arXiv:2601.06957v1 [gr-qc] 11 Jan 2026

极化 $U(1)$ 对称性下$(3+1)$ 维爱因斯坦真空时空中 Kasner 奇点的过去稳定性

KAI DONG

摘要。本文为 Fournodavlos-Rodnianski-Speck [33], 关于极化 $U(1)$ 对称性下（$3+1$）维爱因斯坦真空方程的 Kasner 解所建立的一项过去稳定性结果给出了一种新的证明。我们的方法受 Beyer-Oliynyk-Olvera-Santamaría-Zheng [18, 19], 启发，依赖于一种新近发展的（$2+1$）正交标架分解和谨慎的对称化论证，随后即可应用 Fuchs 型技术。

我们证明，扰动解在大爆炸奇点处渐近于逐点卡斯纳，且测地线不完备并发生挤压。这些结果是通过将（$3+1$）维爱因斯坦真空方程约化为一个与若干约束方程耦合的 Fuchs 系统而得到的，其中对称性假设在约化过程中发挥着重要作用。结合福克斯型理论与约束传播的有限速度，我们得到了直至奇点处解的整体存在性及精确渐近行为。

1. 引言

数十年来，大爆炸解一直是数学和物理学领域广泛研究的对象。这些时空构成了标准的宇宙学模型，用于描述宇宙的大尺度膨胀和奇异行为。其中，卡斯纳解是一类简单且显式的大爆炸奇点解，因此为研究稳定性和渐近行为问题提供了天然的试验场。

固定空间拓扑为闭流形 $\mathbb{T}^3$。本文旨在重新探讨 Fournodavlos-Rodnianski-Speck [33]研究的爱因斯坦真空方程中极化 $U(1)$ 对称卡斯纳稳定性问题。我们将介绍一种替代方法，着重采用（$2+1$）正交标架约化和量身定制的福克斯型表述。我们的分析借鉴了 Beyer-Oliynyk-Olvera-Santamaría-Zheng [18, 19]近期发展的 Fuchs 型技术。具体而言，我们考虑在 $t=t_0$ 切片上给定初始数据的柯西问题，这些数据由卡斯纳数据经过对称扰动得到。通过爱因斯坦真空方程演化这些数据，我们证明所得时空在同步时 $t=0$ 处形成大爆炸奇点，同时在这些奇点附近保持渐近逐点卡斯纳行为。我们还提及 Alexakis-Fournodavlos [1], 的一项早期工作，其中作者通过偏微分方程 — 常微分方程方法、能量估计和迭代方案，确立了空间拓扑为 $\mathbf{R}^3$, 的轴对称极化爱因斯坦真空时空中类施瓦西奇点的稳定性。

1.1. 爱因斯坦场方程与卡斯纳时空。在一个 $(D+1)$ 维洛伦兹流形上，爱因斯坦场方程写作

$$ {}^{(D+1)}R_{ab} - \frac{1}{2}{}^{(D+1)}R g_{ab} = T_{ab}, \tag{1.1a} $$

$$ {}^{(D+1)}\nabla^a T_{ab} = 0, \tag{1.1b} $$

其中 ${}^{(D+1)}R_{ab}$ 和 ${}^{(D+1)}R$ 分别表示里奇曲率和标量曲率， T_{ab} 为应力能量张量。

在本文中，我们研究爱因斯坦真空方程，其中

$$ T_{ab} = 0, $$

以及爱因斯坦-标量场方程，其中

$$ T_{ab} = 2\nabla_a\phi\nabla_b\phi - g_{ab}\nabla^c\phi\nabla_c\phi, $$
$$ \Box_g\phi = 0, $$

并结合标量场的守恒律 ϕ。

在宇宙学中，卡斯纳时空在这两种情形下都给出了显式解。爱因斯坦-标量场系统的（$D+1$）维卡斯纳解可写为

$$ g_{Kas} = -(\mathrm{d}t)^2 + \sum_{\Lambda=1}^{D} t^{2p_\Lambda}(\mathrm{d}x^\Lambda)^2, \quad \phi = B\log t, \tag{1.2} $$

其中 th 这些指数 p_Λ 称为***Kasner*** 指数，满足两个代数关系 s

$$ \sum_{\Lambda=1}^{D} p_\Lambda = 1, \quad \sum_{\Lambda=1}^{D} p_\Lambda^2 = 1 - B^2. \tag{1.3} $$

特殊情形 $B = 0$ 便给出真空卡斯纳度规。

特别地，对于 $D = 3$ 和 $\phi \equiv 0$，Kasner 关系 (1.3) 化为

$$ \sum_{I=1}^{3} p_I = \sum_{I=1}^{3} p_I^2 = 1. \tag{1.4} $$

直接进行代数检验可知，恰有一个 p_i为负数，因此我们采用如下排序

$$ p_1 < 0 < p_2 \,\&\, p_3. \tag{1.5} $$

作为一个引导性例子，在其类空奇点附近，著名的 Schwarzschild 解在局部可由具有以下指数的 Kasner 度规近似

$$ (p_1, p_2, p_3) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \tag{1.6} $$

其中，正指数对应于角方向。这也促使我们将注意力限制在极化 U(1)-对称情形，其中对称方向对应于一个正 Kasner 指数。

Fournodavlos-Rodnianski-Speck 最近的工作 [33] 研究了爱因斯坦真空方程（维数 $D \geq 10$）和爱因斯坦-标量场方程（维数 $D \geq 3$）在完整的 次临界区域内的卡斯纳度量稳定性:

$$ \max_{I\neq J}\{p_I + p_J - p_K\} < 1, \tag{1.7} $$

而 Beyer-Oliynyk-Zheng[19] 也通过 Fuchs 型技术，采用局部化论证重新研究了 ($3+1$) 爱因斯坦-标量场方程。对于爱因斯坦-麦克斯韦-标量场

场-弗拉索夫系统，An-He-Shen [6] 进一步将研究推广到强次临界区域内 Kasner 奇点的稳定性：

$$\max\{p_I + p_J - p_K\} < 1. \tag{1.8}$$

然而，满足 (1.4) 的 $(3+1)$ 维真空 Kasner 指数既非强次临界，也非次临界，因此此处的分析必须面对这一非次临界情形。

1.2. 时空的空间拓扑与对称性假设。 正如 [33, 36] 中所引入并在定义 2.1 中阐述的，我们假设该时空存在一个处处非退化的基灵向量场 S，其轨道为 $\mathbb{T}^1$，且该向量场超曲面正交、类空，并满足

$$\mathcal{L}_S g = \mathcal{L}_S k = 0.$$

此外，对于每个 Σ_t 切向量场 X，$k(S, X) = 0$，且 $g(S, X) = 0$，其中 k表示空间切片 $\Sigma_t \simeq \mathbb{T}^3$的第二基本形式。

在这一对称性条件下，度规可分解为

$$g = h + e^{2\phi}(\mathrm{d}x^3)^2, \quad h = -\mathfrak{n}^2(\mathrm{d}t)^2 + \sum_{I,J=1}^{2} g_{IJ}\mathrm{d}x^I\mathrm{d}x^J \tag{1.9}$$

所有分量均与 x^3无关。x^3方向对应正的 Kasner 指数 p_3。

1.3. 主结果的粗略表述。 下面对主定理作非正式描述；精确表述见第 5.2 节定理 5.2。

定理 1.1 (粗略版本)。 考虑具有极化 $U(1)$ 对称性的 $3+1$- 维爱因斯坦真空方程。则每个非平凡真空卡斯纳解 *(1.2)*，在满足 $B = 0$ 和 $D = 3$ 的条件下，在其大爆炸奇点附近对小的极化 $U(1)$ 对称扰动具有动力学稳定性。

更具体地说，对于大小由 $\delta_0 > 0$ 控制且充分小的扰动，在调和时间 $t = 0$ 处形成同步奇点的受扰时空渐近呈逐点卡斯纳形式，并表现出挤压行为，满足 $\mathrm{tr}k \sim t^{-1+c\delta_0}$；其过去方向上类时测地线不完备，克雷奇曼标量按 $R^{abcd}R_{abcd} \sim t^{-4+c\delta_0}$ 的量级发散；并且当 $t \to 0^+$ 时呈渐近速度项支配（*AVTD*）。

1.4. 前期及相关成果。 对宇宙学奇点和大爆炸渐近行为的数学研究历史悠久，数学相对论和理论物理领域均对此有所贡献。从启发式角度看，BKL 图景 [10] 开启了这一研究方向；BKL 启发式观点认为，在一般类空奇点附近，动力学近似局部化，且在主导阶上由时间变量的常微分方程支配。这一物理观点推动了针对不同模型的一系列严格研究。

在数学方面，早期的重要进展涉及具有高迪对称性的时空，参见例如 [23, 35]；关于静止奇点和渐近速度项支配行为的有影响力成果见于 [8]。此外，针对特定宇宙学模型的非线性稳定性和奇点形成，也有大量研究；具有代表性的工作包括

Rodnianski-Speck 的一系列研究 [58, 59, 61, 62], 、Klainerman-Szeftel 的重要进展 [41], ，以及 Ringström 建立的若干综合框架 [53, 54, 55, 56,57]。另请参阅相关分析 [20, 27, 28, 29, 30, 31, 45, 65, 66]。关于具有球对称的爱因斯坦-标量场系统中的类空奇点研究，参见 [4, 5, 7, 44]。

偏微分方程理论中的 Fuchs 型方法最初是在半线性解析情形下发展起来的，其渊源可追溯至经典研究，例如见 [21, 37, 38, 39, 40]。Rendall 和 Ståhl 在 [51, 52, 64] 中率先将这些思想从几何角度应用于爱因斯坦方程。在这些基础上，分析假设扩展到了拟线性和索博列夫正则情形，相关研究见 Ames-Beyer-Isenberg-LeFloch [2, 3, 12, 13, 14]。

在物理学方面，（$3+1$）宇宙学中的正交标架分解可追溯至 Ellis [26], ，后续讨论见 [63, 67]。这种分解便于将爱因斯坦场方程写成一阶形式，并在奇点附近分离时间主导项与空间项。关于具有类空 $U(1)$ 等距群的爱因斯坦方程的研究，同样起源于物理学文献，例如见 [36, 48]。

与本文更直接相关的是近期一些证明各种宇宙学背景稳定性的重要工作，特别是：

- [33]：在完整次临界区域（1.7）内，以及在极化 $U(1)$ 对称性下，证明了卡西纳型背景的稳定性；本文重新考察的正是极化 $U(1)$ 对称性这一情形； [6]：将 [33] 推广至完整强次临界区域（1.8）内的爱因斯坦-麦克斯韦-标量场-弗拉索夫系统；
- Beyer-Oliynyk-Olvera-Santamaría 的重要工作 [18, 50], 以及随后一系列近期研究，将 Fuchs 型技术应用于过去稳定性问题（包括 [15, 16, 17, 18, 19, 29, 30, 32, 50], ）和未来稳定性问题（包括 [32, 46,49]）。

1.5. 证明策略与新要素。我们的方法主要受 [18,19], 启发，并进一步结合了新近发展的（$2+1$）正交标架约化以及细致的对称化过程。证明策略分为以下几个步骤：

1. 约化与标架分解。 在第 2 节和第 3 节中，我们约化 x^3 对称方向，并在商空间 $(M^{3+1}/\mathbb{T}^1, h)$ 上进行研究，其中 h 如 (1.9) 所示。

选取一个经费米-沃克输运的正交标架 $\{e_0, e_1, e_2\}$ ，满足 $e_0 = \mathfrak{n}^{-1}\partial_t$。作为 [26, 67], 的推广，我们采用新近发展的（无旋）相对论（$2+1$）正交标架分解：

$$[e_0, e_A] = U_A e_0 - \left(H\delta_A^B + \Sigma_A{}^B\right) e_B, \tag{1.10a}$$

$$[e_A, e_B] = 2A_{[A}\delta_{B]}^C e_C, \tag{1.10b}$$

该分解将未知量约化为向量 $\mathbf{W} := \left(\mathfrak{n}, e_P^\Lambda, U_P, A_P, H, \Sigma_{PQ}\right)^T$。在我们的设定下，爱因斯坦场方程给出了关于 $\mathbf{W}$ 的如下演化系统：

$$\mathbf{B}^0\partial_t\mathbf{W} + \mathfrak{n}e_C^\Lambda\mathbf{B}^C\partial_\Lambda\mathbf{W} = \mathbf{G}(t, \mathbf{W}), \tag{1.11}$$

（另见（2.25a）–（2.25f）或（3.2）），结合约束方程

$$\mathfrak{X} = \left(\mathfrak{E}_{AB}^\Lambda, \mathfrak{U}_{AB}, \mathfrak{N}_A, \mathfrak{M}_A, \mathfrak{H}\right)^T = 0, \tag{1.12}$$

（关于 $\mathfrak{X}$的显式公式，见（2.24a）–（2.24e）或（4.1a）–（4.1e））。我们指出，上述分解（1.10a）、（1.10b）以及第 2 节中相关的完整计算，同样适用于一般的极化 $U(1)$ 对称时空和（$2+1$）洛伦兹流形；

2. 约束传播。 在第 4 节中，我们证明，若约束 (1.12) 在初始时刻成立，则只要解 $\mathbf{W}$ 存在，这些约束便会一直保持成立。

一个关键的观察是，在 $(2+1)$ 分解中，里奇张量${}^{(2+1)}R_{AB}$ 的对称性并非显而易见，必须通过巧妙运用雅可比恒等式来恢复。完成必要的对称化后，约束满足如下形式的线性强双曲系统：

$$\mathcal{A}^0\partial_t\mathfrak{X} + \mathfrak{n}\mathcal{A}^R e_R^\Lambda \partial_\Lambda \mathfrak{X} = \mathcal{B}\mathfrak{X} \tag{1.13}$$

（另见 (4.3a)-(4.3d) 或 (4.5)），由有限传播速度可得$\mathfrak{X} \equiv 0$。另一方面，若不进行对称化，传播系统 (4.5) 将无法 成为强双曲系统或 Friedrichs 可对称化系统，从而造成重大困难与障碍。详情见注 2.5；

3. 对称化与 *Fuchs* 型方法。 在第 3 节和第 5.1 节中，我们进行代数对称化和时间加权重标度，将演化系统 (1.11) 化为福克斯形式：

$$\tilde{\mathbf{B}}^0\partial_t\tilde{\mathbf{W}} + \tilde{\mathbf{B}}^\Lambda\partial_\Lambda\tilde{\mathbf{W}} = \frac{1}{t}\mathscr{B}\mathbb{P}\tilde{\mathbf{W}} + \frac{1}{t}\tilde{\mathbf{F}}[t,\tilde{\mathbf{W}}], \tag{1.14}$$

其中$\mathbf{W}$ 是重标度后的未知量， $\mathbb{P}$ 是用于识别$\mathbf{W}$的衰减分量和收敛分量的投影；其他系数矩阵和非线性源项满足福克斯条件（具体的福克斯条件见定理 A.2 陈述末尾的第 (1) 至 (5) 项，或命题 5.1 的证明）。这将奇异初值问题的整体存在性和渐近行为研究，归结为验证若干代数和解析条件。遵循以往研究 [18, 19], ，附录 A 给出了更适用于我们所研究情形的简化 Fuchs 型方法；

4.主定理的证明。 最后，在第 5.2 节中，福克斯存在性与衰减性给出了重标度后未知量$\mathbf{W}$各分量的精确渐近展开：

$$\begin{gathered}
\tilde{\mathfrak{n}} = t^{2\tilde{H}_*+\varepsilon_0}\tilde{\mathfrak{n}}_*\left(1 + O_{H^{s-1}}(t^\zeta)\right), \\
\tilde{e}_I^\Lambda = O_{H^{s-1}}(t^\zeta), \quad \tilde{A}_P = O_{H^{s-1}}(t^\zeta), \quad \tilde{U}_P = O_{H^{s-1}}(t^\zeta), \\
\tilde{H} = \tilde{H}_* + O_{H^{s-1}}(t^\zeta), \quad \tilde{\Sigma}_{AB} = \tilde{\Sigma}_{*AB} + O_{H^{s-1}}(t^\zeta),
\end{gathered} \tag{1.15}$$

其中，带有指标 $*$的量与 t无关。根据这些轮廓，我们推导出与物理度量 g相关的第二基本形式和曲率不变量的渐近行为，并从主导阶常微分方程动力学中得出 AVTD行为；参见定理 5.2。

1.6. **致谢**。 作者谨向 Xinliang An 教授和 Todd A. Oliynyk 教授致以谢意，感谢他们进行的许多富有启发性的讨论。作者还要感谢 Haoyang Chen 博士对稿件的认真阅读和宝贵意见。

2. 方程的表述

本节将介绍一些预备知识和相关表述，其中包括对 $(2+1)$ 正交标架双曲系统的主要约化。

考虑带有零移位的切片时空 $(3+1)$-分解 (M^{3+1}, g)。将其度规写作

$$g = -\mathfrak{n}^2 \,\mathrm{d}t^2 + g_{IJ}\,\mathrm{d}x^I \mathrm{d}x^J, \tag{2.1}$$

其中函数 $\mathfrak{n} > 0$ 称为闵可夫斯基函数 。

令 ${}^{(3+1)}\nabla$ 表示 g的列维-奇维塔联络，并令${}^{(3+1)}R$ 表示其对应的曲率张量。则 $(3+1)$ 维爱因斯坦真空方程为

$${}^{(3+1)}R_{ij}(g) = 0. \tag{2.2}$$

本文始终采用以下极化 $U(1)$对称性假设，并对物理度量 g 进行波映射约化。

定义 2.1. 若向量场 ∂_3 生成空间超曲面正交的基灵对称性，且度规与 x^3无关，则称时空 (M^{3+1}, g) 关于 x^3方向具有极化的 $U(1)$对称性。此时，稍微滥用一下记号，度规可写为:

$$g = -\mathfrak{n}^2 \,\mathrm{d}t^2 + \sum_{I,J=1}^{2} g_{IJ}\,\mathrm{d}x^I\,\mathrm{d}x^J + e^{2\phi}(\mathrm{d}x^3)^2 =: h + e^{2\phi}(\mathrm{d}x^3)^2, \tag{2.3}$$

其中， ϕ是从 M^{3+1}到 $M^{3+1}/\mathbb{T}^1$的波映射， h表示商流形 $M^{3+1}/\mathbb{T}^1$ 上的$(2+1)$维洛伦兹度规， h的所有分量（包括 ϕ）都是定义在 $M^{3+1}/\mathbb{T}^1$上的函数，且与 x^3无关。

以下命题是我们分析中的核心约化。

命题 2.1. 设(M^{3+1}, g) 是一个具有极化 $U(1)$对称性的洛伦兹流形。那么，关于 g的$(3+1)$维爱因斯坦真空方程:

$${}^{(3+1)}R_{ab}(g) = 0, \tag{2.4}$$

等价于关于 h 和ϕ 的$(2+1)$维修正的爱因斯坦-标量场方程:

$${}^{(2+1)}R_{ab}(h) = {}^{(2+1)}\nabla_a\,{}^{(2+1)}\nabla_b\phi + {}^{(2+1)}\nabla_a\phi\,{}^{(2+1)}\nabla_b\phi, \tag{2.5a}$$

$$\Box_h\phi = -\left|{}^{(2+1)}\nabla\phi\right|_h^2, \tag{2.5b}$$

其中${}^{(2+1)}\nabla$ 和${}^{(2+1)}R$ 分别表示 h 的列维-奇维塔联络和曲率张量。此外，在下文中，除非另有说明，我们省略 $M^{3+1}/\mathbb{T}^1$ 的所有几何量上的指标$(2+1)$ ；例如，${}^{(2+1)}R_{abcd}$ 将简记为 R_{abcd}。

证明。 证明可通过直接计算得到。克里斯托费尔符号 ${}^{(3+1)}\Gamma$ 与 Γ 分别对应于 g 和 h，它们之间有如下关系:

$$\begin{gathered} {}^{(3+1)}\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}, \quad {}^{(3+1)}\Gamma^3_{33} = 0, \quad {}^{(3+1)}\Gamma^3_{jk} = 0, \quad {}^{(3+1)}\Gamma^i_{3k} = 0, \\ {}^{(3+1)}\Gamma^3_{j3} = \nabla_j\phi, \quad {}^{(3+1)}\Gamma^i_{33} = -e^{2\phi}\nabla^i\phi; \end{gathered} \tag{2.6}$$

其中，指标 i，j，k（以及后续所有指标）的取值范围为 {0，1，2}。因此，g 在正交标架下的黎曼张量和里奇张量分量 ${}^{(3+1)}R$ 为：

(2.7)
$$
\begin{aligned}
&{}^{(3+1)}R_{ijkl} = R_{ijkl}, \quad {}^{(3+1)}R_{ijk3} \equiv 0, \quad {}^{(3+1)}R_{3jk3} = \nabla^2_{j,k}\phi + \nabla_j\nabla_k\phi, \\
&{}^{(3+1)}R_{ik} = R_{ik} - \nabla^2_{i,k}\phi - \nabla_i\phi\nabla_k\phi, \quad {}^{(3+1)}R_{3k} \equiv 0, \quad {}^{(3+1)}R_{33} = -e^{2\phi}\left(\Box_h\phi + |\nabla\phi|^2_h\right).
\end{aligned}
$$

爱因斯坦方程由此给出 (2.5a) 和 (2.5b)。 □

从现在起，除非另有说明，我们将对商时空 $(M^{3+1}/\mathbb{T}^1,\ h)$ 进行所有后续计算。

2.1. 相对论$(2+1)$维正交标架分解。设$\{e_I = e_I^\Lambda\partial_\Lambda\}_{I=1,\ 2}$ 是初始超曲面 $\Sigma_{t_0} := \{t = t_0\}$ 上 h 的空间正交标架，并令 $e_0 = \mathfrak{n}^{-1}\partial_t$ 为定义在所有 t 上且与 Σ_t 正交的单位类时向量场。我们沿着 e_0 使用费米-沃克输运传播空间向量：

定义 2.2。若向量场 X^i 沿类时曲线 $\gamma(s)$ 的费米-沃克导数为零，则称其沿该曲线作费米-沃克输运，即

$$
\frac{\mathrm{D}_F X^i}{\mathrm{d}s} := Z^j\nabla_j X^i + 2A^{[i}Z^{j]}X_j = 0, \tag{2.8}
$$

其中 $Z^i = (\partial_s)^i$，$A^i = Z^j\nabla_j Z^i$。

将标架 $\{e_1, e_2\}$ 沿切向量为 $Z^i = e_0\delta^{0i}$ 的 t 曲线输运，并施加费米-沃克输运条件，可得

$$
0 = \nabla_{e_0}e_I + h(e_0, e_I)\nabla_{e_0}e_0 - h(e_I, \nabla_{e_0}e_0)e_0.
$$

由于 $h(e_0, e_I) = 0$，因此

$$
\nabla_{e_0}e_I = h(\nabla_{e_0}e_0, e_I)e_0. \tag{2.9}
$$

因此，我们在时空上得到一个经费米-沃克输运的正交标架 $\{e_0, e_1, e_2\}$。在此标架下，度规分量满足

$$
h_{ij} = h(e_i, e_j) = \eta_{ij},
$$

其中 η 表示标准闵可夫斯基度量。费米-沃克输运的主要优点是消除标架沿 e_0 流动时任意的自旋或旋转，从而简化后续的分解；关于带自旋转四标架的 $(3+1)$ 处理，见 [26, 67]。

消除自旋自由度后，相对论 $(2+1)$ 正交标架分解如下：

$$
[e_0, e_A] = U_A e_0 - \left(H\delta^B_A + \Sigma_A{}^B\right)e_B, \tag{2.10a}
$$

$$
[e_A, e_B] = 2A_{[A}\delta^C_{B]}e_C, \tag{2.10b}
$$

其中 H 是一个函数，A 和 U 是一阶张量，Σ 是一个对称无迹二阶张量。令 γ 表示联络系数

$$
\gamma_{acb} := g(\nabla_{e_a}e_b, e_c),
$$

于是，由 (2.10a) 和 (2.10b) 可明确计算得：

$$\gamma_{00A} = -\gamma_{0A0} = -U_A, \tag{2.11a}$$

$$\gamma_{A0B} = -\gamma_{AB0} = -\left(H\delta_{AB} + \Sigma_{AB}\right), \tag{2.11b}$$

$$\gamma_{ABC} = 2A_{[B}\delta_{C]A}, \tag{2.11c}$$

$$\gamma_{000} = 0, \quad \gamma_{A00} = 0, \quad \gamma_{0AB} = 0. \tag{2.11d}$$

由于曲率分量由下式给出

$$R_{abcd} = -e_a(\gamma_{bdc}) + e_b(\gamma_{adc}) + \eta^{ij}\left(\gamma_{ajc}\gamma_{bdi} - \gamma_{bjc}\gamma_{adi} + \gamma_{ajb}\gamma_{idc} - \gamma_{bja}\gamma_{idc}\right), \tag{2.12}$$

直接计算可得：

引理 2.2. 该$(2+1)$维度度规 h 具有以下非平凡的黎曼曲率和里奇曲率分量：

(2.13a)

$$\begin{aligned} R_{0B0D} = &-e_0(H)\delta_{BD} - e_0(\Sigma_{BD}) + e_B(U_D) + U_BU_D + A_DU_B - A\cdot U\delta_{BD} \\ &- H^2\delta_{BD} - 2H\Sigma_{BD} - \Sigma_B{}^C\Sigma_{CD}, \end{aligned}$$

(2.13b)

$$\begin{aligned} R_{0BCD} = &\, e_0(A_C)\delta_{BD} - e_0(A_D)\delta_{BC} + HU_C\delta_{BD} + U_C\Sigma_{BD} - HU_D\delta_{BC} - U_D\Sigma_{BC} \\ &- HA_D\delta_{BC} + HA_C\delta_{BD} - \Sigma_{BC}A_D + \Sigma_{BD}A_C, \end{aligned}$$

(2.13c)

$$\begin{aligned} R_{ABCD} = &-e_A(A_D)\delta_{CB} + e_A(A_C)\delta_{DB} + e_B(A_D)\delta_{CA} - e_B(A_C)\delta_{DA} \\ &+ (H^2 - A\cdot A)(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{BC}\delta_{AD}) \\ &+ H(\delta_{AC}\Sigma_{BD} + \delta_{BD}\Sigma_{AC} - \delta_{BC}\Sigma_{AD} - \delta_{AD}\Sigma_{BC}) + \Sigma_{AC}\Sigma_{BD} - \Sigma_{BC}\Sigma_{AD} \end{aligned}$$

$$R_{00} = -2e_0(H) + e_A(U^A) + (U - A)\cdot U - 2H^2 - \Sigma\cdot\Sigma, \tag{2.13d}$$

$$R_{0A} = e_0(A_A) + H(U_A + A_A) - (A^B + U^B)\Sigma_{AB}, \tag{2.13e}$$

$$R_{A0} = -e_A(H) + e_B\left(\Sigma_A{}^B\right) - 2A^B\Sigma_{AB}, \tag{2.13f}$$

$$\begin{aligned} R_{AB} = &-e_A(U_B) + e_0(H\delta_{AB} + \Sigma_{AB}) + (U - A)\cdot A\ \delta_{AB} \\ &- U_A(U_B + A_B) + e_C(A^C)\delta_{AB} + 2H(H\delta_{AB} + \Sigma_{AB}). \end{aligned} \tag{2.13g}$$

令 $\tau = e^{\phi}$，则（$2+1$）维修正的爱因斯坦-标量场系统（2.5a）-（2.5b）等价于

$$R_{ab}(g) = T_{ab}(\tau) = \tau^{-1}\nabla_a\nabla_b\tau, \tag{2.14a}$$

$$\Box_g\tau = 0. \tag{2.14b}$$

2.2. 背景度量的选择。正如引言中所述，方程（2.2）存在显式解；例如，Kasner 族 $\mathring{g}$:

$$\mathring{g} = -(\mathrm{d}t)^2 + \sum_{\Lambda=1}^{3} t^{2p_\Lambda}(\mathrm{d}x^\Lambda)^2, \tag{2.15}$$

whe常数 p_I（称为 卡斯纳指数）满足 ***Kasner*** 关系：

$$\sum_{\Lambda=1}^{3} p_\Lambda = \sum_{\Lambda=1}^{3} p_\Lambda^2 = 1. \tag{2.16}$$

我们选择 $\mathring{g}$ 作为背景时空。简单的代数检验表明，指数 p_Λ 中恰有一个为负；不失一般性，我们假设

$$p_1 < 0 < p_2 \,\&\, p_3.$$

注记 2.3. 回顾定义 2.1，必须取 $p_3 > 0$。这一选择确保与史瓦西解（见 (1.6)）相容；在这种情况下， x^3 对称方向对应于角向对称性。此外，这也保证奇点仍发生在超曲面 Σ_0 上，并且如下文将立即看到的，以下坐标变换是良定义的。

考虑一个新的时间函数 $t := t^{p_3}$，背景度规可重新表示为

$$\mathring{h} = -t^{r_0}\,\mathrm{d}t^2 + \sum_{\Lambda=1}^{2} t^{r_\Lambda}(\mathrm{d}x^\Lambda)^2, \quad \mathring{\tau} = t, \tag{2.17}$$

其中，新的 Kasner 指数 r_Λ' 满足

$$\begin{gathered} r_0 = \frac{2}{P} - 4 \geq 0, \quad r_\Lambda = \frac{2p_\Lambda}{p_3}, \quad P = \frac{p_3}{1+p_3}, \\ r_1 + r_2 = r_0, \quad r_1^2 + r_2^2 = \frac{2}{P} r_0. \end{gathered} \tag{2.18}$$

于是可得

$$r_1 < 0 < r_2, \quad r_0 - r_1 > r_0 - r_2 > -2. \tag{2.19}$$

此外，我们在分解 (2.10a)- (2.10b) 中用到的背景几何量为

$$\mathring{\mathfrak{n}} = t^{r_0/2}, \quad \mathring{e}_A^\Lambda = t^{-r_A/2}\delta_A^\Lambda, \quad \mathring{A}_A = \mathring{U}_A = 0, \tag{2.20a}$$

$$\mathring{H} = \frac{r_0}{4} t^{-r_0/2-1}, \quad \mathring{\Sigma}_{AB} = \left(\frac{r_{AB}}{2} - \frac{r_0}{4}\delta_{AB}\right) t^{-r_0/2-1}, \tag{2.20b}$$

其中，当 $A = B$ 时为 $r_{AB} = r_A$ ，否则为 $r_{AB} = 0$ 。

我们指出，若使用原始时间函数进行计算，后续所有计算和整个论证仍然成立，只是届时会出现许多涉及参数 $p_3 - 1$ 的额外项。

2.3. **规范自由度**。施加 (2.10a)-(2.10b) 后，失函数 $\mathfrak{n}$ 中仅剩一个规范自由度。与 [19, 36], 保持一致，我们通过选取时空的调和时间 $t = \tau$ 来固定这一自由度。于是 (2.14a)-(2.14b) 变为

$$R_{ab}(g) = T_{ab}(g) = t^{-1}\nabla_a\nabla_b t, \tag{2.21a}$$

$$\Box_g t = 0. \tag{2.21b}$$

考虑到 (2.10a)， T_{ab} 的分量为

$$T_{00} = -2t^{-1}\mathfrak{n}^{-1}H, \tag{2.22a}$$

$$T_{A0} = T_{0A} = -t^{-1}\mathfrak{n}^{-1}U_A, \tag{2.22b}$$

$$T_{AB} = -t^{-1}\mathfrak{n}^{-1}\left(H\delta_{AB} + \Sigma_{AB}\right). \tag{2.22c}$$

注 2.4. 在 [6, 33], 中，作者通过采用常平均曲率（CMC）叶状结构来固定规范自由度,

$$\operatorname{tr} k = -\frac{1}{t},$$

其中， k 是 t超曲面 Σ_t的第二基本形式。由此可得关于 $\mathfrak{n}$的椭圆方程，便于据此进行能量估计。

然而，在我们的谐和时间规范和时间坐标的选取下，我们将为解恢复类似的性质；关于奇点附近 $\operatorname{tr} k$ 的具体表达式，参见主定理定理 5.2 中的断言 (2) 和 (3)。

2.4. **方程的推导**。

a. 由引理 2.2、(2.21a) 和 (2.22a)-(2.22c)，我们得到

$$2e_0(H) - e_A(U^A) = 2t^{-1}\mathfrak{n}^{-1}H + (U - A)\cdot U - 2H^2 - \Sigma\cdot\Sigma, \tag{2.23a}$$

$$e_0(A_A) = -t^{-1}\mathfrak{n}^{-1}U_A - H(U_A + A_A) + (A^B + U^B)\Sigma_{AB}, \tag{2.23b}$$

$$e_A(H) - e_B\left(\Sigma_A{}^B\right) = t^{-1}\mathfrak{n}^{-1}U_A - 2A^B\Sigma_{AB}, \tag{2.23c}$$

$$2e_0(H) - e_A(U^A) + 2e_A(A^A) = -2\mathfrak{n}^{-1}t^{-1}H - 4H^2 + U\cdot U + 2A\cdot A - U\cdot A, \tag{2.23d}$$

$$e_0(\Sigma) - e\hat{\otimes}U = U\hat{\otimes}(U + A) - 2H\Sigma - t^{-1}\mathfrak{n}^{-1}\Sigma, \tag{2.23e}$$

其中，(2.23d) 和 (2.23e) 分别对应于 R_{AB}的迹部分和对称无迹部分。哈密顿约束和动量约束包含在 (2.23a)-(2.23c) 中。下文中，对于 1-形式 A_I 和 B_J，我们将它们的对称无迹张量积定义为

$$(A\hat{\otimes}B)_{IJ} := \frac{1}{2}(A_IB_J + A_JB_I) - \frac{\delta_{IJ}}{\operatorname{tr}\delta}\operatorname{tr}(A\otimes B);$$

b. 相对论的（$2+1$）维正交标架分解（2.10a）—（2.10b）立即给出

$$e_{[A}\left(e^{\Lambda}_{B]}\right) = A_{[A}e^{\Lambda}_{B]}, \tag{2.23f}$$

$$e_0\left(e^{\Lambda}_A\right) = -\left(H\delta^B_A + \Sigma_A{}^B\right)e^{\Lambda}_B, \tag{2.23g}$$

$$e_A(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}U_A; \tag{2.23h}$$

c. 雅可比恒等式

$$\sum_{cyc}[[e_A, e_B], e_0] = 0,$$

也应与（2.10a）—（2.10b）相协调，这意味着

$$e_{[A}(U_{B]}) = A_{[A}U_{B]}; \tag{2.23i}$$

d. 最后，规范条件（2.21b）给出了 $\mathfrak{n}$ 和 U_A的演化方程:

$$e_0(\mathfrak{n}) = 2\mathfrak{n}H, \tag{2.23j}$$

$$e_0(U_A) = 2e_A(H) + HU_A - U^B\Sigma_{AB}. \tag{2.23k}$$

注 2.5（关键对称化）。 (a) 中的对称化步骤至关重要，并且隐含地运用了雅可比恒等式。若不进行对称化，我们将得到用于约束传播的线性双曲系统，但该系统既不是强双曲的

也不是 Friedrichs 可对称化的（见第 4 节），这会带来重大困难。

我们现在将这些方程重新整理并总结如下：

约束方程：

$$e_{[A}\left(e^{\Lambda}_{B]}\right) = A_{[A}e^{\Lambda}_{B]}, \tag{2.24a}$$

$$e_{[A}(U_{B]}) = A_{[A}U_{B]}, \tag{2.24b}$$

$$e_A(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}U_A, \tag{2.24c}$$

$$e_A(H) - e_B\left(\Sigma_A{}^B\right) = -2A^B\Sigma_{AB} + t^{-1}\mathfrak{n}^{-1}U_A, \tag{2.24d}$$

$$e_A(A^A) = A\cdot A - H^2 + \frac{1}{2}\Sigma\cdot\Sigma - 2\mathfrak{n}^{-1}t^{-1}H; \tag{2.24e}$$

演化方程：

$$e_0(\mathfrak{n}) = 2\mathfrak{n}H, \tag{2.25a}$$

$$e_0\left(e^{\Lambda}_A\right) = -\left(H\delta^B_A + \Sigma_A{}^B\right)e^{\Lambda}_B, \tag{2.25b}$$

$$e_0(A_A) + e_A(H) - e_B\left(\Sigma_A{}^B\right) = -H(U_A + A_A) - (A^B - U^B)\Sigma_{AB}, \tag{2.25c}$$

$$e_0(U_A) - 2e_A(H) = HU_A - U^B\Sigma_{AB}, \tag{2.25d}$$

$$2e_0(H) - e_A(U^A) + 2e_A(A^A) = -4H^2 + U\cdot U + 2A\cdot A - U\cdot A - 2\mathfrak{n}^{-1}t^{-1}H, \tag{2.25e}$$

$$e_0(\Sigma) - e\hat{\otimes}U = U\hat{\otimes}(U + A) - 2H\Sigma - \mathfrak{n}^{-1}t^{-1}\Sigma. \tag{2.25f}$$

2.5. 演化系统的对称化。由于双曲系统 (2.25a)-(2.25f) 目前并非对称系统，我们对其进行修改，以获得一个对称拟线性双曲系统。

策略是使用哈密顿约束 (2.24e) 和动量约束 (2.24d)，如下所示：

a. 将 (2.24d) 乘以 α 后加到 (2.25d)；b. 将 (2.24e) 乘以 β_{AB} 后加到 (2.25f)，其中 β_{AB} 是某个对称无迹张量；c. 定义新变量 B 和 V 为 A 和 U的线性组合，即 $B = aA + bU$、 $V = cA + dU$，其中常数 a， b， c， d待定。

考虑到这些计算，我们要求

$$\alpha = 2, \quad \beta_{AB} = 0, \quad a + 2b = -c, \quad \text{and} \quad a = c + 2d,$$

为了得到对称系统，因此一个方便的选择是

$$\alpha = 2, \quad \beta = 0, \quad a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1, \quad d = 1.$$

因此，将 (2.24d) 的两倍加到 (2.25d)，即可得到以新变量 ($\mathfrak{n}$， e^{Λ}_A， A_A， V_A， H， Σ_{AB}) 表示的如下对称化演化方程，其中 $V_A = U_A - A_A$：

对称化演化方程：

$$e_0(\mathfrak{n}) = 2\mathfrak{n}H, \tag{2.26a}$$

$$e_0\left(e^{\Lambda}_A\right) = -\left(H\delta^B_A + \Sigma_A{}^B\right)e^{\Lambda}_B, \tag{2.26b}$$

(2.26c)
$$e_0(A_A) + e_A(H) - e_B\left(\Sigma_A{}^B\right) = -H(2A_A + V_A) + V^B\Sigma_{AB},$$
(2.26d)
$$e_0(V_A) - e_A(H) - e_B\left(\Sigma_A{}^B\right) = H(A_A + 2V_A) - (5A^B + 2V^B)\Sigma_{AB} + 2t^{-1}\mathfrak{n}^{-1}(A_A + V_A),$$

(2.26e)
$$2e_0(H) - e_A(V^A) + e_A(A^A) = -4H^2 + V\cdot V + 2A\cdot A + V\cdot A - 2\mathfrak{n}^{-1}t^{-1}H,$$
(2.26f)
$$e_0(\Sigma) - e\,\hat{\otimes}\,V + e\,\hat{\otimes}\,A = (A+V)\,\hat{\otimes}\,(2A+V) - 2H\Sigma - \mathfrak{n}^{-1}t^{-1}\Sigma,$$

3. Fuchs 系统

在本节中，我们将演化系统转换为福克斯形式。由于该系统已按照（2.26a）—（2.26f）进行了对称化，我们定义$\mathbf{W}$ 为未知向量场

(3.1)
$$\mathbf{W} := \left(\mathfrak{n}, e_P^\Lambda, A_P, V_P, H, \Sigma_{PQ}\right)^T.$$

T于是，我们得到以下关于.....的对称拟线性双曲系统 $\mathbf{W}$:

(3.2)
$$\mathbf{B}^0\partial_t\mathbf{W} + \mathfrak{n}e_C^\Lambda\mathbf{B}^C\partial_\Lambda\mathbf{W} = \mathbf{G}(t,\mathbf{W}),$$

其中，系数矩阵为

(3.3a)
$$\mathbf{B}^0 := \mathrm{diag}\left\{1, \delta_A^P, \delta_A^P, \delta_A^P, 2, \delta_A^P\delta_B^Q\right\},$$

(3.3b)
$$\mathbf{B}^C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_*^C \end{pmatrix},$$

(3.3c)
$$\mathbf{B}_*^C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_A^C & \delta_A^{\langle P}\delta^{Q\rangle C} \\ 0 & 0 & \delta_A^C & \delta_A^{\langle P}\delta^{Q\rangle C} \\ -\delta^{CP} & \delta^{CP} & 0 & 0 \\ \delta^C_{\langle A}\delta^P_{B\rangle} & \delta^C_{\langle A}\delta^P_{B\rangle} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

非线性项为

(3.3d)
$$\mathbf{G}(t,\mathbf{W}) := (G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6)^T,$$

with

$$\begin{aligned}
G_1 &:= 2\mathfrak{n}^2H,\\
G_2 &:= -\left(H\delta_A^B + \Sigma_A{}^B\right)\mathfrak{n}e_B^\Lambda,\\
G_3 &:= -\mathfrak{n}H(2A_A + V_A) + \mathfrak{n}V^B\Sigma_{AB},\\
G_4 &:= \mathfrak{n}H(A_A + 2V_A) - (5A^B + 2V^B)\mathfrak{n}\Sigma_{AB} + 2t^{-1}(A_A + V_A),\\
G_5 &:= -4\mathfrak{n}H^2 + \mathfrak{n}\left(V\cdot V + 2A\cdot A + V\cdot A\right) - 2t^{-1}H,\\
G_6 &:= \mathfrak{n}(A+V)\,\hat{\otimes}\,(2A+V) - 2\mathfrak{n}H\Sigma - t^{-1}\Sigma.
\end{aligned}$$

鉴于未知向量场的主要渐近行为将由背景量 (2.20a) 和 (2.20b) 所描述，我们引入如下变量变换:

(3.4a)
$$\tilde{\mathfrak{n}} := t^{\varepsilon_0 - r_0/2}\mathfrak{n},$$

$$\tilde{e}_I^{\Lambda} := t^{\varepsilon_1 + r_I/2 - r_0/2} \mathfrak{n} e_I^{\Lambda}, \tag{3.4b}$$

$$\tilde{A}_A := t\mathfrak{n} A_A, \tag{3.4c}$$

$$\tilde{U}_A := t\mathfrak{n} U_A, \tag{3.4d}$$

$$\tilde{H} := t\mathfrak{n} H - \frac{r_0}{4}, \tag{3.4e}$$

$$\tilde{\Sigma}_{AB} := t\mathfrak{n}\Sigma_{AB} - \left(\frac{r_{AB}}{2} - \frac{r_0\delta_{AB}}{4}\right), \tag{3.4f}$$

其中 $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ 是待确定的充分小参数，且 r_{AB} 的定义同前。

于是，双曲系统 (2.26a)-(2.26f) 转化为以下 Fuchs 型双曲系统：

$$\tilde{\mathbf{B}}^0 \partial_t \tilde{\mathbf{W}} = \sum_C t^{r_0/2 - r_C/2 - \varepsilon_1} \tilde{e}_C^{\Lambda} \tilde{\mathbf{B}}^C \partial_{\Lambda} \tilde{\mathbf{W}} + \frac{1}{t}\mathscr{B}\mathbb{P}\tilde{\mathbf{W}} + \frac{1}{t}\tilde{\mathbf{F}}, \tag{3.5}$$

其中未知向量 $\tilde{\mathbf{W}}$ 为

$$\tilde{\mathbf{W}} := \left(\tilde{\mathfrak{n}}, \tilde{e}_P^{\Lambda}, \tilde{A}_P, \tilde{V}_P, \tilde{H}, \tilde{\Sigma}_{PQ}\right)^T; \tag{3.6}$$

系数矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}^i$ 为

$$\tilde{\mathbf{B}}^0 := \mathrm{diag}\left\{1, \delta_A^P, \delta_A^P, \delta_A^P, 2, \delta_A^P\delta_B^Q\right\}, \tag{3.7a}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{B}}_*^C \end{pmatrix}, \tag{3.7b}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_*^C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_A^C & \delta_A^{\langle P}\delta^{Q\rangle C} \\ 0 & 0 & \delta_A^C & \delta_A^{\langle P}\delta^{Q\rangle C} \\ -\delta^{CP} & \delta^{CP} & 0 & 0 \\ \delta^C_{\langle A}\delta^P_{B\rangle} & \delta^C_{\langle A}\delta^P_{B\rangle} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.7c}$$

常矩阵 $\mathbb{P}$ 和 $\mathscr{B}$ 为

$$\mathbb{P} := \mathrm{diag}\left\{1, \delta_A^P, \delta_A^P, \delta_A^P, 0, 0\right\}; \tag{3.7d}$$

$$\mathscr{B} := \begin{pmatrix} \mathscr{B}_* & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \tag{3.7e}$$

$$\mathscr{B}_* := \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & & & \\ & \varepsilon_1 & & \\ & & 1 + \frac{r_0}{2} - \frac{r_A}{2} & \\ & & 2 - 3r_A + 2r_0 & 3\left(1 + \frac{r_0}{2} - \frac{r_A}{2}\right) \end{pmatrix}; \tag{3.7f}$$

且非线性项 $\tilde{\mathbf{F}}$ 为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}} := \Big(&\tilde{\mathfrak{n}}\tilde{H}, (\tilde{H} + \tilde{\Sigma}) * \tilde{e}^{\Lambda}, (\tilde{H} + \tilde{\Sigma}) * \tilde{A}, \\ &(\tilde{H} + \tilde{\Sigma}) * (\tilde{A} + \tilde{V}), \tilde{A} * (\tilde{A} + \tilde{V}), \tilde{A} * (\tilde{A} + \tilde{V})\Big)^T, \end{aligned} \tag{3.7g}$$

其中 $A * B$ 表示一个系数为常数的（缩并）张量场 $A \otimes B$ ts.

4. 约束传播

本节讨论约束方程的传播，这通过分析相关的线性双曲系统来实现。为此，我们定义约束

$$\mathfrak{E}^{\Lambda}_{AB} := e_{[A}\left(e^{\Lambda}_{B]}\right) - A_{[A}e^{\Lambda}_{B]}, \tag{4.1a}$$

$$\mathfrak{U}_{AB} := e_{[A}(U_{B]}) - A_{[A}U_{B]}, \tag{4.1b}$$

$$\mathfrak{N}_{A} := \mathfrak{n}^{-1}e_A(\mathfrak{n}) - U_A, \tag{4.1c}$$

$$\mathfrak{M}_{A} := e_A(H) - e_B\left(\Sigma_A{}^B\right) + 2A^B\Sigma_{AB} - t^{-1}\mathfrak{n}^{-1}U_A, \tag{4.1d}$$

$$\mathfrak{H} := e_A(A^A) - A\cdot A + H^2 - \frac{1}{2}\Sigma\cdot\Sigma + 2\mathfrak{n}^{-1}t^{-1}H. \tag{4.1e}$$

为避免在推导下述传播方程时涉及失函数 $\mathfrak{n}$ 的潜在奇点，我们在约束$\mathfrak{N}_A$ (4.1c)的定义中加入因子 $\mathfrak{n}^{-1}$。

以下引理是本节的主要结果:

引理 4.1。 设 $s\geq 5$。考虑带有初始数据的系统 *(3.2)*

$$\mathbf{W}|_{t=t_0} = \mathbf{W}_0 \in H^s(\Sigma_{t_0}), \tag{4.2}$$

则存在一个 $t_1\in(0,t_0)$ 以及唯一经典解

$$\mathbf{W}\in\bigcap_{j=0}^{s} C^j((t_1,t_0],H^{s-j}(\Sigma_t)).$$

此外，以下结论成立:

(1) 若解$\mathbf{W}$ 满足

$$\|\mathbf{W}\|_{L^\infty((t_1,t_0]\times W^{1,\infty}(\Sigma_t))}<\infty,$$

则$\mathbf{W}$ 可连续延拓为定义在

$$\bigcap_{j=0}^{s} C^j((t_1',t_0],H^s(\Sigma_t))$$

上的一个解，其中 $t_1'<t_1$;

(2) 假设约束$(\mathfrak{E},\mathfrak{U},\mathfrak{N},\mathfrak{M},\mathfrak{H})=0$ 在初始时刻于 Σ_{t_0} 上消失。那么

$$(\mathfrak{E},\mathfrak{U},\mathfrak{N},\mathfrak{M},\mathfrak{H})\equiv 0$$

该结论在解的整个存在域上成立。

4.1. 约束的演化方程。经过冗长的计算，可得约束 (4.1a)–(4.1e) 满足以下演化方程:

$$e_0\left(\mathfrak{E}^{\Lambda}_{AB}\right) = -2H\mathfrak{E}^{\Lambda}_{AB} + 2\Sigma_{[A}{}^{C}\mathfrak{E}^{\Lambda}_{B]C}, \tag{4.3a}$$

$$\begin{aligned} e_0\left(\mathfrak{M}_A\right) = {} & e^B\left(\mathfrak{U}_{AB}\right) - e_A\left(\mathfrak{H}\right) - 2U_A\mathfrak{H} - t^{-1}\mathfrak{n}^{-1}\left(H\delta^B_A + \Sigma_A{}^B\right)\mathfrak{N}_B \\ & + 2\left(U^B + A^B\right)\mathfrak{U}_{AB} + \left(\left(t^{-1}\mathfrak{n}^{-1} - 3H\right)\delta^B_A - \Sigma_A{}^B\right)\mathfrak{M}_B, \end{aligned} \tag{4.3b}$$

$$e_0\left(\mathfrak{U}_{AB}\right) = -2e_{[A}\left(\mathfrak{M}_{B]}\right) + 2(A_{[A} - U_{[A})\mathfrak{M}_{B]}, \tag{4.3c}$$

$$e_0(\mathfrak{H}) = -e_A\left(\mathfrak{M}^A\right) + (A^A - 2U^A)\mathfrak{M}_A + t^{-1}\mathfrak{n}^{-1}U^A\mathfrak{N}_A - (4H + 2\mathfrak{n}^{-1}t^{-1})\mathfrak{H}, \tag{4.3d}$$

$$e_0(\mathfrak{N}_A) = -\left(H\delta_A^B + \Sigma_A{}^B\right)\mathfrak{N}_B + 2\mathfrak{M}_A. \tag{4.3e}$$

由 (4.3a) 可立即看出， $\mathfrak{E}$ 与其余约束解耦，因此

$$\mathfrak{E}_{AB}^{\Lambda} \equiv 0, \tag{4.4}$$

只要它初始时为零，就始终为零。其余约束变量相互耦合，并满足一个线性双曲系统。令

$$\mathfrak{X} := (\mathfrak{M}_P, \mathfrak{U}_{PQ}, \mathfrak{H}, \mathfrak{N}_P),$$

那么 $\mathfrak{X}$ 满足

$$\mathcal{A}^0\partial_t\mathfrak{X} + \mathfrak{n}\mathcal{A}^R e_R^{\Lambda}\partial_{\Lambda}\mathfrak{X} = \mathcal{B}\mathfrak{X}, \tag{4.5}$$

其中系数矩阵为

$$\mathcal{A}^0 = \operatorname{diag}\left\{\delta_A^P, \delta_A^P\delta_B^Q, 1, \delta_A^P\right\}, \tag{4.6a}$$

$$\mathcal{A}^R = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_A^P\delta^{QR} & \delta_A^R & 0 \\ 2\delta_{[A}^R\delta_{B]}^P & 0 & 0 & 0 \\ \delta^{PR} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.6b}$$

(4.6c)

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} t^{-1}\delta_A^P - 3\mathfrak{n}H\delta_A^P - \mathfrak{n}\Sigma_A{}^P & 2\mathfrak{n}(U^Q + A^Q)\delta_A^P & -2\mathfrak{n}U_A & -t^{-1}\left(H\delta_A^P + \Sigma_A{}^P\right) \\ 2\mathfrak{n}(A_{[A} - U_{[A})\delta_{B]}^P & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{n}(A^P - 2U^P) & 0 & -4\mathfrak{n}H - 2t^{-1} & t^{-1}U^P \\ 2\mathfrak{n}\delta_A^P & 0 & 0 & -\mathfrak{n}\left(H\delta_A^P + \Sigma_A{}^P\right) \end{pmatrix}.$$

4.2. 一个强双曲线性系统。我们现在证明 (3.2) 的局部存在性与唯一性，并证明 (4.5) 的平凡解的唯一性。这主要基于线性系统 (4.5) 的强双曲性。

引理 4.2。设 A 为 *(4.5)* 的主符号，定义为

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}^I\xi_I.$$

于是，对于任意 $\xi \neq 0$ 以及任意点 $(x, t) \in M_{t_1,t_0}$，矩阵 A 均可对角化，其谱由常特征值 0、$\pm|\xi|$ 以及相应的常重数 5、2组成。因此，线性双曲系统 *(4.5)* 是常双曲的，因而存在符号对称化子。

证明。 (4.5) 的主符号为

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_A^P\xi^Q & \xi_A & 0 \\ 2\xi_{[A}\delta_{B]}^P & 0 & 0 & 0 \\ \xi^P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

那么它的特征多项式可因式分解为

$$\det(\lambda\,\mathrm{id} - \mathcal{A}) = \lambda^5(\lambda - |\xi|)^2(\lambda + |\xi|)^2.$$

通过标准的线性代数论证，我们可以验证，与$\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_{2,\pm} = \pm|\xi|$ 相关联的特征子空间可描述为

$$E_1 = \left\{(0, \mathfrak{U}_{AB}, \mathfrak{H}, \mathfrak{N}_A) : |\xi|^2\mathfrak{H} = \frac{1}{2}\xi^A\xi^B(\mathfrak{U}_{AB} + \mathfrak{U}_{BA}),\ \ |\xi|^2\xi^B\mathfrak{U}_{AB} = \frac{1}{2}\xi_A\xi^C\xi^D(\mathfrak{U}_{AB} + \mathfrak{U}_{BA})\right\},$$
$$E_{2,\pm} = \left\{(\mathfrak{M}_A,\ \mathfrak{U}_{AB},\ \mathfrak{H},\ 0):\ |\xi|\mathfrak{U}_{AB} = \pm 2\xi_{[A}\mathfrak{M}_{B]},\quad |\xi|\mathfrak{H} = \pm\xi^A\mathfrak{M}_A\right\}.$$

因此，$\mathcal{A}$ 是可对角化的，并具有所述的谱，从而证明了该引理。 □

引理 *4.1* 的证明。 结论 (1) 由对称一阶拟线性双曲方程的经典理论得到，参见例如 [11] 的第 10 章。

在 (1) 中的正则性假设下，(4.5) 中的系数属于 $C^0((t_1,\ t_0],\ H^s(\Sigma_t))$。因此，[11] 中的定理 2.7 的唯一性结果适用；结合 (4.4)，即可得到结论 (2)。□

5. 主定理及其证明

本节将确立主定理并给出其证明。解的过去全局存在性和渐近行为由 Fuchs 定理得到，参见第 5.1 节和附录 A。主定理定理 5.2 的陈述见第 5.2 节。

5.1. **Fuchs 定理**。 以下命题陈述了本小节的主要结果。

命题 5.1。 设 $s \geq 5$ 和 $\tilde{\mathbf{W}}_0 \in H^s(\mathbb{T}^2)$。考虑 *Fuchs 系统 (3.5)* 及初始数据 *(4.2)*。则存在 $\delta_0 > 0$，使得若

$$\left\|\tilde{\mathbf{W}}_0\right\|_{H^s(\mathbb{T}^2)} < \delta_0,$$

则存在唯一经典解

$$\tilde{\mathbf{W}} \in C^0\Big((0, t_0], H^s(\mathbb{T}^2)\Big) \cap L^\infty\Big((0, t_0], H^s(\mathbb{T}^2)\Big) \cap C^1\Big((0, t_0], H^{s-1}(\mathbb{T}^2)\Big).$$

此外，极限 $\lim_{t\to 0^-} \mathbb{P}^\perp\tilde{\mathbf{W}}(t)$ 在 $H^{s-1}(\mathbb{T}^2)$中存在，记为 $\mathbb{P}^\perp\tilde{\mathbf{W}}(0)$；且该解$\tilde{\mathbf{W}}$ 满足以下估计：

$$\left\|\tilde{\mathbf{W}}(t)\right\|^2_{H^s(\mathbb{T}^2)} + \int_t^{t_0}\frac{1}{\tau}\left\|\mathbb{P}\tilde{\mathbf{W}}(\tau)\right\|^2_{H^s(\mathbb{T}^2)}\,\mathrm{d}\tau \lesssim \left\|\tilde{\mathbf{W}}_0\right\|^2_{H^s(\mathbb{T}^2)}, \tag{5.1a}$$

$$\left\|\mathbb{P}\tilde{\mathbf{W}}(t)\right\|_{H^{s-1}(\mathbb{T}^2)} + \left\|\mathbb{P}^\perp\tilde{\mathbf{W}}(t) - \mathbb{P}^\perp\tilde{\mathbf{W}}(0)\right\|_{H^{s-1}(\mathbb{T}^2)} \lesssim t^\zeta, \tag{5.1b}$$

对所有 $t \in (0,\ t_0]$ 以及某个常数 $\zeta > 0$。

证明。只要验证附录 A 中的五个福克斯条件，便可由定理 A.2 的抽象 Fuchs型结果推出该命题。我们将在下文验证这些条件。

首先回顾（2.18）和（2.19）。定义

$$\tilde{r}_C := 1 + \frac{r_0}{2} - \frac{r_C}{2} - \varepsilon_1.$$

我们将 ε_1 取得足够小，使得

$$0 < \varepsilon_1 < 1 + \frac{r_0}{2} - \frac{r_C}{2} = \frac{1 - p_C}{p_3}, \tag{5.2}$$

这保证了 $\tilde{r}_C > 0$。

(1 & 2) 根据定义 (3.7a)、(3.7d) 和 (3.7e)，矩阵 $\mathbb{P}$、 $\tilde{}\mathbf{B}^0$ 以及 $\mathscr{B}$ 为

$$\mathbb{P} := \operatorname{diag}\left\{1, \delta_A^P, \delta_A^P, \delta_A^P, 0, 0\right\};$$
$$\tilde{\mathbf{B}}^0 := \operatorname{diag}\left\{1, \delta_A^P, \delta_A^P, \delta_A^P, 2, \delta_A^P \delta_B^Q\right\},$$
$$\mathscr{B} := \begin{pmatrix} \mathscr{B}_* & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix},$$
$$\mathscr{B}_* := \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & & & \\ & \varepsilon_1 & & \\ & & 1 + \frac{r_0}{2} - \frac{r_A}{2} & \\ & & 2 - 3r_A + 2r_0 & 3\left(1 + \frac{r_0}{2} - \frac{r_A}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

因此，它们都是常数，从而自动地与时间无关且为协变常数。投影算子性质 $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ 成立，并且我们还发现，根据 (2.19)， $\tilde{}\mathbf{B}^0$ 和 $\mathscr{B}$ 没有非负特征值。此外，

$$\mathbb{P}\tilde{\mathbf{B}}^0\mathbb{P}^\perp = \mathbb{P}^\perp\tilde{\mathbf{B}}^0\mathbb{P} = 0, \quad \text{and} \quad [\mathbb{P}, \mathscr{B}] = 0$$

$\tilde{}$也成立。因此，$\mathbf{W}$ 的衰减分量和收敛分量可确定为

$$\mathbb{P}\tilde{\mathbf{W}} = \left(\tilde{\mathfrak{n}}, \tilde{e}_I^\Lambda, \tilde{A}_A, \tilde{U}_A, 0, 0\right), \tag{5.3a}$$
$$\mathbb{P}^\perp\tilde{\mathbf{W}} = \left(0, 0, 0, 0, \tilde{H}, \tilde{\Sigma}_{AB}\right); \tag{5.3b}$$

$\tilde{}$(3) 根据 (3.7g)，非线性项 $\mathbf{F}$ 具有如下形式

$$\tilde{\mathbf{F}} := \left(\tilde{\mathfrak{n}}\tilde{H}, (\tilde{H} + \tilde{\Sigma}) * \tilde{e}^\Lambda, (\tilde{H} + \tilde{\Sigma}) * \tilde{A}, (\tilde{H} + \tilde{\Sigma}) * (\tilde{A} + \tilde{V}), \tilde{A} * (\tilde{A} + \tilde{V}), \tilde{A} * (\tilde{A} + \tilde{V})\right)^T.$$

利用 (5.3a) 和 (5.3b)，我们立即看到，福克斯条件所要求的代数结构成立:

$$\mathbb{P}\tilde{\mathbf{F}} = (\mathbb{P}^\perp\tilde{\mathbf{W}}) * (\mathbb{P}\tilde{\mathbf{W}}), \quad \mathbb{P}^\perp\tilde{\mathbf{F}} = (\mathbb{P}\tilde{\mathbf{W}}) * (\mathbb{P}\tilde{\mathbf{W}}); \tag{5.4}$$

(4) 令

$$\tilde{\mathbf{B}}^\Lambda := \sum_C t^{\tilde{r}_C} \tilde{e}_C^\Lambda \tilde{\mathbf{B}}^C,$$

其中 $\tilde{}\mathbf{B}^C$ 如 (3.3b) 中所定义。由 (3.7b) 和 (3.7c)，可得

$$\mathbb{P}\tilde{\mathbf{B}}\mathbb{P}^\perp = |t|^{-1+p} O(\mathbb{P}\tilde{\mathbf{W}}), \quad \mathbb{P}^\perp\tilde{\mathbf{B}}\mathbb{P} = |t|^{-1+p} O(\mathbb{P}\tilde{\mathbf{W}}), \quad \mathbb{P}^\perp\tilde{\mathbf{B}}\mathbb{P}^\perp = 0, \tag{5.5}$$

其中 p:=$\min_C\{\tilde{r}_C\} - \varepsilon_1 > 0$;

(5) 最后，直接计算可得

$$\operatorname{div}\left(t^{r_0/2 - r_C - 2 - \varepsilon_1} \tilde{e}_C^\Lambda \tilde{\mathbf{B}}^C\right) = t^{-1+p} O(\partial\tilde{\mathbf{W}}), \tag{5.6}$$

其中 p 如上所定义。因此，散度条件得到满足 .

这验证了定理 A.2 的假设，命题得证。 □

5.2. **定理 主定理**。现在我们可以精确地陈述我们的主要结果 t.

定理 5.2. 考虑$(3+1)$维爱因斯坦真空方程 s

$$ {}^{(3+1)}R_{ab}(g) = 0 \quad on \;\; M^{3+1} \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^3. \tag{5.7} $$

设 $\mathring{g}$ 是 *(5.7)* 的 *Kasner*背景解:

$$ \mathring{g} = -(\mathrm{d}t)^2 + \sum_{I=1}^{3} t^{2p_I} (\mathrm{d}x^I)^2, \tag{5.8} $$

其中 *Kasner* 指数满足 *(2.16)*，且 $p_1 < 0 < p_2 \,\&\, p_3$。固定一个正整数 $s \geq 5$以及正数常数 ε_0和 ε_1，其中 ε_1满足 *(5.2)*。设$(\Sigma_{t=t_0} = \mathbb{T}^3, \mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ 是极化$U(1)$对称的初始数据（定义见定义 *2.1*），用于方程 *(5.7)*，并满足˜约束系统 *(2.24a)-(2.24e)*。记$\mathbf{W}_0$ 为诱导初始数据:

$$ \tilde{\mathbf{W}}_0 := \left({}^0\tilde{\mathfrak{n}},\, {}^0\tilde{e}_P^{\Lambda},\, {}^0\tilde{A}_P,\, {}^0\tilde{V}_P,\, {}^0\tilde{H},\, {}^0\tilde{\Sigma}_{PQ} \right)^T, \tag{5.9} $$

其定义见 *(2.10a)*、*(2.10b)*、*(2.20a)*、*(2.20b)* 以及缩放关系 *(3.4a)-(3.4f)*。

那么存在 $\delta_0 > 0$，使得对于每个 $\delta \in (0,\ \delta_0)$，若初始数据满足

$$ \left\| \tilde{\mathbf{W}}_0 \right\|_{H^s(\mathbb{T}^2)} < \delta, $$

˜那么，对称化演化系统在整个过去区域M_{0,t_0} 上存在唯一经典解 $\mathbf{W}$，满足

$$ \tilde{\mathbf{W}} := \left(\tilde{\mathfrak{n}}, \tilde{e}_P^{\Lambda}, \tilde{A}_P, \tilde{V}_P, \tilde{H}, \tilde{\Sigma}_{PQ} \right)^T \in \bigcap_{k=0}^{s} C^k((0,t_0], H^{s-k}(\Sigma_t)) \subset C^1(M_{0,t_0}), $$

˜ ˜初始时满足 $\mathbf{W}|_{t=t_0} = \mathbf{W}_0$，并且在 M_{0,t_0} 上满足所有约束 *(2.24a)-(2.24e)* .

此外，解还具有以下性质:

(1) U ˜niform 控制与精细渐近。该解 $\mathbf{W}$ 具有一致有界性 d

$$ \left\| \tilde{\mathbf{W}}(t) \right\|_{H^s(\mathbb{T}^2)} \lesssim \delta, \quad for\ all\ 0 < t \leq t_0, $$

˜ ˜其中系数取决于 δ_0。存在 $\zeta > 0$ 和函数 $\tilde{\mathfrak{n}}_*$、H_*、$\Sigma_{*AB} \in H^{s-1}(\mathbb{T}^2) \subset C^0(\mathbb{T}^2)$ 满足

$$ 0 < \inf_{x \in \mathbb{T}^2} \tilde{\mathfrak{n}}_*(x) < \sup_{x \in \mathbb{T}^2} \tilde{\mathfrak{n}}_*(x) < \infty, \tag{5.10a} $$

$$ \left\| \tilde{H}_* \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \lesssim \delta, \quad \tilde{\Sigma}_{*AB} = \tilde{\Sigma}_{*BA}, \quad \delta^{AB} \tilde{\Sigma}_{*AB} = 0, \tag{5.10b} $$

$$ \max \left\{ \left\| \tilde{H}_* \right\|_{H^{s-1}(\mathbb{T}^2)}, \left\| \tilde{\Sigma}_* \right\|_{H^{s-1}(\mathbb{T}^2)} \right\} \lesssim \delta \tag{5.10c} $$

使得以下渐近展开在 $H^{s-1}(\mathbb{T}^2)$ 中成立:

$$ \tilde{\mathfrak{n}} = t^{2\tilde{H}_* + \varepsilon_0} \tilde{\mathfrak{n}}_* \left(1 + O(t^\zeta) \right), \tag{5.11a} $$

$$ \tilde{e}_I^{\Lambda} = O(t^\zeta), \quad \tilde{A} = O(t^\zeta), \quad \tilde{U} = O(t^\zeta), \tag{5.11b} $$

$$ \tilde{H} = \tilde{H}_* + O(t^\zeta), \quad \tilde{\Sigma}_{AB} = \tilde{\Sigma}_{*AB} + O(t^\zeta); \tag{5.11c} $$

(2) 降维的 $(2+1)$ 维解。这一对

$$h = -\mathfrak{n}^2(\mathrm{d}t)^2 + \sum_{\Sigma,\Omega=1}^{2} h_{\Sigma\Omega}\mathrm{d}x^{\Sigma}\mathrm{d}x^{\Omega}, \quad \phi := \log t$$

定义了$M_{0,\ t_0}/\mathbb{T}^1$上的$(2+1)$维修正的爱因斯坦-标量场系统 *(2.5a)*、*(2.5b)* 的一个经典解，其中度规 h的分量为

$$\mathfrak{n} = t^{r_0/2-\varepsilon_0}\tilde{\mathfrak{n}}, \quad h^{\Sigma\Omega} = \delta^{IJ}e_I^{\Sigma}e_J^{\Omega}, \quad e_I^{\Lambda} = t^{-r_I/2+\varepsilon_0-\varepsilon_1}\tilde{\mathfrak{n}}^{-1}\tilde{e}_I^{\Lambda}.$$

由 h 确定的第二基本形式 ${}^{(2+1)}k_{AB}$ 满足 t-超曲面

$${}^{(2+1)}k_A^A = t^{-1-r_0/2-2\tilde{H}_*}\tilde{\mathfrak{n}}_*^{-1}\left(\frac{r_0}{4} + \tilde{H}_* + O(t^{\zeta})\right)$$

因此当 $t \to 0^+$时发散。特别地， $t = 0$ 是一个压碎奇点；(3) 物理$(3+1)$维解。度规

$$g = -\mathfrak{n}^2(\mathrm{d}t)^2 + \sum_{\Sigma,\Omega=1}^{2} g_{\Sigma\Omega}\mathrm{d}x^{\Sigma}\mathrm{d}x^{\Omega} + t^2(\mathrm{d}x^3)^2$$

定义了$M_{0,\ t_0}$上的一个经典极化 $U(1)$-对称解，该解满足$(3+1)$维爱因斯坦真空方程，其分量为

$$\mathfrak{n} = t^{r_0/2-\varepsilon_0}\tilde{\mathfrak{n}}, \quad g^{\Sigma\Omega} = \delta^{IJ}e_I^{\Lambda}e_J^{\Omega}, \quad e_I^{\Lambda} = t^{-r_I/2+\varepsilon_0-\varepsilon_1}\tilde{\mathfrak{n}}^{-1}\tilde{e}_I^{\Lambda}.$$

解 g 也是渐近 *Kasner* 解，其 *Kasner* 指数为 $r_0(x)$、 $r_1(x)$、$r_2(x)$、$r_3 = 1$。由 g 确定的第二基本形式 ${}^{(3+1)}k_{AB}$ 满足t-超曲面

$${}^{(3+1)}k_A^A = t^{-1-2\tilde{H}_*}\tilde{\mathfrak{n}}_*^{-1}\left(\frac{r_0}{4} + \tilde{H}_* + O(t^{\zeta})\right)$$

因此当 $t \to 0^+$ 时爆破解，所以 $t = 0$ 对物理时空而言也是一个压碎奇点；

(4) 不可延拓性与曲率爆破。 时空(M_{0,t_0}, g) 在 $t = 0$ 处是 C^2-不可延拓的。根据霍金奇点定理，它在过去方向上类时测地线不完备。克雷奇曼标量${}^{(3+1)}R^{abcd}\,{}^{(3+1)}R_{abcd}$ 按照以下规律爆破解：

$${}^{(3+1)}R^{abcd}\,{}^{(3+1)}R_{abcd} = 2t^{-4-8\tilde{H}_*}\tilde{\mathfrak{n}}_*^{-4}\left(\mathfrak{R} + O(t^{\zeta})\right),$$

$$\mathfrak{R} := \sum_{i=0}^{2} r_i^2 + 24\tilde{H}_*^2 + 12r_0\tilde{H}_* + 4\tilde{\Sigma}_* \cdot \tilde{\Sigma}_* + 4r^{AB}\tilde{\Sigma}_{*AB},$$

并且如果$(r_0, r_1, r_2) \neq (0,\ 0,\ 0)$，或者等价地， $p_3 \neq 1$，那么我们有

$$\inf_{x\in\mathbb{T}^3} \mathfrak{R} > 0;$$

而对于$(2+1)$维修正爱因斯坦-标量场方程，曲率不变量${}^{(2+1)}R^{ab}\,{}^{(2+1)}R_{ab}$满足类似的爆破解规律：

$${}^{(2+1)}R^{ab}\,{}^{(2+1)}R_{ab} = \frac{1}{4}t^{-4-8\tilde{H}_*}\tilde{\mathfrak{n}}_*^{-4}\left(\mathfrak{R} + O(t^{\zeta})\right).$$

最后，扰动解呈现渐近速度项支配（*AVTD*）行为：*(2.25b)-(2.25f)* 中的空间导数项比占主导的时间项衰减得更快，因此随着 $t \to 0^+$ 的变化变得可以忽略。

定理 *5.2* 的证明。

渐近行为。

命题 5.1 给出了投影分量的存在性、唯一性及渐近分解:

$$\mathbb{P}\tilde{\mathbf{W}} = \left(\tilde{\mathfrak{n}}, \tilde{e}_I^{\Lambda}, \tilde{A}_A, \tilde{U}_A - \tilde{A}_A, 0, 0\right), \quad \mathbb{P}^{\perp}\tilde{\mathbf{W}} = \left(0, 0, 0, 0, \tilde{H}, \tilde{\Sigma}_{AB}\right).$$

特别地，我们得到 (5.10b)、(5.10c)、(5.11b)、(5.11c) 以及

$$\tilde{\mathfrak{n}} = O(t^{\zeta}).$$

˜此外，$\mathbf{W}$ 的一致有界性成立

$$\left\|\tilde{\mathbf{W}}(t)\right\|_{H^k(\mathbb{T}^2)} \lesssim \delta, \quad \text{for any } 0 < t \leq t_0. \tag{5.12}$$

由演化方程 (2.26a)，我们看到

$$\partial_t \log \tilde{\mathfrak{n}} = t^{-1}\left(2\tilde{H}_* + \varepsilon_0 + O(t^{\zeta})\right),$$

对其进行时间积分，便得到精细渐近剖面 (5.10a) 和 (5.11a)。

压碎奇点。

约化度量 h 的第二基本形式为

$${}^{(2+1)}k_{AB} = h(\nabla_{e_A} e_0, e_B) = \gamma_{AB0} = H\delta_{AB} + \Sigma_{AB}, \tag{5.13}$$

利用 (5.11a)、(5.11c)，可得

$$\operatorname{tr}\, {}^{(2+1)}k = 2t^{-1-2\tilde{H}_* - r_0/2}\tilde{\mathfrak{n}}_*^{-1}\left(\frac{r_0}{4} + \tilde{H}_* + O(t^{\zeta})\right).$$

结合 (5.12) 和索伯列夫嵌入可知，当 $t \to 0^+$ 时，$\mathbf{tr}\, k$ 发散，因此$t = 0$ 是一个压碎奇点。

通过类似的计算，物理度量 g 也有相同的结论。

渐近逐点卡斯纳行为。

由式 (2.18)、(5.13) 可知,

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|2t\mathfrak{n}^{(2+1)}k_{AB} - \mathrm{k}_{AB}\right\|_{L^\infty} = 0, \quad \text{with } \mathrm{k}_{AB} := 2\tilde{H}_*\delta_{AB} + 2\tilde{\Sigma}_{*AB} + r_{AB},$$

$$\left(\mathrm{k}_A^A\right)^2 - \mathrm{k}_A^B\mathrm{k}_B^A + 4\mathrm{k}_A^A = 12\tilde{H}_*^2 + (4r_0 + 16)\tilde{H}_* - 4\tilde{\Sigma}_* \cdot \tilde{\Sigma}_* - 4r^{AB}\tilde{\Sigma}_{*AB} = O(t^{\zeta})$$

因此，由 [15]中的定义 1.1 可得结论。

曲率不变量的爆发。

根据引理 2.2，经过冗长但直接的计算可得

$${}^{(3+1)}R^{abcd}\,{}^{(3+1)}R_{abcd} = 8t^{-2}\mathfrak{n}^{-2}\left(6H^2 - 2U \cdot U + \Sigma \cdot \Sigma\right),$$

将展开式 (5.11a)-(5.11b) 与重标度 (3.4a)-(3.4f) 代入，即可得到克雷奇曼标量所述的渐近形式。(2+1) 维的 ${}^{(2+1)}R^{ab}\,{}^{(2+1)}R_{ab}$也可类似处理。此外，选择足够小的 δ_0 并应用索伯列夫嵌入后，即可由 $\sum_{i=0}^2 r_i^2 > 0$ 得出正性结论 $\inf_{x\in\mathbb{T}^3}\mathfrak{R} > 0$ 。□

附录 A. Fuchs 型方法

文献中的经典 Fuchs 系统（例如参见 [38],）被表述为定义在$\mathbf{R}^n$ 上的半线性双曲型偏微分方程组，形式如下：

$$t\partial_t \mathbf{u} + A(t,x)\mathbf{u} = \mathbf{F}[\mathbf{u}], \tag{A.1}$$

其中，$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x,t)$ 是一个向量值未知量，系数矩阵以及向量值非线性项 $\mathbf{F}[\mathbf{u}] = \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u},\mathbf{u}_x)$ 均为解析函数，并且 $\mathbf{F}$ 以某个正速率随 t 衰减。

不失一般性，我们假设作如下结构简化：

$$A = A(x) \text{ only depends on } x, \text{ and } \mathbf{F} = t\mathbf{f}(t,x,\mathbf{u},\mathbf{u}_x). \tag{A.2}$$

事实上，若 $\mathbf{F}$ 按 t^α衰减，我们可以通过将时间重标度为 $t' = t^\alpha$ 来恢复形式 (A.2)。类似地，若 A还依赖于 t，我们可以写成 $A = A_0(x) + tA_1(x,t,\mathbf{u})$，并将其中的$tA_1$ 部分吸收到右端；若 $\mathbf{u}$ 具有更快的衰减，我们可以令 $\mathbf{u}' = t^\beta\mathbf{u}$，以改变 A 的谱，但代价是改变源项的衰减。

如 [38], 所示，解析数据的奇异初值问题局部适定：

定理 A.1. 满足条件 *(A.2)* 的系统 *(A.1)* 局部适定：存在唯一解析解，在 $t = 0$ 附近成立，并且当 $t \to 0$ 时趋于零。

放宽解析性条件后，我们得到一个更一般的 Fuchs 框架。一个适用于我们目的的版本（见第 3 节），并遵循 Beyer-Oliynyk-Olvera-Santamaría[18], ，其形式为

$$\mathbf{A}^0\partial_t\mathbf{u} + \mathbf{A}^I\nabla_I\mathbf{u} = \frac{1}{t}\mathcal{A}\mathbb{P}\mathbf{u} + \frac{1}{t}\mathbf{F}[t,\mathbf{u}]. \tag{A.3}$$

这里，空间导数项 $\mathbf{A}^I\nabla_I\mathbf{u}$与非线性源项 $\mathbf{F}$相互解耦。此外，由于我们是在流形上进行研究，所有对象都应理解为向量丛上的截面和丛映射。但为简洁起见，下面仍使用函数记号。

我们陈述一个精简的 Fuchs 定理，专为第 3 节的情形量身定制 .

定理 A.2. 设 $M = \mathbf{R} \times \Sigma$ 为一个$n+1()$维乘积流形，其空间切片 Σ为闭流形。取一个整数 $s > n/2 + 3$ 和一个常数 $\sigma > 0$。考虑具有初始数据的偏微分方程组 *(A.3)*

$$\mathbf{u}(t_0,\cdot) = \mathbf{u}_0 \in H^s(\Sigma).$$

那么存在 $\delta > 0$ ，使得如果

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^s(\Sigma)} \le \delta,$$

那么系统 *(A.3)* 存在唯一经典解

$$\mathbf{u} \in C_b^0([T_0,0),H^s(\Sigma)) \cap C^1([T_0,0),H^{s-1}(\Sigma)),$$

使得极限 $\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}(0) := \lim_{t\to 0}\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}(t)$ 存在于 $H^{s-1}(\Sigma)$中。此外，解 $\mathbf{u}$满足以下能量估计：

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{H^s(\Sigma)} - \int_{T_0}^t \frac{1}{\tau}\|\mathbb{P}\mathbf{u}(\tau)\|^2_{H^s(\Sigma)}\,\mathrm{d}\tau \le C(\delta,\delta^{-1})\|\mathbf{u}_0\|^2_{H^s(\Sigma)}, \tag{A.4}$$

以及衰减估计：

$$\|\mathbb{P}\mathbf{u}(t)\|_{H^{s-1}} \lesssim |t|^{\zeta-\sigma}, \tag{A.5a}$$

$$\left\|\mathbb{P}^{\perp}\mathbf{u}(t) - \mathbb{P}^{\perp}\mathbf{u}(0)\right\|_{H^{s-1}} \lesssim |t|^{\zeta-\sigma}, \tag{A.5b}$$

其中 $\zeta := \kappa - \gamma_1 s\ (s-1)\ \mathtt{A}/2 > 0$ （涉及的常数如下所示）。只要满足以下福克斯条件，这些结论便成立：

（1）矩阵 $\mathbb{P}$ 是与时间无关、协变常数且对称的投影：

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}, \quad \mathbb{P}^T = \mathbb{P}, \quad \partial_t \mathbb{P} = 0, \quad \nabla \mathbb{P} = 0, \tag{A.6a}$$

因此我们可以定义 $\mathbb{P}^{\perp} := id - \mathbb{P}$，其满足上述相同条件以及 $\mathbb{P}\mathbb{P}^{\perp} = \mathbb{P}^{\perp}\mathbb{P} = 0$;

（2）系数矩阵$\mathbf{A}^0$ 和 A 满足

$$(\mathbf{A}^0)^T = \mathbf{A}^0, \quad \partial_t \mathbf{A}^0 = 0, \quad \nabla \mathbf{A}^0 = 0, \tag{A.6b}$$

$$\partial_t \mathcal{A} = 0, \quad \nabla \mathcal{A} = 0, \tag{A.6c}$$

$$\mathbb{P}\mathbf{A}^0\mathbb{P}^{\perp} = \mathbb{P}^{\perp}\mathbf{A}^0\mathbb{P} = 0, \quad [\mathbb{P}, \mathcal{A}] = 0, \tag{A.6d}$$

并且存在正数常数 κ、γ_1、γ_2，使得

$$\frac{1}{\gamma_1}\mathrm{id} \le \mathbf{A}^0 \le \frac{1}{\kappa}\mathcal{A} \le \gamma_2 \mathrm{id}; \tag{A.6e}$$

(3) 非线性项 $\mathbf{F}$ 满足以下界

$$\mathbb{P}\mathbf{F} = O\left(\frac{\lambda_1}{R}\mathbf{u} \otimes \mathbb{P}\mathbf{u}\right), \quad \mathbb{P}^{\perp}\mathbf{F} = O\left(\frac{\lambda_2}{R}\mathbb{P}\mathbf{u} \otimes \mathbb{P}\mathbf{u}\right), \tag{A.6f}$$

其中某些常数为 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$;

(4) 空间通量映射 $\mathbf{A} := (\mathbf{A}^I)_{1\le I\le n}$ 具有对称性，即

$$[\sigma\mathbf{A}]^T = \sigma\mathbf{A} \tag{A.6g}$$

对于任意空间1-形式 σ，并且满足以下估计

$$\mathbb{P}\mathbf{A}\mathbb{P} = |t|^{-1}O(\mathbf{u}), \quad \mathbb{P}^{\perp}\mathbf{A}\mathbb{P}^{\perp} = |t|^{-1}O(\mathbb{P}\mathbf{u} \otimes \mathbb{P}\mathbf{u}), \tag{A.6h}$$

$$\mathbb{P}\mathbf{A}\mathbb{P}^{\perp} = |t|^{-1}O(\mathbb{P}\mathbf{u}), \quad \mathbb{P}^{\perp}\mathbf{A}\mathbb{P} = |t|^{-1}O(\mathbb{P}\mathbf{u}); \tag{A.6i}$$

(5) $\mathbf{A}$ 的散度 $\operatorname{div}\mathbf{A} := \nabla_I\left(\mathbf{A}^I(t, x, \mathbf{u})\right)$ 满足

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = |t|^{-1+p}O(\theta), \tag{A.6j}$$

其中某些常数为 $0 < p \le 1$ 和 $\theta > 0$。

最后，上述所有 O-符号，例如 $f = O(g)$，都表示存在系数函数h 使得 $f = hg$ 且

$$\left\|\nabla_x^k h\right\|_{L^\infty} < 1, \quad for\ all\ \ k \ge 0;$$

此外，上述所有参数均满足

$$2\kappa > \max\left\{2\gamma_1(\lambda_1+\lambda_2), s(s+1)\mathtt{A}\right\}, \quad \mathtt{A} := \sup_{t_0\le t<0}\left(|t|\ \|\nabla\mathbb{P}\mathbf{A}\mathbb{P}\|_{L^\infty}\right) < \infty. \tag{A.7}$$

定理 *A.2* 的证明。证明沿用了 [18] 中定理 3.8 的策略。我们根据简化后的假设，对证明作了精简阐述。

我们将论证分为以下五个步骤：(i) 推导 $\mathbf{u}$ 的 L^2 和 H^s 估计，(ii) 证明在 $[t_0, 0)$ 上的整体存在性，(iii) 证明当 $t \to 0^-$ 时，$\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}(t,\cdot)$ 收敛，(iv) 得到 $\mathbb{P}\mathbf{u}(t,\cdot)$ 的衰减估计，(v) 证明 $\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}(t,\cdot) - \mathbb{P}^\perp\mathbf{u}(0,\cdot)$ 的衰减。此外，由于 (A.6e)，我们将利用 $\mathbf{A}^0$ 与单位算子一致等价这一事实，因此

$$\left\langle \mathbf{v}, \mathbf{A}^0\mathbf{v} \right\rangle \approx \|\mathbf{v}\|_{L^2}$$

对于任意函数 $\mathbf{v}$。此处及下文中，尖括号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示希尔伯特空间 $L^2(\Sigma)$ 的通常内积。

L^2 和 H^s 能量估计。

将 (A.3) 与 $\mathbf{u}$ 配对并积分，得到

$$\partial_t \left\langle \mathbf{u}, \mathbf{A}^0\mathbf{u} \right\rangle = \langle \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{A}\mathbf{u} \rangle + \frac{2}{t} \langle \mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbb{P}\mathbf{u} \rangle + \frac{2}{t} \langle \mathbf{u}, \mathbf{F} \rangle .$$

利用 (A.6e)、(A.6f) 和 (A.6j)，以及$\mathbf{A}^0$, $\mathcal{A}$ 和 $\mathbb{P}$的协变不变性，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_1}\partial_t \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 &\le |\langle \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{A}\mathbf{u} \rangle| - \frac{2}{|t|} \langle \mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbb{P}\mathbf{u} \rangle + \frac{2}{|t|} |\langle \mathbf{u}, \mathbf{F} \rangle| \\ &\le \theta |t|^{-1+p} \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 - \frac{2\kappa}{\gamma_1 |t|} \|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{|t|} \|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 . \end{aligned}$$

重新整理这个不等式，得到$\mathbf{u}$的 L^2 估计：

$$\partial_t \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 \le \theta\gamma_1 |t|^{-1+p} \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 - |t|^{-1}\rho_0 \|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 , \tag{A.8}$$

其中，由假设 (A.7)，常数 ρ_0 为正

$$\rho_0 := 2\kappa - 2\gamma_1(\lambda_1 + \lambda_2) > 0.$$

对 (A.3) 关于空间变量求导 k次，对于 $1 \le k \le s$，我们得到

$$\mathbf{A}^0\partial_t\nabla^k\mathbf{u} + \mathbf{A}^I\nabla_I\nabla^k\mathbf{u} = \frac{1}{t}\mathcal{A}\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u} + \frac{1}{t}\nabla^k\mathbf{F}[t,\mathbf{u}] - [\nabla^k, \mathbf{A}^I]\nabla_I\mathbf{u} - \mathbf{A}^I[\nabla^k, \nabla_I]\mathbf{u},$$

将其与 $\nabla^k\mathbf{u}$配对，可得

$$\partial_t \left\langle \nabla^k\mathbf{u}, \mathbf{A}^0\nabla^k\mathbf{u} \right\rangle = \left\langle \nabla^k\mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{A}\nabla^k\mathbf{u} \right\rangle + \frac{2}{t} \left\langle \nabla^k\mathbf{u}, \mathcal{A}\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u} \right\rangle + 2 \left\langle \nabla^k\mathbf{u}, \mathbf{G}_k \right\rangle , \tag{A.9}$$

其中$\mathbf{G}_k$ 汇集了

$$\mathbf{G}_k := \frac{1}{t}\nabla^k\mathbf{F}[t,\mathbf{u}] - [\nabla^k, \mathbf{A}^I]\nabla_I\mathbf{u} - \mathbf{A}^I[\nabla^k, \nabla_I]\mathbf{u}.$$

微分源项 $\nabla^k\mathbf{F}$可以估计为

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \nabla^k\mathbf{u}, \nabla^k\mathbf{F}[t,\mathbf{u}] \right\rangle\right| &\le \left|\left\langle \nabla^k\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}, \nabla^k\mathbb{P}^\perp\mathbf{F}[t,\mathbf{u}] \right\rangle\right| + \left|\left\langle \nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}, \nabla^k\mathbb{P}\mathbf{F}[t,\mathbf{u}] \right\rangle\right| \\ &\le \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{R} \|\mathbf{u}\|_{H^s} \|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{H^s}^2 , \end{aligned}$$

在第二个不等式中应用了式（A.6f）的结构。交换子项 $[\nabla^k, \nabla_I]\mathbf{u}$可以分解为：

$$\left\langle \nabla^k\mathbf{u}, \mathbf{A}^I[\nabla^k, \nabla_I]\mathbf{u} \right\rangle = \left\langle \nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}, \mathbb{P}\mathbf{A}^I\mathbb{P}[\nabla^k, \nabla_I]\mathbb{P}\mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}, \mathbb{P}\mathbf{A}^I\mathbb{P}^\perp[\nabla^k, \nabla_I]\mathbb{P}^\perp\mathbf{u} \right\rangle$$

$$+\left\langle \nabla^k\mathbb{P}^\perp\mathbf{u},\mathbb{P}^\perp\mathbf{A}^I\mathbb{P}[\nabla^k,\nabla_I]\mathbb{P}\mathbf{u}\right\rangle+\left\langle \nabla^k\mathbb{P}^\perp\mathbf{u},\mathbb{P}^\perp\mathbf{A}^I\mathbb{P}^\perp[\nabla^k,\nabla_I]\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}\right\rangle.$$

应用（A.6i），并且由于 $[\nabla^k,\nabla_I]$ 是一个阶数为 $k-1$ 的微分算子，再结合我们的选择 $s>n/2+3$，可得以下界

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \nabla^k\mathbf{u},\mathbf{A}^I[\nabla^k,\nabla_I]\mathbf{u}\right\rangle\right|&\le\left\|\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{L^2}\left(|t|^{-1}\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{K^{k-1}}\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^s}\right)+\left\|\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{L^2}\left(|t|^{-1}\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^{k-1}}\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{H^s}\right)\\&\quad+\left\|\nabla^k\mathbf{u}\right\|_{L^2}\left(|t|^{-1}\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{H^{k-1}}\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{H^s}\right)+\left\|\nabla^k\mathbf{u}\right\|_{L^2}\left(|t|^{-1}\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{H^s}^2\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^{k-1}}\right)\\&\le|t|^{-1}C(\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^s})\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{H^s}^2,\end{aligned}$$

其中，此处及下文中，$C(\eta)$ 表示一个关于 $\eta>0$ [1] 多项式依赖、并在 $\eta\to0^+$ 时以正速率趋于 0 的系数。另一个出现在 $\mathbf{G}_k$ 中的交换子项 $[\nabla^k,\mathbf{A}^I]\nabla_I\mathbf{u}$ 可类似地分解为

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla^k\mathbf{u},[\nabla^k,\mathbf{A}^I]\nabla_I\mathbf{u}\right\rangle&=\left\langle \nabla^k\mathbf{u},\sum_{j=1}^k\nabla^j\mathbf{A}^I*\nabla^{k-j}\nabla_I\mathbf{u}\right\rangle\\&=\left\langle \nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u},\sum_{j=1}^k\nabla^j(\mathbb{P}\mathbf{A}^I\mathbb{P})*\nabla^{k-j}\nabla_I\mathbb{P}\mathbf{u}\right\rangle\\&\quad+\left\langle \nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u},\sum_{j=1}^k\nabla^j(\mathbb{P}\mathbf{A}^I\mathbb{P}^\perp)*\nabla^{k-j}\nabla_I\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}\right\rangle\\&\quad+\left\langle \nabla^k\mathbb{P}^\perp\mathbf{u},\sum_{j=1}^k\nabla^j(\mathbb{P}^\perp\mathbf{A}^I\mathbb{P})*\nabla^{k-j}\nabla_I\mathbb{P}\mathbf{u}\right\rangle\\&\quad+\left\langle \nabla^k\mathbb{P}^\perp\mathbf{u},\sum_{j=1}^k\nabla^j(\mathbb{P}^\perp\mathbf{A}^I\mathbb{P}^\perp)*\nabla^{k-j}\nabla_I\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}\right\rangle.\end{aligned}$$

通过类似的论证并再次使用 (A.6i)，我们得到

$$\left|\left\langle \nabla^k\mathbf{u},[\nabla^k,\mathbf{A}^I]\nabla_I\mathbf{u}\right\rangle\right|\le k\left\|\nabla\mathbb{P}\mathbf{A}\mathbb{P}\right\|_{L^\infty}\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{H^s}^2+|t|^{-1}C(\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^s})\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{H^s}^2,$$

其中，第一项和第二项分别来自 $l=1$ 和 $l\ge2$。

因此，$\mathbf{G}_k$-项的估计为

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \nabla^k\mathbf{u},\mathbf{G}_k\right\rangle\right|&\le\left|\left\langle \nabla^k\mathbf{u},\mathbf{A}^I[\nabla^k,\nabla_I]\mathbf{u}\right\rangle\right|+\left\langle \nabla^k\mathbf{u},[\nabla^k,\mathbf{A}^I]\nabla_I\mathbf{u}\right\rangle+|t|^{-1}\left|\left\langle \nabla^k\mathbf{u},\nabla^k\mathbf{F}[t,\mathbf{u}]\right\rangle\right|\\&\le|t|^{-1}k\mathtt{A}\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{H^s}^2+|t|^{-1}C\left(\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^s}\right)\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{H^s}^2.\end{aligned}$$

结合 (A.9)，我们得到 $\nabla^k\mathbf{u}$ 的 L^2 估计：

$$\begin{aligned}\partial_t\left\|\nabla^k\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2&\le-|t|^{-1}2\kappa\left\|\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2+\gamma_1\theta|t|^{-1+p}\left\|\nabla^k\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2\\&\quad+|t|^{-1}2k\gamma_1\mathtt{A}\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{H^s}^2+|t|^{-1}C\left(\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^s}\right)\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{H^s}^2,\end{aligned}$$

其中 $1\le k\le s$。对 k 求和，并借助 (A.8)，我们由此得到 $\mathbf{u}$ 的 H^s 估计：

$$\partial_t\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^s}^2\le-|t|^{-1}\rho_s\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{H^s}^2+\theta\gamma_1|t|^{-1+p}\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^s}^2+|t|^{-1}2\gamma_1(\lambda_1+\lambda_2)\left\|\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2,\tag{A.10}$$

with ρ_s defined by

$$\rho_s:=2\kappa-\gamma_1s(s+1)\mathtt{A}-C\left(\left\|\mathbf{u}\right\|_{H^s}\right).$$

[1] 以及可能取决于 s 和福克斯条件中的固定参数。

在 $[t_0, 0$上的整体存在性）。

将 $\rho_0^{-1} 2\gamma_1(\lambda_1 + \lambda_2)$ 倍的 (A.8) 加到 (A.10) 上，即可消去出现的 $\|\mathbf{u}\|_{L^2}$项，从而得到

$$\partial_t \left(\|\mathbf{u}\|_{H^s}^2 + \rho_0^{-1} 2\gamma_1(\lambda_1 + \lambda_2) \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 \right) \leq -|t|^{-1} \rho_s \|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{H^s}^2 + C_0 |t|^{-1+p} \|\mathbf{u}\|_{H^s}^2 , \tag{A.11}$$

其中，此处及下文中， C_0 表示一个仅依赖于 s 及福克斯条件中固定参数的正常数。

定义能量函数

$$E_s(t) := \|\mathbf{u}\|_{H^s}^2 + 2\rho_0^{-1}\gamma_1(\lambda_1 + \lambda_2) \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 - \int_{t_0}^t \frac{\rho_s}{\tau} \|\mathbb{P}\mathbf{u}(\tau)\|_{H^s}^2 \, \mathrm{d}\tau,$$

则它满足

$$\partial_t E_s(t) \leq C_0 |t|^{-1+p} E_s(t).$$

由此，格朗沃尔不等式给出

$$E_s(t) \leq e^{C_0(|t_0|^p - |t|^p)} E_s(t_0). \tag{A.12}$$

通过选取足够小的 δ_0 ，可以确保

$$C\left(\|\mathbf{u}\|_{H^s}\right) < \kappa - \frac{1}{2}\gamma_1 s(s+1)\mathtt{A} \quad \text{for all} \;\; 0 < \|\mathbf{u}\|_{H^s} \leq 2\delta_0,$$

那么，由假设 (A.7) 可得一致地

$$\rho_0 > 0, \quad \rho_s > 0.$$

由于初始时我们有

$$\|\mathbf{u}(t_0)\|_{H^s} \leq \delta,$$

进一步缩小 $\delta < \delta_0$，并定义

$$t_{\delta_0} := \sup \{ t \in (t_0, 0] : \|\mathbf{u}(t)\|_{H^s} \leq 2\delta_0 \}$$

to b取第一个满足 $\|\mathbf{u}(t_{\delta_0})\|_{H^s} = 2\delta_0$ 的时刻，自举论证给出 t

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^s}^2 &\leq e^{C_0|t_0|^p} \left[\|\mathbf{u}(t_0)\|_{H^s}^2 + 2\rho_0^{-1}\gamma_1(\lambda_1 + \lambda_2) \|\mathbf{u}(t_0)\|_{L^2}^2 \right] \\ &\leq e^{C_0|t_0|^p} [1 + 2\rho_0^{-1}\gamma_1(\lambda_1 + \lambda_2)] \delta^2. \end{aligned}$$

对所有 $t \in [t_0, t_{\delta_0})$，由 (A.12) 可得。现在令

$$\delta < e^{-C_0|t_0|^p/2} [1 + \rho_0^{-1}\gamma_1(\lambda_1 + \lambda_2)]^{-1/2} \delta_0$$

足够小，则可推出 $\|\mathbf{u}(t)\|_{H^s} < \delta_0$，这与 t_{δ_0} 的选取相矛盾；因此 $t_{\delta_0} = 0$，且解在 $[t_0, 0)$ $\times \Sigma$ 上全局存在，并具有一致有界性

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{H^s} \leq e^{C_0(1+|t_0|^p)} \delta.$$

此外，我们有关于$\mathbf{u}$的以下能量估计：

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{H^s}^2 - \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} \|\mathbb{P}\mathbf{u}(\tau)\|_{H^s}^2 \, \mathrm{d}\tau \leq e^{C_0(1+|t_0|^p - |t|^p)} \|\mathbf{u}(t_0)\|_{H^s}^2 . \tag{A.13}$$

$\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}$的收敛。

将（A.3）投影到 $\mathbb{P}^\perp$ 方向，得到

$$\partial_t \mathbb{P}^\perp \mathbf{u} = -\mathbb{P}^\perp (\mathbf{A}^0)^{-1} \mathbf{A}^I \nabla_I \mathbf{u} + \frac{1}{t} \mathbb{P}^\perp (\mathbf{A}^0)^{-1} \left(\mathcal{A}\mathbb{P}\mathbf{u} + \mathbf{F}[t, \mathbf{u}] \right), \tag{A.14}$$

where 右端可利用（A.6a）、（A.6d）进一步分解，a s

$$\partial_t \mathbb{P}^\perp \mathbf{u} = -\mathbb{P}^\perp (\mathbf{A}^0)^{-1} \mathbb{P}^\perp \mathbf{A}^I \mathbb{P} \nabla_I \mathbb{P} \mathbf{u} - \mathbb{P}^\perp (\mathbf{A}^0)^{-1} \mathbb{P}^\perp \mathbf{A}^I \mathbb{P}^\perp \nabla_I \mathbb{P}^\perp \mathbf{u} + \frac{1}{t} \mathbb{P}^\perp (\mathbf{A}^0)^{-1} \mathbb{P}^\perp \mathbf{F}[t, \mathbf{u}].$$

对 $[t_1, t_2] \subset [t_0, 0)$ 在时间上积分并应用 H^{s-1} 范数，我们估计得

(A.15)

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{P}^\perp \mathbf{u}(t_2) - \mathbb{P}^\perp \mathbf{u}(t_1) \right\|_{H^{s-1}} &\leq \gamma_1 \int_{t_1}^{t_2} \left\| \mathbb{P}^\perp \mathbf{A} \mathbb{P} \nabla \mathbb{P} \mathbf{u} \right\|_{H^{s-1}} + \left\| \mathbb{P}^\perp \mathbf{A} \mathbb{P}^\perp \nabla \mathbb{P}^\perp \mathbf{u} \right\|_{H^{s-1}} + \left\| \mathbb{P}^\perp \mathbf{F} \right\|_{H^{s-1}} \mathrm{d}t \\ &\leq \gamma_1 \int_{t_1}^{t_2} |t|^{-1} \left(2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{H^{s-1}}\right) \|\mathbb{P}\mathbf{u}(t)\|_{H^s} \|\mathbb{P}\mathbf{u}(t)\|_{H^{s-1}} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

第二个不等式中用到了 (A.6f)、(A.6i)。

能量界 (A.13) 意味着

$$\left\| \mathbb{P}^\perp \mathbf{u}(t_2) - \mathbb{P}^\perp \mathbf{u}(t_1) \right\|_{H^{s-1}} \leq C_0 \left(1 + e^{|t_0|^p \delta}\right) \int_{t_1}^{t_2} -\frac{1}{t} \|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{H^s}^2 \mathrm{d}t,$$

因此，当 t_1，$t_2 \to 0^-$ 时趋于 0。因此，$\mathbb{P}^\perp \mathbf{u}$ 在 H^{s-1} 中收敛，其极限记为

$$\mathbb{P}^\perp \mathbf{u}(0) := \lim_{t \to 0^-} \mathbb{P}^\perp \mathbf{u}(t) \in H^{s-1}(\Sigma).$$

$\mathbb{P}\mathbf{u}$ 的衰减估计。

将（A.3）投影到 $\mathbb{P}$ 方向上，并结合（A.6a）和（A.6d），可得

$$\mathbb{P}\mathbf{A}^0 \mathbb{P} \partial_t \mathbb{P}\mathbf{u} + \mathbb{P}\mathbf{A}^I \mathbb{P} \nabla_I \mathbb{P}\mathbf{u} + \mathbb{P}\mathbf{A}^I \mathbb{P}^\perp \nabla_I \mathbb{P}^\perp \mathbf{u} = \frac{1}{t} \mathcal{A} \mathbb{P}\mathbf{u} + \frac{1}{t} \mathbb{P}\mathbf{F}[t, \mathbf{u}], \tag{A.16}$$

将其与 $\mathbb{P}\mathbf{u}$ 配对可得

$$\frac{1}{2} \partial_t \left\langle \mathbb{P}\mathbf{u}, \mathbf{A}^0 \mathbb{P}\mathbf{u} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \mathbb{P}\mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{A} \mathbb{P}\mathbf{u} \right\rangle + \frac{1}{t} \left\langle \mathbb{P}\mathbf{u}, \mathcal{A} \mathbb{P}\mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \mathbb{P}\mathbf{u}, \frac{1}{t} \mathbb{P}\mathbf{F} - \mathbb{P}\mathbf{A}^I \mathbb{P}^\perp \nabla_I \mathbb{P}^\perp \mathbf{u} \right\rangle.$$

利用（A.6f）和（A.6i）可将最后一项估计为:

$$\left| \left\langle \mathbb{P}\mathbf{u}, \frac{1}{t} \mathbb{P}\mathbf{F} - \mathbb{P}\mathbf{A}^I \mathbb{P}^\perp \nabla_I \mathbb{P}^\perp \mathbf{u} \right\rangle \right| \leq |t|^{-1} \left(\lambda_1 + \|\mathbf{u}\|_{H^s}\right) \|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{L^2}^2;$$

于是得到 $\mathbb{P}\mathbf{u}$ 的 L^2 衰减估计:

$$\partial_t \|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 \leq |t|^{-1+p} \gamma_1 \theta \|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 - |t|^{-1} \tilde{2} \rho_0 \|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{L^2}^2, \tag{A.17}$$

其中，与之前一样，根据（A.7）并取 δ_0 充分小，可确保 t

$$\tilde{\rho}_0 := \kappa - C\left(\|\mathbf{u}\|_{H^s}\right) > 0.$$

由此，格朗沃尔不等式给出

$$\|\mathbb{P}\mathbf{u}(t)\|_{L^2} \leq C_0 e^{|t_0|^p/2} \left| \frac{t}{t_0} \right|^{\tilde{\rho}_0} \delta. \tag{A.18}$$

再次对空间变量求导（A.16），可得

$$\mathbb{P}\mathbf{A}^0 \mathbb{P} \partial_t \nabla^k \mathbb{P}\mathbf{u} + \mathbb{P}\mathbf{A}^I \mathbb{P} \nabla_I \nabla^k \mathbb{P}\mathbf{u} = \frac{1}{t} \mathcal{A} \nabla^k \mathbb{P}\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{G}}_k, \tag{A.19}$$

˜其中$\mathbf{G}_k$ 定义为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{G}}_k :=& \frac{1}{t}\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{F} - \mathbb{P}\mathbf{A}^I\mathbb{P}^\perp\nabla_I\nabla^k\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}\\ &- [\nabla^k, \mathbb{P}\mathbf{A}^I\mathbb{P}]\nabla_I\mathbb{P}\mathbf{u} - [\nabla^k, \mathbb{P}\mathbf{A}^I\mathbb{P}^\perp]\nabla_I\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}\\ &- \mathbb{P}\mathbf{A}^I\mathbb{P}[\nabla^k, \nabla_I]\mathbb{P}\mathbf{u} - \mathbb{P}\mathbf{A}^I\mathbb{P}^\perp[\nabla^k, \nabla_I]\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}.\end{aligned}$$

与 $\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}$ 配对，得到

(A.20)

$$\frac{1}{2}\partial_t\left\langle\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}, \mathbb{P}\mathbf{A}^0\mathbb{P}\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}, \operatorname{div} A\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}\right\rangle + \frac{1}{t}\left\langle\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}, \mathcal{A}\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}\right\rangle + \left\langle\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{G}}_k\right\rangle,$$

再次重复交换子估计[2]，可以证明

$$\begin{aligned}\partial_t\left\|\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{L^2} \le& -|t|^{-1}2\kappa\left\|\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2 + \gamma_1\theta|t|^{-1+p}\left\|\nabla^k\mathbb{P}\mathbf{u}\right\|_{L^2}^2\\ &+ |t|^{-1}C\left(\|\mathbf{u}\|_{H^s}\right)\|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{H^{s-1}}^2 + |t|^{-1}2k\gamma_1\mathtt{A}\|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{H^{s-1}}^2.\end{aligned}$$

对 $0 \le k \le s-1$ 求和，并结合 (A.17)，得到

$$\partial_t\|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{H^{s-1}}^2 \le |t|^{-1+p}\gamma_1\theta\|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{H^{s-1}}^2 - |t|^{-1}2\tilde{\rho}_s\|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{H^{s-1}}^2 + |t|^{-1}C\left(\|\mathbf{u}\|_{H^s}\right)\|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{L^2}^2,$$

其中指数为正，且间隙为正

$$\tilde{\rho}_s := \kappa - \frac{1}{2}\gamma_1 s(s-1)\mathtt{A} - C\left(\|\mathbf{u}\|_{H^s}\right) > 0, \quad \tilde{\rho}_0 - \tilde{\rho}_s > 0,$$

通过选取足够小的 δ_0 。再次应用格朗沃尔不等式，并结合 (A.13) 和 (A.17)，我们推出 $\mathbb{P}\mathbf{u}$ 的 H^{s-1} 衰减:

$$\|\mathbb{P}\mathbf{u}\|_{H^{s-1}} \le C(\delta)e^{C_0|t_0|^p}\left|\frac{t}{t_0}\right|^{\tilde{\rho}_s}. \tag{A.21}$$

$\left(\mathbb{P}^\perp\mathbf{u} - \mathbb{P}^\perp\mathbf{u}\big|_{t=0}\right)$的衰减估计。

最后，回顾（A.15），并令 $t_1 = t$ 和 $t_2 \to 0^-$，可得

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}(t) - \mathbb{P}^\perp\mathbf{u}(0)\right\|_{H^{s-1}} &\le \gamma_1\int_t^0 |t|^{-1}\left(2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{H^{s-1}}\right)\|\mathbb{P}\mathbf{u}(\tau)\|_{H^s}\|\mathbb{P}\mathbf{u}(\tau)\|_{H^{s-1}}\,\mathrm{d}\tau\\ &\le C_0\left(1 + C(\delta)\right)\int_t^0 -\frac{1}{\tau}\|\mathbb{P}\mathbf{u}(\tau)\|_{H^s}\|\mathbb{P}\mathbf{u}(\tau)\|_{H^{s-1}}\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

将估计代入（A.21），并应用 Hölder 不等式，我们得到

$$\left\|\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}(t) - \mathbb{P}^\perp\mathbf{u}(0)\right\|_{H^{s-1}} \le C(\delta)e^{C_0|t_0|^p}\left|\frac{t}{t_0}\right|^{\tilde{\rho}_s}. \tag{A.22}$$

取 $\zeta := \kappa - \gamma_1 s(s-1)\mathtt{A}/2$ 作为 $\tilde{\rho}_s$ 的主部，并且由于 δ 可以在界 σ下取得充分小，我们得到 $\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}$的收敛估计。证明完成。□

注 A.3。 通过时间变换 $-t' = (-t)^q$，我们还可以得到带有显式参数 $0 < q \le 1$的该定理的类似版本。

[2]请注意，由于含有 $\nabla_I\nabla^k\mathbb{P}^\perp\mathbf{u}$ 项，会损失一个导数。

参考文献

[1] Alexakis, S., Fournodavlos, G. 轴对称和极化近施瓦西黑洞内部的稳定类空奇点形成。《偏微分方程年刊》11, 10 (2025). doi: 10.1007/s40818-025-00200-8.[2] Ames, E., Beyer, F., Isenberg, J., LeFloch, P. G. 多个空间维数下的拟线性对称双曲福克斯系统。2012. arXiv: 1205.2166 [gr-qc].[3] Ames, E., Beyer, F., Isenberg, J., LeFloch, P. G. $\mathbb{T}^2$对称真空时空中的拟线性双曲福克斯系统与AVTD行为。《亨利·庞加莱年刊》14, 1445–1523 (2013). doi: 10.1007/s00023-012-0228-2.[4] An, X., Chen, H., He, T. 引力坍缩宇宙学时空中类空奇点的定量爆破估计。《变分法》64, 75 (2025). doi: 10.1007/s00526-025-02937-3.[5] An, X., Gajic, D. 球对称坍缩至施瓦西黑洞过程中的曲率爆破与质量膨胀。《理性力学与分析档案》247, 51 (2023). doi: 10.1007/s00205-023-01883-8.[6] An, X., He, T., Shen, D. 完整强次临界区域内爱因斯坦-麦克斯韦-标量场-弗拉索夫系统的大爆炸奇点稳定性。2025. arXiv: 2507.18585 [gr-qc].[7] An, X., Zhang, R. 球对称条件下爱因斯坦-标量场系统的多项式爆破上界。《数学物理通讯》376, 1671–1704 (2020). doi: 10.1007/s00220-019-03677-0.[8] Andersson, L., Rendall, A. D. 静寂型宇宙学奇点。《数学物理通讯》218, 479–511 (2001). doi: 10.1007/s002200100406.[9] Athanasiou, N., Fournodavlos, G. Kasner型奇点的局部化构造。2024. arXiv:2412.16630 [math.AP].[10] Belinskii, V. A., Khalatnikov, I. M., Lifshitz, E. M. 相对论宇宙学中趋近奇点的振荡行为。《物理学进展》19, 525–573 (1970). doi: 10.1016/B978-0-08-036364-6.50046-6.[11] Benzoni-Gavage, S., Serre,D. 多维双曲偏微分方程：一阶系统及其应用。牛津大学出版社， 2006年。[12] Beyer, F., LeFloch, P. G. 二阶双曲福克斯系统及其应用。《经典与量子引力》27, 245012 (2010). doi: 10.1088/0264-9381/27/24/245012.[13] Beyer, F., LeFloch, P. G. 二阶双曲福克斯系统：戈迪时空中测地线的渐近行为。《物理评论D辑》84, 084036 (2011). doi: 10.1103/PhysRevD.84.084036.[14] Beyer, F., LeFloch, P. G. 宇宙学奇点附近具有高迪对称性的自引力流体流。《偏微分方程通讯》42, 1199–1248 (2017). doi: 10.1080/03605302.2017.1345938.[15] Beyer, F., Oliynyk, T. A. 爱因斯坦-标量场方程的局部化大爆炸稳定性。《理性力学与分析档案》248, 3 (2024). doi: 10.1007/s00205-023-01939-9.[16] Beyer, F., Oliynyk, T. A. FLRW解对爱因斯坦-欧拉-标量场方程的过去稳定性及其大爆炸奇点。2023. arXiv: 2308.07475 [gr-qc].[17] Beyer, F., Oliynyk, T. A. Kasner奇点附近的相对论完美流体。2020. arXiv: 2012.03435 [math.AP].[18] Beyer, F., Oliynyk, T. A., Olvera-Santamaría, J. A. 双曲方程整体存在性的福克斯方法。《偏微分方程通讯》46, 864–934 (2021).[19] Beyer, F., Oliynyk, T. A., Zheng, W. 次临界卡斯纳-标量场时空的局部化过去稳定性。2025. arXiv: 2502.09210 [gr-qc].[20] Bigorgne, L., Fajman, D., Joudioux, J., Smulevici, J., Thaller, M. 非紧支撑无质量弗拉索夫物质下闵可夫斯基时空的渐近稳定性。《理性力学与分析档案》242, 1–147 (2021). doi: 10.1007/s00205-021-01639-2.[21] Bove, A., Lewis, J. E., Parenti, C. 福克斯双曲算子的柯西问题。《北海道数学杂志》14, 175–248 (1985). doi: 10.14492/hokmj/1381757662.

[22] Choquet-Bruhat，Y.《广义相对论与爱因斯坦方程》。牛津大学出版社，2009。[23] Chrusciel，P. T.，Isenberg，J.，Moncrief，V. 极化 Gowdy 时空中的强宇宙监督假说。《经典与量子引力》7，1671（1990）。doi：10.1088/0264-9381/7/10/003。[24] Dafermos，M.，Luk，J. 动力学真空黑洞的内部 I：克尔柯西视界的 C^0 稳定性。《数学年刊》202，309–630（2025）。doi：10.4007/annals.2025.202.2.1。[25] Damour，T.，Henneaux M.，Rendall，A. D.，Weaver，M. 次临界爱因斯坦-物质系统的卡斯纳型行为。《亨利·庞加莱年刊》3，1049–1111（2002）。doi：10.1007/s000230200000。[26] Ellis，G. F.，Maartens，R.，MacCallum，M. A.《相对论宇宙学》。剑桥大学出版社，2012。[27] Fajman，D.，Joudioux，J.，Smulevici，J. 爱因斯坦–弗拉索夫系统中闵可夫斯基时空的稳定性。《偏微分方程分析》14，425–531（2021）。doi：10.2140/apde.2021.14.425。[28] Fajman，D.，Ofner，M.，Oliynyk，T. A.，Wyatt，Z. 减速膨胀时空中流体的稳定性。2025。arXiv：2501.12798 [gr-qc]。[29] Fajman，D.，Ofner，M.，Oliynyk，T. A.，Wyatt，Z. 线性膨胀宇宙学中相对论流体的稳定性。《国际数学研究通知》2024，4328–4383（2024）。doi：10.1093/imrn/rnad241。[30] Fajman，D.，Oliynyk，T. A.，Wyatt，Z. 非减速膨胀时空中相对论流体的稳定化。《数学物理通讯》383，401–426（2021）。doi：10.1007/s00220-020-03924-9。[31] Fajman，D.，Urban，L. 负空间曲率近 FLRW 时空附近的宇宙监督假说。《偏微分方程分析》18，1615–1713（2025）。doi：10.2140/apde.2025.18.1615。[32] Fournodavlos，G.，Marshall，E.，Oliynyk，T. A. 倾斜双流体 Bianchi I 时空的未来稳定性。2025。arXiv：2508.15155 [gr-qc]。[33] Fournodavlos，G.，Rodnianski，I.，Speck，J. 爱因斯坦方程的稳定大爆炸形成：完整次临界区域。《美国数学会杂志》36，827–916（2023）。doi：10.1090/jams/1015。[34] Groeniger，H. O.，Petersen，O.，Ringström，H. 静寂大爆炸奇点的形成。2023。arXiv：2309.11370 [gr-qc]。[35] Isenberg，J.，Moncrief，V. Gowdy 时空中引力场的渐近行为与奇点的性质。《物理年鉴》199，84–122（1990）。doi：10.1016/0003-4916(90)90369-Y。[36] Isenberg，J.，Moncrief，V. 极化和半极化 $U(1)$ 对称真空时空中的渐近行为。《经典与量子引力》19，5361（2002）。doi：10.1088/0264-9381/19/21/305。[37] Kichenassamy，S. 索博列夫空间中的福克斯方程与爆破解。《微分方程杂志》125，299–327（1996）。doi：10.1006/jdeq.1996.0033。[38] Kichenassamy，S. 福克斯约化：在几何、宇宙学和数学物理中的应用。第71卷。施普林格科学与商业媒体，2007。[39] Kichenassamy，S.，Littman，W. 非线性波动方程的爆破曲面 I。《偏微分方程通讯》18，431–452（1993）。doi：10.1080/03605309308820936。[40] Kichenassamy，S.，Littman，W. 非线性波动方程的爆破曲面 II。《偏微分方程通讯》18，1869–1899（1993）。doi：10.1080/03605309308820997。[41] Klainerman，S.，Szeftel，J. 极化扰动下史瓦西时空的整体非线性稳定性：（AMS-210）。普林斯顿大学出版社，2020。[42] Li，W. 齐次性之外的 BKL 反弹：曲面对称中的爱因斯坦-麦克斯韦-标量场。2024。arXiv：2408.12434 [gr-qc]。[43] Li，W. 齐次性之外的 BKL 反弹：Gowdy 对称时空。2024。arXiv：2408.12427[gr-qc]。[44] Li，W. 含标量物质的球对称时空中类空奇点的卡斯纳型描述。《偏微分方程年刊》11，5（2025）。doi：10.1007/s40818-024-00194-9。[45] Lindblad，H.，Taylor，M. 调和规范下爱因斯坦–弗拉索夫系统中闵可夫斯基时空的稳定性。《理性力学与分析档案》235，517–633（2020）。doi：10.1007/s00205-019-01425-1

.

[46] Liu，C.，Oliynyk，T. A.，Wang，J. 时空维数为 $n \geq 4$ 的类德西特解对于爱因斯坦–杨–米尔斯方程的未来整体存在性与稳定性。《欧洲数学会杂志》（2024）。doi：10.4171/JEMS/1556。[47] Marshall，E.，Oliynyk，T. A. 关于具有线性状态方程 $p = K\rho$、其中 $1/3 < K < 1$ 的相对论完美流体的稳定性。《数学物理快报》113，102（2023）。doi：10.1007/s11005-023-01722-7。[48] Moncrief，V. 具有类空 $U(1)$ 等距群的真空时空的爱因斯坦方程约化。《物理年鉴》167，118–142（1986）。doi：10.1016/S0003-4916(86)80009-4。[49] Oliynyk，T. A. 具有线性状态方程 $p = K\rho$、其中 $1/3 < K < 1/2$ 的相对论完美流体的未来整体稳定性。《工业与应用数学学会数学分析杂志》53，4118–4141（2021）。doi：10.1137/20M1361195。[50] Oliynyk，T. A.，Olvera-Santamaría，J. A. 弱零条件的福克斯观点。《微分方程杂志》296，107–147（2021）。doi：10.1016/j.jde.2021.05.056。[51] Rendall，A. D. 具有正宇宙学常数的爱因斯坦方程解的渐近行为。《亨利·庞加莱年刊》5，1041–1064（2004）。doi：10.1007/s00023-004-0189-1。[52] Rendall，A. D. 超越解析性的 Gowdy 时空奇点福克斯分析。《经典与量子引力》17，3305（2000）。doi：10.1088/0264-9381/17/16/313。[53] Ringström，H. Gowdy 时空的宇宙监督假说。《相对论在线评论》13，2（2010）。doi：10.12942/lrr-2010-2。[54] Ringström，H. 大爆炸奇点上的初始数据。《欧洲数学会杂志》（2025）。doi：10.4171/JEMS/1645。[55] Ringström，H. 对称情形中大爆炸奇点上的初始数据。2022。arXiv：2202.11458[gr-qc]。[56] Ringström，H. 宇宙的拓扑与未来稳定性。牛津大学出版社，2013。[57] Ringström，H. $\mathbb{T}^3$-Gowdy 时空中的强宇宙监督假说。《数学年刊》170，1181–1240（2009）。doi：10.4007/annals.2009.170.1181。[58] Rodnianski，I.，Speck，J. 爱因斯坦-标量场系统的一个线性稳定性区域及其在非线性大爆炸形成中的应用。《数学年刊》187，65–156（2018）。doi：10.4007/annals.2018.187.1.2。[59] Rodnianski，I.，Speck，J. 近 FLRW 解中的稳定大爆炸形成：爱因斯坦-标量场系统与爱因斯坦–刚性流体系统。2014。arXiv：1407.6298 [math.AP]。[60] Rodnianski，I.，Speck，J. 近 FLRW 解中的稳定大爆炸形成：爱因斯坦-标量场系统与爱因斯坦–刚性流体系统。《数学选刊新系列》24，4293–4459（2018）。doi：10.1007/s00029-018-0437-8。[61] Rodnianski，I.，Speck，J. 正宇宙学常数下无旋欧拉–爱因斯坦系统的 FLRW 解族的非线性未来稳定性。《欧洲数学会杂志》15，2369–2462（2013）。doi：10.4171/JEMS/424。[62] Rodnianski，I.，Speck，J. 正宇宙学常数下无旋欧拉–爱因斯坦系统的稳定性。2009。arXiv：0911.5501 [math-ph]。[63] Röhr，N.，Uggla，C. 爱因斯坦场方程的共形正则化。《经典与量子引力》22，3775（2005）。doi：10.1088/0264-9381/22/17/026。[64] Ståhl，F. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ 与 $\mathbb{S}^3$ Gowdy 时空的福克斯分析。《经典与量子引力》19，4483（2002）。doi：10.1088/0264-9381/19/17/301。[65] Taylor，M. 无质量爱因斯坦–弗拉索夫系统中闵可夫斯基时空的整体非线性稳定性。《偏微分方程年刊》3，9（2017）。doi：10.1007/s40818-017-0026-8。[66] Urban，L. $2+1$ 维空间中的静寂大爆炸形成。2024。arXiv：2412.03396 [gr-qc]。[67] Van Elst，H.，Uggla，C. 广义相对论正交标架方法。《经典与量子引力》14，2673（1997）。doi：10.1088/0264-9381/14/9/021。

新加坡国立大学数学系电子邮箱：kdong@u.nus.edu