理意义。对于 $f \in L^2(\partial\mathbb{D})$，它定义为

$$\mathrm{E}(f) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right) ,$$

并记

$$H^{1/2}(\partial\mathbb{D}) = \left\{ f \in L^2(\partial\mathbb{D}) \ : \ \mathrm{E}(f) < \infty \right\}$$

表示所有具有有限狄利克雷能量的 $L^2(\partial\mathbb{D})$-函数的集合。赋予其范数

$$\|f\|_{H^{1/2}} = \left(\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \mathrm{E}(f) \right)^{1/2} , \tag{3}$$

$H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$ 成为一个完备的巴拿赫空间。事实上，$H^{1/2}(\partial\mathbb{D}) = W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathbb{D})$ 是指标为 $1/2$ [2, 10] 的通常索伯列夫空间。

实值函数 $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ 若在 $\mathbb{D}$ 中调和，则称其为调和函数；如果在每一点 $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{D}$处，它关于 x 和y 均二阶偏可微，并且满足

$$(\Delta u)(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = 0 , \quad \text{for all } z \in \mathbb{D} .$$

对于每个在 $\mathbb{D}$中调和的函数 u，我们都与之关联一个所谓的狄利克雷积分

$$\mathrm{E}(u) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{D}} \|(\operatorname{grad} u)(z)\|_{\mathbb{R}^2}^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y , \tag{4}$$

而 $\mathrm{E}(u)$ 被称为 u [24] 的 狄利克雷能量 。

3. 可计算性分析

数字计算分析的理论基础由 $Alain\ Turing$ [26, 27] 奠定。其理论基于图灵机的概念，即一种能够按照一些简单规则操纵纸带上符号的抽象机；数字计算机的任何算法都可以转换为图灵机上相应的程序。然而，与现实世界中的计算机不同，图灵机在存储、能量消耗或计算时间方面没有任何限制。此外，所有计算都不会出错。通过这种方式，图灵机模型为任何数字计算机的能力提供了一个基本上界。

图灵机（即任何数字计算机）最根本的局限在于，它只能对有理数进行计算。这意味着图灵机的输入和输出只能是有理数。那么，如何才能计算非有理量，又如何将非有理量作为输入呢？此外，如何才能将序列或函数这类更复杂的对象作为图灵机的输入或输出呢？换言之，图灵机实际上能够处理什么类型的对象？答案很简单：图灵机只能处理供图灵机执行的算法。因此，所有需要用到的数学对象都必须能通过图灵机上的算法来描述。若要将某个对象提供给图灵机，只需交给它相应的算法即可。事实证明，并非所有数学对象都能用图灵机上的算法来描述。能够如此描述的对象称为（图灵）可计算。这些思想由可计算性分析 [21, 28]加以精确定义。它研究分析和泛函分析中能够在图灵机上实现的部分。在第一小节中，我们将简要回顾其中的一些概念和术语。在此，我们只假设读者对递归函数有一些基本了解。这些函数 $\mathbb{N}^N \to \mathbb{N}$，对于某个 $N \in \mathbb{N}$，由初等可计算函数和递归构造而成。对于本文而言，重要的只是：这些函数的输入和输出均为整数，且能够在图灵机上实现。

每个实数 $x \in \mathbb{R}$都是有理数序列 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ 的极限。要使 x可计算，还需要满足两个附加条件：

1. 序列 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 需要是可计算的2. 收敛 $r_n \to x$
需要是有效的

我们首先给出这两个性质的形式化定义：

定义 *1*（可计算有理数序列）：有理数序列 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ 称为可计算的，如果存在递归函数 a, b, s： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $b(n) \neq 0$，满足

$$r_n = (-1)^{s(n)} \frac{a(n)}{b(n)}, \qquad for\ all\ n \in \mathbb{N}\,.$$

定义 *2*（有效收敛）：若存在一个递归函数e： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$，则称其有效收敛到 $x \in \mathbb{R}$ 。

$$n \geq e(M) \qquad implies \quad |x - x_n| < 2^{-M}\,. \tag{5}$$

因此，有效收敛不仅意味着 x_n 收敛到 x，还意味着能够控制近似误差：对于每个$M \in \mathbb{N}$，都可以确定一个指标 $N_0 = e(M)$，使得只要 $n \geq N_0$，就能保证近似误差 $|x - x_n|$ 小于 2^{-M}。

定义 *3*（可计算数）：若存在一个有效收敛到 x的有理数可计算序列 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$，则称 $x \in \mathbb{R}$ 为可计算的。

注 ***1***：由于下一节中会清楚说明原因，我们用 Δ_1表示所有可计算实数组成的集合。

有效收敛的概念可以扩展到序列、函数等其他对象：

定义 *4*（可计算序列）：如果存在一个有理数双重序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$，它一致且有效地收敛到 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，那么实数序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ 称为可计算的，即存在一个递归函数 e： $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对所有 n、$M \in \mathbb{N}$

$$m \geq e(n, M) \quad implies \quad |x_n - r_{n,m}| < 2^{-M}\,.$$

描述函数可计算性的概念有很多种。其中最弱也最自然的概念，称为 Banach–Mazur 可计算性。

定义 ***5***（***Banach–Mazur*** 可计算函数）：如果实函数f 在 $\partial\mathbb{D}$ 上满足： f 将每个由可计算数组成的可计算序列$\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 映射为一个由可计算数组成的可计算序列 $\left\{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$，则称其为Banach–Mazur 可计算（或序列可计算）。

本文主要研究单位圆上的函数所构成的巴拿赫空间 $\mathcal{B}$ 。除了这些函数的逐点可计算性（由 Banach–Mazur 可计算性刻画）之外，还需要一种“可计算性结构”，用于刻画相应范数下的有效收敛。这种可计算性结构可以通过刻画 $\mathcal{B}$ [21] 中所有“可计算序列”的集合 $\mathcal{S}$ 以公理化方式定义：

公理 ***1***：设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{B}$中的可计算序列，$\{\alpha_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ $\{\beta_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ 是实数的可计算双序列，且 $d:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个递归函数，那么由下式定义的序列 $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$h_n=\sum_{k=0}^{d(n)}\left(\alpha_{n,k}\,f_k+\beta_{n,k}\,g_k\right),\qquad n\in\mathbb{N}$$

是 $\mathcal{B}$中的可计算序列。

公理 ***2***：设 $\{f_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{B}$ 中的可计算双序列，且 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个序列，并且存在递归函数$e:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 使得

$$k\geq e(n,N)\quad implies\quad \|f_{n,k}-f_n\|_{\mathcal{B}}\leq 2^{-N}. \tag{6}$$

那么，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{B}$中的可计算序列。

公理 ***3:*** 如果 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{B}$中的可计算序列，那么 $\{\|f_n\|_{\mathcal{B}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 就是实数的可计算序列。

注 *2:* 在这些公理中，我们用到这样一点：如果一个双重序列$\{\alpha_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ 经某个标准递归配对函数 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ [21]映射后成为可计算序列，那么就称它是可计算的 。

注 *3:* 如果满足 (6)，那么就称$\{f_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ 当 $k\to\infty$趋于$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 时，在 k 和 n中有效收敛。

在巴拿赫空间 $\mathcal{B}$ 上定义了可计算结构（即满足前述公理的所有序列构成的集合 $\mathcal{S}$）后，如果序列 $\{f,f,f,\dots\}$ 是 $\mathcal{B}$中的可计算序列，就称元素 $f\in\mathcal{B}$ 是可计算的。

本文仅考虑具有可计算性结构 $\mathcal{S}$ 且有效可分 的巴拿赫空间 $\mathcal{B}$ ，其含义如下。

定义 **6**（有效可分）：具有可计算性结构 $\mathcal{S}$的巴拿赫空间 $\mathcal{B}$，记作$(\mathcal{B},\mathcal{S})$，如果存在一个可计算序列 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$，其线性张成在 $\mathcal{B}$中稠密，则称其为有效可分。这样的序列 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为$(\mathcal{B},\mathcal{S})$的有效生成集。

由于我们考虑的是定义在 $\partial\mathbb{D}$ 上的函数（即 2π-周期函数），因此这些空间最自然的有效生成集就是三角多项式序列，也就是集合

$$\{1\} \cup \{\cos(n\theta)\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\sin(n\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}\,, \qquad \theta \in [-\pi,\pi)\,.$$

若一个序列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足函数 φ_n 具有如下形式，则称其为三角多项式的可计算序列

$$\varphi_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{a_n(0)}{2} + \sum_{k=1}^{d(n)} \left[a_n(k)\,\cos(k\theta) + b_n(k)\,\sin(k\theta)\right]\,, \quad \theta \in [-\pi,\pi)\,, \quad (7)$$

其中 $\{a_n(k)\}_{n,\ k\in\mathbb{N}}$，$\{b_n(k)\}_{n,\ k\in\mathbb{N}}$ 是由可计算数构成的可计算（双重）序列，并且 $d:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一个递归函数，它对每个 $n\in\mathbb{N}$ 计算三角多项式 φ_n 的次数 $d(n)$。

对于定义在 $\partial\mathbb{D}$ 上的函数巴拿赫空间 $\mathcal{B}$，存在一种通用的可计算性定义，它满足此前关于“可计算性结构”的公理 [21]。该定义将 $\mathcal{B}$ 中能够通过三角多项式有效逼近的函数视为可计算对象：定义 **7**（巴拿赫空间中的可计算函数）：*1*）若函数 $f\in\mathcal{B}$ 属于函数巴拿赫空间 $\mathcal{B}$，该空间由定义在 $\partial\mathbb{D}$ 上的函数构成，则称其为 $\mathcal{B}$-可计算的，如果存在一个可计算序列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，由三角多项式构成，并且有效收敛到 f；也就是说，存在一个递归函数 $e:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$使得

$$n \geq e(M) \quad implies \quad \|f-\varphi_n\|_{\mathcal{B}} < 2^{-M}\,.$$

2）如果存在一个可计算的三角多项式双序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$，$_{k\in\mathbb{N}}$ 以及递归函数 $e:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得.....则称序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}$-可计算的。

$$k \geq e(n,N) \quad implies \quad \|\varphi_{n,k}-f_n\|_{\mathcal{B}} \leq 2^{-N}\,.$$

所有 $\mathcal{B}$-可计算函数的集合记作 $\mathcal{B}_{\mathrm{c}}$。

注*4*：我们主要需要两个巴拿赫空间 $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 和 $H^{1/2}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$。函数 $f\in\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 被称为可计算连续函数。

注释 *5*: 不难验证， [21] $\mathcal{B}$-可计算序列满足上述可计算结构的三个公理，并且三角多项式集是这些巴拿赫空间 $\mathcal{B}$ 的有效生成集，其可计算性结构由定义 7 定义。

注 *6*: 注意，可计算性结构的公理 3 意味着，如果 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是一个有效收敛到 f的可计算序列，那么 $\{\|f_n\|_{\mathcal{B}}\}_{n\in\mathbb{N}}$就是一个有效收敛到 $\|f\|_{\mathcal{B}}$ 的可计算数构成的可计算序列。因此，特别地，对于每个可计算的 $f \in \mathcal{B}$, $\|f\|_{\mathcal{B}}$都是一个可计算数。

注 7: 我们还注意到，每个可计算连续函数也是 Banach–Mazur 可计算的 [21]。反过来，也存在一些 Banach–Mazur 可计算函数，它们并非可计算连续函数。

4. 郑–魏豪赫非可计算性层级

在计算机科学和数理逻辑中，存在一些重要的判定问题无法通过算法求解。最著名的例子可能是停机问题，众所周知，它是不可判定的 $[8, 26]$, ，也就是说，不存在能够针对所有可能输入求解停机问题的通用算法。与之密切相关的是哥德尔不完备定理 [14]，它表明，在任何一致的公理系统中，总存在无法在该系统内证明的真命题。不可判定问题的存在促使人们引入了图灵度；这一概念由 Post 和 Kleene$[16, 17]$, 提出，在某种意义上刻画了不可解度。

本文探讨由某种数学运算的解所得到的函数，即狄利克雷问题的解。我们假设该数学运算的输入数据（即狄利克雷问题的数据）是能够以算法方式描述的对象（参见第 3 节）。然而，正如我们将看到的，这些函数，也就是该数学运算的解，通常无法通过算法计算。因此，我们要在适当的算法不可计算层级中衡量这些解的不可计算度 。由于解函数的值是实数，我们采用郑–魏劳赫层级 [30]，它是实数图灵度理论的自然扩展。这个层级刻画了实数的不可计算性，由实数集合构成。同一

集合（即层级中的同一层）中的数具有相同的不可计算度。该层级的第一层包含可计算数。更高层则包含可计算性越来越低的数。因此，这些层描述了该层中数的算术复杂度。为此，我们有时将这些层称为复杂度类。本文只需用到郑–魏劳赫层级的前两层。以下两个小节将简要介绍并阐述这两层的依据。为完整起见，并将我们的结果置于更广阔的背景中，附录 A 给出了整个层级的定义。

4.1. 郑–魏劳赫层级中的第一层

接下来， [30], 我们首先定义两个半可计算数集合：定义 ***8***（集合 $\mathbf{\Sigma_1}$、$\mathbf{\Pi_1}$ 和$\mathbf{C_1}$）： $x \in \mathbb{R}$ 属于 Σ_1 当且仅当存在一个可计算序列 $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Delta_1$ 使得

$$\zeta_{n+1} \geq \zeta_n\,,\ \textit{for all}\ n \in \mathbb{N}\,, \quad \textit{and} \quad \lim_{n\to\infty} \zeta_n = x\ .$$

$x \in \mathbb{R}$ 属于 Π_1 当且仅当存在一个可计算序列$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Delta_1$ 使得

$$\xi_{n+1} \leq \xi_n\,,\ \textit{for all}\ n \in \mathbb{N}\,, \quad \textit{and} \quad \lim_{n\to\infty} \xi_n = x\ . \tag{8}$$

我们用$\mathbf{C}_1 = \Sigma_1 \cup \Pi_1$ 表示所有半可计算数的集合。

注 *8*: 显然， $x \in \Sigma_1$ 通常称为左可计算数，而 $x \in \Pi_1$ 则称为右可计算数。

半可计算数通常不是可计算数。不过，不难看出 [21] ，如果 $x \in \mathbb{R}$ 既是左可计算数又是右可计算数，那么它也是按照定义 3 意义下的可计算数。

命题 *1*: *</style}*一个数 $x \in \mathbb{R}$ 属于 Δ_1 当且仅当 $x \in \Sigma_1 \cap \Pi_1$，也就是说 $\Delta_1 = \Sigma_1 \cap \Pi_1$。

注 9: </style}注意， Δ_1 是真子集 Σ_1 和 Π_1，即存在一些数属于 Σ_1 和 Π_1 ，它们是不可计算的。

可以证明 [30] 集合 Δ_1 在通常的算术运算——加法、减法、乘法和除法——下是封闭的。对于半可计算数的集合 $\Sigma_1, \Pi_1, \mathbf{C}_1$, 而言，情况并非如此。事实上，存在左可计算数 $a, b \in \Sigma_1$ 使得 $x = a - b \notin \mathbf{C}_1$。这促使[29] 定义以下弱可计算数集合:

定义 ***9***（弱可计算数集合$\mathbf{C_2}$）：若存在 a、$b \in \Sigma_1$ 使得$x = a - b$，则称数 $x \in \mathbb{R}$ 为弱可计算数。所有弱可计算数组成的集合记为$\mathbf{C}_2$。

注 *10*：　Σ_1、Π_1、$\mathbf{C}_1$ 和 Δ_1 都是$\mathbf{C}_2$的真子集。注意，$\mathbf{C}_2$ 仍属于郑–魏劳赫层级的第一层。

4.2. 郑–魏劳赫层级的第二层

可计算数 x 被定义为具有两个特定性质：它必须是有理数的可计算序列的极限，并且收敛必须是有效的（参见定义 3）。如果去掉第二个要求，就会得到郑–魏劳赫层级第二层中不可计算函数的基本类:

定义 ***10***（递归可逼近数）：如果存在一个由可计算数组成的可计算序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 x，则称数 $x \in \mathbb{R}$为递归可逼近的。所有递归可逼近实数的集合记作 Δ_2。

根据定义可知 $\Delta_1 \subset \Delta_2$、$\Sigma_1 \subset \Delta_2$以及$\Pi_1 \subset \Delta_2$。与 Δ_1类似，集合 Δ_2 可以写成两个集合的交集。为了说明这些集合的定义，令 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为任意实数序列，并对每个 $N \in \mathbb{N}$定义

$$\zeta_N = \inf\{x_k : k \geq N\} \quad \text{and} \quad \xi_N = \sup\{x_k : k \geq N\} \ .$$

那么，$\{\zeta_N\}_{N\in\mathbb{N}}$是单调递减的，而 $\{\xi_N\}_{N\in\mathbb{N}}$是单调递增序列。众所周知，若 $\{\zeta_N\}$ 和 $\{\xi_N\}$ 的极限相等，即若

$$\lim_{N\to\infty} \zeta_N = \sup_{N\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq N} x_k = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq N} x_k = \lim_{N\to\infty} \xi_N = x$$

那么 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 也收敛（收敛到相同的极限 x）。为了使这一结果具有可计算性，郑和 Weihrauch 仿照第一层定义了以下两个集合

定义 ***11***（$\mathbf{\Sigma_2}$ 和 $\mathbf{\Delta_2}$）：***</style}***一个数 属于，当且仅当存在一个可计算双序列，$_{k\in\mathbb{N}} \subset \Delta_1$ 使得

$$x = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\in\mathbb{N}} \zeta_{n,k} \, .$$

一个数 $x \in \mathbb{R}$ 属于 Π_2，当且仅当存在一个可计算双序列 $\{\xi_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset \Delta_1$ 使得

$$x = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \xi_{n,k}\,.$$

以下结果 [30] 给出了这样一个陈述的有效版本：$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛当且仅当 $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$。

命题 *2*：</style>数 $x \in \mathbb{R}$ 属于 Δ_2 当且仅当 $x \in \Sigma_2 \cap \Pi_2$，也就是说 $\Delta_2 = \Sigma_2 \cap \Pi_2$。

命题 2 与命题 1 类似，但针对的是层级中的第二层。与第一层一样，我们有 $\Delta_2 \subsetneq \Sigma_2$ 和 $\Delta_2 \subsetneq \Pi_2$。

5。D 上的经典狄利克雷问题– 问题陈述

设 $f \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 是 $\partial\mathbb{D}$ 上的实值连续函数。以下经典问题可追溯至乔治·格林，在科学和工程学的许多领域都极为重要：求 $F\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$，使得

$$\begin{aligned} \big(\Delta F\big)(z) &= 0\,, \quad \text{for all } z \in \mathbb{D} \\ \text{and} \qquad F(\zeta) &= f(\zeta)\,, \quad \text{for all } \zeta \in \partial\mathbb{D}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

因此，我们要寻找一个函数 F，它在 $\mathbb{D}$ 中是调和函数，并且在 $\mathbb{D}$ 的边界 $\partial\mathbb{D}$ 上与给定函数 f 一致。从历史上看，求解 (9) 主要有两种不同的方法。

5.1. 泊松积分解法

第一个解归功于古斯塔夫·勒让·狄利克雷，他指出，满足两个条件 (9) 的唯一 F 由 f的泊松积分 给出，即

$$F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \big(\mathrm{P}_r f\big)\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})\, P_r(\theta-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{10}$$

对于 $0 \le r < 1$ 和 $-\pi \le \theta < \pi$，使用泊松核

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}\,,$$

并且满足对于所有 $\theta \in [-\pi, \pi$，$\lim_{r\to 1} F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$。如果按照 (2) 将 f写成调和级数，那么其泊松积分具有简单的形式

$$F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = (\mathrm{P}_r f)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[a_n(f)\cos(n\theta) + b_n(f)\sin(n\theta)\right]. \quad (11)$$

为了纪念他在研究问题 (9) 方面所作的贡献，这个问题如今被称为狄利克雷问题。

5.2. 狄利克雷原理的解法

狄利克雷 和开尔文勋爵 也提出用一种变分法来求解 (9)，该方法基于狄利克雷能量的最小化：设 $f \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 是 $\partial\mathbb{D}$ 上的连续函数，并令

$$\mathcal{M}(f) = \left\{u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R} \ : \ u \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{D}), u|_{\partial\mathbb{D}} = f\right\}$$

为所有满足以下条件的实值函数 u的集合：它们在 $\mathbb{D}$ 上连续，在 $\mathbb{D}$上连续可微，并且在 $\partial\mathbb{D}$ 上与 f 一致。现在，狄利克雷原理（参见例如 [10, 20]）指出，解方程 (9) 的函数 F 可通过在 $\mathcal{M}(f)$ 中找出具有最小狄利克雷能量 (4) 的函数得到。因此，为了求出 (9) 的解，可以求解以下最小化问题

$$F = \arg \inf_{u\in\mathcal{M}(f)} \mathrm{E}(u)\,. \quad (12)$$

如果我们用以下符号表示

$$\underline{\mathrm{E}}(f) = \inf_{u\in\mathcal{M}(f)} \mathrm{E}(u)$$

$\mathcal{M}(f)$ 中函数的最小狄利克雷能量，那么结果表明 t

$$\underline{\mathrm{E}}(f) = \mathrm{E}(F) = \mathrm{E}(f) \quad (13)$$

也就是说， $\mathcal{M}(f)$ 中函数的最小狄利克雷能量 $\mathrm{E}(f)$ 等于边界函数 f 的狄利克雷能量 $\mathrm{E}(f)$，并且恰好存在一个满足 $\mathrm{E}(F) = \mathrm{E}(f)$ 的 $F \in \mathcal{M}(f)$。这个极小化函数是 (9) 的一个解。 −

5.3. 问题陈述

第 5.1 和 5.2 小节介绍了求解 (9) 的两种方法。从分析的角度看，这两种方法给出的解相同。然而，就算法解的可计算性而言，两者可能存在显著差异。在接下来的两节中，我们将说明，求解 (9) 时应采用哪种方法，取决于边界函数的集合。为此，我们首先注意到，(13) 意味着给定的边界函数 $f \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 必须具有有限的狄利克雷能量 $\mathrm{E}(f) < \infty$，也就是说，f 必须属于 $H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$。否则，(12) 将没有解。此外，为了将给定的边界函数 $f \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D}) \cap H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$ 交给求解 (12) 或计算泊松积分 (10) 的数值算法，函数 f 必须在某种意义上是可计算的。对于狄利克雷问题的边界函数，自然的要求是以下两者之一：

$$f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D}) \cap H^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \quad \text{or} \quad f \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D}) \cap H^{1/2}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D}).$$

因此，需要求 f 能够在一致范数或（狄利克雷）能量范数$\|\cdot\|_{H^{1/2}}$下通过三角多项式进行有效逼近。这两个假设并不等价，即存在函数 $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D}) \cap H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$，它们不属于 $\mathcal{C}(\partial\mathbb{D}) \cap H^{1/2}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$，反之亦然。

在第 6 节中，我们将证明，存在函数 $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D}) \cap H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$，使得最小化问题（12）的最小值$-\mathrm{E}(f)$ 不是一个可计算数。对于这样的函数，任何试图求解（12）的数值算法，在达到所需误差界时都无法有效地截断迭代。因此，对于边界函数类$\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D}) \cap H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$中的所有函数而言，无法通过优化方法（12）有效地求解狄利克雷问题。此外，第 6 节还根据郑–Weihrauch 层级，对 $\mathrm{E}(f)$ 的可能取值进行了完整刻画。

第 7 节随后研究如何对集合 $\mathcal{C}(\partial\mathbb{D}) \cap H^{1/2}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 中的任意函数计算泊松积分 (10)。研究表明，存在函数 $f \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D}) \cap H^{1/2}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$，使得 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 在某个可计算位置 θ 处不可计算。因此，对于集合 $\mathcal{C}(\partial\mathbb{D}) \cap H^{1/2}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 中的所有函数，都无法通过对泊松积分进行数值积分来有效求解狄利克雷问题。此外，我们还推导出郑–魏劳赫层级中 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 的不可计算度的下界和上界。

6. 通过狄利克雷能量最小化进行计算

对于任意具有有限狄利克雷能量 $\mathrm{E}(f) < \infty$ 的连续边界函数 $f \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$，可以通过求解最小化问题 (12) 得到狄利克雷问题 (9) 的解。本节探讨能否始终在图灵机上有效地求解这一最小化问题。我们将证明事实并非如此。事实上，存在具有有限狄利克雷能量的可计算连续边界函数，使得相应的 (9) 的最小能量 $\mathrm{E}(f)$ 不是可计算数。

定理 *3*：任取满足 $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 且 $\overline{\mathrm{E}}(f) < \infty$ 的对象。则

$$\underline{\mathrm{E}}(f) = \inf_{u \in \mathcal{M}(f)} \mathrm{E}(u) \in \Sigma_1 \,. \tag{14}$$

反过来，对于任意 $\alpha \in \Sigma_1$、$\alpha > 0$，存在一个满足 $f_* \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 的对象

$$\underline{\mathrm{E}}(f_*) = \inf_{u \in \mathcal{M}(f_*)} \mathrm{E}(u) = \alpha \,. \tag{15}$$

证明：任取满足 $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 且 $\mathrm{E}(f) < \infty$ 的对象。我们将 f 写成调和级数 (2)。由于 $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$，相应的傅里叶系数$\{a_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{b_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 构成可计算数构成的可计算序列 [21]。若定义

$$E_N = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} n\big[\,|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\,\big]\,, \quad N \in \mathbb{N}\,,$$

则 $\{E_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ 是一个满足以下条件的可计算数构成的可计算序列

$$E_{N+1} \geq E_N \text{ for all } N \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad \lim_{N\to\infty} E_N = \mathrm{E}(f)\,.$$

因此，$\mathrm{E}(f) \in \Sigma_1$，从而 (13) 推出 (14)。

为证明该定理的第二个陈述，我们选取 $\alpha \in \Sigma_1$，其中 $\alpha > 0$ 任意，并构造一个 $f_* \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$，使得 $\mathrm{E}(f_*) = \alpha$。于是，陈述（15）再次由（13）推出。为构造这样的 f_*，我们首先定义可计算序列 $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}}$，其定义为 $k_m = m^4$。然后，对于每个 $m \geq 1$，我们定义有理三角多项式

$$\varphi_m(\theta) = \cos(k_m\theta)\sum_{\ell=1}^{10}\frac{\cos(\ell\theta)}{\ell}\,, \quad \theta \in [-\pi,\pi)\,. \tag{16}$$

利用标准三角恒等式，我们将 φ_m 写成调和级数

$$\varphi_m(\theta) = \sum_{n=k_m-10}^{k_m+10} a_n(\varphi_m)\cos(n\theta)\,, \quad \theta \in [-\pi,\pi)\,,$$

傅里叶系数为

$$a_n(\varphi_m) = \begin{cases} \frac{1}{2\,(n-k_m)} & : \ n > k_m \\ 0 & : \ n = k_m \\ \frac{1}{2\,(k_m-n)} & : \ n < k_m \end{cases} .$$

继续之前，我们先汇总函数 φ_m的一些性质。首先注意到， φ_m 的狄利克雷能量等于其 $H^{1/2}$范数的平方，且由下式给出

$$\begin{aligned} \|\varphi_m\|_{H^{1/2}}^2 = \mathrm{E}(\varphi_m) &= \tfrac{1}{2}\sum_{n=k_m-10}^{k_m+10} n\,|a_n(\varphi_m)|^2 = \tfrac{1}{8}\sum_{n=k_m-10}^{k_m+10} \tfrac{n}{(n-k_m)^2} \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\sum_{n=k_m-10}^{k_m-1} \tfrac{n}{(n-k_m)^2} + \sum_{n=k_m+1}^{k_m+10} \tfrac{n}{(n-k_m)^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\sum_{r=1}^{10} \tfrac{k_m-r}{r^2} + \sum_{r=1}^{10} \tfrac{k_m+r}{r^2}\right) = \tfrac{k_m}{4}\sum_{r=1}^{10} \tfrac{1}{r^2} = C_0\, m^4 \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $C_0 = \frac{1}{4}\sum_{r=1}^{10} \frac{1}{r^2}$为正常数。此外，$\varphi_m$ 的定义（16）表明

$$|\varphi_m(\theta)| \leq \sum_{\ell=1}^{10} \tfrac{1}{\ell} =: C_\varphi \tag{18}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$ 以及所有 $\theta \in [-\pi,\pi)$ 均成立。对于每个 $m \geq 1$，令

$$\mathfrak{F}_m = \{k_m - 10, \ldots, k_m - 1, k_m + 1, \ldots, k_m + 10\}$$

为 φ_m的非零傅里叶系数的指标集合。由于$k_{m+1} = (m+1)^4 = k_m + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1$，可知对所有 $m \geq 1$， $k_{m+1} - k_m \geq 15$。这意味着对所有 $m \geq 1$， $\mathfrak{F}_{m+1} \cap \mathfrak{F}_m = \emptyset$。因此，函数 φ_n 和 φ_m （其中 $n \neq m$ ）的非零傅里叶系数集合始终互不相交，因此

$$\|\varphi_n + \varphi_m\|_{H^{1/2}}^2 = \|\varphi_n\|_{H^{1/2}}^2 + \|\varphi_m\|_{H^{1/2}}^2 \,. \tag{19}$$

经过这些说明后，我们继续证明，并注意到，由于$\alpha \in \Sigma_1$，存在一个序列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\alpha_{n+1} \geq \alpha_n \text{ for all } n \in \mathbb{N} \qquad \text{and} \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha\,.$$

不失一般性，我们假设 $\alpha_1 = 0$，并定义

$$d_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n\,, \qquad n \geq 1\,.$$

于是，我们为每个 $K \in \mathbb{N}$ 定义函数

$$f_K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \textstyle\sum_{m=1}^{K} \sqrt{d_m}\,\widetilde{\varphi}_m(\theta)\,, \qquad \theta \in [-\pi, \pi)\,,$$

其中归一化函数为 $\widetilde{\varphi}_m = \varphi_m / \|\varphi_m\|_{H^{1/2}}$，函数为

$$f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \textstyle\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{d_m}\,\widetilde{\varphi}_m(\theta)\,, \qquad \theta \in [-\pi, \pi)\,.$$

我们将证明，$f_K \to f_*$ 关于 $\partial\mathbb{D}$ 有效且一致地趋于 $K \to \infty$。事实上，对于每个 $\theta \in [-\pi, \pi)$，有

$$\begin{aligned}\left|f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - f_K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right| &= \left|\textstyle\sum_{m=K+1}^{\infty} \sqrt{d_m}\,\widetilde{\varphi}_m(\theta)\right| \leq \displaystyle\sum_{m=K+1}^{\infty} \frac{\sqrt{d_m}}{\|\varphi_m\|_{H^{1/2}}}\,|\varphi_m(\theta)| \\ &\leq C_\varphi \max_{m>K} \sqrt{d_m} \sum_{m=K+1}^{\infty} \frac{1}{\|\varphi_m\|_{H^{1/2}}} \leq C_1 \sum_{m=K+1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\end{aligned}$$

其中常数 $C_1 = \frac{C_\varphi}{\sqrt{C_0}}\,\left(\max_{m>K}\sqrt{d_m}\right)$，并利用函数 φ_m 的性质 (17) 和 (18) 得到最后一行。利用常见的估计

$$\sum_{m=K+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=K+1}^{N} \frac{1}{m^2} \leq \lim_{N\to\infty} \int_K^N \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{K}$$

最终得到

$$\left|f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - f_K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right| \leq C_1\,\frac{1}{K}\,, \quad \text{for every } K \in \mathbb{N}\,,$$

并且对所有 $\theta \in [-\pi, \pi)$ 一致成立。这表明，可计算三角多项式的可计算序列$\{f_K\}_{K\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于f_*。因此，根据定义 7，$f_* \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$。

最后，我们求出 f_* 的 $H^{1/2}$-范数。利用 (19) 和序列 $\{d_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 的定义，可得

$$\begin{aligned}\|f_*\|_{H^{1/2}}^2 &= \left\|\textstyle\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{d_m}\,\widetilde{\varphi}_m\right\|_{H^{1/2}}^2 = \textstyle\sum_{m=1}^{\infty} d_m\,\|\widetilde{\varphi}_m\|_{H^{1/2}}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} d_m \\ &= \lim_{N\to\infty} \textstyle\sum_{m=1}^{N} (\alpha_{m+1} - \alpha_m) = \lim_{N\to\infty} \alpha_{N+1} - \alpha_1 = \alpha\,.\end{aligned}$$

由于 $\mathsf{E}(f_*) = \|f_*\|_{H^{1/2}}^2$，定理的证明至此完成。 ∎

定理 3 完整刻画了连续可计算边界函数 $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 所对应的狄利克雷问题解的狄利克雷能量 $\mathrm{E}(f)$ 的非可计算程度。定理的第一部分表明，对每个可计算连续边界函数 f，最小能量 $\mathrm{E}(f)$ 总是属于 Σ_1。因此，$\mathrm{E}(f)$ 总是某个由可计算数构成的单调递增可计算序列 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限。特别地，$\mathrm{E}(f)$ 是递归可逼近的。尽管如此，$\mathrm{E}(f)$ 通常并非可计算数。这可由定理 3 的第二部分推出。事实上，由于 $\Delta_1 \subsetneq \Sigma_1$，我们可以选取 $\alpha \in \Sigma_1 \backslash \Delta_1$。于是，定理 3 的第二部分表明，存在一个具有有限狄利克雷能量 $\mathrm{E}(f)$ 的可计算连续函数 $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$，但 $\mathrm{E}(f) = \mathrm{E}(f)$ 不是可计算数：

推论 ***4***：存在函数 $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$，其满足$\mathrm{E}(f) < \infty$，使得狄利克雷问题的变分形式$(12)$的最小值具有一个不可计算解$\mathrm{E}(f)$。

注 ***11***：如果 $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 是推论 4 中所述的函数，那么其狄利克雷能量 $\mathrm{E}(f) = \mathrm{E}(f)$ 不是可计算数。因此，(3) 表明 $\|f\|_{H^{1/2}} \notin \Delta_1$。所以，$f$ 不能是一个 $H^{1/2}$-可计算函数。因此，对于所有满足推论 4 条件的边界函数，使用第 5.2 节讨论的变分方法，无法在图灵机上有效计算相应狄利克雷问题的解。

如果 f 是推论 4 中所述的边界函数，那么尽管 $\mathrm{E}(f)$ 是递归可逼近的，但它只能从下方递归可逼近。不存在任何从上方收敛到 $\mathrm{E}(f)$ 的单调递减可计算序列。鉴于狄利克雷问题的变分形式 (12)，这会带来重要后果，因为大多数试图求解凸最小化问题 (12) 的数值算法，都会生成一个从上方收敛到 $\mathrm{E}(f)$ 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。那么，定理 3 蕴含任何此类逼近序列都不可计算。

推论 ***5***：设 $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 满足 $\mathrm{E}(f) < \infty$，如推论 ***4*** 所述，并设 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个单调递减序列，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{E}(f)$。那么，$\boldsymbol{x}$ 不是由可计算数组成的可计算序列。

因此，为了构造求解变分问题 (14) 的任何数值过程，我们希望构造一个序列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(f)$，使得

$\mathrm{E}(F_{n+1}) \le \mathrm{E}(F_n)$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，并且

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(F_n) = \underline{\mathrm{E}}(f)\,. \tag{20}$$

事实上，只要 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (20) 就足够了。序列的单调性并非必需，因为对于任何满足 (20) 的序列 $\{\mathrm{E}(F_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$，我们总能构造一个单调递减子序列 $\{x_N\}_{N\in\mathbb{N}}$，使其

$$x_N = \min\left\{\mathrm{E}(F_n) : n = 1, 2, \ldots, N\right\}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

当 $N \to \infty$ 时收敛到 $\mathrm{E}(f)$。下一个定理表明，存在可计算连续函数 $f_* \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$，使得集合 $\mathcal{M}(f_*)$ 不包含任何对有效分析意义下计算 $\mathrm{E}(f_*)$ 有用的可计算结构。

定理 *6*：设 $\alpha \in \Sigma_1\backslash\Delta_1$, $\alpha > 0$ 为任意对象，并令 $f_* \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 为按定理 *3* 构造的相应函数。那么，不存在可计算序列 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(f_*)$，其元素均为可计算连续函数，且满足对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\mathrm{E}(F_n) \in \Delta_1$，并且满足

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(F_n) = \underline{\mathrm{E}}(f_*)\,.$$

证明：令 $\alpha \in \Sigma_1$, $\alpha > 0$但 $\alpha \notin \Delta_1$ 任意。于是存在一个由可计算数组成的单调递增可计算序列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，且该序列收敛于 α。假设存在一个可计算序列$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(f_*)$，其元素为可计算连续函数，并满足 (20)。那么，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们都有 $\mathrm{E}(F_n) \ge \mathrm{E}(f_*)$，因此 (21) 定义了一个单调递减的可计算数构成的可计算序列，该序列收敛于 $\mathrm{E}(f_*) = \alpha$。这意味着 $\alpha \in \Pi_1$，进而 $\alpha \in \Sigma_1 \cap \Pi_1 = \Delta_1$。这与假设 $\alpha \notin \Delta_1$ 矛盾，从而证明了该定理。

■

最后，我们想更详细地讨论一下定理 3 的陈述。根据该定理的第二部分，如果 $\alpha \in \Sigma_1\backslash\Delta_1$ 那么相应函数 f_* 的狄利克雷能量 $\mathrm{E}(f_*)$ 不是可计算数。然而，f_* 是可计算连续函数。因此，根据 $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 中可计算结构的定义（参见定义 7），存在一个由三角多项式构成的可计算序列 $\{\varphi_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$，它在最大范数下有效收敛到 f_*，即满足

$$\|f_* - \varphi_n^*\|_\infty < 2^{-n}, \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}\,.$$

三角多项式 φ_n^* 具有形式 (7)，其傅里叶系数序列 $\{a_n(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{b_n(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 都是由可计算数组成的可计算序列。因此显然有 $\{E(\varphi_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中

$$\underline{E}(\varphi_n^*) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d(n)} n\left(|a_n(k)|^2 + |n_n(k)|^2\right)$$

是一个由可计算数构成的可计算序列。此外，根据能量泛函的连续性（即 $H^{1/2}$-范数的连续性），我们有

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\mathrm{E}}(f_* - \varphi_n^*) = \underline{\mathrm{E}}(f_*) - \lim_{n\to\infty} \underline{\mathrm{E}}(\varphi_n^*) = 0 \tag{22}$$

这表明 $\{E(\varphi_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $\mathrm{E}(f_*)$。然而，由于根据定理 3，$\mathrm{E}(f_*)$ 不是一个可计算数，这种收敛不可能是有效的。因此，可计算数构成的可计算序列 $\{E(\varphi_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $\mathrm{E}(f_*)$，但无法有效控制这种收敛的近似误差。

前面的论证表明，$\{\varphi_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ 也是 $H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$ 中的一个可计算序列，关系式 (22) 也可以等价地写作 $\lim_{n\to\infty}\|f_* - \varphi_n^*\|_{H^{1/2}} = 0$。因此，$\{\varphi_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在$H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$的范数下收敛于 f_*。然而，由于这种收敛在 $H_{\mathrm{c}}^{1/2}(\partial\mathbb{D})$ 中不是有效的，函数 f_* 不可能是一个 $H^{1/2}$-可计算函数（另见注 11）。

7. 通过计算泊松积分

如果边界函数 f 连续且具有有限的狄利克雷能量，那么狄利克雷问题 (9) 有唯一解。假设 f 还可以通过三角多项式在 $H^{1/2}$ 范数下有效逼近，也就是说，设 $f \in H_{\mathrm{c}}^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 是定义在 $\partial\mathbb{D}$ 上的连续函数，且具有有限的狄利克雷能量。那么，f 是否是 Banach–Mazur 可计算的？也就是说，对于所有可计算数 $\theta \in \Delta_1$，$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \in \Delta_1$ 是否成立？否定答案可由以下定理直接推出。

定理 7：设 $\theta \in \Delta_1$ 为任意函数。
1) 对每个 $\alpha \in \mathbf{C}_2$，都存在一个 $f_* \in H_{\mathrm{c}}^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$，使得 $f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \alpha$。
2) 每个 $f \in L_{\mathrm{c}}^2(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 都满足 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \in \Delta_2$。

定理 7 的第一部分表明，每个弱可计算数 $\alpha \in \mathbf{C}_2$（参见定义 9）都是某个函数 $f_* \in H_{\mathrm{c}}^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 的值。由于

$\Delta_1 \subsetneq \mathbf{C}_2$, 总是可以选择一个不可计算的 $\alpha \in \mathbf{C}_2$。那么，对于相应的函数 f_*，其值 $f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 不是可计算数，也就是说，f_* 并非将所有可计算数都映射为可计算数。因此，f_* 不是 Banach–Mazur 可计算的，因而也不是可计算连续函数。这回答了本节开头提出的问题:

推论 ***8***: 对于每个 $\theta \in \Delta_1$，都存在一个 $f_* \in H_{\mathrm{c}}^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$，它不是 *Banach-Mazur* 可计算的，且具有 $f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \notin \Delta_1$。
定理 7 的第 1) 部分给出了集合$H_{\mathrm{c}}^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 中函数值的不可计算性（以 Zheng–Weihrauch 层级衡量）的下界。它表明，$H_{\mathrm{c}}^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 包含“糟糕的”函数f_*，使得 $f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 在某些可计算点$\theta \in \partial\mathbb{D}$处仅是弱可计算的。相反，定理 7 的第 2) 部分给出了 $H_{\mathrm{c}}^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 中函数不可计算性的上界。它表明，$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 始终属于 Δ_2，即 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 始终至少是递归可逼近的，但其可计算性永远不会低于 Δ_2。因此，$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 永远不会属于 Δ_n with $n > 2$。事实上，定理 7 表明，对于更大的集合 $L_{\mathrm{c}}^2(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D}) \supsetneq H_{\mathrm{c}}^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 中的所有函数，这一点同样成立。

根据推论 8，总存在函数 $f_* \in H_{\mathrm{c}}^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$，使得值 $f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 不可计算。因此 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \notin \Sigma_1 \cap \Pi_1$，这意味着值 $f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 无法从下方和上方逼近。如果 $f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 属于 Σ_1 或 Π_1，那么至少可以通过单调递增（递减）的可计算序列，从下方或 上方逼近 $f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$。更准确地说，如果 $f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 属于 Σ_1，那么就存在一个可计算序列 $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足

$$\zeta_{n+1} \geq \zeta_n\,, \quad \text{for all } n \in \mathbb{N} \qquad \text{and} \qquad \lim_{n\to\infty} \zeta_n = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,, \tag{23}$$

并且，如果 $f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 属于 Π_1，那么就存在一个可计算序列$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足

$$\xi_{n+1} \leq \xi_n\,, \quad \text{for all } n \in \mathbb{N} \qquad \text{and} \qquad \lim_{n\to\infty} \xi_n = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,. \tag{24}$$

现在需要注意的重要一点是，定理 7 第 1 部分）的表述甚至更强。也就是说，它表明 $f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 可能更加不可计算。由于 $f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 通常只属于 $\mathbf{C}_2$，并且因为 $\Sigma_1 \cup \Pi_1 \subsetneq \mathbf{C}_2$,，我们可以选择定理 7 第一部分中的 $\alpha \in \mathbf{C}_2$，使得

$f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \alpha \notin \Sigma_1 \cup \Pi_1$。那么，$f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 既不能从下方逼近，也不能 从上方逼近。因此，在这种情况下，既不存在满足 (23) 的可计算序列 $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，也不存在满足 (24) 的可计算序列 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。换言之，不存在渐近紧确的 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 下界可计算序列，也不存在 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 上界可计算序列。与第 6 节类似，我们得到定理 7 的以下更强推论。

推论 ***9:*** 任取 $\alpha \in \mathbf{C}_2$, $\alpha \notin \Sigma_1 \cup \Pi_1$，并令 $f_* \in H_{\mathrm{c}}^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 为定理 *7* 第 *1* 部分中相应的函数。

1. 若 $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是满足 (23)的序列，则 $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不是一个可计算数的可计算序列。2. 若 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是满足 (24)的序列，则 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不是一个可计算数的可计算序列。

将此结论与推论 5 比较。它表明，对于 $H_{\mathrm{c}}^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 中的函数，计算 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 的情况比计算 $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$ 中函数的狄利克雷能量更困难。对于后一种情况，狄利克雷能量至少总能通过一个下界序列来近似。一般而言，对于 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 的值，既不存在上界序列，也不存在下界序列。

证明（定理 7）：第 1 部分）不失一般性地，我们仅对 $\theta = 0$ 证明该结论。将证明调整到任意 $\theta \in \Delta_1$ 显然是可行的。对于每个 $M \in \mathbb{N}$、$M \geq 2$，我们考虑函数

$$\varphi_M(\theta) = \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n\log n}\cos(n\theta)\,, \quad \theta \in [-\pi, \pi)\,,$$

并定义正常数

$$C(M) = \varphi_M(0) = \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n\log n}\,, \quad M \geq 2\,.$$

其下界为

$$\begin{aligned} C(M) = \sum_{n=2}^{M} \frac{1}{n\log n} &\geq \int_2^{M+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\log x} = \int_{\log(2)}^{\log(M+1)} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \\ &= \log\log(M+1) - \log\log 2 = \log\frac{\log(M+1)}{\log 2}\,. \end{aligned}$$

此外，φ_M 的定义立即表明

$$|\varphi_M(\theta)| \leq \sum_{n=2}^{M} \frac{|\cos(n\theta)|}{n\log n} \leq C(M)\,, \text{ for all } \theta \in [-\pi, \pi)\,, \tag{25}$$

这尤其意味着 $\|\varphi_M\|_\infty \le C(M)$。对于 φ_M 的 $H^{1/2}$-范数，我们得到以下上界：

$$\begin{aligned}\|\varphi_M\|_{H^{1/2}}^2 &= \sum_{n=2}^{M} n\,|a_n(\varphi_M)|^2 = \sum_{n=2}^{M} \tfrac{1}{n(\log n)^2} = \tfrac{1}{2(\log 2)^2} + \sum_{n=3}^{M} \tfrac{1}{n(\log n)^2} \\ &\le \tfrac{1}{2(\log 2)^2} + \int_2^M \tfrac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^2} \le \tfrac{1}{2(\log 2)^2} + \int_{\log 2}^{\infty} \tfrac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} = \tfrac{1}{2(\log 2)^2} + \tfrac{1}{\log 2}\end{aligned}$$

并将满足条件的最小自然数记为 $K_3 \in \mathbb{N}$

$$\tfrac{1}{\log 2}\left(1 + \tfrac{1}{2\log 2}\right) = \tfrac{1}{2(\log 2)^2} + \tfrac{1}{\log 2} \le K_3\,.$$

最后，我们定义

$$M(k) = 2^{2^{k^2}}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

那么 $\{M(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个由可计算数组成的可计算序列。

完成这些准备后，设 $\alpha \in \mathbf{C}_2$ 为任意一个弱可计算数。那么存在一个由可计算数组成的可计算序列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ （参见 [29, 定理 3]），满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha\,. \tag{26}$$

不失一般性，假设 $\alpha_1 = 0$，并对所有 $n \ge 1$ 定义数 $d_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$，而 $K_4 \in \mathbb{N}$ 表示满足条件的最小自然数

$$\max_{n\in\mathbb{N}} |d_n| \le K_4\,.$$

由此，我们定义函数

$$f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{\varphi_{M(n)}(\theta)}{C(M(n))}\,, \qquad \theta \in [-\pi, \pi)\,,$$

并且对于每个 $K \in \mathbb{N}$，部分和

$$f_K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n=1}^{K} d_n \frac{\varphi_{M(n)}(\theta)}{C(M(n))}\,, \qquad \theta \in [-\pi, \pi)\,.$$

这定义了一个三角多项式的可计算序列 $\{f_K\}_{K\in\mathbb{N}}$。

首先，我们证明 $f_* \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$。应用三角不等式、(25) 以及 d_n 的定义，可得

$$\begin{aligned}\left|f_*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - f_K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right| &= \left|\sum_{n=K+1}^{\infty} d_n \tfrac{\varphi_{M(n)}(\theta)}{C(M(n))}\right| \\ &\le \sum_{n=K+1}^{\infty} |d_n| = \sum_{n=K+1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n|\,,\end{aligned}$$

对每个 $\theta \in [-\pi, \pi)$ 都成立。于是，由 (26) 可知，当 $K \to \infty$ 时，右端趋于零。这表明

$$\lim_{K\to\infty} \|f_* - f_K\|_\infty = 0\,,$$

证明 f 是一个连续函数。

就 $H^{1/2}$-范数下的收敛而言，我们得到

$$\begin{aligned}
\|f_* - f_K\|_{H^{1/2}} &= \left\| \sum_{n=K+1}^{\infty} d_n \frac{\varphi_{M(n)}}{C(M(n))} \right\|_{H^{1/2}} \\
&\leq \sum_{n=K+1}^{\infty} \|d_n\| \tfrac{1}{C(M(n))} \left\|\varphi_{M(n)}\right\|_{H^{1/2}} < K_3K_4 \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{1}{\log \frac{\log M(n)}{\log 2}} \\
&= K_3K_4 \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{1}{\log(2^{n^2})} = \frac{K_3K_4}{\log 2} \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{K_3K_4}{\log 2} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=K+1}^{N} \frac{1}{n^2} \\
&\leq \frac{K_3K_4}{\log 2} \lim_{N\to\infty} \int_K^N \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{K_3K_4}{\log 2} \frac{1}{K}\,.
\end{aligned}$$

因此，若 $K_5 \in \mathbb{N}$ 表示满足 $\frac{K_3K_4}{\log 2} \leq K_5$的最小自然数，那么我们有

$$\|f_* - f_K\|_{H^{1/2}} \leq K_5 \frac{1}{K}\,, \quad \text{for all } K \in \mathbb{N}\,.$$

这表明 $\{f_K\}_{K\in\mathbb{N}}$在 $H^{1/2}$-范数下有效收敛到 f_*。由于 $\{f_K\}_{K\in\mathbb{N}}$是 $H^{1/2}$中的三角多项式构成的可计算序列，因此我们证明了 $f_* \in H^{1/2}_{\mathrm{c}} \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$。

第 2 部分）设 $f \in L^2_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ 和 $\theta \in [-\pi, \pi)$ 为任意对象。我们需要证明存在一个由可计算数组成的可计算序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$，它收敛到 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$。由于 $f \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$，其泊松积分可以写成式 (11) 的形式，并且该级数对所有 $0 \leq r < 1$ 和 $\theta \in [-\pi, \pi)$ 都一致收敛。此外，由于 $f \in L^2_{\mathrm{c}}(\partial\mathbb{D})$，其傅里叶系数构成了两个由 ℓ^2中的可计算数组成的可计算序列 $\{a_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{b_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$。我们将满足下式的最小非负整数记作 $K_1 \in \mathbb{N}$

$$\max\left(\max_{n\in\mathbb{N}} |a_n(f)|\,, \max_{n\in\mathbb{N}} |b_n(f)| \right) \leq K_1\,.$$

对于任意 $M \in \mathbb{N}$，我们记

$$\left(\mathrm{P}_r^M f\right)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{M} r^n \left[a_n(f)\cos(n\theta) + b_n(f)\sin(n\theta)\right].$$

为式（11）中泊松积分的部分和。于是对于每个 $M \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left(\mathrm{P}_r f\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) - \left(\mathrm{P}_r^M f\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| \\ \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} r^n \left(|a_n(f)| + |b_n(f)|\right) \leq K_1 \sum_{n=M+1}^{\infty} r^n = K_1 \frac{r^{M+1}}{1-r}\,.\end{aligned}$$

接下来，我们定义 $r_k = 1 - 1/k$ 和 $M_k = k^2 - k$，其中 $k \in \mathbb{N}$。于是，由前面的不等式可得

$$\left|\left(\mathrm{P}_{r_k} f\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) - \left(\mathrm{P}_{r_k}^{M_k} f\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| < K_1\, k \left(1 - \tfrac{1}{k}\right)^{k^2+k}\,.$$

为了进一步给右侧取上界，我们使用已知的不等式 $(1 - \frac{1}{k})^{k+1} < \mathrm{e}^{-1} < (1 - \frac{1}{k})^k$ 和 $\mathrm{e}^{-1} < \frac{1}{2}$。由此可得

$$\left(1 - \tfrac{1}{k}\right)^{k(k+1)} < \mathrm{e}^{-k} < 2^{-k}\,,$$

由此，我们最终得到

$$\left|\left(\mathrm{P}_{r_k} f\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) - \left(\mathrm{P}_{r_k}^{M_k} f\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| < K_1 \frac{k}{2^k}\,. \tag{27}$$

现在，我们定义

$$x_k = \left(\mathrm{P}_{r_k}^{M_k} f\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right), \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

那么显然，$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个由可计算数构成的可计算序列，并且满足

$$\begin{aligned}\left|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - x_k\right| &= \left|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - \left(\mathrm{P}_{r_k}^{M_k} f\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| \\ &\leq \left|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - \left(\mathrm{P}_{r_k} f\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| + \left|\left(\mathrm{P}_{r_k} f\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) - \left(\mathrm{P}_{r_k}^{M_k} f\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\,.\end{aligned}$$

右侧第一项趋于零，因为当 $k \to \infty$ 时，连续函数 f 的泊松积分 $\mathrm{P}_r f$ 一致收敛于 f；第二项则因 (27) 而（有效地）趋于零。因此，可计算数的可计算序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛（但不一定有效地收敛）到 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$。这证明了 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \in \Delta_2$。

■

8. 结论与讨论

单位圆盘上的经典狄利克雷问题 (9) 可以通过两种不同的主要方法求解。第一种方法基于狄利克雷原理，旨在寻找满足边界条件且狄利克雷能量最小的函数。第二种方法基于调和函数的最大值原理，计算边界函数的泊松积分。我们已经证明，在这两种方法中，可计算的边界函数通常会得到不可计算解。我们利用 Zheng–Weihrauch 层级研究了以下两个问题。

1. 考虑边界函数 f 为可计算连续边界函数的狄利克雷问题 (9)。相应的狄利克雷能量 $\mathrm{E}(f)$ 的不可计算度可能有哪些取值？ 2. 考虑狄利克雷问题 (9)，其中边界函数 f 在 $\partial\mathbb{D}$ 上连续，且是一个 $H^{1/2}(\partial\mathbb{D})$-可计算函数。令 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ 为单位圆上的任意可计算点。函数值 $f(\zeta)$ 在 ζ 处的不可计算度可能有哪些取值?

为解决这两个问题，我们需要分别解决上述每个问题的以下两个子问题：

a) 找出不可计算度的上界，即确定郑–魏劳赫层级中的某一层，使所有可能的解都属于这一层。b) 找出不可计算度的下界。为此，需要在郑–魏劳赫层级中选定某一层。然后，对该层中一个数 α （它不属于层级中更低的层），需要找到一个输入，使得我们对该输入进行运算所得的结果是 α。存在这样的数 α 的最低层，就是所需的下界。

对于问题1，我们成功彻底解决了两个子问题，并证明上下界相等，且等于 Σ_1。因此，对于可计算连续函数 f ，狄利克雷能量 $\mathrm{E}(f)$ 的不可计算度位于郑–魏劳赫层级的第一层。对于问题 2，我们证明不可计算度的下界为 $\mathbf{C}_{2,}^{-}$，即我们证明，对于每个可计算的 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$以及每个 $\alpha \in \mathbf{C}_2$ ，都存在一个函数

$f_* \in H_c^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$，使得 $f(\zeta) = \alpha$。作为不可计算度的上界，我们得到 Δ_2，即对于每个 $f \in H_c^{1/2}(\partial\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$， $f(\zeta)$ 总是属于Δ_2。由于 $\mathbf{C}_2 \subsetneq \Delta_2$，目前还不完全清楚 Δ_2 是否确实是问题 2 的正确不可计算度，还是我们的上界不够好。

附录 A. 完整的郑–魏劳赫层级

按照第 4 节所述的步骤，交替对具有多个指标的可计算序列取上确界和下确界，Zheng 和 Weihrauch 在 [30] 中定义了以下实数层级。

定义 ***12***：对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$。则对每个$n \in \mathbb{N}$，集合 $\Sigma_n \subsetneq \mathbb{R}$、 $\Pi_n \subsetneq \mathbb{R}$ 和 $\Delta_n \subsetneq \mathbb{R}$ 定义如下：

- 数 $x \in \mathbb{R}$ 属于 Σ_n，当且仅当存在一个 n 重可计算序列 $\{r_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n} \subset \mathbb{Q}$，其元素为有理数，且满足

$$x = \sup_{m_1 \in \mathbb{N}} \inf_{m_2 \in \mathbb{N}} \sup_{m_3 \in \mathbb{N}} \ldots \operatorname*{\Theta}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}} r_{\mathbf{m}}$$

  并且，其中 Θ 表示下确界（若 n 为偶数），表示上确界（若 n 为奇数）。

- 数 $x \in \mathbb{R}$ 属于 Π_n，当且仅当存在一个 n 重可计算序列 $\{r_{\mathbf{m}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n} \subset \mathbb{Q}$，其元素为有理数，且满足

$$x = \inf_{m_1 \in \mathbb{N}} \sup_{m_2 \in \mathbb{N}} \inf_{m_3 \in \mathbb{N}} \ldots \operatorname*{\Theta}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}} r_{\mathbf{m}}$$

  并且其中 Θ 在 n 为偶数时表示上确界，在 n 为奇数时表示下确界。

- $\Delta_n = \Sigma_n \cap \Pi_n$。

注 ***12***：对于每个 $n \geq 1$，都有 $\Delta_n \subsetneq \Sigma_n$、 $\Delta_n \subsetneq \Pi_n$和 $\Delta_n \subseteq \Delta_{n+1}$。回想一下，$\Delta_1$ 是所有可计算数的集合，而 Δ_2 是所有递归可逼近数的集合。因此，嵌套集合 Δ_n、 $n \geq 1$ 描述了这样一些数的集合：随着 n 增大，这些数的可计算性越来越低。

注 ***13***：值得注意的是，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，集合 Δ_n 实际上是一个域 [30], ，也就是说，它对通常的算术运算——加法、减法、乘法和除法——封闭。特别地， Δ_1 是可计算数域。

参考文献

[1] G. Acosta 和 J. P. Borthagaray，《分数阶拉普拉斯方程：解的正则性与有限元近似》，《SIAM数值分析杂志》55（2017年），第 2 期，472–495 页。[2] R. A. Adams 和 J. J. F. Fournier，《索伯列夫空间》，第 2 版，Academic Press，阿姆斯特丹，2003年。[3] N. Arcozzi、R. Rochberg、E. T. Sawyer 和 B. D. Wick，《狄利克雷空间：综述》，《纽约数学杂志》17a（2011年），45–86 页。[4] D. P. Bertsekas，《凸优化算法》，Athena Scientific，美国纳舒厄，2015年。[5] S. Boyd 和 L. Vandenberghe，《凸优化》，剑桥大学出版社，剑桥，20004。[6] S. C. Brenner 和 L. R. Scott，《有限元方法的数学理论》，第 3 版，施普林格，纽约，美国，2008年。[7] A. H.-D. Cheng 和 D. T. Cheng，《边界元法的传承与早期历史》，《工程分析与边界元》29（2005年3月），第 3 期，268–302 页。[8] A. Church，《初等数论中的一个不可解问题》，《美国数学杂志》58（1936年4月），第 2 期，345–363 页。[9] R. Courant，《求解平衡与振动问题的变分方法》，《美国数学会公报》49（1943年），1–23 页。[10] L. C. Evans，《偏微分方程》，第 2 版，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2010年。[11]P. Funk，《变分法及其在物理和技术中的应用》，数学科学基础丛书，第 94 卷，施普林格出版社，柏林，1962年。[12] B. G. Galerkin，《杆与板：关于杆与板弹性平衡问题的系列研究》，《工程师公报》（Vest. Inzh. Tech.）19（1915年），第 10 期，897–908 页。[13] M. J. Gander 和 G. Wanner，《从欧拉、里兹和伽辽金到现代计算》，《SIAM评论》54（2012年），第 4 期，627–666 页。[14] K. Gödel，《关于〈数学原理〉及相关系统中形式不可判定命题》，《数学与物理月刊》39（1931年12月），173–198 页。[15] M. J. Grote、A. Schneebeli 和 D. Schötzau，《波动方程的间断伽辽金有限元法》，《SIAM数值分析杂志》44（2006年），第 6 期，2408–2431 页。[16] S. C. Kleene 和 E. L. Post，《递归不可解次数的上半格》，《数学年刊》59（1954年），第 3 期，379–407 页。[17] E. l.Post，《正整数的递归可枚举集及其判定问题》，《美国数学会公报》50（1944年6月），284–316 页。

[18] H. H. E. Leipholz，直接方法与变分法，《应用数学与力学杂志》**67** （1987年），第4期，T13–T22。[19] E. Liflyand，《实直线上的调和分析》，Birkhäuser，沙姆，2021年。[20] S.G. Mikhlin，《数理物理中的变分方法》，培格曼出版社，牛津，1964年。[21] M. B. Pour-El 和 J. I. Richards，《分析与物理中的可计算性》，施普林格出版社，柏林，1989年。[22] S. Repin，伽辽金方法一百年，《计算方法与应用数学》**17**（2017年），第3期，351–357。[23] W. Ritz，关于求解数理物理中某些变分问题的新方法，《纯粹与应用数学杂志》**135** （1909年），1–61。[24] W. T. Ross，经典狄利克雷空间，《当代数学》**393** （2006年），171–197。[25] W. Rudin，《实分析与复分析》，第3版，麦格劳-希尔，波士顿等，1987年。[26] A. M. Turing，论可计算数及其在判定问题中的应用，《伦敦数学会会刊》**s2-42** （1937年），第1期，230–265。[27] A. M. Turing，论可计算数及其在判定问题中的应用：更正，《伦敦数学会会刊》**s2-43**（1938年），第1期，544–546。[28] K. Weihrauch，《可计算分析》，施普林格出版社，柏林，2000年。[29] K. Weihrauch 和 X. Zheng，《递归可枚举实数的有限层级》，《计算机科学的数学基础》，1998年，第798–806页。[30]X. Zheng 和 K. Weihrauch，《实数的算术层级》，《数学逻辑季刊》**47** （2001年），第1期，51–65。[31] A. Zygmund，《三角级数》，第3版，剑桥大学出版社，剑桥，英国，2002年。