arXiv:2601.06985v1 [math.DG] 11 Jan 2026

曲线的全局不变欧拉–拉格朗日方程

BORIS KRUGLIKOV、EIVIND SCHNEIDER、WIJNAND STENEKER

Abstract. 不变拉格朗日量产生不变欧拉–拉格朗日方程，文献中也讨论了如何运用各种局部方法计算这些方程。本文着眼于全局代数微分不变量。在这种情况下，计算方法的若干方面可以加以调整。我们将讨论它们与以往方法的联系，以及一些基础性问题。

不变欧拉–拉格朗日方程理论已应用于欧几里得平面和空间中相对于运动群的曲线。我们将这些计算拓展到更高的四维情形（闵可夫斯基时空），这已呈现出计算上的挑战。我们还给出了其他例子的公式，即射影群和共形群（莫比乌斯群），并将其与近期的一些应用联系起来。

1. Introduction

变分法旨在描述作用的极值曲线，通常表述为最小作用量原理（有时也称最大值原理，但二者等价）：

$$\int L\,dt \to \min$$

其中我们省略了对边界条件的讨论。标准选择之一是固定端点，或在无穷远处快速衰减。这里，$L = L(t, u, u', \dots, u^{(n)})$ 是一个拉格朗日量（更准确地说，是拉格朗日密度），它依赖于 $u = u(t)$ 及其最高至 n 阶的导数；下文将使用喷射记号$u_0 = u$、 $u_1 = u'$、.....、 $u_n = u^{(n)}$。

我们只考虑时间 t 为一维的情形（不讨论多重积分），但有多个因变量 $u = (u^i)$；换言之，我们将讨论流形上的曲线的高阶变分问题。在这种情况下，极值曲线所满足的欧拉–拉格朗日方程是以下常微分方程组：

$$\frac{\delta L}{\delta u^i} := \frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u^i_1} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial u^i_2} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial L}{\partial u^i_n} = 0,$$

其中，$\frac{d}{dt}$ 是全导数算子。这些方程由作用的一阶变分得到；我们不讨论二阶变分，也不讨论临界点成为实际极值曲线的充分条件。

尽管欧拉–拉格朗日方程的形式简单，但其计算可能并不容易，具体取决于 L 的代数复杂性，尤其是当流形的阶 n 或维数 m 增大时。不过，应用对称性和不变性往往能简化直接计算。

不变变分问题很自然，在实践中也经常出现。这意味着被积函数 $L\,dt$ 是李群 G 作用下的不变量；因此，它可以用微分不变量表示，极值曲线的方程 $\delta_u L = 0$ 也就能用不变形式表示，从而简化计算。

这一研究计划由 Griffiths [8]（在外微分系统的背景下）和 Anderson[2]（通过喷射形式体系）发起。尤其是，他们针对欧几里得平面上的曲线最优控制问题推导出了以下公式。记 κ 为曲率， s 为曲线的自然参数，并令 $\kappa_m = \frac{d^m}{ds^m}\kappa$。若 $L = L(\kappa, \kappa_s, \kappa_{ss}, \dots, \kappa_n)$ 是一个不变拉格朗日量，且我们关于 ds 积分，则欧拉–拉格朗日方程为

$$(\mathcal{D}_s^2 + \kappa^2)\,\mathcal{E}(L) + \kappa\,\mathcal{H}(L) = 0,$$

其中，不变的欧拉算子和哈密顿算子定义为

$$\mathcal{E}(L) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \mathcal{D}^m \frac{\partial L}{\partial \kappa_m}, \qquad \mathcal{H}(L) = \sum_{j<i} (-1)^j \kappa_{i-j} \mathcal{D}^j \frac{\partial L}{\partial \kappa_i} - L. \tag{1}$$

在 Kogan–Olver 的工作 [11] 中，这一研究得到了进一步推进；特别是，他们推导出一个通用公式，并将其应用于欧几里得空间中的曲线等例子。

Kogan–Olver [12] 的主要工具是 Cartan [5], 提出、后经 Fels–Olver [6]扩展和推广的移动标架法。尽管这种方法相当强大，但它依赖于自由作用这一假设（对于有限维李群在纯喷射空间上的作用，这一条件最终会成立，但对于一般的微分方程则不然 [17]），还要求作用存在一个（横截）截面（而一般而言，这一条件仅在局部成立）。因此，他们的结果适用于局部微分不变量。例如，对于上述定向平面中的曲线相对于运动群 $G = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ 的情形，曲率 κ 并非不变量（它含有根式且不是代数的），而 κ^2 是一个有理微分不变量，参见 [15]。

基于微分不变量代数全局生成方面的最新进展 [15], ，我们研究全局不变欧拉–拉格朗日方程这一问题。结果表明，Kogan–Olver [12] 中的大多数结论在这一背景下仍然成立。我们将推广他们的结果，通过欧拉算子和哈密顿算子证明一个关于不变欧拉–拉格朗日方程的类似公式。为此，我们不仅放宽了对李群 G作用自由性的假设，还允许 G 为无限维李伪群（等价地，这种不变性可以通过相应的向量场李代数 $\mathfrak{g}$ 来处理），前提是其规模适中（即允许存在足够多的微分不变量；更确切地说，射流空间中存在一组不变1-形式构成的基）。

随后将其应用于几个经典问题。例如，我们重新考察欧几里得平面上的运动群问题。全局不变拉格朗日量可以通过全局微分不变量表示，这些不变量是 $K_0 = \kappa^2$ 和 $K_i = \nabla^i K_0$ ，适用于 $\nabla = \kappa^{-1}\mathcal{D}_s$。于是，对于接触不变拉格朗日形式$L(K_0, \dots, K_n)\omega$，其中 $\omega = \kappa ds = \dfrac{y_2}{(1+y_1^2)^2}\,dx$，欧拉–拉格朗日方程为

$$\mathcal{A}^*\mathcal{E}(L) - \mathcal{B}^*\mathcal{H}(L) = 0. \tag{2}$$

这里，不变欧拉算子和哈密顿算子由公式 (1) 的显然类比形式给出，其中$\kappa_i \mapsto K_i$，而

$$\mathcal{A}^* = 2K_0^2\nabla^2 + 5K_0K_1\nabla + (2K_0K_2 + K_1^2 + 2K_0^2), \qquad \mathcal{B}^* = K_0\nabla^2 + \frac{1}{2}K_1\nabla.$$

公式 (2) 在一般局部情形下于 [12] 中推导出来。我们证明，它同样适用于全局不变问题以及一般群 G。本文考察的、公式 (2) 适用的其他例子包括：共形空间形式中的无参数曲线（在二维情形下，更确切地说是 M¨比乌斯结构），以及相对于相应最大对称群的平坦射影空间中的无参数曲线。

需要强调的是，计算会产生中间公式，即使使用现代符号软件和计算能力，也难以处理。我们将讨论移动标架法的优点与局限，并展示一些技巧，使这些棘手的计算变得可行。我们将推导不变欧拉–拉格朗日方程的局部公式和整体公式。

此外，我们将讨论作用的正则分层与奇异分层，因为后者恰恰是移动标架不存在的地方。我们将举一个共形几何中的例子（所谓的共形圆，或共形测地线）：其中拉格朗日量具有共形不变性，但欧拉–拉格朗日方程却形成一个奇异分层。

无参数曲线的不变变分问题 $\gamma \subset M$ 由一个（重参数化不变的）泛函定义

$$S[\gamma] = \int_\gamma L\,\omega, \tag{3}$$

其中，不变拉格朗日量 L 是一个微分不变量，而 ω 是一个接触不变水平一形式。相应的欧拉–拉格朗日方程是不变的，因此常有人说它们“可以用微分不变量表示”。这里通常指的是“绝对微分不变量”，然而，根据一般原理，我们只能断定它可以用绝对或相对微分不变量表示。如果欧拉–拉格朗日方程在射流空间中的轨迹包含于该空间按 G-轨道划分所形成的叶状结构的奇异分层中，就会出现后一种情形。

为此，应在表达式 (2) 中引入一个相对不变量因子 W，正如 [11] 中所解释的那样。不过，该论文曾质疑，欧拉–拉格朗日方程是否可能落入

W 的奇异轨迹；换言之，像 (2) 中那样省略 W 是否合理。如上所述，共形圆的方程提供了这样一个例子。因此，在欧拉–拉格朗日方程的不变表述中，因子 W（在我们的方法中，它将是一个全局相对不变量）不可或缺。

文章结构。下一节中，我们将建立不变变分演算所需的理论工具，并使其适用于全局微分不变量。我们并不完全依赖移动标架技术，但仍能得到有效的计算公式。该方法与 [12] 的方法类似；我们将自己的方法（不使用文献所述方法中的核心工具——不变化）与 Kogan–Olver 的方法联系起来。该文献已提及这一点，而 Itskov [10]，随后的研究则明确指出，可以通过所谓的递推公式，对李代数 $\mathfrak{g}$ 作用进行显式计算。

矩阵相对不变量 W 是公式 (2) 中一个重要但隐含的要素，无法通过李代数方法从截面推导出来。我们提出了一种构造性方法，利用微分 G不变量的符号来计算它。我们的主要结果，即定理 3，给出了通过任意不变余标架表述不变欧拉–拉格朗日方程的形式，该形式适用于全局和局部方法。

接下来，我们给出若干重要的计算示例。参考文献 [2, 8, 11, 12] 中已经包含了一些非平凡的例子。这里我们进一步补充这些例子：首先推导全局不变问题的公式，也就是用全局有理微分不变量表示欧拉–拉格朗日方程。在其他一些此前文献未讨论过的例子中，我们还给出了通过局部微分不变量表示的公式，因为这些公式也可能值得关注。

因此，我们涵盖二维射影几何和莫比乌斯几何、三维度量几何和共形几何，以及四维欧几里得几何（还有闵可夫斯基几何）。我们给出欧拉–拉格朗日算子的显式通用公式，同时也展示一些特定拉格朗日量的结果，这些拉格朗日量依赖于低阶曲线的喷射。

最后，我们以展望作结，讨论在计算示例时遇到的符号计算挑战。

2. Invariant Variational Problems

2.1. 曲线的喷射。我们将研究无参数曲线的喷射。给定一个 n维流形 M^n和一条曲线 $\gamma\colon\ \mathbb{R} \to M^n$，我们可以选择坐标$(x, u^1, \dots, u^{n-1})$作为 M上的坐标，使得 $\gamma = u(x)$是函数 $x \mapsto (u^i(x))$的图像。由此，我们得到 M^n中无参数曲线的零阶喷射丛$J^0(M, 1) = M$的局部坐标。k阶喷射丛 $J^k(M, 1)$的坐标为(x, u^i_j)，其中 $0 \le j \le k$；这里 u^i_j 表示 u^i的第 j阶导数，也就是说，给定一条曲线 $\sigma\colon\ x \mapsto u(x)$，有 $u^i_j|_\sigma = \dfrac{d^j u^i}{dx^j}(x)$。一条曲线 $\sigma\colon\ x \mapsto u(x)$定义其第 k阶喷射延拓 $j^k\sigma$，$x \mapsto (x, u^i_j(x))_{0\le j\le k}$，它由包含所有不超过 k阶的导数得到。

我们有喷射丛之间的自然投影 $\pi^{k+1}_k\colon\ J^{k+1} \to J^k$，借此可将无穷喷射丛 J^∞定义为它们的逆极限。因此，J^∞上的微分形式是某个有限阶喷射空间 J^k上的微分形式经由投影 $\pi^\infty_k\colon\ J^\infty \to J^k$拉回而来。我们用 $\Omega^p := \Omega^p(J^\infty(M,\ 1))$ 表示 $J^\infty(M,\ 1)$ 上的微分 p- 形式空间。

J^∞ 上的接触 1-形式由以下基张成

$$\theta^i_j := du^i_j - u^i_{j+1}dx \qquad (1 \le i < n,\ j \ge 0). \tag{4}$$

接触形式 θ 由其在曲线的喷射延拓上消失这一性质唯一确定；也就是说，我们有 $\theta|_{j^k\sigma} = 0$。我们将 j 称为 1-形式 θ^i_j 的阶（尽管它支撑在 J^{j+1}上$_{k\ \ n-1}$）。接着，我们将一般接触 1-形式 $\sum\sum a^j_i\theta^i_j$（满足 $a^j_i \in C^\infty(J^\infty)$）的阶定义为：若存在某个 i使得$_{j=0\ i=1} a^k_i \ne 0$，则其阶为 k。用 $\mathcal{C} \subseteq T^*J^\infty$表示所有接触形式张成的空间。$\mathcal{C}$在 TJ^∞中的对偶空间由全导数向量场张成

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i,j\ge 0} u^i_{j+1}\frac{\partial}{\partial u^i_j}. \tag{5}$$

2.2. 不变微分形式。 考虑一个李群 G 作用于 $M = J^0$，并令 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 为相应的、定义在 J^0上的向量场李代数。 G在 M 上的作用诱导出 G 在 M的曲线空间上的作用，进而诱导出其在 J^k这一曲线的 k-喷射空间上的作用。定义微分同胚 $\varphi \in G$ 的这个典范延拓 $\varphi^{(k)}$的一种方式是要求对于 $j < k$，有 $(\varphi^{(k)})^*(\theta_j^i) \in \mathcal{C}$ 。类似地，我们通过条件 $L_{X^{(k)}}\theta_j^i \in \mathcal{C}$ （对 $j < k$成立）来定义 J^0 上的向量场 X 的延拓。

更一般的设置是：在 M 上作用的李伪群 G 局部变换，以及不必完备的（层的）向量场的李代数 $\mathfrak{g}$ 。该理论在此情形下同样适用 [15]。

由于 G 作用于 J^∞，我们引入几类 G不变对象。若一个 p-形式 $\omega \in \Omega^p$ 满足 $(\varphi^{(\infty)})^*(\omega) = \omega$，则称其为 G 不变的；若满足 $L_{X^{(\infty)}}\omega = 0$，则称其为 $\mathfrak{g}$不变的。（实际上，在这些计算中使用有限指标 k 就足够了，因为 ω 是 J^k 上某个 p-形式经 π_k^∞-拉回所得，其中 k。）如果 ω 是 G不变的，那么它也是$\mathfrak{g}$不变的。作为部分逆命题，如果 ω 是 $\mathfrak{g}$不变的且在全局上有定义，那么它也是 G_0不变的，其中$G_0 \subset G$ 是连通分支。

Defi定义 1。 不变函数（0-形式）称为绝对微分不变量 .

众所周知，绝对微分不变量代数是有限生成的，并且能够区分一般轨道。这一思想可追溯至索福斯·李，但我们将采用 [15] 给出的全局版本。对于我们关注的无约束曲线，它可以表述如下。

定理1 (全局李–特雷斯定理 [15])。 设 G 是一个作用于 M 上的代数李伪群微分同胚群。对处于一般位置的轨道，有理绝对微分不变量域能够区分这些轨道。此外，这个域是有限生成的，即存在有限个有理微分不变量 $I^1, \dots, I^r$，以及一个有理不变微分算子 $\mathcal{D}$，使得任意其他有理绝对微分不变量都可表示为 I^i 及其导数 $\mathcal{D}^j(I^i)$ 的有理组合。

不变导子 $\mathcal{D}$ 具有形式 $\mathcal{D} = \gamma D_x$，其中 γ 是定义在某个 J^k 上的有理函数， k。如果 α 是满足 $\alpha(D_x) \neq 0$ 的有理不变1-形式，那么取 $\gamma = \alpha(D_x)^{-1}$ 即可得到一个不变导子。如果 I 是有理绝对微分不变量，那么1-形式 $\alpha = dI$ 导出一个特定的不变导子，称为特雷斯导数。我们用 $\mathfrak{A}$ 表示有理微分不变量域。

代数性是一种相当技术性的性质，通常适用于应用中出现的传递作用。特别是，本文所处理的所有示例都满足这一性质。

注1。 形容词代数的 指的是稳定子 $G_a = \{g \in G \mid g(a) = a\}$ 对 $a \in M$的作用。由于传递性假设，这一性质与点 a无关。以这种方式假设传递性和代数性，会得到一个代数群 G_a^k ，它在纤维 $(\pi_0^k)^{-1}(a)$ 上以代数方式作用于π_0^k： $J^k \to M$；这些纤维是代数簇。于是，罗森利希特定理表明，（有限生成的）有理不变量域在一般位置上分离 $(\pi_0^k)^{-1}(a)$ 中的 G_a^k-轨道。 M 上的传递性使我们能够将 $(\pi_0^k)^{-1}(a)$ 上的这些有理 G_a^k-不变函数与 J^k上的绝对微分不变量对应起来，因此我们也将后者称为有理的，尽管其对 a 的依赖可能不是代数的。事实上，我们并未对流形 M作任何代数性假设。更多细节请参见 [15]。

现在假设 G 是有限维的，并令 I^1，……， I^r， $\mathcal{D}$为绝对微分不变量域的生成元，其阶为 $k_i = \mathrm{ord}(I_i)$。局部而言，可以取 $r = n - 1$；但在整体范围内，为了涵盖可能的代数扩张，或许还需要一个不变量（根据本原元定理，一个就足够了）。因此 $n - 1 \le r \le n$，我们可以假设 I^1，……， I^{n-1}， $\mathcal{D}$生成了全体有理微分不变量域中的有限指数子域。

设 ϖ 为满足 $\varpi(\mathcal{D}) = 1$的不变一形式。它总是存在的：例如，选取一个不变量I_0 ，使得 $\mathcal{D}(I_0) \neq 0$，然后取

$$\varpi = \frac{dI_0}{\mathcal{D}(I_0)}. \tag{6}$$

（特别地，若 $\mathcal{D}$ 由特雷斯导数 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{I^0}$ 给出，则 $\varpi = dI^0$。）不失一般性，我们假设 $k_0 = \mathrm{ord}(\varpi) \le \min_{1 \le i < n}[k_i]$。定义这些 1-形式

$$\tilde{\vartheta}^i = dI^i - \mathcal{D}(I^i)\varpi, \qquad 1 \le i < n. \tag{7}$$

引理 1。 这些 *1*-形式 $\tilde{\vartheta}^1,\dots,\tilde{\vartheta}^{n-1}$ 是 G-不变的，并满足 $\tilde{\vartheta}^i(\mathcal{D})=0$。此外，可以选择形式 ϖ，使得矩阵 $A^i_j=\tilde{\vartheta}^i\Big(\partial_{u^j_{k_i}}\Big)$ 在 $J^\infty(M,1)$的一般点处非退化。

矩阵 A 表示不变量系统的符号，因此其非退化性是不变条件。

证明。 第一个断言显而易见。对于第二个，令 $k=\max\limits_{1\leq i<n}[k_i]$，并将给定的不变量延拓到 k阶：$\hat{}\,I^i=\mathcal{D}^{k-k_i}I^i$。注意，若 $\mathcal{D}=\gamma D_x$，则 $d\hat{}\,I^i\Big(\partial_{u^j_k}\Big)=\gamma^{k-k_i}dI\Big(\partial_{u^j_{k_i}}\Big)$。我们注意到以下

$$\big(d\hat{I}^1\wedge\dots\wedge d\hat{I}^{n-1}\wedge\varpi\big)\big(\partial_{u^1_k},\dots,\partial_{u^{n-1}_k},\mathcal{D}\big)\neq 0.$$

事实上，由于 $k>k_0$，这个不等式可由引理之前讨论过的、生成微分不变量的有限指标子域这一条件推出。它有一种等价形式

$$\big(d\hat{I}^1\wedge\dots\wedge d\hat{I}^{n-1}\big)\big(\partial_{u^1_k},\dots,\partial_{u^{n-1}_k}\big)\neq 0. \tag{8}$$

若对所有 i都有 $k_0<k_i$，则由 $A^i_j=dI^i\Big(\partial_{u^j_{k_i}}\Big)=\gamma^{k_i-k}d\hat{}\,I^i\Big(\partial_{u^j_k}\Big)$ 可得该断言，因为我们可以得出，$\det(A)$与式（8）中的取值相差因子 γ^N, $N=\sum k_i-(n-1)k$。

现在设某些不变量 I^1、……、$I^{\nu-1}$ 具有最小阶 k_0，其余不变量 I^ν、……、I^{n-1} 的阶为 $>k_0$。我们有不变分解 $\langle\partial_{u^1_k}$、……、$\partial_{u^{n-1}_k}\rangle=\hat{}\,\Pi_0\oplus\hat{}\,\Pi_1=\langle d\hat{}\,I^1$、……、$d\hat{}\,I^{\nu-1}\rangle^\perp\oplus\langle d\hat{}\,I^\nu$、……、$d\hat{}\,I^{n-1}\rangle^\perp$，其中 $\perp$表示湮灭子。通过将 ϖ修改为 dI^1、……、$dI^{\nu-1}$，我们可以得到 $\varpi|_{\Pi_1}=0$，其中 $\Pi_1=\mathsf{ad}^{k-k_0}_{\mathcal{D}}\hat{}\,\Pi_1$（即，$\sum a^j\partial_{u^j_{k_0}}\in\Pi_1\Leftrightarrow\sum a^j\partial_{u^j_k}\in\hat{}\,\Pi_1$）。于是由（8）得到：

$$\big(\mathcal{D}^{k-k_1}\tilde{\vartheta}^1\wedge\dots\wedge\mathcal{D}^{k-k_{n-1}}\tilde{\vartheta}^{n-1}\big)\big(\partial_{u^1_k},\dots,\partial_{u^{n-1}_k}\big)=\Big(d\hat{I}^1\wedge\dots\wedge d\hat{I}^{\nu-1}\Big)\Big|_{\Lambda^{\nu-1}\Pi_1}\wedge\Big(d\hat{I}^\nu\wedge\dots\wedge d\hat{I}^{n-1}\Big)\Big|_{\Lambda^{n-\nu}\Pi_0}\neq 0$$

于是有 $\det(A)\neq 0$。 □

将 $\mathcal{D}$ 应用于 $\tilde{\vartheta}^i$，可得到高阶不变接触 1-形式。为了得到 J^∞的完备不变余标架，我们按如下方式进行。使用坐标 x，u^i_j于 $J^\infty(M,1)$上，通过 $\theta^i_j=du^i_j-u^i_{j+1}dx$定义（非不变的）接触形式。然后，根据以下要求，我们得到一组新的零阶接触形式 $\vartheta^i_0=\sum a^i_j\theta^j_0\in C^\infty(J^\infty(M,1))\otimes_{C^\infty(M)}\Omega^1(J^0(M,1))$

$$\Big(\mathcal{D}^{k_i}(\vartheta^i_0)\Big)\big(\partial_{u^j_{k_i}}\big)=\tilde{\vartheta}^i\big(\partial_{u^j_{k_i}}\big),\qquad 1\leq i,j<n. \tag{9}$$

条件（9）唯一确定系数 $a^i_j=\gamma^{-k_i}\tilde{\vartheta}^i\big(\partial_{u^j_{k_i}}\big)$，由此

$$\vartheta^i_0=\gamma^{-k_i}\sum_{j=1}^{n-1}\tilde{\vartheta}^i\Big(\partial_{u^j_{k_i}}\Big)\theta^j_0,\qquad 1\leq i<n. \tag{10}$$

尽管我们是在坐标中定义它们的，但这些 1-形式 ϑ^i_0 实际上与坐标无关。事实上，微分同胚在 θ^l_0 上的作用被其在$\partial_{u^l_k}$上的作用所抵消。

引理 2。 阶为0 的 *1*-形式 ϑ^1_0、……、ϑ^{n-1}_0线性无关、具有 G-不变性，并满足 $\vartheta^i_0(\mathcal{D})=0$。

证明。 该陈述中非平凡的部分是 G-不变性，但这由条件（9）的不变性可得；条件（9）可改写为 $\Big(\mathcal{D}^k(\vartheta^i_0)\Big)\big(\partial_{u^j_k}\big)=\mathcal{D}^{k-k_i}\tilde{\vartheta}^i\big(\partial_{u^j_k}\big)$，其中我们利用了子空间 $\langle\partial_{u^1_k}$、……、$\partial_{u^{n-1}_k}\rangle\subset TJ^k$的 G-不变性。□

现在定义 $\vartheta^i_j=\mathcal{D}^j(\vartheta^i_0)$，并注意到对于每个 i 和 j，都有 $\vartheta^i_j(\mathcal{D})=0$。这些 1-形式在 J^k 的一般点处（在 $\mathfrak{A}$ 上）线性无关，并且显然，在这些点处，它们张成 $T^*J^\infty(M,1)$ 中与形式 θ^i_j 相同的子空间。由此我们证明了以下定理。

定理 2. 设有限维代数李伪群 G 在流形 M 上传递作用。则存在一个全局（有理：几乎处处有定义的）不变标架 $T^*J^\infty(M,1)$，由一个满足 $\varpi(\mathcal{D})=1$ 的 *1*-形式 ϖ 和无穷多个接触形式 ϑ^i_j 组成，它们之间满足关系 $\mathcal{D}(\vartheta^j_i)=\vartheta^j_{i+1}$。

注 2. 定理成立的一个重要情形是， G 是作用于 M 上的李群。定理的假设与全局李–特雷斯定理的假设基本相同。有限维性是一种确保 1-形式 (7) 线性无关的简便方式。该作用也可以由具有代数作用的全局有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 给出，而相应的局部李群 G 仅在局部定义。如果 G 或 $\mathfrak{g}$ 是无限维的，通常就没有足够的绝对微分不变量来以这种方式生成 $T^*J^\infty(M,\ 1)$ 的不变标架（但不变余标架仍可能存在）。

我们还需要相对不变量这一概念。喷射函数 $R \in C^\infty(J^\infty)$ 是一个相对不变量，如果存在一个线性映射 $w:\ \mathfrak{g} \to C^\infty(J^\infty)$，使得对所有 $X \in \mathfrak{g}$，都有 $L_{X^{(\infty)}}R = w(X)R$ 。我们称 w 为该相对不变量的权。一般而言，若将权恰当地视为上同调类 [18]，则只有有限多个独立的权。相对不变量很有用，因为它们的零点集是不变的。因此，我们可以利用相对不变量来理解奇异轨道的结构。

2.2.1. 欧几里得平面中的曲线。 作为一个简单的例子（我们之后会多次回到这个例子），考虑欧几里得变换群在 $\mathbb{R}^2$上的作用。有理微分不变量域由以下元素生成

$$I_0 = \kappa^2 = \frac{y_2^2}{(y_1^2+1)^3}, \qquad \mathcal{D} = \frac{y_1^2+1}{y_2}D_x.$$

我们定义 $I_1 = \mathcal{D}(I_0)$ 和 $\tilde{\vartheta}_3 = dI_1 - \underline{\mathcal{D}(I_1)}\,\mathcal{D}(I_0)dI_0$，并用它们构造零阶不变接触形式：

$$\vartheta_0 = \frac{\tilde{\vartheta}_3(\partial_{y_3})}{\left(\frac{y_1^2+1}{y_2}\right)^3}(dy - y_1dx) = 2\frac{y_2^3}{(y_1^2+1)^5}(dy - y_1dx).$$

不变1-形式由以下形式张成

$$\varpi = \frac{1}{\mathcal{D}(I_0)}dI_0 \quad \text{ and } \quad \vartheta_i = \mathcal{D}^i(\vartheta_0),\ i \geq 0.$$

2.3. $\mathcal{C}$**-谱序列**。 在局部坐标中，曲线的变分问题通过如下泛函定义

$$S[\sigma] = \int L(x, u^i|_\sigma, u^i_1|_\sigma, \dots)dx.$$

Ldx的定义存在一些歧义：

(i) 如果 θ是接触形式，那么 $\theta|_{j^k\sigma} = 0$，因此拉格朗日量 $L(x, u^i, u^i_1, \dots)dx + \theta$描述的是同一个变分问题。(ii) 如果 α是恰当1-形式，那么拉格朗日量 $L(x, u^i, u^i_1, \dots)dx + \alpha$描述的是同一个变分问题。

由于(i)，拉格朗日量可以视为 $\bar{\Omega}^1 = \Omega^1/\mathcal{C}$中的一个元素。空间 $\bar{\Omega}^1$ 是水平 de Rham 复形的一部分；对于曲线，该复形非常简短：

$$0 \to C^\infty(J^\infty) \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Omega}^1 \to 0$$

$\bar{\ }$ $\bar{\ }$水平微分 d 定义为 $df = df + \mathcal{C}$。为了定义其核给出欧拉–拉格朗日方程的欧拉算子，我们将水平 de Rham 复形视为一个称为 $\mathcal{C}$-谱序列 [25], 的谱序列中的一小部分，下面将对此加以描述。该描述基于 [24,第4章3], ，但交换了指标 p, q ，以便与下文变分双复形中的指标一致。

接触 1-形式的空间 $\mathcal{C}$ 在 $\Omega^\bullet$ 上诱导出一个滤过。若定义

$$\mathcal{C}^q\Omega^{p+q} := \underbrace{\mathcal{C} \wedge \cdots \wedge \mathcal{C}}_{q \text{ times}} \wedge \Omega^p \subset \Omega^{p+q},$$

我们看到 $\mathcal{C}^q\Omega^{p+q} \subset \mathcal{C}^{q-1}\Omega^{p+q}$，并且 $d(\mathcal{C}^q\Omega^{p+q}) \subset \mathcal{C}^q\Omega^{p+q+1}$。与此滤过相关的谱序列的前两个非零页定义为

$$E_0^{p,q} = \mathcal{C}^q\Omega^{p+q}/\mathcal{C}^{q+1}\Omega^{p+q} \simeq \Lambda^q\mathcal{C} \otimes \Lambda^p\bar{\Omega}^1, \qquad E_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathcal{C}^q\Omega^\bullet/\mathcal{C}^{q+1}\Omega^\bullet, \bar{d}).$$

外微分诱导出一个映射

$$d_r^{p,q}\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p-r+1,q+r}.$$

对于我们关注的曲线情形，$E^{p,q}_0 = 0$ 对 $p > 1$ 成立。水平 de Rham 复形现在可以写作

$$0 \to E_0^{0,0} \xrightarrow{d_0^{0,0}} E_0^{1,0} \to 0.$$

由于 (i) 和 (ii)，拉格朗日量 $\lambda = L\,dx$ 自然对应于一个元素 $[\lambda] \in E_1^{1,0} = H^1(\Omega^\bullet/\mathcal{C}^1\Omega^\bullet)$。现在可以将欧拉算子以全局且与坐标无关的方式定义为映射

$$d_1^{1,0} \colon E_1^{1,0} \to E_1^{1,1}.$$

注 3. 注意，对于曲线，只有前三个微分是非平凡的，

$$d_0^{p,q} \colon E_0^{p,q} \to E_0^{p+1,q}, \qquad d_1^{p,q} \colon E_1^{p,q} \to E_1^{p,q+1}, \qquad d_2^{p,q} \colon E_2^{p,q} \to E_2^{p-1,q+2},$$

随后谱序列稳定于 $E^{p,q}_\infty = E^{p,q}_3$。

2.4. 变分双复形。 为了说明 $d^{0,1}_1[\lambda] = 0$ 等价于该变分问题的标准欧拉–拉格朗日方程，可按上述方法选取 $J^\infty(M, 1)$ 的坐标图。这实质上使我们可以使用 $J^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-1})$，而不是 $J^\infty(M, 1)$。投影 $\pi^\infty \colon J^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-1}) \to \mathbb{R}$ 的核为子丛 $\mathcal{C} \subset T^*J^\infty$ 提供了一个补空间，

$$T^*J^\infty = H \oplus \mathcal{C}, \tag{11}$$

不过，从 $J^\infty(M, 1)$ 的角度来看，这个补空间并非典范。我们将 H 中的 1-形式称为水平 1-形式。按照第 2.1 节的记号，H 由 dx 张成。该直和分解为每个 p 诱导出一个分解

$$\Omega^p = \bigoplus_{r+s=p} \Omega^{r,s},$$

其中 $\Omega^{r,s}$ 由双次数为 (r, s) 的微分形式组成，即由 r 个水平形式与 s 个接触形式（或垂直形式）的乘积的线性组合构成。（注意，对于 $r > 1$，$\Omega^{r,s} = 0$，因为我们只考虑曲线。）我们将投影 $\Omega^\bullet \to \Omega^{r,s}$ 记为 $\pi_{r,s}$。

作用于 $\Omega^{r,s}$ 时，外微分 $d\colon \Omega^p \to \Omega^{p+1}$ 分解为水平部分和垂直部分 $d = d_H + d_V$，其中

$$d_H \colon \Omega^{r,s} \to \Omega^{r+1,s}, \qquad d_V \colon \Omega^{r,s} \to \Omega^{r,s+1}. \tag{12}$$

映射 d_H 和 d_V 满足

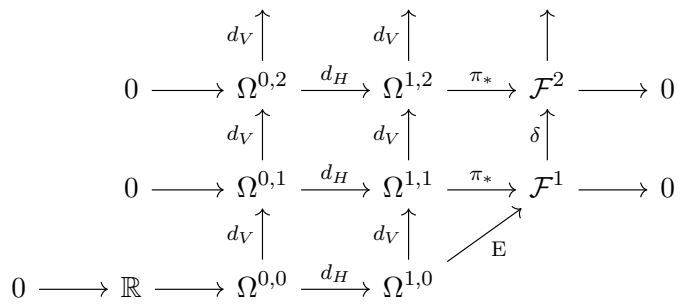
$$d_H^2 = 0, \qquad d_V^2 = 0, \qquad d_H d_V + d_V d_H = 0, \tag{13}$$

从而使 $(\Omega^\bullet, \bullet, d_H, d_V)$ 构成一个双复形，称为变分双复形 [2]。对于喷射函数，这些微分分别定义为

$$d_H : \Omega^{0,0}(J^\infty) \to \Omega^{1,0}(J^\infty), \quad f \mapsto D_x(f)\,dx, \quad d_V : \Omega^{0,0}(J^\infty) \to \Omega^{0,1}(J^\infty), \quad f \mapsto \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial u^i_j}\theta^i_j \tag{14}$$

注 4。 在纤维丛截面的任意射流空间上，变分双复形都是唯一确定的，因为分解 (11) 是典范的。相比之下，变分双复形并不是曲线（或更一般的子流形）喷射上的自然结构。在这种情况下，$\mathcal{C}$ 没有典范补空间，因此 Ω^p 上也没有典范的双分次。另一方面，谱序列 $E^{p,q}_r$ 只需要 Ω^p 上有一个滤过，因此是良定义的。我们仍将变分双复形及其下一节所述的不变对应结构作为计算工具，这也是通常的做法。

为了解变分问题与变分双复形之间的关系，变分双复形作如下扩展：



这里 $\mathcal{F}^i$定义为次数为 $(1,\ i)$ 的微分形式之商 $\mathcal{F}^i = \Omega^{1,\ i}/d_H\Omega^{0,\ i}$，模去散度项。在此背景下，欧拉算子定义为

$$\mathrm{E}(\lambda) = \pi_*(d_V\lambda).$$

$\mathcal{F}^1$ 中的任意元素都有一个形如 $\sum A_i\theta_0^i \wedge dx$的唯一代表元。为得到该代表元，通过反复进行分部积分，即使用公式，去除了带有 $j \geq 1$ 的接触形式 θ_j^i

$$F d_V(D_x(u^i_{j-1})) \wedge dx + D_x(F) d_V(u_i) \wedge dx = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ d_H\Omega^{0,1})$$

以重写

$$d_V(L dx) = \frac{\partial L}{\partial u^i_j} d_V(u^i_j) \wedge dx = (-D_x)^j \left(\frac{\partial L}{\partial u^i_j} \right) \theta^i_0 \wedge dx \qquad (\mathrm{mod}\ d_H\Omega^{0,1}).$$

因此，系数 A_i 类似于经典的欧拉–拉格朗日算子（对重复指标求和）

$$\mathrm{E}_i(L) = (-D_x)^j (L_{u^i_j}). \tag{15}$$

（映射 δ 与亥姆霍兹条件有关，详见 [2] 。）

2.5. 不变变分复形。将欧拉算子定义为 $d^{0,\ 1\ 1}$ 与坐标无关，因此对于任意点变换群都是不变的。同样，$\pi_* \circ d_V$对于任意纤维保持变换也都是不变的。然而，由表达式定义的算子 $\mathrm{E}_i(L)$

$$d_V(L dx) = \mathrm{E}_i(L)\theta^i_0 \wedge dx \qquad (\mathrm{mod}\ d_H\Omega^{0,1})$$

一般而言并不具有不变性。为此，Kogan 和 Olver 在 [11, 12] 引入了变分双复形的不变版本，并利用分部积分的不变版本，得到 $\pi_*(d_V\lambda)$ 的不变代表元。不变变分复形的构造方式与上述变分双复形类似，但使用不变余标架代替 $dx,\ \theta^i_j$。Kogan 和 Olver 依靠移动标架法 [6] 来构造不变余标架，但不变双复形的概念并不需要移动标架这一概念。在本节中，我们将从一般的不变余标架构造不变变分双复形，例如定理 2 中的不变余标架。

我们将作出与全局李–特雷斯定理[15] 在第 2.2 节中回顾的相同的代数性和传递性假设，并假设有理微分不变量域由$I^1, \dots, I^r, \mathcal{D}$生成。此外，我们假设存在一个不变基 $\{\varpi, \vartheta^i_j \mid i = 1, \dots, n-1, j \geq 0\}$，其由 1-形式组成，并且在 T^*J^∞ 一般点处张成空间，同时它们具有以下形式：

- $\vartheta^i_j = \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{j} F^i_l \theta^l_s$ 是阶为 j 的不变接触形式，其中 F^i_l 是定义在 J^∞ 上的有理函数。
- 不变水平 1-形式 ϖ 满足 $\varpi(\mathcal{D}) = 1$。

为了证明定理 2，我们根据绝对微分不变量构造的这类余标架适用于此目的；不过，任何其他选择对于下文也同样适用。

令 $\Omega^{r\ s}_G$，表示形式如下的 G-不变（$r+s$）形式

$$\sum A^{j_1 \cdots j_s}_{i_1 \cdots i_s} \varpi^r \wedge \vartheta^{i_1}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \vartheta^{i_s}_{j_s},$$

其中 $A^{j_1\cdots j_s}_{i_1\cdots i_s}$ 是 $J^\infty(M,\,1)$ 上的不变函数，$\varpi^0=1$、$\varpi^1=\varpi$ 和 $r\in\{0,1\}$。我们有

$$\Omega^p_G=\bigoplus_{r+s=p}\Omega^{r,s}_G,$$

作为有理绝对微分不变量域上的向量空间。我们有 $\Omega^p_G\subset\Omega^p$，但分解为 $\Omega^{r,s}_G$ 和 $\Omega^{r,s}$ 并不一定彼此从属。一般而言，我们有 $\varpi\in\Omega^{1,0}\oplus\Omega^{0,1}$，由此可得

$$\Omega^{r,s}_G\subset\Omega^{r,s}\oplus\Omega^{r-1,s+1}.$$

不变量微分形式的外微分是不变量的，并且由于上述包含关系，我们有

$$d(\Omega^{r,s}_G)\subset\Omega^{r+1,s}\oplus\Omega^{r,s+1}\oplus\Omega^{r-1,s+2},$$

因此

$$d(\Omega^{r,s}_G)\subset\Omega^{r+1,s}_G\oplus\Omega^{r,s+1}_G\oplus\Omega^{r-1,s+2}_G. \tag{16}$$

事实上，对于一般的 ϖ，我们有 $d\varpi\in\Omega^{1,1}_G\oplus\Omega^{0,2}_G$。

注 5。 正如 Kogan 和 Olver [11] 所指出的，$\Omega^{\bullet,\bullet}_G$ 一般而言并不是双复形。不过请注意，通过选择适当的 ϖ，我们总能得到一个双复形，例如按照式（6）定义 ϖ。此外，在第 2.4 节中，由于对水平形式 dx 作出了特定选择，我们也得到了一个双复形，或者更一般地，$f(x)dx$。$f(x)dx$ 与 1-形式（6）的共同点在于，它们的外微分分别包含于 $\Omega^{1,1}$ 和 $\Omega^{1,1}_G$ 中。

我们用 $\pi^{r,s}_G:\Omega^\bullet_G\to\Omega^{r,s}_G$ 表示相对于不变余标架 ϖ,ϑ^i_j 投影到次数为 (r,s) 的形式上的投影。根据 (16)，外微分可分解为 $d=d_{\mathcal H}+d_{\mathcal V}+d_{\mathcal W}$，其中

$$d_{\mathcal H}=\pi^{r+1,s}_G\circ d:\Omega^{r,s}_G\to\Omega^{r+1,s}_G,\ d_{\mathcal V}=\pi^{r,s+1}_G\circ d:\Omega^{r,s}_G\to\Omega^{r,s+1}_G,\ d_{\mathcal W}=\pi^{r-1,s+2}_G\circ d:\Omega^{r,s}_G\to\Omega^{r-1,s+2}_G. \tag{17}$$

我们称 $d_{\mathcal H}$ 和 $d_{\mathcal V}$ 分别为不变水平微分和不变垂直微分。特别地，我们有

$$d_{\mathcal H}(\Omega^{r,s}_G)\subseteq\Omega^{r+1,s}_G\subseteq\Omega^{r+1,s}\oplus\Omega^{r,s+1}, \tag{18}$$

这表明 $d_{\mathcal H}$ 与通常的水平微分 d_H 一致，差别至多是双次数为 $(r,s+1)$ 的形式。我们将利用这一性质，将欧拉–拉格朗日方程的不变形式与标准形式联系起来。稍后，我们会通过示例说明如何在实践中显式计算不变微分。

注 6。 映射 $d_{\mathcal H},d_{\mathcal V},d_{\mathcal W}$ 并非规范映射，而是取决于 ϖ 的选择。注 3 中的映射 $d^{p,q}_0,d^{p,q}_1,d^{p,q}_2$，是在 $\mathcal C$-谱序列的背景下，$d_{\mathcal H},d_{\mathcal V},d_{\mathcal W}$ 的规范对应物。

对于不变拉格朗日量[1] $\lambda=L\,\varpi\in\Omega^{1,0}_G$，现在我们可以紧随 [11, 12] 中的论证，在不借助不变化算子的情况下，得到不变欧拉–拉格朗日方程。不变性 λ 等价于 L 是绝对微分不变量的函数，即 $L=L(I^i,\ I^i_1,\ I^i_2,\ \ldots\ldots)$，其中 $I^i_j=\mathcal D^j(I^i)$。计算 G-不变拉格朗日量 $L\,\varpi$ 的微分，得到

$$d_{\mathcal V}(L\,\varpi)=d(L\,\varpi)=\sum_{i,j}\frac{\partial L}{\partial I^i_j}\,d_{\mathcal V}I^i_j\wedge\varpi+L\,d_{\mathcal V}\varpi, \tag{19}$$

对于最终等式，我们利用了 $dL=\dfrac{\partial L}{\partial I^i_j}\cdot(d_{\mathcal H}I^i_j+\underline{d_{\mathcal V}I^i_j})$，以及 $d_{\mathcal H}I^i_j$ 与不变一形式 ϖ 成比例这一事实。

给定不变量 $F,\ G\in\Omega^{0,0}_G$，可得不变分部积分公式 [11, 12]

$$F\,d_{\mathcal V}(\mathcal DG)\wedge\varpi=-(\mathcal DF)\,d_{\mathcal V}G\wedge\varpi-F(\mathcal DG)d_{\mathcal V}\varpi\pmod{d_{\mathcal H}\Omega^{0,1}_G}. \tag{20}$$

我们使用此公式来获得形如以下形式的 $d_{\mathcal V}(L\,\varpi)$ 的不变代表元

$$d_{\mathcal V}(L\,\varpi)=\sum_i\mathcal E_i(L)d_{\mathcal V}I^i\wedge\varpi-\mathcal H(L)d_{\mathcal V}\varpi\pmod{d_{\mathcal H}\Omega^{0,1}_G}, \tag{21}$$

[1] 从现在起，我们将用 L 表示不变拉格朗日密度（在 [11] 中，他们用 $\tilde L$ 表示这一概念）。

其中

$$\mathcal{E}_i(L) := \sum_{j=0}^{\infty} (-\mathcal{D})^j \frac{\partial L}{\partial I^i_j}, \qquad \mathcal{H}(L) := \sum_{j>k} I^i_{j-k} (-\mathcal{D})^k \frac{\partial L}{\partial I^i_j} - L \tag{22}$$

是不变欧拉 -拉格朗日（一个向量不变量）和不变哈密顿量（一个标量不变量）分别 ly.

不变形式 $d_{\mathcal{V}} I^i$ 和 $d_{\mathcal{V}} \varpi$ 可以用基 $\varpi, \mathcal{D}^j(\vartheta^i_0)$ $(j \geq 0)$ 表示，这意味着我们可以将它们表示为作用于接触形式 ϑ^i_0上的微分算子:

$$d_{\mathcal{V}} I^i = \mathcal{A}^i_j(\vartheta^j_0), \qquad d_{\mathcal{V}} \varpi = \mathcal{B}_j(\vartheta^j_0) \wedge \varpi. \tag{23}$$

这里， $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^i_j)$ 是一个不变矩阵微分算子，而 $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_j)$ 是一个不变向量微分算子。将这些表达式代入 (22) 得

$$d_{\mathcal{V}}(L\,\varpi) = \Big(\mathcal{E}_i(L)\,\mathcal{A}^i_j(\vartheta^j_0) - \mathcal{H}(L)\,\mathcal{B}_j(\vartheta^j_0)\Big) \wedge \varpi \pmod{d_{\mathcal{H}}\Omega^{0,1}_G}. \tag{24}$$

为了将此表达式化为所需形式，我们继续使用分部积分，但方式略有不同。对于一般的不变垂直1-形式 ϑ ，有

$$d_{\mathcal{H}}\vartheta = \varpi \wedge \mathcal{D}(\vartheta),$$

其中， $\mathcal{D}(\vartheta)$ 是 ϑ 沿 $\mathcal{D}$ 的李导数，即 $\mathcal{D}(\vartheta) := d(\vartheta(D)) + (d\vartheta)(\mathcal{D}, \cdot) = (d\vartheta)(\mathcal{D}, \cdot)$。由此可得

$$d_{\mathcal{H}}(F\vartheta) = -\mathcal{D}(F\vartheta) \wedge \varpi = -(\mathcal{D}(F)\vartheta + F\mathcal{D}(\vartheta)) \wedge \varpi.$$

通过这个公式，可以定义 $\mathcal{D}\colon\ \Omega^{0\,1}_G \to ,\ \Omega^{0\,1}_G\ ,$ 的形式伴随为 $\mathcal{D}^* = -\mathcal{D}\colon\ \Omega^{0\,0}_G \to ,\ \Omega^{0\,0}_G\ ,\ 。$通过$k$迭代该公式，可以定义微分算子 $P = \sum p_i \mathcal{D}^i :\ \Omega^{0\,1}_G \to ,\ \Omega^{0\,1}_G\ ,$ 的形式伴随：$_{i=0}$

$$P^* : \Omega^{0,0}_G \to \Omega^{0,0}_G, \qquad P^*(F) = \sum_{i=1}^{k} (-\mathcal{D})^i (p_i F).$$

这样，我们就能将导数从 ϑ^j_0 移开，转移到 $\mathcal{E}_i$ 和 $\mathcal{H}$上。结果是

$$d(L\,\varpi) = [\mathcal{A}^*\mathcal{E}(L) - \mathcal{B}^*\mathcal{H}(L)]_i\, \vartheta^i_0 \wedge \varpi := \Big((\mathcal{A}^j_i)^*\mathcal{E}_j(L) - \mathcal{B}^*_i\mathcal{H}(L)\Big)\, \vartheta^i_0 \wedge \varpi \pmod{d_{\mathcal{H}}\Omega^{0,1}_G}. \tag{25}$$

$_{\mathrm{N}}$请注意，由于伴随矩阵由转置后的伴随项构成，$(\mathcal{A}^j_i)^* = (\mathcal{A}^*)^i_j$。[2]

因此，我们得到了欧拉算子像的一个规范不变代表元，并可将拉格朗日量 $\lambda = L\,\varpi$ 的不变欧拉–拉格朗日方程，或在 ϖ 固定不变的情况下，将拉格朗日函数 L 的不变欧拉–拉格朗日方程定义为 $\mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(L) = 0$，其中

$$\mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(L) := [\mathcal{A}^*\mathcal{E}(L) - \mathcal{B}^*\mathcal{H}(L)]\,.$$

为了理解这与经典欧拉–拉格朗日算子 (15) 的关系，我们写作 $L\,\varpi = LR\,(dx + \theta)$，其中 θ 是某个垂直 1-形式，并回顾经典欧拉算子（相对于基 $\theta^i_0 \wedge dx$）的表达式为

$$\mathrm{E}_i(LR) = (-D_x)^j \left(\frac{\partial}{\partial u^i_j}(LR)\right).$$

由于事实 (18)，我们可以比较水平部分，得到

$$\vartheta^j_0 \wedge \varpi = W^j_k \theta^k_0 \wedge dx \pmod{\Omega^{0,2}}. \tag{26}$$

其中 W 是一个矩阵值相对微分不变量，由此可见

$$\mathrm{E}(LR) = W \cdot \mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(L). \tag{27}$$

特别地，对于 J^∞ 中的正则点，只要 W 有定义且非退化，经典欧拉–拉格朗日方程就等价于不变欧拉–拉格朗日方程 $\mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(L) = 0$。

我们将本节内容总结为以下定理。

[2](25) 的中间部分涉及矩阵 $\mathcal{A}^*$ 与向量 $\mathcal{E}(L)$ 相乘；在 (24) 中它是一个行向量，但现在应将其视为列向量。随后与 $\vartheta_0 \wedge \varpi$ 的缩并就成为点积。

定理 3 (**不变欧拉–拉格朗日方程**)**.** 设有限维代数李伪群 G 在光滑流形 M 上传递作用。令 $I^1, \dots, I^r, \mathcal{D}$ 生成 $J^\infty(M,1)$ 上的有理微分不变量域。

于是，在 $J^\infty(M,1)$ 的一般点处存在一个不变余标架，它由阶为 ϑ_0^i **0** $(1 \le i < n)$ 的不变接触形式、满足 $\varpi(\mathcal{D}) = 1$ 的不变**1**-形式 ϖ 以及不变导子 $\mathcal{D}$ 生成。与不变拉格朗日量相对应的欧拉算子

$$\lambda = L\,\varpi$$

具有形式 (27)，其中矩阵 W 由条件 (26) 确定，而不变欧拉算子 $E_{\mathrm{inv}}(L) := [\mathcal{A}^*\mathcal{E}(L) - \mathcal{B}^*\mathcal{H}(L)]$ 则由不变欧拉量和哈密顿量 (22)，以及由 (23) 确定的微分算子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 表示。

定理中的不变余标架例如可以取为由 (6) 和 (10) 定义的余标架。注意，在定理 2 中，G 为有限维的假设是为了保证不变余标架的存在。

注记 7。 L 的极值曲线由喷射空间的正则区域中方程 $E_{\mathrm{inv}}(L)$ 给出；然而，由于公式 (27)，奇异极值曲线支撑在 W 的秩下降的分层上，或者支撑在 W 未定义或为奇异 [3] 的分层上。这个相对不变量是在移动标架的背景下于 [11] 中引入的，当时还提出了一个关于它是否为本质不变量的问题。下面通过共形测地线的例子，我们将说明它的消失实际上可能给出全部极值曲线。

然而请注意，由于定义 (26)，我们可以通过将基元素 ϖ 改为 $I\varpi$，自由地将 W 乘以一个绝对微分 I。这可能会改变 W 的零点和极点，但这只是在由绝对微分不变量矩阵给出的乘积 (27) 中交换因子，因此更应将其视为方程 $E_{\mathrm{inv}}(L)$ 的一部分，并适当选择生成元。

2.5.1. 欧几里得平面中的曲线。 让我们继续讨论第 2.2.1 节中的例子。我们使用

$$I_0 = \frac{y_2^2}{(y_1^2+1)^3}, \qquad \varpi = \frac{y_2}{(y_1^2+1)^2}(dx + y_1 dy), \qquad \vartheta_0 = \frac{y_1^2+1}{y_2}(dy - y_1 dx), \qquad \mathcal{D} = \frac{y_1^2+1}{y_2}D_x,$$

作为有理绝对微分不变量域以及有理不变1-形式的生成元。定义

$$I_i = \mathcal{D}^i(I_0), \qquad \vartheta_i = \mathcal{D}^i(\vartheta_0).$$

通过坐标进行直接的符号计算可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\vartheta_0) &= d_{\mathcal{V}} I_0 = \left(2I_0^2\mathcal{D}^2 + 3I_0 I_1 \mathcal{D} + I_0(I_2 + 2I_0)\right)(\vartheta_0),\\
\mathcal{B}(\vartheta_0) &= -i_{\mathcal{D}} d\varpi = \left(I_0\mathcal{D}^2 + \frac{3}{2}I_1\mathcal{D} + \frac{1}{2}I_2\right)(\vartheta_0),
\end{aligned}$$

因此，欧拉–拉格朗日方程为 $\mathcal{A}^*\mathcal{E}(L) - \mathcal{B}^*\mathcal{H}(L) = 0$，其中

$$\mathcal{A}^* = 2I_0^2\mathcal{D}^2 + 5I_0 I_1\mathcal{D} + (2I_0 I_2 + I_1^2 + 2I_0^2), \qquad \mathcal{B}^* = I_0\mathcal{D}^2 + \frac{1}{2}I_1\mathcal{D}. \tag{28}$$

注意，如果我们改为选择式 (6) 中的 $\varpi = \mathcal{D}(I_0)^{-1}dI_0$，微分算子 $\mathcal{A}$ 将消失，但 $\mathcal{B}$ 的表达式会变得更加复杂。

特别地，对于拉格朗日量 $L = I_0^m$，由公式 (28) 可得方程 $E_{\mathrm{inv}}(L) = 0$；除去平凡因子 K_0 后，它等价于

$$(m + \tfrac{1}{2})I_0 I_2 + (m^2 - \tfrac{1}{4})I_1^2 + I_0^2 = 0. \tag{29}$$

[3] 对于标量代数 W，这一分层（W-除子）对应于 W的零点和极点；在某些情况下，它们就是实际的极值曲线。下一节将给出一个例子：对于射影参数，圆锥曲线和直线。

2.6. 利用移动标架计算不变欧拉–拉格朗日方程。 下面回顾移动标架法及其在不变变分复形中的应用，遵循 Kogan–Olver [11], [12]。我们强调，只要这一框架适用，它在计算中就极为方便，因为可以根据相应的李代数作用推导出不变微分的显式公式。

考虑一个 l 维连通李群 G 在 M 上的传递李群作用。通过延拓，我们得到 G 在 $J^\infty(M,1)$ 上的作用 $\psi\colon G\times J^\infty\to J^\infty$，该作用在开稠密子集 $\mathcal{O}\subseteq J^\infty$ [1] 上是自由的。我们说明如何利用移动标架对 J^∞ 上的微分形式进行不变化。回顾一下，对于自由的 G-作用， J^∞ 上的移动标架是一个 G-等变映射 $\rho\colon J^\infty\supset\mathcal{O}\to G$。这样的移动标架等价于一个局部截面 $\Sigma\subseteq\mathcal{O}$，它横截于 G-作用的轨道。实际上，移动标架将点 $z\in\mathcal{O}$ 映射为 G 中的群元素，该元素将 z 变换到轨道 $\mathrm{Orbit}(z)\cap\Sigma$ 与截面的交点中的唯一一点。反过来，可以通过求出 J^∞ 上使移动标架成为单位元的点来得到该截面。

定义 2 (不变化)。 设 $\alpha\in\Omega^\bullet(J^\infty)$ 为一个微分形式。不变化 $\iota(\alpha)$ 是定义在 J^∞ 上的G-不变微分形式

$$\iota(\alpha):z\mapsto(\psi^*_{\rho(z)}\alpha)_z \tag{30}$$

通过逐点拉回 b ack α，沿移动标架群元素的作用 $\psi_{\rho(z)}\colon J^\infty\to J^\infty$ t.

(注意：不变化 $\iota(\alpha)$ 并非 沿 $\psi_\rho\colon J^\infty\to J^\infty$ 的 α的拉回， $z\mapsto\rho(z)\cdot z$。特别是，在对不变化结果求导时，也要对群参数求导，因此微分 d 与不变化 ι 不可交换。)

由此，我们得到不变化映射 $\iota:\Omega^\bullet\to\Omega^\bullet_G$，它将微分形式映射为定义在 J^∞ 上的 G-不变微分形式。喷射坐标的不变化化产生同阶的微分不变量或常数（幻影不变量），后者来自将喷射坐标限制到截面上。

注 8。 一般而言，轨道叶状结构不具有整体截面，而只有准截面（与每个轨道相交有限次）。因此，不变化的结果仅是局部不变量。事实上，将局部微分不变量限制到截面后再进行不变化，所得结果在“截面”附近局部地与该不变量相同。然而，将全局微分不变量限制到截面后再进行不变化，所得结果在全局上与该不变量相同。因此，移动标架法也可用于计算全局不变量：截面上通过不变化产生全局微分不变量的函数，构成所有有理函数所成域的一个子域。

对余标架进行不变化（$dx,\ \theta^i_j$），得到 J^∞上的不变余标架。我们称 $\varpi:=\iota(dx)$为不变水平形式，而称 $\vartheta^i_j:=\iota(\theta^i_j)$为 j阶的不变接触形式。如前所述，不变余标架诱导出分解 $\Omega^\bullet_G=\oplus_{r,\ s}\,\Omega^{r\,s}_G$，其中每个加项都由 r 不变水平形式和 s 不变接触形式的线性组合构成。我们令 $\mathcal{D}$ 表示由 $\varpi(\mathcal{D})=1$给出的不变导子。

外微分 $d\colon\Omega^\bullet_G\to\Omega^\bullet_G$ 相应地分解为 $d=d_{\mathcal{H}}+d_{\mathcal{V}}+d_{\mathcal{W}}$。利用移动标架法，可以显式计算这些不变微分。为此，选取 $X_1,\dots,X_l$作为 $\mathfrak{g}$ 的李代数的一组基，并用这组基将 G 的毛雷尔–嘉当形式 $\mu\in\Omega^1(G,\mathfrak{g})$ 分解为实值形式 $\mu^1,\dots,\mu^l\in\Omega^1(G)$。将拉回 $\rho^*\mu^k=\gamma^k+\epsilon^k\in\Omega^1(\mathcal{O})$ 分解为其不变水平部分 γ^k 和不变接触部分 ϵ^k。设 $\alpha\in\Omega^{r,s}$ 是一个双次数为 (r,s) 的微分形式。那么，不变水平微分 $d_{\mathcal{H}}:\Omega^{r\,s}_G\to\Omega^{r+1,}_{G\quad\ s}$ 可通过以下公式计算

$$d_{\mathcal{H}}\iota(\alpha)=\iota(d_H\alpha)+\sum_{k=1}^{l}\gamma^k\wedge\iota(\pi_{r,s}\,(X_k(\alpha))), \tag{31}$$

and 不变垂直微分 $d_{\mathcal{V}}:\Omega^{r\,s}_G\to\Omega^{r\,s+1}_G$,可通过以下公式计算

$$d_{\mathcal{V}}\iota(\alpha)=\iota(d_V\alpha)+\sum_{k=1}^{l}\epsilon^k\wedge\iota(\pi_{r,s}\,(X_k(\alpha)))+\gamma^k\wedge\iota(\pi_{r-1,s+1}\,(X_k(\alpha))). \tag{32}$$

对于喷射函数 s $f \in C^\infty(J^\infty)$，不变水平微分和不变垂直微分简化为

$$d_{\mathcal{H}}\iota(f) = \iota(d_H f) + \sum_{k=1}^{l} \iota(X_k(f)) \cdot \gamma^k, \qquad d_{\mathcal{V}}\iota(f) = \iota(d_V f) + \sum_{k=1}^{l} \iota(X_k(f)) \cdot \epsilon^k. \tag{33}$$

在方程 (31)–(33) 中， $X_k(\alpha)$ 和 $X_k(f)$ 表示沿 X_k 的李导数，其中 X_k 被视为 $M = J^0$ 上的向量场，并延拓至 J^∞。

在实际应用中，我们可以使用以下方案计算不变欧拉–拉格朗日方程。通过令每个喷射坐标 $l = \dim(G)$ 等于某个常数来固定一个截面 $\Sigma \subseteq \mathcal{O}$ （需注意确保该截面与一般轨道相交）。通过对合适的喷射函数进行不变化，得到标量微分不变量的生成集 I^i （注意， I^i 的阶与所选喷射函数的阶相同）。其余步骤如下所述，构成一个算法。

算法。（使用截面计算不变欧拉–拉格朗日方程）。
（**输入**：李代数 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{X}(J^\infty)$ 的基 X_i，与正则轨道横截的截面 $\Sigma \subseteq \mathcal{O}$ s)

- 步骤 1.) 将 $d_{\mathcal{H}}$ 和 $d_{\mathcal{V}}$ 作用于在截面上为常数的 l 喷射坐标。
- 步骤 2.) 求解这个线性方程组，得到 γ^k 和 ϵ^k。（这样我们就计算出了毛雷尔–嘉当形式在移动标架 ρ下的拉回： $\mathcal{O} \to G$。）
- 步骤 3.) 使用 (32) 计算不变垂直微分 $d_{\mathcal{V}} I^i$ 和 $d_{\mathcal{V}}\varpi$ 。
- 步骤 4.) 使用 (31) 计算不变接触形式 ϑ^i_j 的不变水平微分。注意，(31) 中的第一项为 $\varpi \wedge \vartheta^i_{j+1}$。
- 步骤 5.) 利用 $d_{\mathcal{H}}\vartheta^i_j = \varpi \wedge \mathcal{D}(\vartheta^i_j)$ 这一事实及上一步的结果，将每个 $\vartheta^i_j = \sum P^i_l$ 阶不变接触形式 ϑ^l_0 表示为作用于零阶不变接触形式上的不变微分算子 P^i_l 的作用之和。
- 步骤 6.) 将 $d_{\mathcal{V}} I^i$ 和 $d_{\mathcal{V}}\varpi$ 改写为不变微分算子作用于零阶不变接触形式的形式。由此得到不变微分算子 $\mathcal{A}$， $\mathcal{B}$ ，如 (23) 所示。
- 步骤 7.) 计算形式伴随算子 $\mathcal{A}^*$ 和 $\mathcal{B}^*$。然后使用公式 $\mathcal{A}^*\mathcal{E}(L) - \mathcal{B}^*\mathcal{H}(L) = 0$计算不变欧拉–拉格朗日方程。（在 Σ的正则邻域上有效。）

(**输出**：用抽象不变量 I^i 和 $\mathcal{D}$表示不变欧拉–拉格朗日方程的公式。)

我们强调，如果只有一个截面，不变量 I^i 并没有显式表达式。因此，得到的不变欧拉–拉格朗日方程也用这些抽象不变量表示（它们表示为某些喷射函数的不变化）。要得到显式表达式，我们可以采用几种方法。首先，可以尝试计算显式的移动标架，但这在计算上很困难，因为需要延拓群作用。此外，群作用可能并未明确给出，例如起点只有一个向量场李代数时。其次，如果我们已经有微分不变量的显式表达式，就可以将它们与不变化产生的抽象不变量联系起来：将其限制在截面上，并与不变量 I^i（的限制）进行比较。此外，我们还可以使用不同的不变余标架，例如第 2.2 节中的余标架，并将其与不变化余标架联系起来。后一种方法尤其有助于计算 W ，因为在这种情况下，拥有零阶不变接触形式的显式表达式至关重要。我们通过第 3.4.4 节中的共形测地线示例来说明这一点。

2.6.1. 欧几里得平面中的曲线。 让我们用移动标架方法重新考察第 2.5.1 节中的例子。我们可以采用由 x、 y、 y_1 的消失所确定的截面。根据构造， x、 y、 y_1 的不变化为零，而

$$\iota(y_2) = \kappa := \frac{y_2}{(1+y_1^2)^{3/2}}. \tag{34}$$

即为曲率。高阶微分不变量通过对 κ 应用弧长全导数 $D_s = \dfrac{1}{\sqrt{1+y_1^2}} D_x$ 获得，记作 $\kappa_i = D_s^i(\kappa)$。不变水平形式为

$$\varpi = \iota(dx) = \frac{dx + y_1 dy}{\sqrt{1+y_1^2}}. \tag{35}$$

最后可得， κ 和 ϖ 的不变垂直微分为

$$d_{\mathcal{V}}\kappa = \iota(\theta_2) = (D_s^2 + \kappa^2)\iota(\theta_0), \qquad d_{\mathcal{V}}\varpi = -\kappa\ \iota(\theta_0) \wedge \varpi, \tag{36}$$

因此 $\mathcal{A}^\kappa = D_s^2 + \kappa^2$ 和 $\mathcal{B} = -\kappa$。这两个不变微分算子都是形式自伴的，所以不变拉格朗日量 $L\,ds$ 对应的不变欧拉–拉格朗日方程为

$$(D_s^2 + \kappa^2)\mathcal{E}(L) + \kappa\mathcal{H}(L) = 0, \tag{37}$$

其中 $\mathcal{E}(L)$ $\mathcal{H}(L)$分别是不变欧拉量和不变哈密顿量 (22)。

现在，我们通过移动标架重新推导第 2.5.1 节中的公式，具体做法如注 8 所示。全局水平形式为 $\kappa\,ds$ ，拉格朗日密度为 $L = I_0^m = \kappa^{2m}$。因此，拉格朗日量可用局部不变量重写为 $L\,\kappa\,ds = \kappa^{2m+1}ds$，然后由 (37) 并令 $L \mapsto \kappa^{2m+1}$，可得到欧拉–拉格朗日方程（再次省略平凡因子 κ）

$$(2m+1)\kappa\,\kappa_{ss} + (4m^2 - 1)k_s^2 + \kappa^4 = 0. \tag{38}$$

根据不变量之间的关系，此公式可转化为 (29)：$\kappa = \sqrt{I_0}$、 $\kappa_s = \frac{1}{2}I_1$、$\kappa_{ss} = \frac{1}{2}\sqrt{I_0}I_2$。

2.7. 通过截面得到的全局不变量。 通过截面 Σ 定义的（30）的不变化算子 ι具有一项重要性质：若 J 是局部微分不变量（函数、微分形式或其他几何对象），则在其定义域内（该定义域在喷射空间中是开集，但不一定稠密），有:

$$\iota(J) = J. \tag{39}$$

这一性质在全局范围内可能不成立（例如，欧几里得群作用于平面内曲线的喷射时， $J = \kappa$ 在解析延拓后会变成多值的）。不过，只要 J 是全局微分不变量，等式（39）就在一个开稠集上成立。事实上，喷射空间上的有理函数由其在任意开集上的限制唯一确定。

请注意，对 J 的不变化由在截面 Σ各点处的取值决定，记作$J|_\Sigma$ （对函数而言，这与限制相同；对微分形式而言，含义则更丰富），因此（39）可以更明确地写为 $\iota(J|_\Sigma) = J$。移动标架的规范化（在 Σ处取值）是进行微分不变量演算的有效方法，因为它能减少参数的数量。

定理 4。 若 $L\,\varpi$ 是关于李群 G 的全局不变拉格朗日量形式，则其欧拉–拉格朗日方程 $\mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(L)$ 也具有全局 G-不变性。

证明基于这样一个事实：欧拉算子的所有组成部分（线性化和形式伴随，见 [25]）都显然是协变的，因此也关于对称性不变。下面几点值得注意。

1. 在全局代数情形中，因子 W 在 E(LR) 中的分量是有理的，但一般并非 G-不变。这一点可由 §3.2 中射影长度的极值曲线以及 §3.4 中共形测地线的例子说明。不过，若将其视为 [18]，中所述的 G-等变向量丛的截面，它实际上是不变的。

2. 移动标架法可应用于全局不变拉格朗日量。具体而言，将 $L\,\varpi$ 转换为通过不变化 $L'\,\varpi'$ 得到的局部微分不变量表示。于是，对于密度 $R = \varpi(D_{\varpi'})$， $L' = LR$ 是局部不变量，而所得的欧拉算子 $\mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(L)$ 对于 $\mathfrak{g}$ =Lie(G) 是 $\mathfrak{g}$- 不变的。事实上，它是 G- 不变的，尽管其写法是通过局部微分不变量的一组基给出的。

3. 为了计算不变欧拉算子 $\mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(L)$，将定理 3 中更一般的设置与移动标架的归一化结合起来会比较方便。以下计算将对此进行说明。

3. Computations for classical geometries

本节中，我们计算若干李群作用对应的不变欧拉–拉格朗日方程。在 $2D$ 中，我们考察 Möbius 群 PSL(2， $\mathbb{C}$) =SO(1， 3) 以及射影线性群 PSL(3， $\mathbb{R}$) 的作用。我们分别使用局部和全局微分不变量进行这些计算。在 $3D$ 中，我们考察欧几里得运动群 SE(3) 以及共形群 Conf(3) = SO(1，4) 的群作用。SE(3) = SO(3) 的不变欧拉–拉格朗日方程的一般公式已在 [2]，[8]，

[12]中计算过。我们在此重新讨论该公式，并将结果与共形测地线情形下的共形不变欧拉–拉格朗日方程进行比较。此外，我们还利用全局不变量推导出 SE(3) 的一个公式。最后，我们还计算了 $4D$ 运动群 SE(4) 对应的不变欧拉–拉格朗日方程。计算中使用了 Maple 中的 DifferentialGeometry软件包。相关 Maple 文件是 arXiv 投稿的补充材料。

3.1. M¨obius 在二维中的不变变分问题。 群 $G = \mathrm{SO}(1,3)$ 通过共形变换在$\mathbb{S}^2$上（代数地）作用。它具有双覆盖 $\mathrm{Spin}(1,3) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$，其中心为 $\mathbb{Z}_2$，商群为 G。有时这个双覆盖被称为 M¨obius 群，尽管它通过 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}(1,3)$ 作用于 $\mathbb{C}P^1 \simeq \mathbb{S}^2$。相应的李代数为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,3)$，在坐标图 $\mathbb{R}^2(x,y)$ 中，它具有生成元 ∂_x、 ∂_y、 $x\partial_y - y\partial_x$、 $x\partial_x + y\partial_y$、 $\frac{1}{2}(x^2+y^2)\partial_x - x(x\partial_x + y\partial_y)$、 $\frac{1}{2}(x^2+y^2)\partial_y - y(x\partial_x + y\partial_y)$，我们分别将其记为 $X_1, \ldots, X_6$。

3.1.1. 生成微分不变量。 不难计算得出，局部微分不变量由一个 5 阶微分不变量和一个不变导子生成，两者都可用曲线的经典曲率 κ 和自然参数 ds表示:

$$q = \frac{4\kappa_s\kappa_{sss} - 4\kappa^2\kappa_s^2 - 5\kappa_{ss}^2}{\kappa_s^3}, \qquad \sigma = \sqrt{\kappa_s}ds, \quad D_\sigma = \frac{1}{\sqrt{\kappa_s}}\frac{d}{ds}. \tag{40}$$

换言之，任意微分不变量在局部都可表示为 q、 q_σ、 $q_{\sigma\sigma}$、 $q_{3\sigma} = q_{\sigma\sigma\sigma}$、 $q_{4\sigma}$ 等的函数。

为得到全局不变量，请注意 q 是一个有理微分不变量。然而，不变导子包含根式。作为有理不变微分算子的一个例子，我们有

$$\bar{\nabla} = q_\sigma^{-1} D_\sigma,$$

它与特雷斯导数 D_q一致。与特雷斯导数一样，它具有性质 $D_q(q) = 1$，因此仅与 q 一起并不能生成全局不变量代数。为此，我们还需添加 6 阶不变量 $(q_\sigma)^2$ 。于是，全局 M¨obius 不变量域由以下元素生成:

$$q, \quad (q_\sigma)^2, \quad \bar{\nabla}.$$

或者，也可以选择较小的一组全局生成元

$$q, \quad \nabla := q_\sigma D_\sigma. \tag{41}$$

3.1.2. 通过局部不变量得到 *M¨obius* 不变欧拉–拉格朗日方程。我们取如下截面

$$\Sigma := \{x = 0, y = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 1, y_4 = 0\}. \tag{42}$$

将 M¨obius 曲率 q 限制到上述截面，得到 $q|_\Sigma = 4y_5$ ，因此 q 可由 $4y_5$的不变化得到。此外，我们有 $\sigma|_\Sigma = dx$，因此使用 $\varpi := \iota(dx)$。这确保 ϖ与 σ 相差一个接触形式。应用该算法，我们得到

$$\begin{aligned}
&\gamma^1 = -\varpi,\ \gamma^2 = 0,\ \gamma^3 = 0,\ \gamma^4 = 0,\ \gamma^5 = -\frac{1}{8}q\varpi,\ \gamma^6 = -\varpi,\\
&\epsilon^1 = 0,\ \epsilon^2 = -\iota(\theta_0),\ \epsilon^3 = -\iota(\theta_1),\ \epsilon^4 = \frac{1}{2}\iota(\theta_3),\ \epsilon^5 = -\frac{1}{2}\iota(\theta_4),\ \epsilon^6 = -\iota(\theta_2).
\end{aligned}$$

已知 γ 和 ϵ 分量后，接下来计算不变垂直微分 $d_\mathcal{V}q$ 和 $d_\mathcal{V}\varpi$。为了读出 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 随后我们将所有不变接触形式改写为不变微分算子作用于最低阶不变接触形式的形式（算法中的步骤 4–6）。不变欧拉–拉格朗日方程的最终公式为

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^*\mathcal{E}(L) - \mathcal{B}^*\mathcal{H}(L) =& \left(-4D_\sigma^5 + 2qD_\sigma^3 + \tfrac{7}{2}q_\sigma D_\sigma^2 + (3q_{\sigma\sigma} - \tfrac{1}{4}q^2 - 16)D_\sigma + (q_{3\sigma} - \tfrac{3}{8}qq_\sigma)\right)\mathcal{E}(L)\\
&+ \left(\tfrac{1}{2}D_\sigma^3 - \tfrac{1}{8}qD_\sigma - \tfrac{1}{16}q_\sigma\right)\mathcal{H}(L),
\end{aligned} \tag{43}$$

其中， D_σ 是 M¨obius 不变导子（与 ϖ 对偶），而 $\mathcal{E}(L)$ $\mathcal{H}(L)$ 分别是不变拉格朗日量的欧拉量和哈密顿量。应用公式（7）、（10）并在截面 Σ 上求值，可得 $\theta_0 = dy - y_1 dx$ 的不变化为

$$\iota(\theta_0) = \frac{dq(\partial_{y_5})}{4D_\sigma(x)^5} \cdot \theta_0. \tag{44}$$

利用该表达式和定义 (26)，我们计算得

$$W = \frac{y_1^2 y_3 - 3y_2^2 y_1 + y_3}{(y_1^2+1)^3}. \tag{45}$$

解出 $W = 0$ 中的 y_3，得到 $\mathbb{R}^2$ 中无参数圆的方程，即

$$y_3 = \frac{3y_1 y_2^2}{y_1^2+1}. \tag{46}$$

由此得出，奇异极值曲线恰好是平面内的所有圆（包括半径无穷大的情形：直线）。

将公式 (43) 应用于 $q^n\,\sigma$ 中针对 $n = 0, 1, 2, 3$ 的莫比乌斯不变拉格朗日量，我们计算出一些莫比乌斯不变欧拉–拉格朗日方程（针对正则极值曲线）的例子。结果列于下表。

拉格朗日量 L	$\mathcal{E}(L)$	$\mathcal{H}(L)$	不变欧拉–拉格朗日方程
σ	0	-1	$q_\sigma = 0$
$q\,\sigma$	1	$-q$	$q_{3\sigma} = \dfrac{3qq_\sigma}{8}$
$q^2\sigma$	$2q$	$-q^2$	$q_{5\sigma} = \dfrac{5}{8}qq_{3\sigma} + \dfrac{5}{4}q_\sigma q_{\sigma\sigma} - \dfrac{15}{128}q^2 q_\sigma - 4q_\sigma$
$q^3\sigma$	$3q^2$	$-q^3$	$q_{5\sigma} = \dfrac{P(q, q_\sigma, q_{\sigma\sigma}, q_{3\sigma}, q_{4\sigma})}{384q}$ （P 多项式）

这里，多项式 P 由以下公式给出

$$P = -1920q_\sigma q_{4\sigma} - 3840q_{\sigma\sigma}q_{3\sigma} + 216q^2 q_{3\sigma} + 1056qq_\sigma q_{\sigma\sigma} + 288q_\sigma^3 - 35q^3 q_\sigma - 1536qq_\sigma.$$

3.1.3. *M¨obius*-不变欧拉–拉格朗日方程的全局不变量。 我们取生成元 q 和 $\nabla = q_\sigma D_\sigma$如（41）所示，并令 $q_1 := \nabla q = q_\sigma^2$、 $q_2 := \nabla q_1 = 2q_\sigma^2 q_{\sigma\sigma}$，等等。令 $\Delta := q_\sigma^{-1}\sigma$ 为与 ∇对偶的（水平）形式。我们使用（42）中的截面 Σ，在此情况下有 $\Delta|_\Sigma = \dfrac{1}{4y_6}\,dx$。记 $\varpi_2 := \iota\left(\dfrac{1}{4y_6}\,dx\right) = \dfrac{\varpi}{q_\sigma}$。注意，

$$dq = d_{\mathcal{H}}q + d_{\mathcal{V}}q = D_\sigma(q)\,\varpi + d_{\mathcal{V}}q = \nabla(q)\,\varpi_2 + d_{\mathcal{V}}q.$$

由于 ϖ_2 与 ϖ成比例，因此，不变水平微分和不变垂直微分与我们用来补全余标架的不变接触形式的选择无关。然而， $\mathcal{A}$， $\mathcal{B}$算子的表达式确实取决于这一选择。根据前面的计算，我们有用不变接触形式 ι（θ_0）表示的 $d_{\mathcal{V}}q$：

$$d_{\mathcal{V}}q = \mathcal{A}(\iota(\theta_0)) = \left(4D_\sigma^5 - 2qD_\sigma^3 - \frac{5}{2}q_\sigma D_\sigma^2 + \left(\frac{q^2}{4} + 16 - q_{2\sigma}\right)D_\sigma + \left(\frac{qq_\sigma}{8} - \frac{q_{3\sigma}}{2}\right)\right)\iota(\theta_0) \tag{47}$$

应用公式 (7)、(10)，令.....，即可得到一个零阶有理不变接触形式

$$\vartheta_0 := \frac{1}{4}\,\frac{dq(\partial_{y_5})}{\nabla(x)^5}\,\theta_0.$$

在截面 Σ 上计算 ϑ_0，得到 $\theta_0\,(4y_6)^5$，因此可得 $\vartheta_0 = \iota(\theta_0)\,q_\sigma^5$。现在将 $\iota(\theta_0) = q_\sigma^5\vartheta_0 = (q_1)^{\frac{5}{2}}\vartheta_0$ 和 $D_\sigma = \dfrac{\nabla}{\sqrt{q_1}}$ 代入表达式 (47)。反复应用乘积法则并合并各项后，得到 $d_{\mathcal{V}}q$，它通过作用于 ϑ_0 的 ∇ 阶微分算子 $\mathcal{A}(\vartheta_0)$ 表示。形式伴随很容易计算为

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^* = &-4\nabla^5 + \frac{30q_2}{q_1}\nabla^4 + \left(2qq_1 - \frac{125q_2^2}{q_1^2} + \frac{40q_3}{q_1}\right)\nabla^3 + \left(\frac{7q_1^2}{2} - \frac{255q_2q_3}{q_1^2} + \frac{675q_2^3}{2q_1^3} - 6qq_2 + \frac{30q_4}{q_1}\right)\nabla^2\\ &+ \left(-16q_1^2 + \frac{1403q_2^2q_3}{2q_1^3} - \frac{129q_2q_4}{q_1^2} - \frac{565q_2^4}{q_1^4} + \frac{19qq_2^2}{2q_1} - \frac{88q_3^2}{q_1^2} + \frac{12q_5}{q_1} - \frac{q_1^2q^2}{4} - 4qq_3 - \frac{15q_2q_1}{4}\right)\nabla + \alpha,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha = &\frac{2q_6}{q_1} - \frac{26q_2q_5}{q_1^2} - \frac{45q_3q_4}{q_1^2} + \frac{359q_2^2q_4}{2q_1^3} - qq_4 + \frac{493q_2q_3^2}{2q_1^3} - \frac{797q_2^3q_3}{q_1^4} + \frac{13qq_2q_3}{2q_1}\\ &- \frac{3q_1q_3}{2} + \frac{455q_2^5}{q_1^5} - \frac{7qq_2^3}{q_1^2} + \frac{9q_2^2}{4} + \frac{q^2q_1q_2}{8} + 8q_1q_2 - \frac{3qq_1^3}{8}.\end{aligned} \tag{48}$$

接下来，应用莱布尼茨法则可得

$$\begin{aligned}d_{\mathcal{V}}\varpi_2 &= d_{\mathcal{V}}\left(\frac{\varpi}{q_\sigma}\right) = \frac{1}{q_\sigma}d_{\mathcal{V}}\varpi + d_{\mathcal{V}}(q_\sigma^{-1})\wedge\varpi\\ &= \frac{1}{q_\sigma}\mathcal{B}(\iota(\theta_0))\wedge\varpi - \frac{1}{q_\sigma^2}d_{\mathcal{V}}(q_\sigma)\wedge\varpi = \left(\mathcal{B}(\iota(\theta_0)) - \frac{d_{\mathcal{V}}(q_\sigma)}{q_\sigma}\right)\wedge\varpi_2,\end{aligned}$$

这意味着

$$\mathcal{B}(\vartheta_0) = \mathcal{B}(\iota(\theta_0)) - \frac{d_{\mathcal{V}}(q_\sigma)}{q_\sigma}. \tag{49}$$

应用公式（33），并利用 $q_\sigma = \iota(4y_6)$，我们计算得到

$$\begin{aligned}d_{\mathcal{V}}(q_\sigma) &= 4\iota(d_V y_6) + \sum_{k=1}^{6}\iota(X_k(4y_6))\,\epsilon^k = 4\iota(\theta_6) - \frac{9}{2}q\,\iota(\theta_4) - \frac{5}{2}q_\sigma\iota(\theta_3) - 200\,\iota(\theta_2)\\ &= \left[4D_\sigma^6 - 2qD_\sigma^4 + \left(\frac{1}{2} - 5q_\sigma\right)D_\sigma^3 + \left(-\frac{9q_{2\sigma}}{2} + 16 + \frac{q^2}{4}\right)D_\sigma^2\right.\\ &\quad\left. + \left(-\frac{1}{8}q + \frac{3}{4}qq_\sigma - \frac{5}{2}q_{3\sigma}\right)D_\sigma + \left(-\frac{1}{16}q_\sigma + \frac{3}{16}q_\sigma^2 + \frac{1}{8}qq_{2\sigma} - \frac{1}{2}q_{4\sigma}\right)\right]\iota(\theta_0).\end{aligned}$$

我们像之前一样，将 $\iota(\theta_0) = (q_1)^{\frac{5}{2}}\vartheta_0$ 和 $D_\sigma = \dfrac{\nabla}{\sqrt{q_1}}$ 代入（49），并改写得到 ∇-微分算子 $\mathcal{B}(\vartheta_0)$ 的表达式。然后我们计算其形式伴随，结果为

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^* = &-\frac{4}{q_1}\nabla^6 + \frac{54q_2}{q_1^2}\nabla^5 + \left(\frac{100q_3}{q_1^2} + 2q - \frac{395q_2^2}{q_1^3}\right)\nabla^4 + \left(-\frac{14qq_2}{q_1} - \frac{1195q_2q_3}{q_1^3} + \frac{5q_1}{2} + \frac{110q_4}{q_1^2} + \frac{3835q_2^3}{2q_1^4}\right)\nabla^3\\ &+ \left(-\frac{16qq_3}{q_1} + \frac{103qq_2^2}{2q_1^2} - 16q_1 - \frac{q_1q^2}{4} - \frac{45q_2}{4} - \frac{12635q_2^4}{2q_1^5} - \frac{688q_3^2}{q_1^3} + \frac{13313q_2^2q_3}{2q_1^4} - \frac{999q_2q_4}{q_1^3} + \frac{72q_5}{q_1^2}\right)\nabla^2\\ &+ \left(-\frac{9qq_4}{q_1} - \frac{110qq_2^3}{q_1^3} + \frac{5q^2q_2}{8} - \frac{q_1^2q}{8} + \frac{26q_2^2}{q_1} + \frac{13090q_2^5}{q_1^6} + \frac{26q_6}{q_1^2} - \frac{39q_3}{4} + \frac{161qq_2q_3}{2q_1^2}\right.\\ &\left. - \frac{39725q_2^3q_3}{2q_1^5} + \frac{7515q_2^2q_4}{2q_1^4} + \frac{10415q_2q_3^2}{2q_1^4} - \frac{440q_2q_5}{q_1^3} - \frac{775q_3q_4}{q_1^3} + 40q_2\right)\nabla + \beta,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\beta =&\frac{91q_2q_3}{4q_1}+\frac{q^2q_3}{4}+16q_3-3q_4+\frac{835q_2^2q_5}{q_1^4}-\frac{172q_3q_5}{q_1^3}-\frac{5q^2q_2^2}{8q_1}+\frac{q_1qq_2}{4}+\frac{23qq_2q_4}{q_1^2}\\&-\frac{132qq_2^2q_3}{q_1^3}-\frac{2qq_5}{q_1}+\frac{16qq_3^2}{q_1^2}-\frac{5675q_2^3q_4}{q_1^5}-\frac{11864q_2^2q_3^2}{q_1^5}-\frac{80q_2q_6}{q_1^3}+\frac{26180q_2^4q_3}{q_1^6}-\frac{40q_2^2}{q_1}\\&-\frac{109q_2^3}{4q_1^2}-\frac{13090q_2^6}{q_1^7}+\frac{4q_7}{q_1^2}+\frac{688q_3^3}{q_1^4}-\frac{110q_4^2}{q_1^3}+\frac{110qq_2^4}{q_1^4}+\frac{q_1^3}{8}+\frac{2969q_2q_3q_4}{q_1^4}.\end{aligned}\tag{50}$$

不变拉格朗日量 $\lambda = L\,\Delta$ 对应的不变欧拉–拉格朗日方程，随后由标准公式 $\mathcal{A}^*\mathcal{E}(L)-\mathcal{B}^*\mathcal{H}(L) = 0$计算得到。由全局不变形式 $(\vartheta_0,\ \varpi_2)$ 确定的矩阵相对不变量 W 与 (45) 成正比，比例因子为 q_σ^{-6}。

对于 $L = 1$，即 $\lambda = q_\sigma^{-1}\,\sigma$，不变欧拉–拉格朗日方程由 $\beta = 0$ 给出。对于 $L = q$，不变欧拉–拉格朗日方程由 $\alpha = -\mathcal{B}^*(q)$ 给出。这里，α 和 β 分别由公式 (48) 和 (50) 给出。对于拉格朗日量 $L = q_1$，即 $\lambda = q_1\Delta = d_H(q)$，欧拉–拉格朗日方程是平凡的，这与散度项的情形相符。

3.2. 中的射影不变变分问题 $2D$。

射影线性群 $PSL(3,\ \mathbb{R})$ 作用于射影平面 $\mathbb{R}P^2$。该作用由以下公式给出

$$A\cdot[1:x:y] = [a_{00}+a_{01}x+a_{02}y : a_{10}+a_{11}x+a_{12}y : a_{20}+a_{21}x+a_{22}y].\tag{51}$$

因此，$A\in PSL(3)$ 定义了线性分式变换 $\tilde{x} = \dfrac{a_{10}+a_{11}x+a_{12}y}{a_{00}+a_{01}x+a_{02}y}, \tilde{y} = \dfrac{a_{20}+a_{21}x+a_{22}y}{a_{00}+a_{01}x+a_{02}y}$。开图 $\mathbb{R}^2(x,y)$ 上对应的李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ 由向量场 ∂_x,∂_y, $x\partial_x$, $x\partial_y$, $y\partial_x$, $y\partial_y$, $x(x\partial_x+y\partial_y)$, $y(x\partial_x+y\partial_y)$ 生成，我们将它们依次记为 $X_1,\dots,X_8$。

3.2.1. 微分不变量的生成元。局部射影不变量是众所周知的，参见 [26] 以及[14]。这里我们修正后一篇参考文献中 Θ_8 公式的一个错误。定义

$$\Theta_3 = \frac{9y_2^2y_5-45y_2y_3y_4+40y_3^3}{y_2^3},\qquad \Theta_8 = 6\Theta_3\frac{d^2\Theta_3}{dx^2}-7\Big(\frac{d\Theta_3}{dx}\Big)^2+27\Theta_3^2R_2^{1/3}\frac{d^2}{dx^2}\Big(R_2^{-1/3}\Big).$$

这里 $R_2 = y_2$ 是一个相对微分不变量，此外还有两个多项式相对不变量$R_5 = R_2^3\Theta_3$和 $R_7 = R_2^8\Theta_8$。相对于与向量场 $(-x\partial_x, y\partial_y)$ 对应的 $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ 的嘉当子代数的基，这些相对不变量的权分别为 (2,1)、(9,3) 和 (24,8)。这意味着相对不变量 $\dfrac{R_5^3}{R_2R_7}$ 和 $\dfrac{R_2^3R_7}{R_5^6}$ 的权分别为 $(1,0)$ 和 $(0,1)$，因而生成权格。上文采用如下约定：R_i 的下标对应不变量的阶，而 Θ_j 的下标对应第二个权（ $\mathfrak{g}$ 的相对微分不变量的权空间为二维，见 [18]）。

射影微分不变量由一个微分不变量（射影曲率）和一个不变导子（射影参数）生成：

$$\kappa = \frac{4\Theta_8}{9\sqrt[3]{\Theta_3}^8},\qquad \nabla = \frac{1}{\sqrt[3]{\Theta_3}}\frac{d}{dx}.\tag{52}$$

因此，从 7 阶开始，我们在每一阶都得到一个新的微分不变量：$\kappa_i := \nabla^i(\kappa)\ i\geq 1$。此外，选择

$$\varpi = \sqrt[3]{\Theta_3}\left(dx-\left(\frac{D_x(\Theta_3)}{3R_2\Theta_3}+\frac{2}{3}D_x(1/R_2)\right)\theta_0\right) = \iota(3^{2/3}dx)$$

可确保 $\varpi(\nabla) = 1$。

注意，微分方程 $R_2 = 0$ 描述直线，而 $R_5 = 0$ 描述圆锥曲线[9]。关于一些重要的射影不变曲线族的概述，请参阅 [13]。

3.2.2. 通过局部不变量得到射影不变欧拉–拉格朗日方程。 原则上，我们可以通过计算 $d_{\mathcal{V}}\kappa$ 和 $d_{\mathcal{V}}\varpi$ ，并消去射流变量，将它们写成 $\nabla^k(\vartheta_0)$ 和 $\nabla^k(\kappa)$ 的形式，从而计算欧拉–拉格朗日算子。然而，由于公式过于庞大，即使借助计算机代数系统，这种做法也不切实际。因此，我们将改为在一个截面上进行这些计算，采用的方法与第 2.6 节中的算法略有不同。

我们采用如下定义的横截截面

$$\Sigma = \{x = 0,\ y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 = 1,\ y_6 = 0\}. \tag{53}$$

将射影曲率 κ 限制到该截面上，得到 $\frac{8}{3^{7/3}}\,y_7$，换言之， $\kappa = \iota\left(\frac{8}{3^{7/3}}\,y_7\right)$。

该截面给出了最高至 6 阶喷射坐标的不变化；利用 $\iota(y_7) = \frac{3^{7/3}\kappa}{8}$ ，我们可以计算所有的 γ 项。然后利用不变微分的公式，计算其余所有要素。按照第 2.6 节算法的步骤 1 和 2 中的说明，我们得到 γ项:

$$\gamma^1 = -\iota(dx), \qquad \gamma^2 = 0, \qquad \gamma^3 = 0, \qquad \gamma^4 = -\iota(dx),$$
$$\gamma^5 = -\frac{3^{4/3}\kappa\,\iota(dx)}{8}, \qquad \gamma^6 = 0, \qquad \gamma^7 = \frac{3^{4/3}\kappa\,\iota(dx)}{8}, \qquad \gamma^8 = \frac{\iota(dx)}{6}.$$

这里我们不会完全遵循该算法。我们不使用不变接触形式 $\iota(\theta_i)$ 作为基元素，而改用 $\nabla^i(\vartheta_0)$。这样就可以略过 ϵ项的计算。对于 ϑ_0 ，我们选择

$$\vartheta_0 = \frac{\Theta_8}{I_0 R_2 \Theta_3^2}\theta_0 = \iota\left(\frac{3^{10/3}}{4}\theta_0\right).$$

考虑一般的不变接触形式 ϑ，并设 θ 是满足 $\vartheta = \iota(\theta)$ 的接触形式。请注意， θ 的选取有一定自由度，唯一的要求是 θ 为接触形式且 $\vartheta|_\Sigma = \theta|_\Sigma$。我们按如下方式选取 θ。令 $\varrho\colon\ J^\infty \to \Sigma$ 为由下式定义的投影

$$\varrho\colon (x, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, \dots, y_k, \dots) \mapsto (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, y_7, \dots, y_k, \dots),$$

并定义 $\theta = \sum \varrho^*(\vartheta(\partial_{y_i})|_\Sigma)\theta_i$，其代数表达式比 ϑ 简单得多。$i\geq 0$

Usin结合恒等式 $d_H(\theta) = dx \wedge D_x(\theta)$ 和 $d_{\mathcal{H}}(\vartheta) = \varpi \wedge \nabla(\vartheta)$，式 g (31) 给出

$$\varpi \wedge \nabla(\vartheta) = \iota(dx) \wedge \iota(D_x(\theta)) + \sum_k \gamma^k \wedge \iota(X_k(\theta)),$$

或者，如果我们在截面上求值:

$$(\varpi \wedge \nabla(\vartheta))\,|_\Sigma = \left(dx \wedge D_x(\theta) + \sum_k \gamma^k \wedge X_k(\theta)\right)\Bigg|_\Sigma.$$

将二形式与 ∇ （在 Σ 的各点处）缩并，得到

$$\nabla(\vartheta)|_\Sigma = \nabla(\theta)|_\Sigma + (\nabla|_\Sigma)\lrcorner\left(\sum_k \gamma^k \wedge X_k(\theta)\right)\Bigg|_\Sigma \tag{54}$$

因此，我们从表达式 $\vartheta|_\Sigma$ 得到了 $\nabla(\vartheta)|_\Sigma$ 的表达式。这使我们可以避开对 $\nabla(\vartheta)$ 的暴力计算；当我们需要计算 i 最高达 7 时的 $\nabla^i(\vartheta_0)$，这种方法会变得不可行。相反，我们使用（54）来计算 $\nabla^i(\vartheta_0)|_\Sigma$。这已经足够了，因为不变量对象完全由其在截面上的行为所决定。

接下来，我们计算 $d_{\mathcal{V}}\kappa|_\Sigma$ 和 $d_{\mathcal{V}}\varpi|_\Sigma$ ，并将它们改写为关于 $\nabla^i\,(\vartheta_0)\,|_\Sigma$ 的形式。将其余的自由喷射变量 y_7， y_8，..... 替换为相应的微分不变量 $\kappa|_\Sigma$， $\kappa_1|_\Sigma$，..... 后，我们得到以下表达式:

$$d_{\mathcal{V}}\kappa = \left[\frac{32}{3}\nabla^7 - 16\kappa\nabla^5 - \frac{140}{3}\kappa_1\nabla^4 - \left(\frac{196}{3}\kappa_2 - 6\kappa^2\right)\nabla^3 - \frac{1}{3}(140\kappa_3 - 55\kappa\kappa_1)\nabla^2 \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}\left(52\kappa_4 - 41\kappa\kappa_2 - 32\kappa_1^2 - \frac{2}{3}\kappa_1 + 2\kappa^3 - \frac{8}{27}\right)\nabla - \frac{1}{3}(8\kappa_5 - 10\kappa\kappa_3 - 2(12\kappa_2 - \kappa^2)\kappa_1)\right](\vartheta_0) \tag{55}$$
$$d_{\mathcal{V}}\varpi = \left[\frac{4}{3}\nabla^5 - \frac{5}{3}\kappa\nabla^3 - \left(\frac{5}{2}\kappa_1 - \frac{2}{9}\right)\nabla^2 - \left(\frac{3}{2}\kappa_2 - \frac{1}{3}\kappa^2\right)\nabla - \frac{1}{3}(\kappa_3 - \kappa\kappa_1)\right](\vartheta_0)\wedge\varpi.$$

利用形式伴随的定义，我们计算得

$$\mathcal{A}^* = \left[-\frac{32}{3}\nabla^7 + 16\kappa\nabla^5 + \frac{100}{3}\kappa_1\nabla^4 + \left(\frac{116}{3}\kappa_2 - 6\kappa^2\right)\nabla^3 + \left(\frac{88}{3}\kappa_3 - \frac{53}{3}\kappa\kappa_1\right)\nabla^2 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{40}{3}\kappa_4 - 13\kappa\kappa_2 - 10\kappa_1^2 - \frac{2}{9}\kappa_1 + \frac{2}{3}\kappa^3 - \frac{8}{81}\right)\nabla + \left(\frac{8}{3}\kappa_5 - 4\kappa\kappa_3 - 8\kappa_1\kappa_2 - \frac{2}{9}\kappa_2 + \frac{4}{3}\kappa^2\kappa_1\right)\right] \tag{56}$$

and

$$\mathcal{B}^* = \left[-\frac{4}{3}\nabla^5 + \frac{5}{3}\kappa\nabla^3 + \left(\frac{5}{2}\kappa_1 + \frac{2}{9}\right)\nabla^2 + \left(\frac{3}{2}\kappa_2 - \frac{1}{3}\kappa^2\right)\nabla + \frac{1}{3}(\kappa_3 - \kappa\kappa_1)\right]. \tag{57}$$

由公式 $\vartheta_0\wedge\varpi = W\theta_0\wedge dx$，我们计算得

$$W = \frac{9\Theta_3}{4y_2}. \tag{58}$$

下表 列出了若干简单拉格朗日量对应的欧拉–拉格朗日方程 .

拉格朗日量	不变欧拉–拉格朗日方程
ϖ	$\kappa_3 = \kappa\kappa_1$
$\kappa\varpi$	$\kappa_5 = \frac{3}{2}\kappa\kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2 - \frac{1}{2}\kappa^2\kappa_1$
$\kappa^2\varpi$	$\kappa_7 = \frac{13}{8}\kappa\kappa_5 + \frac{15}{4}\kappa_1\kappa_4 + \frac{41}{8}\kappa_2\kappa_3 - \frac{49}{64}\kappa^2\kappa_3 - \frac{89}{32}\kappa\kappa_1\kappa_2 - \frac{45}{64}\kappa_1^3 + \frac{9}{64}\kappa^3\kappa_1 - \frac{1}{108}\kappa_1$
$\kappa_1^2\varpi$	$\kappa_9 = \frac{3}{2}\kappa\kappa_7 + 3\kappa_1\kappa_6 + \left(\frac{13}{4}\kappa_2 - \frac{9}{16}\kappa^2\right)\kappa_5 + \left(\frac{11}{4}\kappa_3 - \frac{3}{2}\kappa\kappa_1\right)\kappa_4$ $+ \left(\frac{1}{16}\kappa^3 - \frac{11}{16}\kappa_1^2 - \frac{9}{8}\kappa\kappa_2 - \frac{1}{108}\right)\kappa_3 - \frac{3}{8}\kappa_1\kappa_2^2 + \frac{3}{32}\kappa^2\kappa_1\kappa_2 - \frac{1}{64}\kappa\kappa_1^3$

在这些方程中，我们省略了整体的（相对不变量）因子 W。因此，上述公式仅适用于正则极值曲线。由 $\Theta_3 = 0$ 定义的曲线是奇异极值曲线（极限情况下为圆锥曲线和直线，参见 §3.2.1），此时 ϖ 为零或无穷大。对应于 ϖ 的欧拉–拉格朗日方程也已在 [13]中计算得出。我们的公式与他们的公式有所不同，这是因为我们为微分不变量选取了不同的一组生成元，并且在方程中省略了因子 W。

3.2.3. 通过全局不变量得到射影不变欧拉–拉格朗日方程。现在我们用有理微分不变量来计算欧拉–拉格朗日算子。

有理微分不变量域由以下元素生成

$$K_0 = \frac{\Theta_8^3}{3\Theta_3^8}, \qquad \bar\nabla = \frac{3\Theta_3^5}{\Theta_8^2}D_x.$$

注意， K_0 与 κ^3成比例。为了用这些量来表示欧拉–拉格朗日算子，我们使用全局不变一形式

$$\varpi = \frac{\Theta_8^2}{3\Theta_3^5}\left(dx - \left(\frac{D_x(\Theta_3)}{3R_2\Theta_3} + \frac{2D_x(1/R_2)}{3}\right)\theta_0\right), \qquad \vartheta_0 = \frac{3\Theta_3^6}{R_2\Theta_8^2}\theta_0,$$

这给出了缩放因子 $W = \dfrac{\Theta_3}{3y_2}$。我们采用与上文类似的方法，使用相同的截面（53）。计算过程很直接，我们得到以下表达式

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^* = {} & -2K_0^6\bar\nabla^7 - \tfrac{140}{3}K_0^5K_1\bar\nabla^6 + \big(-\tfrac{308}{3}K_0^5K_2 + 4K_0^5 - \tfrac{3164}{9}K_0^4K_1^2\big)\bar\nabla^5 + \big(-140K_0^5K_3 - \tfrac{11060}{9}K_0^4K_1K_2 \\ & + \tfrac{505}{9}K_0^4K_1 - \tfrac{27440}{27}K_0^3K_1^3\big)\bar\nabla^4 + \big(-\tfrac{364}{3}K_0^5K_4 - \tfrac{3920}{3}K_0^4K_1K_3 - \tfrac{7420}{9}K_0^4K_2^2 + \tfrac{749}{9}K_0^4K_2 - 2K_0^4 \\ & - \tfrac{35840}{9}K_0^3K_1^2K_2 + \tfrac{5980}{27}K_0^3K_1^2 - \tfrac{84560}{81}K_1^4K_0^2\big)\bar\nabla^3 + \big(-\tfrac{196}{3}K_0^5K_5 - \tfrac{7532}{9}K_0^4K_1K_4 - \tfrac{11480}{9}K_0^4K_2K_3 \\ & + \tfrac{622}{9}K_0^4K_3 - \tfrac{82880}{27}K_0^3K_1^2K_3 - \tfrac{33040}{9}K_0^3K_1K_2^2 + \tfrac{12526}{27}K_0^3K_1K_2 - \tfrac{377}{27}K_0^3K_1 - \tfrac{297920}{81}K_1^3K_0^2K_2 \\ & + \tfrac{21500}{81}K_1^3K_0^2 - \tfrac{66080}{243}K_0K_1^5\big)\bar\nabla^2 + \big(-20K_0^5K_6 - \tfrac{2680}{9}K_0^4K_1K_5 - \tfrac{4796}{9}K_0^4K_2K_4 - 320K_0^4K_3^2 \\ & + \tfrac{274}{9}K_0^4K_4 - \tfrac{34768}{27}K_0^3K_1^2K_4 - \tfrac{97520}{27}K_0^3K_1K_2K_3 - \tfrac{18640}{27}K_0^3K_2^3 + \tfrac{6730}{27}K_0^3K_1K_3 + \tfrac{1382}{9}K_0^3K_2^2 \\ & - \tfrac{97}{9}K_0^3K_2 + \tfrac{8}{27}K_0^3 - \tfrac{146240}{81}K_0^2K_1^3K_3 - \tfrac{79160}{27}K_0^2K_1^2K_2^2 + \tfrac{40828}{81}K_0^2K_1^2K_2 - \tfrac{1676}{81}K_0^2K_1^2 - \tfrac{1}{6}K_0^2K_1 \\ & - \tfrac{3}{2}K_0^2 - \tfrac{160160}{243}K_0K_1^4K_2 + \tfrac{16880}{243}K_0K_1^4 - \tfrac{1120}{243}K_1^6\big)\bar\nabla + \alpha,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha = {} & -\tfrac{8}{3}K_0^5K_7 - \tfrac{136}{3}K_0^4K_1K_6 - \tfrac{280}{3}K_0^4K_2K_5 - \tfrac{6128}{27}K_0^3K_1^2K_5 + \tfrac{50}{9}K_0^4K_5 - \tfrac{392}{3}K_0^4K_3K_4 - \tfrac{19856}{27}K_0^3K_1K_2K_4 \\ & - \tfrac{3344}{9}K_0^2K_1^3K_4 + \tfrac{1460}{27}K_0^3K_1K_4 - \tfrac{1280}{3}K_0^3K_1K_3^2 - \tfrac{12880}{27}K_0^3K_2^2K_3 - \tfrac{36320}{27}K_0^2K_1^2K_2K_3 + \tfrac{2144}{27}K_0^3K_2K_3 \\ & - \tfrac{37280}{243}K_0K_1^4K_3 + \tfrac{10504}{81}K_0^2K_1^2K_3 - \tfrac{28}{9}K_0^3K_3 - \tfrac{35920}{81}K_0^2K_1K_2^3 - \tfrac{64000}{243}K_0K_1^3K_2^2 + \tfrac{436}{3}K_0^2K_1K_2^2 - \tfrac{1}{6}K_0^2K_2 \\ & + \tfrac{17584}{243}K_0K_1^3K_2 - \tfrac{1120}{243}K_1^5K_2 - \tfrac{1208}{81}K_0^2K_1K_2 + \tfrac{200}{243}K_1^5 - \tfrac{44}{9}K_0K_1^3 - \tfrac{2}{9}K_0K_1^2 + \tfrac{16}{27}K_0^2K_1 - 2K_0K_1,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^* = {} & -\tfrac{4}{3}K_0^5\bar\nabla^7 - \tfrac{196}{9}K_0^4K_1\bar\nabla^6 + \big(-\tfrac{364}{9}K_0^4K_2 + \tfrac{23}{9}K_0^4 - \tfrac{2800}{27}K_0^3K_1^2\big)\bar\nabla^5 + \big(-\tfrac{140}{3}K_0^4K_3 - \tfrac{7840}{27}K_0^3K_1K_2 \\ & + \tfrac{620}{27}K_0^3K_1 - \tfrac{12880}{81}K_1^3K_0^2\big)\bar\nabla^4 + \big(-\tfrac{308}{9}K_0^4K_4 - \tfrac{2240}{9}K_0^3K_1K_3 - \tfrac{3920}{27}K_0^3K_2^2 + \tfrac{82}{3}K_0^3K_2 - \tfrac{31}{27}K_0^3 \\ & - \tfrac{12320}{27}K_0^2K_1^2K_2 + \tfrac{3940}{81}K_0^2K_1^2 - \tfrac{14560}{243}K_0K_1^4\big)\bar\nabla^3 + \big(-\tfrac{140}{9}K_0^4K_5 - \tfrac{3472}{27}K_0^3K_1K_4 - \tfrac{4480}{27}K_0^3K_2K_3 \\ & + \tfrac{494}{27}K_0^3K_3 - \tfrac{21280}{81}K_0^2K_1^2K_3 - \tfrac{7280}{27}K_0^2K_1K_2^2 + \tfrac{5960}{81}K_0^2K_1K_2 - \tfrac{725}{162}K_0^2K_1 + \tfrac{1}{6}K_0^2 - \tfrac{31360}{243}K_0K_1^3K_2 \\ & + \tfrac{5200}{243}K_0K_1^3 - \tfrac{1120}{729}K_1^5\big)\bar\nabla^2 + \big(-4K_0^4K_6 - \tfrac{992}{27}K_0^3K_1K_5 - \tfrac{1360}{27}K_0^3K_2K_4 - \tfrac{80}{3}K_0^3K_3^2 + \tfrac{176}{27}K_0^3K_4 + \tfrac{40}{81}K_1^4 \\ & - \tfrac{6704}{81}K_0^2K_1^2K_4 - \tfrac{13600}{81}K_0^2K_1K_2K_3 - \tfrac{2000}{81}K_0^2K_2^3 + \tfrac{2336}{81}K_0^2K_1K_3 + \tfrac{1190}{81}K_0^2K_2^2 - \tfrac{427}{162}K_0^2K_2 + \tfrac{4}{27}K_0^2 \\ & - \tfrac{10240}{243}K_0K_1^3K_3 - \tfrac{3760}{81}K_0K_1^2K_2^2 + \tfrac{208}{9}K_0K_1^2K_2 - \tfrac{209}{81}K_0K_1^2 + \tfrac{2}{9}K_0K_1 - K_0 - \tfrac{1120}{729}K_1^4K_2\big)\bar\nabla + \beta,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\beta = {} & -\tfrac{4}{9}K_0^4K_7 - \tfrac{40}{9}K_0^3K_1K_6 - \tfrac{56}{9}K_0^3K_2K_5 - \tfrac{880}{81}K_0^2K_1^2K_5 + \tfrac{26}{27}K_0^3K_5 \\ & - \tfrac{56}{9}K_0^3K_3K_4 - \tfrac{1696}{81}K_0^2K_1K_2K_4 - \tfrac{160}{27}K_0K_1^3K_4 + \tfrac{124}{27}K_0^2K_1K_4 - \tfrac{80}{9}K_0^2K_1K_3^2 - \tfrac{560}{81}K_0^2K_2^2K_3 \\ & - \tfrac{800}{81}K_0K_1^2K_2K_3 + \tfrac{38}{9}K_0^2K_2K_3 - \tfrac{160}{729}K_1^4K_3 + \tfrac{880}{243}K_0K_1^2K_3 - \tfrac{49}{81}K_0^2K_3 \\ & - \tfrac{320}{243}K_0K_1K_2^3 + \tfrac{544}{243}K_0K_1K_2^2 - \tfrac{80}{729}K_1^3K_2^2 + \tfrac{40}{243}K_1^3K_2 - \tfrac{92}{81}K_0K_1K_2 - \tfrac{5}{81}K_1^3 + \tfrac{4}{27}K_0K_1 - \tfrac{1}{3}K_1.\end{aligned}$$

我们注意到，这些公式比前面的局部不变量更为复杂。这里的重点是说明，针对任意微分不变量生成集和任意不变接触形式基，都可以进行计算，而且无需付出太多额外努力。

以拉格朗日量为例，考虑全局拉格朗日量 $\lambda = \varpi$。这对应于 $L = 1$，在这种情况下，欧拉–拉格朗日方程为 $\beta = 0$。更明确地说，正则极值曲线必须

满足以下方程:

$$\begin{aligned}K_7 = -\frac{1}{324K_0^4}\big(&3240K_0^3K_1K_6 + 4536K_0^3K_2K_5 + 4536K_0^3K_3K_4 + 7920K_0^2K_1^2K_5 + 15264K_0^2K_1K_2K_4\\ &+ 6480K_0^2K_1K_3^2 + 5040K_0^2K_2^2K_3 + 4320K_0K_1^3K_4 + 7200K_0K_1^2K_2K_3 + 960K_0K_1K_2^3 + 160K_1^4K_3\\ &+ 80K_1^3K_2^2 - 702K_0^3K_5 - 3348K_0^2K_1K_4 - 3078K_0^2K_2K_3 - 2640K_0K_1^2K_3 - 1632K_0K_1K_2^2 - 120K_1^3K_2\\ &+ 441K_0^2K_3 + 828K_0K_1K_2 + 45K_1^3 - 108K_0K_1 + 243K_1\big).\end{aligned}$$

Si类似地，对于 $L = q$，不变欧拉–拉格朗日方程由 $\alpha = -\mathcal{B}^*(q)$ 给出。

3.3. 欧几里得不变变分问题 $3D$。**</style}流形为 (,** $y,\ z$)，我们考虑 SE(3) 在 $\mathbb{R}^3$ 上的李群作用。相应的李代数 $\mathfrak{se}(3)$ 的生成元为 $\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z,\ x\partial_y - y\partial_x,\ x\partial_z - z\partial_x,\ y\partial_z - z\partial_y$，分别记作 $X_1,\ \ldots,\ X_6$。

3.3.1. 生成微分不变量。在此情形下，局部微分不变量代数由以下元素生成

$$\kappa = \frac{\sqrt{(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + y_2^2 + z_2^2}}{(1 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}}, \quad \tau = \frac{y_2z_3 - z_2y_3}{(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + y_2^2 + z_2^2} \text{ and } \quad D_s = \frac{1}{\sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}}D_x.$$

有理微分不变量域由以下元素生成

$$\kappa^2, \quad \tau, \quad \nabla = \kappa\kappa_s D_s.$$

3.3.2. 通过局部不变量得到欧几里得不变欧拉–拉格朗日方程。回顾一下，非退化曲线的经典弗雷内–塞雷移动标架是通过考虑单位切向量 T 和法向量 N，并将它们与叉积 $B = T \times N$ 一起组成的。我们将此移动标架视为一个等变映射 $\rho_{\mathrm{FS}}\colon J^\infty \to \mathrm{SO}(3)$，它由 π_2^∞ 与.....复合得到

$$(x, y, z, y_1, z_1, y_2, z_2) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\ell} & -\dfrac{y_1y_2 + z_1z_2}{\ell\zeta} & \dfrac{y_1z_2 - y_2z_1}{\zeta} \\[2ex] \dfrac{y_1}{\ell} & \dfrac{-y_1z_1z_2 + y_2z_1^2 + y_2}{\ell\zeta} & -\dfrac{z_2}{\zeta} \\[2ex] \dfrac{z_1}{\ell} & \dfrac{y_1^2z_2 - y_1y_2z_1 + z_2}{\ell\zeta} & \dfrac{y_2}{\zeta} \end{pmatrix} \tag{59}$$

$$\text{where } \ell = \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2} \text{ and } \zeta = \sqrt{(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + y_2^2 + z_2^2} = \ell^3\kappa. \tag{60}$$

回顾一下，移动标架将点 $u \in J^\infty$ 映射到 SO(3) 中的群元素，该元素把 u变换到 u 的轨道与截面的交集中唯一的点。更确切地说，我们实际上应考虑 SE(3) 的轨道，而不只是 SO(3) 的轨道，不过我们可以利用平移令 $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$。通过求解满足 $\rho_{\mathrm{FS}}(u) = \mathbf{1}_3$ 的点 $u \in J^2$，即可恢复截面 Σ 的其余方程。弗雷内–塞雷移动标架的截面 Σ_{FS}为

$$\Sigma_{\mathrm{FS}} = \{x = 0, y = 0, z = 0, y_1 = 0, z_1 = 0, z_2 = 0\}. \tag{61}$$

对水平一形式 dx进行不变化，得到不变水平形式 ϖ:

$$\varpi = \iota(dx) = \frac{dx + y_1dy + z_1dz}{\sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}}. \tag{62}$$

类似地，我们得 到不变接触形式 $\iota(\theta_j^i)$，方法是对标准接触一形式进行不变化 .

我们使用该算法计算不变欧拉–拉格朗日方程。将不变水平微分和垂直微分 (33) 应用于坐标函数 $x,\ y,\ z,\ y_1,\ z_1,\ z_2$，可得关于 γ和 ϵ 项的线性方程组。其解为

$$\begin{aligned}&\gamma^1 = -\varpi,\ \gamma^2 = 0,\ \gamma^3 = 0,\ \gamma^4 = -\kappa\varpi,\ \gamma^5 = 0,\ \gamma^6 = -\tau\varpi,\\ &\epsilon^1 = 0,\ \epsilon^2 = -\iota(\theta_0^y),\ \epsilon^3 = -\iota(\theta_0^z),\ \epsilon^4 = -\iota(\theta_1^y),\ \epsilon^5 = -\iota(\theta_1^z),\ \epsilon^6 = -\frac{\iota(\theta_2^z)}{\kappa}.\end{aligned}$$

我们计算不变量 κ，τ 的不变垂直微分以及不变水平形式 ϖ，然后将这些表达式改写为作用于最低阶不变接触形式的微分算子。

利用 $\iota(y_2) = \kappa$，我们计算得

$$d_{\mathcal{V}}\kappa = \iota(\theta_2^y) = \left(D_s^2 + (\kappa^2 - \tau^2)\right)\iota(\theta_0^y) - (2\tau D_s + \tau_s)\,\iota(\theta_0^z). \tag{63}$$

同样，利用 $\iota\begin{pmatrix} z_3 \\ y_2 \end{pmatrix} = \tau$和方程 (33)，我们得到

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{V}}\tau = &\left(\frac{2\tau}{\kappa}D_s^2 + \left(\frac{3\tau_1}{\kappa} - \frac{2\tau\kappa_s}{\kappa^2}\right)D_s + \left(\frac{\tau_{ss}}{\kappa} + 2\tau\kappa - \frac{\tau_s\kappa_s}{\kappa^2}\right)\right)\iota(\theta_0^y) \\ &+ \left(\frac{1}{\kappa}D_s^3 - \frac{\kappa_s}{\kappa^2}D_s^2 + \left(\kappa - \frac{\tau^2}{\kappa}\right)D_s + \left(\frac{\kappa_s\tau^2}{\kappa^2} - \frac{2\tau\tau_s}{\kappa}\right)\right)\iota(\theta_0^z). \end{aligned} \tag{64}$$

我们有 $d_{\mathcal{V}}\varpi = -\kappa\,\iota(\theta_0^y) \wedge \varpi$，由此得到 $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -\kappa & 0 \end{pmatrix}$。利用形式伴随的定义，我们得到

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}_y^\kappa)^* & (\mathcal{A}_y^\tau)^* \\ (\mathcal{A}_z^\kappa)^* & (\mathcal{A}_z^\tau)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_s^2 + (\kappa^2 - \tau^2) & \dfrac{2\tau}{\kappa}D_s^2 + \left(\dfrac{\tau_s}{\kappa} - \dfrac{2\tau\kappa_s}{\kappa^2}\right)D_s + 2\tau\kappa \\ 2\tau D_s + \tau_s & -\dfrac{1}{\kappa}D_s^3 + \dfrac{2\kappa_s}{\kappa^2}D_s^2 + \left(\dfrac{\kappa_{ss}}{\kappa^2} - \dfrac{2\kappa_s^2}{\kappa^3} - \kappa + \dfrac{\tau^2}{\kappa}\right)D_s - \kappa_s. \end{pmatrix} \tag{65}$$

注意，形式伴随 $\mathcal{A}^*$ 的计算尤其涉及矩阵$\mathcal{A}$的转置。显然，$\mathcal{B}$ 是（形式）自伴的，即 $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^T$。

不变欧拉–拉格朗日方程的分量形式为

$$\begin{cases} \left(D_s^2 + (\kappa^2 - \tau^2)\right)\mathcal{E}_\kappa(L) + \left(\dfrac{2\tau}{\kappa}D_s^2 + \left(\dfrac{\tau_s}{\kappa} - \dfrac{2\tau\kappa_s}{\kappa^2}\right)D_s + 2\tau\kappa\right)\mathcal{E}_\tau(L) + \kappa\cdot\mathcal{H}(L) = 0 \\ (2\tau D_s + \tau_s)\,\mathcal{E}_\kappa(L) + \left(-\dfrac{1}{\kappa}D_s^3 + \dfrac{2\kappa_s}{\kappa^2}D_s^2 + \left(\dfrac{\kappa_{ss}}{\kappa^2} - \dfrac{2\kappa_s^2}{\kappa^3} - \kappa + \dfrac{\tau^2}{\kappa}\right)D_s - \kappa_s\right)\mathcal{E}_\tau(L) = 0 \end{cases} \tag{66}$$

矩阵相对不变量 W 很容易计算：既可以利用显式的移动标架 ρ_{FS}，也可以应用公式 (7)、(10)，并采用记号 (60)，从而得到公式

$$W = \frac{1}{\zeta}\begin{pmatrix} (1+z_1^2)y_2 - y_1z_1z_2 & (1+y_1^2)z_2 - y_1z_1y_2 \\ -z_2\ell & y_2\ell \end{pmatrix}. \tag{67}$$

特别地，我们有 $\det(W) = \ell$。因此，奇异极值曲线必须具有零长度。对于欧几里得度规符号，这类极值曲线不存在（但在洛伦兹度规符号下确实存在）。

下表列出了一些不变欧拉–拉格朗日方程的例子。

拉格朗日量	欧拉量	哈密顿量	不变欧拉–拉格朗日方程
ds	$(0,\ 0)^T$	-1	$\kappa = 0$
$\kappa\, ds$	$(1,\ 0)^T$	$-\kappa$	$\tau = 0$
$\tau\, ds$	$(0,\ 1)^T$	$-\tau$	$\begin{cases} \tau\,\kappa = 0 \\ \kappa_s = 0 \end{cases}$
$\kappa^2\, ds$	$(2\kappa,\ 0)^T$	$-\kappa^2$	$\begin{cases} \kappa_{ss} = \kappa\tau^2 - \dfrac{1}{2}\kappa^3 \\ \kappa\tau_s + 2\kappa_s\tau = 0 \end{cases}$

请注意，前两个例子中我们都只得到 1 个方程。它们的不变欧拉–拉格朗日算子分别为 $(-\kappa,\ 0)$ 和 $(-L_0^2,\ L_1)$。

测地线。变分问题 $\int ds$给出不变欧拉–拉格朗日方程 $\kappa = 0$。该方程的解曲线是 $\mathbb{R}^3$ 中的直线，也就是欧几里得度量下的测地线。（洛伦兹情形下的奇异极值曲线由零测地线给出。）

无参数共形测地线。考虑与以下变分问题相对应的不变拉格朗日量 $L = \tau$

$$\int \tau\ ds = \int \tau\ \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}\ dx. \tag{68}$$

计算不变欧拉量和不变哈密顿量可得，$\mathcal{E}_\kappa(L) = 0$，$\mathcal{E}_\tau(L) = 1$ 以及 $\mathcal{H}(L) = -\tau$，分别成立。不变欧拉–拉格朗日方程为

$$\tau\kappa = 0 \qquad \kappa_s = 0. \tag{69}$$

注意，当 $\kappa = 0$ 时，τ 并未定义。不变欧拉–拉格朗日方程意味着 $\tau = 0$和 $\kappa_s = 0$ 均成立。曲线的挠率为零当且仅当它是平面曲线，此时条件 $\kappa_s = 0$ 意味着该曲线是一个圆。因此，变分问题（68）的极值曲线由圆组成，也就是共形测地线。

弹性曲线。弹性曲线是弯曲能（或测地曲率平方）泛函$\int \kappa^2 ds$ 的解曲线。其不变欧拉–拉格朗日方程为

$$\kappa_{ss} = \kappa\tau^2 - \frac{1}{2}\kappa^3, \qquad \kappa\tau_s + 2\kappa_s\tau = 0. \tag{70}$$

在 [22] 中，弯曲能量泛函的不变欧拉–拉格朗日方程是在具有常 G曲率的黎曼流形上计算得到的，其形式为

$$\kappa_{ss} = \kappa\tau^2 - \frac{1}{2}\kappa^3 - G\kappa, \qquad \kappa\tau_s + 2\kappa_s\tau = 0, \tag{71}$$

这与平坦情形（$G = 0$）的结果一致。这与（未参数化的）共形测地线情形形成对比；在任意共形三维流形 [20], [16]上，其不变欧拉–拉格朗日方程由 $\kappa_s = 0$和 $\kappa\tau = 0$ 给出。其原因在于，后一个变分问题具有共形不变性，而前一个则没有。

3.3.3. 基于全局不变量的欧几里得不变欧拉–拉格朗日方程。我们使用有理不变量 $K := \kappa^2$, $T := \tau$、有理不变微分算子 $\nabla = \kappa\kappa_s \dfrac{d}{ds}$ 以及与之前相同的截面。对于 1-形式的不变基，我们取

$$\begin{aligned}
\varpi &= \frac{1}{\kappa\kappa_s\sqrt{1+y_1^2+z_1^2}}(dx + y_1 dy + z_1 dz),\\
\vartheta_0^y &= \frac{1}{(1+y_1^2+z_1^2)^2}\left(((1+z_1^2)y_2 - y_1 z_1 z_2)\theta_0^y + ((1+y_1^2)z_2 - y_1 z_1 y_2)\theta_0^z\right),\\
\vartheta_0^z &= \frac{\kappa_s}{\sqrt{(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + y_2^2 + z_2^2}}\left(y_2\theta_0^z - z_2\theta_0^y\right),
\end{aligned} \tag{72}$$

它们的系数全都是有理数。现在，

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}_y^K)^* & (\mathcal{A}_y^T)^* \\ (\mathcal{A}_z^K)^* & (\mathcal{A}_z^T)^* \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}^* = \begin{pmatrix} (\mathcal{B}_y)^* \\ (\mathcal{B}_z)^* \end{pmatrix}$$

are

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_y^K)^* &= \frac{4}{K_1}\nabla^2 - \left(\frac{6K_2}{K_1^2} - \frac{4}{K_0}\right)\nabla - \left(\frac{2K_3}{K_1^2} - \frac{4K_2^2}{K_1^3} + \frac{K_2}{K_0K_1} + \frac{K_1}{K_0^2} + 2T_0^2 - 2K_0\right),\\
(\mathcal{A}_y^T)^* &= \frac{4T_0}{K_0K_1}\nabla^2 - \left(\frac{6T_0K_2}{K_0K_1^2} - \frac{2T_1}{K_0K_1} + \frac{2T_0}{K_0^2}\right)\nabla + \left(-\frac{2T_0K_3}{K_0K_1^2} + \frac{4T_0K_2^2}{K_0K_1^3} - \frac{T_1K_2}{K_0K_1^2} + \frac{T_0K_2}{K_0^2K_1} + 2T_0\right),\\
(\mathcal{A}_z^K)^* &= \frac{8K_0T_0}{K_1}\nabla - \left(\frac{4K_0T_0K_2}{K_1^2} - \frac{4K_0T_1}{K_1} + 4T_0\right),\\
(\mathcal{A}_z^T)^* &= -\frac{4}{K_1^2}\nabla^3 + \left(\frac{12K_2}{K_1^3} + \frac{4}{K_0K_1}\right)\nabla^2 + \left(\frac{8K_3}{K_1^3} - \frac{19K_2^2}{K_1^4} - \frac{5K_2}{K_0K_1^2} + \frac{2T_0^2}{K_1} - \frac{2K_0}{K_1} - \frac{3}{K_0^2}\right)\\
&\quad + \left(\frac{2K_4}{K_1^3} - \frac{13K_2K_3}{K_1^4} - \frac{2K_3}{K_0K_1^2} + \frac{14K_2^3}{K_1^5} + \frac{7K_2^2}{2K_0K_1^3} + \frac{3K_2}{2K_0^2K_1} + \frac{(K_0 - T_0^2)K_2}{K_1^2} - 1\right),\\
(\mathcal{B}_y)^* &= \frac{4}{K_1^2}\nabla^3 + \left(-\frac{18K_2}{K_1^3} + \frac{4}{K_0K_1}\right)\nabla^2 + \left(-\frac{14K_3}{K_1^3} + \frac{40K_2^2}{K_1^4} - \frac{9K_2}{K_0K_1^2} - \frac{2T_0^2}{K_1} + \frac{2K_0}{K_1} - \frac{1}{K_0^2}\right)\nabla\\
&\quad + \left(-\frac{4K_4}{K_1^3} + \frac{32K_2K_3}{K_1^4} - \frac{4K_3}{K_0K_1^2} - \frac{40K_2^3}{K_1^5} + \frac{9K_2^2}{K_0K_1^3} + \frac{K_2}{K_0^2K_1} + \frac{2(T_0^2 - K_0)K_2}{K_1^2} - 2\right),\\
(\mathcal{B}_z)^* &= \frac{8K_0T_0}{K_1^2}\nabla^2 + \left(-\frac{20K_0T_0K_2}{K_1^3} + \frac{4K_0T_1}{K_1^2} + \frac{4T_0}{K_1}\right)\nabla\\
&\quad + \left(-\frac{4K_0T_1K_2}{K_1^3} - \frac{8K_0T_0K_3}{K_1^3} + \frac{20K_0T_0K_2^2}{K_1^4} - \frac{4T_0K_2}{K_1^2}\right).
\end{aligned}$$

例如，若拉格朗日量为 ϖ，则正则极值曲线对应的不变欧拉–拉格朗日方程为

$$\begin{aligned}
K_4 &= -\tfrac{-2K_0^2K_1^3K_2T_0^2 + 2K_0^3K_1^3K_2 + 2K_0^2K_1^5 - 32K_0^2K_1K_2K_3 + 40K_0^2K_2^3 + 4K_0K_1^3K_3 - 9K_0K_1^2K_2^2 - K_1^4K_2}{4K_0^2K_1^2},\\
T_1 &= -T_0\tfrac{2K_0K_1K_3 - 5K_0K_2^2 + K_1^2K_2}{K_0K_1K_2}.
\end{aligned}$$

由全局不变形式 (72) 确定的矩阵相对不变量 W 与 (67) 成比例，其比例因子为 $\operatorname{diag}(\kappa_s^{-1}, \kappa^{-1})$。

3.4. **三维共形不变变分问题**。群 $G = \mathrm{SO}(1,4)$ 通过共形变换作用于 $\mathbb{S}^3$；事实上，它就是整个共形自同构群。相应的李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,4)$ 在图表 $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ 中代数地作用。它由三个平移 ∂_x、∂_y、∂_z，三个旋转 $x\partial_y - y\partial_x$、$x\partial_z - z\partial_x$、$y\partial_z - z\partial_y$、位似变换 $x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$，以及三个反演$1\,2(x^2+y^2+z^2)\partial_x - x(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)$ 等生成，依次记为 $X_1, \dots, X_{10}$。

3.4.1. 生成微分不变量。 共形空间中曲线的局部微分不变量可追溯至 H. Liebmann 和 T. Takasu，参见 [4, 21] 及其中的参考文献。在三维常曲率空间中（通常取球面；本文将讨论平坦空间），生成元为以下两个微分不变量和不变导子，它们用欧几里得曲率 κ、挠率 τ 和自然参数 ds （其中 $\kappa_s = \frac{d}{ds}\kappa$ 等）表示：

$$\begin{aligned} Q &= \frac{4\nu\nu_{ss} - 4\kappa^2\nu^2 - 5\nu_s^2}{8\nu^3}, \qquad T = \frac{2\kappa_s^2\tau + \kappa^2\tau^3 + \kappa\kappa_s\tau_s - \kappa\kappa_{ss}\tau}{\nu^{5/2}}, \\ \nu &= \sqrt{\kappa^2\tau^2 + \kappa_s^2}, \qquad \omega = \sqrt{\nu}ds, \quad D_\omega = \nu^{-1/2}\frac{d}{ds}. \end{aligned} \tag{73}$$

因此，第一个绝对不变量出现在 4 阶，即共形挠率 T。在 5 阶时，又出现两个不变量：共形曲率 Q 和挠率导数 $T_\omega = D_\omega T$。6 阶时则产生另外两个不变量 $Q_\omega, T_{\omega\omega}$，依此类推。相对不变量 ν 称为共形弧长。注意 Q与 q，以及 ω 与 σ之间的相似性。

现在让我们求出全局（有理）微分不变量。参考文献 [4] 给出了 $\mathbb{R}^3$中曲线的如下标准形，其中第一个坐标 x 用作参数：

$$y = \frac{x^3}{3!} + (2Q - T^2)\frac{x^5}{5!} + O(x^6), \quad z = T\frac{x^4}{4!} + T_\omega\frac{x^5}{5!} + O(x^6).$$

请注意，对于无参数曲线，这里作了若干选择：定向和余定向（包括环境空间的定向），这些选择并非在共形群$O(4,1)$的作用下保持不变。这实际上是一个在 $\mathbb{R}^3$上的伪群（或群胚）作用，而群作用在 $\mathbb{S}^3$上。

上述坐标选择在变换 $(x,\ y,\ z) \mapsto \left(\sigma x, \sigma^{-1}y, \epsilon\sigma z\right)$ 下保持不变，其中 $\epsilon^2 = 1, \sigma^4 = 1$。考虑到这一离散自由度，局部不变量的变化如下：

$$T \mapsto \epsilon\sigma T, \qquad Q \mapsto \sigma^2 Q, \qquad D_\omega \mapsto \sigma^{-1}D_\omega,$$

还要注意，欧几里得曲率和自然参数按 $\kappa \mapsto \sigma^2\kappa$, $\frac{d}{ds} \mapsto \sigma^2\frac{d}{ds}$ 变化，而 τ 保持不变。因此，含有偶数个 κ 和 s-导数的表达式是不变量，整体有理共形不变量的生成元如下：

$$T^4, \qquad QT^2, \qquad \nabla = TT_\omega D_\omega. \tag{74}$$

第一个不变量是 T^4，阶为 4；接下来是 Q^2, QT^2 和 T_ω^2，阶为 5，但我们注意到 $Q^2 = (QT^2)^2/T^4$ 是导出的。阶为 6 时，我们得到 $T^{-1}T_\omega Q_\omega$ 和 $TT_{\omega\omega}$，等等。最低阶的整体不变形式是 $T^{-1}T_\omega^{-1}\omega$。

注记 9. 虽然我们使用实李群，但残余自由度是相对于复变量而言的，因此适用于共形结构的任意符号型。尽管可以将约束简化为 $\sigma^2 = 1$ over $\mathbb{R}$，我们仍保留上述约束以获得有理不变量，参见 [15, §5.3]。

3.4.2. 通过局部不变量得到共形不变的欧拉–拉格朗日方程。 利用 $G =$Conf(3) 的作用尽可能固定群参数，我们得到以下截面

$$\Sigma := \{x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ y_1 = 0,\ z_1 = 0,\ y_2 = 0,\ z_2 = 0,\ y_3 = 1,\ z_3 = 0,\ y_4 = 0\}. \tag{75}$$

将共形挠率 T和共形曲率 Q限制到截面上，得到 $T|_\Sigma = z_4$, $Q|_\Sigma = \frac{1}{2}(z_4^2 + y_5)$。因此，我们有 $T = \iota(z_4)$ 和 $Q = \frac{1}{2}\iota(y_5 + z_4^2)$。此外，水平形式 ω（与 D_ω对偶）在截面上等于 dx。因此，我们定义 $\varpi := \iota(dx)$，这确保 ϖ 的水平部分等于 ω。我们通过应用算法计算不变欧拉–拉格朗日方程。

我们得到 γ^i 和 ϵ^i 分量的如下表达式：

$$\begin{aligned} &\gamma^1 = -\varpi,\ \gamma^2 = 0, \gamma^3 = 0,\ \gamma^4 = 0,\ \gamma^5 = 0,\ \gamma^6 = -T\,\varpi, \gamma^7 = 0,\ \gamma^8 = -Q\,\varpi, \gamma^9 = -\varpi,\ \gamma^{10} = 0, \\ &\epsilon^1 = 0,\ \epsilon^2 = -\iota(\theta_0^y), \epsilon^3 = -\iota(\theta_0^z),\ \epsilon^4 = -\iota(\theta_1^y),\ \epsilon^5 = -\iota(\theta_1^z),\ \epsilon^6 = -\iota(\theta_3^z), \\ &\epsilon^7 = \frac{\iota(\theta_3^y)}{2},\ \epsilon^8 = -\frac{1}{2}\,\iota(\theta_4^y) - \frac{T\iota(\theta_3^z)}{2}, \epsilon^9 = -\iota(\theta_2^y),\ \epsilon^{10} = -\iota(\theta_2^z). \end{aligned} \tag{76}$$

通过计算不变垂直微分 $d_V T$, $d_V Q$ 和 $d_V \varpi$，并将其改写为不变微分算子对零阶不变接触形式的作用，我们得到 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$的表达式。我们很容易计算出它们的形式伴随算子：

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}_y^T)^* &= -\frac{5T}{2}D_\omega^3 - \frac{3T_1}{2}D_\omega^2 + \left(\frac{1}{2}T_2 - \frac{1}{2}T^3 + TQ\right)D_\omega + \left(\frac{1}{2}T_3 - 3T^2T_1 - \frac{1}{2}TQ_1 - T_1Q\right)\\
(\mathcal{A}_z^T)^* &= D_\omega^4 + \left(-\frac{3T^2}{2} - 2Q\right)D_\omega^2 + \left(-Q_1 + \frac{3TT_1}{2}\right)D_\omega + \left(2TT_2 + \frac{3}{2}T_1^2 - 1 - \frac{1}{2}T^4 - QT^2\right)\\
(\mathcal{A}_y^Q)^* &= -\frac{1}{2}D_\omega^5 + \left(\frac{3T^2}{2} + 2Q\right)D_\omega^3 + \left(\frac{3TT_1}{2} + \frac{7Q_1}{2}\right)D_\omega^2 + \left(-3QT^2 - 2Q^2 + 3Q_2 - 2\right)D_\omega\\
&\quad + \left(Q_3 - 3QTT_1 - 3Q_1T^2 - 3QQ_1\right)\\
(\mathcal{A}_z^Q)^* &= -\frac{3T}{2}D_\omega^4 - \frac{3T_1}{2}D_\omega^3 + \left(4TQ - \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T^3\right)D_\omega^2 + \left(3T_1Q + 6TQ_1\right)D_\omega\\
&\quad + \left(-QT^3 - 2Q^2T + T_2Q + 3T_1Q_1 + 3TQ_2 - T\right)\\
(\mathcal{B}_y)^* &= -\frac{1}{2}D_\omega^3 + \left(\frac{3T^2}{2} + Q\right)D_\omega + \left(\frac{Q_1}{2} + \frac{3TT_1}{2}\right)\\
(\mathcal{B}_z)^* &= -\frac{3T}{2}D_\omega^2 - \frac{3T_1}{2}D_\omega + \left(-\frac{1}{2}T_2 + TQ + \frac{1}{2}T^3\right)
\end{aligned}
\tag{77}
$$

我们根据（77）计算了一些共形不变欧拉–拉格朗日方程的示例。结果如下表所示。

拉格朗日量	欧拉量	哈密顿量	不变欧拉–拉格朗日方程
ω	${}^{(0,\ 0)}_{T}$	-1	$\begin{cases} Q_1 + 3TT_1 = 0 \\ T_2 = T^3 + 2TQ \end{cases}$
$T\ \omega$	$(1,\ 0)^T$	$-T$	$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -1 \end{cases}$ **(注意**：这意味着不存在正则极值曲线。**)**
$Q\ \omega$	$(0,\ 1)^T$	$-Q$	$\begin{cases} Q_3 = 3TQT_1 + 3QT^2 + 3QQ_1 \\ Q_2 = \dfrac{1}{3T}\left(T^3Q + (2Q^2 + 2)T - T_2Q - 3T_1Q_1\right) \end{cases}$
$T^2\ \omega$	$(2T,\ 0)^T$	$-T^2$	$\begin{cases} T_4 = \dfrac{1}{4}T^5 + \dfrac{1}{2}T^3Q + \dfrac{5}{4}T^2T_2 + 2QT_2 + T_1Q_1 + T \\ T_3 = \dfrac{1}{10T}\left(T_1(-10T_2 + 4TQ - 5T^3) - T^2Q_1\right) \end{cases}$
$Q^2\ \omega$	$(0, 2Q)^T$	$-Q^2$	$\begin{cases} Q_5 = R(T, T_1, Q_1, Q_2, Q_3) \\ Q_4 = \dfrac{S(T, T_1, T_2, Q, Q_1, Q_2, Q_3)}{6T} \end{cases}$ $(R, S$ 多项式**)**

这里的多项式 R, S 由以下公式给出：

$$
\begin{aligned}
R &= -\frac{9}{2}Q^2TT_1 - 9QQ_1T^2 + 3Q_2TT_1 + 3Q_3T^2 - \frac{15}{2}Q^2Q_1 + 5Q_0Q_3 + 10Q_2Q_1 - 4Q_1\\
S &= -3Q^2T^3 - 6Q^3T + 2Q_2T^3 + 3Q^2T_2 + 18T_1QQ_1 + 22QQ_2T + 18Q_1^2T - 4TQ - 2T_2Q_2 - 6T_1Q_3
\end{aligned}
\tag{78}
$$

3.4.3. 利用一般不变余标架计算相对不变量 W。为了将不变欧拉–拉格朗日方程与通常的欧拉–拉格朗日方程联系起来，计算矩阵相对不变量 W至关重要。然而，对于上述计算，我们无需借助不变接触 1-形式的显式表达式。计算显式移动标架在计算上十分困难。为绕过这一难题，我们使用式（10）中构造的零阶不变接触形式，它们可与通常接触形式的不变化联系起来。这将使我们能够计算W，并特别确定拉格朗日量 $T\ \omega$的欧拉–拉格朗日方程。

应用公式 orm（7）、（10），我们构造出两个零阶不变接触形式 $Q, T\ \vartheta_0^1, \vartheta_0^2$：

$$\vartheta_0^1 := 2\left(\frac{dQ(\partial_{y_5})}{(D_\omega(x))^5}\cdot\theta_0^y + \frac{dQ(\partial_{z_5})}{(D_\omega(x))^5}\cdot\theta_0^z\right) \qquad \vartheta_0^2 := \left(\frac{dT(\partial_{y_4})}{(D_\omega(x))^4}\cdot\theta_0^y + \frac{dT(\partial_{z_4})}{(D_\omega(x))^4}\cdot\theta_0^z\right). \tag{79}$$

我们希望将这些一形式与不变化 $\iota(\theta_0^y)$ 和 $\iota(\theta_0^z)$ 联系起来。为此，我们将 $\vartheta_0^1, \vartheta_0^2$代入截面 Σ。根据不变化映射的定义，我们有 $\iota(\theta_0^y)|_\Sigma = \theta_0^y$ 和 $\iota(\theta_0^z)|_\Sigma = \theta_0^z$。由此得到如下形式的坐标表达式

$$(\vartheta_0^i)|_\Sigma = a_y^i\,\theta_0^y + a_z^i\,\theta_0^z \qquad (i = 1, 2).$$

在这个例子中，系数恰好为

$$a_y^1 = 1, \quad a_z^1 = 0, \qquad a_y^2 = 0, \quad a_z^2 = 1,$$

因此，我们有 $\vartheta_0^1 = \iota(\theta_0^y)$ 和 $\vartheta_0^2 = \iota(\theta_0^z)$。由此，我们得到了零阶不变接触形式的显式坐标表达式，而无需使用显式的移动标架。由于 ϖ 的水平部分已知（73），接下来便可根据其定义（26）计算 W。我们得到如下表达式（注意这里进行了转置）：

$$W = \begin{pmatrix} \dfrac{(z_1^2+1)y_3 - y_1z_1z_3}{\ell^4} - 3\dfrac{(y_1y_2+z_1z_2)((z_1^2+1)y_2 - y_1z_1z_2)}{\ell^6} & -\dfrac{z_3}{\ell^3} - 3\dfrac{(y_1y_2+z_1z_2)z_2}{\ell^5} \\ \dfrac{(y_1^2+1)z_3 - y_1z_1y_3}{\ell^4} - 3\dfrac{(y_1y_2+z_1z_2)((y_1^2+1)z_2 - y_1z_1y_2)}{\ell^6} & \dfrac{y_3}{\ell^3} - 3\dfrac{(y_1y_2+z_1z_2)y_2}{\ell^5} \end{pmatrix}^T. \tag{80}$$

容易验证， W 是一个矩阵相对不变量。**(注意**：这并不意味着它的各个元素都是标量相对不变量。**)**

3.4.4. 奇异极值曲线：共形测地线。 在 [12] 中，作者提出了这样一个问题：是否存在某些不变变分问题，其所有极值曲线都是奇异的。我们证明， $\mathbb{R}^3$ 上的共形测地线就是这样的例子。众所周知，共形测地线是以拉格朗日量 $\tau\ ds$为拉格朗日量的变分问题的极值曲线，而该拉格朗日量在 $\mathbb{R}^3$的等距变换群作用下保持不变。在 [19]中证明了

$$\int \tau\ ds = \int T\ \omega \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi\mathbb{Z}), \tag{81}$$

其中积分取遍具有固定端点的路径，因此共形测地线也是共形挠率泛函的极值曲线。共形测地线方程 $\kappa_s = 0$ 和 $\kappa\tau = 0$ 等价于共形相对不变量 $\nu = \sqrt{\kappa_s^2 + \kappa^2\tau^2}$为零。由于 ν出现在共形挠率 T的分母中，我们得出结论：共形测地线是奇异极值曲线。

我们仍然可以利用定理1计算欧拉–拉格朗日方程。得到不变的欧拉–拉格朗日系统为 $\mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(T) = (0,\ -1)^T$。令其等于零，显然无解，这意味着不存在正则极值曲线。矩阵相对不变量 W 可轻易计算得出 (80)，并且满足 $\det(W) = \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}\,\nu^2$。求解欧拉–拉格朗日方程 $\mathrm{E}(L) = W\cdot(0,\ -1)^T = 0$，可得三阶导数

$$y_3 = \frac{3y_2(y_1y_2 + z_1z_2)}{1 + y_1^2 + z_1^2} \qquad z_3 = \frac{3z_2(y_1y_2 + z_1z_2)}{1 + y_1^2 + z_1^2}. \tag{82}$$

容易看出，这些就是无参数共形测地线方程。或者，也可以注意到，W的行列式 $= 0$，这是因为第二列 W 为零。这意味着 $\nu = 0$，因此我们得到两个方程 $\kappa_s = 0$ 和 $\kappa\tau = 0$，它们描述了（无参数）共形测地线。

注释10. 这个例子还表明，在为某个 G不变变分问题计算欧拉–拉格朗日方程时，将范围限制在子群 $H \subseteq G$ 内可能会更方便。在这种情况下，将范围限制在 $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathrm{Conf}(\mathbb{R}^3)$ 后，我们仍有两个生成微分不变量，但它们的阶较低。此外，此时奇异点集合也会变小。事实上，对于等距变换不变变分问题 $\int \tau\, ds$，共形测地线是正则极值曲线。

3.4.5. 共形弧长。 若考虑拉格朗日量 $L = \omega$，其中 $\omega = \nu\, dx$ 是共形弧长，则可得到两个方程 $Q_1 + 3TT_1 = 0$ 和 $T_2 = T^3 + 2TQ$。这两个方程均为六阶，并且与 [21], [19] 中的表达式一致。

注意：文献中有时也将共形弧长泛函的极值曲线称为共形测地线，参见 [21], [19]。不过，这两种命名方式彼此冲突。

3.4.6. 全局不变变分问题的一个例子。 考虑与 $\nabla = TT_1 D_\omega$ 对偶的全局不变拉格朗日量 $\lambda = T^{-1}T_1^{-1}\omega$。我们依据注 8 和第 2.7 小节计算极值曲线。因此，对于 $L = T^{-1}T_1^{-1}$，欧拉量由 $\mathcal{E}(L) = -\dfrac{2}{T^2T_1} - \dfrac{2T_2}{TT_1^3}$ 给出，而哈密顿量由 $\mathcal{H}(L) = -\dfrac{2}{TT_1}$ 给出。由此，我们通过局部微分不变量得到不变欧拉–拉格朗日方程，但这些方程很容易用全局不变量表示。

令 $P := T^4$, $R := QT^2$ 为全局微分不变量的一组基；我们用下标表示关于 ∇ 的导数阶数。由此得到两个可用全局不变量表示的方程，并可分别解出 P_5 和 R_2:

$$
\begin{aligned}
&160P^4P_1^3P_5 + 8P^4P_1^4P_3 - 20P^4P_1^3P_2^2 + 28P^3P_1^5P_2 + 8P^3P_1^4P_2R_1 - 16P^3P_1^4P_3R + 40P^3P_1^3P_2^2R\\
&- 12P^2P_1^7 - 8P^2P_1^6R_1 - 16P^2P_1^5P_2R - 1840P^4P_1^2P_2P_4 - 1280P^4P_1^2P_3^2 + 10560P^4P_1P_2^2P_3 - 8800P^4P_2^4\\
&+ 656P^3P_1^4P_4 - 4868P^3P_1^3P_2P_3 + 5748P^3P_1^2P_2^3 + 306P^2P_1^5P_3 - 654P^2P_1^4P_2^2 - 20PP_1^6P_2 + 5P_1^8 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&160P^3P_1^3(PP_2 - P_1^2)R_2 + 100P^5P_1^4P_2 - 100P^4P_1^6 + 200P^4P_1^4P_2R - 200P^3P_1^6R + 1360P^5P_1^3P_4\\
&- 10880P^5P_1^2P_2P_3 + 13600P^5P_1P_2^3 + 200P^4P_1^4P_2 + 3224P^4P_1^4P_3 - 7380P^4P_1^3P_2^2 + 640P^4P_1^3P_3R_1\\
&+ 1280P^4P_1^3P_4R - 1680P^4P_1^2P_2^2R_1 - 10240P^4P_1^2P_2P_3R + 12800P^4P_1P_2^3R - 100P^3P_1^6\\
&+ 389P^3P_1^5P_2 + 944P^3P_1^4P_2R_1 + 3072P^3P_1^4P_3R - 6840P^3P_1^3P_2^2R - 41P^2P_1^7 + 56P^2P_1^6R_1\\
&+ 112P^2P_1^5P_2R - 240P^4P_1^2P_2P_4 - 400P^4P_1^2P_3^2 + 2600P^4P_1P_2^2P_3 - 2200P^4P_2^4 + 48P^3P_1^4P_4\\
&+ 116P^3P_1^3P_2P_3 - 786P^3P_1^2P_2^3 - 792P^2P_1^5P_3 + 1853P^2P_1^4P_2^2 + 15PP_1^6P_2 - 235P_1^8 = 0.
\end{aligned}
$$

3.5. **欧几里得不变变分问题，其中** $4D$。 流形为 $\mathbb{R}^4(x,\ y,\ z,\ u)$。我们考虑 $\mathrm{SE}(4)$ 在 $\mathbb{R}^4$ 上的李群作用。对于李代数 $\mathfrak{se}(4) = \mathfrak{so}(4) \ltimes \mathbb{R}^4$，其生成元为 ∂_x、∂_y、∂_z、∂_u、$x\partial_y - y\partial_x$、$x\partial_z - z\partial_x$、$x\partial_u - u\partial_x$、$y\partial_z - z\partial_y$、$y\partial_u - u\partial_y$、$z\partial_u - u\partial_z$，我们分别将它们记作 X_1、……、X_{10}。在闵可夫斯基时空的情形下，代数为 $\mathfrak{se}(3,\ 1) = \mathfrak{so}(3,\ 1) \ltimes \mathbb{R}^4$，生成元 X_7、X_9、X_{10}应改为双曲旋转；这会使下文的公式出现一些符号变化，但除此之外公式仍然成立（包括例子）。中性符号的情形也类似。

3.5.1. 生成微分不变量。 记 $\mathsf{W}(f,\ g,\ h)$ 为三个喷射函数 $f,\ g,\ h$ 的朗斯基行列式。那么，局部微分不变量代数由以下元素生成

$$
\kappa = \frac{\sqrt{(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (y_1u_2 - u_1y_2)^2 + (z_1u_2 - u_1z_2)^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2}}{(1 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2)^{3/2}},
$$

$$
\tau = \frac{\big(\mathsf{W}(y_1, z_1, u_1)^2 + (y_2z_3 - z_2y_3)^2 + (y_2u_3 - u_2y_3)^2 + (z_2u_3 - u_2z_3)^2\big)^{1/2}}{(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (y_1u_2 - u_1y_2)^2 + (z_1u_2 - u_1z_2)^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2}
$$

$$
\mu = \frac{1}{\kappa^3\tau^2}\frac{\mathsf{W}(y_2, z_2, u_2)}{(1 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2)^5}, \qquad \frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2}}\frac{d}{dx}.
$$

因此，全局微分不变量代数的生成元为

$$
\kappa^2, \quad \tau^2, \quad \kappa^3\tau^2\mu, \quad \nabla = \kappa\kappa_s\frac{d}{ds}.
$$

3.5.2. 使用截面计算不变欧拉–拉格朗日方程。我们应用第（2.6）节所述的算法。截面由下列函数取零给出：x，y_0，y_1，z_1，z_2，u_1，u_2，u_3。对这些在截面上为零的函数应用不变水平微分，可立即得到，非零的 γ^i 为

$$\gamma^1 = -\varpi,\ \gamma^5 = -\kappa\varpi,\ \gamma^8 = -\tau\varpi,\ \gamma^{10} = -\mu\varpi. \tag{83}$$

ϵ^i 分量为

$$\begin{aligned}&\epsilon^1 = 0,\ \epsilon^2 = -\iota(\theta_0^y),\ \epsilon^3 = -\iota(\theta_0^z),\ \epsilon^4 = -\iota(\theta_0^u),\ \epsilon^5 = -\iota(\theta_1^y),\ \epsilon^6 = -\iota(\theta_1^z),\\ &\epsilon^7 = -\iota(\theta_1^u),\ \epsilon^8 = -\frac{\iota(\theta_2^z)}{\kappa},\ \epsilon^9 = -\frac{\iota(\theta_2^u)}{\kappa},\ \epsilon^{10} = -\frac{\iota(\theta_3^u)}{\kappa\tau} + \frac{\kappa_1\iota(\theta_2^u)}{\kappa^2\tau}.\end{aligned} \tag{84}$$

在截面上取值接触不变水平形式 ds，并计算 κ, τ, μ，得到 $\kappa|_\Sigma = y_2$，$\tau|_\Sigma = \frac{z_3}{y_2}$，$\mu|_\Sigma = \frac{u_4}{z_3}$ 和 $ds|_\Sigma = dx$，分别如此。因此，我们有 $\kappa = \iota(y_2)$ $\tau = \iota\begin{pmatrix} z_3 \\ y_2 \end{pmatrix}, \mu = \iota\begin{pmatrix} u_4 \\ z_3 \end{pmatrix}$。我们定义 $\varpi := \iota($ $dx)$，使得 ϖ 的水平部分等于 ds。

由 $d_{\mathcal{V}}\kappa, d_{\mathcal{V}}\tau, d_{\mathcal{V}}\mu$ 得到的算子 $\mathcal{A}$ 的形式伴随算子可直接计算得出：

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_y^\kappa)^* &= D_s^2 + (\kappa^2 - \tau^2)\\ (\mathcal{A}_z^\kappa)^* &= 2\tau D_s + \tau_1\\ (\mathcal{A}_u^\kappa)^* &= \tau\mu\end{aligned} \tag{85}$$

接下来，我们得到以下表达式

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_y^\tau)^* &= \left(2\,\frac{\tau}{\kappa}\right)D_s^2 + \left(-2\,\frac{\tau\,\kappa_1}{\kappa^2} + \frac{\tau_1}{\kappa}\right)D_s + \left(2\,\tau\,\kappa - \frac{\tau\,\mu^2}{\kappa}\right)\\ (\mathcal{A}_z^\tau)^* &= \left(\frac{-1}{\kappa}\right)D_s^3 + \left(2\,\frac{\kappa_1}{\kappa^2}\right)D_s^2 + \left(-\kappa + \frac{\tau^2}{\kappa} + 3\,\frac{\mu^2}{\kappa} + \frac{\kappa_2}{\kappa^2} - 2\,\frac{{\kappa_1}^2}{\kappa^3}\right)D_s + \left(-\kappa_1 - 2\,\frac{\kappa_1\,\mu^2}{\kappa^2} + 3\,\frac{\mu\,\mu_1}{\kappa}\right)\\ (\mathcal{A}_u^\tau)^* &= \left(-3\,\frac{\mu}{\kappa}\right)D_s^2 + \left(4\,\frac{\kappa_1\,\mu}{\kappa^2} - 3\,\frac{\mu_1}{\kappa}\right)D_s + \left(2\,\frac{\kappa_1\,\mu_1}{\kappa^2} + \frac{\mu\,\kappa_2}{\kappa^2} + \frac{\mu^3}{\kappa} - \frac{\mu_2}{\kappa} - \kappa\,\mu - 2\,\frac{\mu\,{\kappa_1}^2}{\kappa^3}\right)\end{aligned} \tag{86}$$

最后，其余的形式伴随算子由以下公式给出

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_y^\mu)^* &= \frac{3\mu}{\kappa}D_s^2 + \left(-\frac{2\kappa_1\mu}{\kappa^2} - \frac{2\mu\tau_1}{\kappa\tau} + \frac{2\mu_1}{\kappa}\right)D_s + \left(\frac{\mu\tau^2}{\kappa} + \mu\kappa\right)\\ (\mathcal{A}_z^\mu)^* &= -\frac{3\mu D_s^3}{\kappa\tau} + \left(-\frac{3\mu_1}{\kappa\tau} + \frac{4\kappa_1\mu}{\kappa^2\tau} + \frac{6\tau_1\mu}{\kappa\tau^2}\right)D_s^2 + \left(-\frac{\mu\kappa}{\tau} + \frac{\mu^3}{\kappa\tau} - \frac{\mu\tau}{\kappa} - \frac{\mu_2}{\kappa\tau} - \frac{4\kappa_1\tau_1\mu}{\kappa^2\tau^2}\right.\\ &\quad\left. + \frac{3\tau_1\mu_1}{\kappa\tau^2} + \frac{2\kappa_1\mu_1}{\kappa^2\tau} + \frac{\kappa_2\mu}{\kappa^2\tau} - \frac{2\kappa_1^2\mu}{\kappa^3\tau} - \frac{6\tau_1^2\mu}{\kappa\tau^3} + \frac{3\mu\tau_2}{\kappa\tau^2}\right)D_s + \left(-\frac{2\mu\tau_1}{\kappa} - \frac{\mu_1\tau}{\kappa} + \frac{2\kappa_1\tau\mu}{\kappa^2}\right)\\ (\mathcal{A}_u^\mu)^* &= \frac{D_s^4}{\kappa\tau} + \left(-\frac{3\tau_1}{\kappa\tau^2} - \frac{2\kappa_1}{\kappa^2\tau}\right)D_s^3 + \left(-\frac{3\mu^2}{\kappa\tau} - \frac{\kappa_2}{\kappa^2\tau} + \frac{2\kappa_1^2}{\kappa^3\tau} + \frac{6\tau_1^2}{\kappa\tau^3} - \frac{3\tau_2}{\kappa\tau^2} + \frac{\tau}{\kappa} + \frac{4\kappa_1\tau_1}{\kappa^2\tau^2} + \frac{\kappa}{\tau}\right)D_s^2\\ &\quad + \left(-\frac{2\kappa_1\tau}{\kappa^2} - \frac{\kappa\tau_1}{\tau^2} - \frac{6\tau_1^3}{\kappa\tau^4} - \frac{\tau_3}{\kappa\tau^2} + \frac{2\tau_1}{\kappa} - \frac{3\mu\mu_1}{\kappa\tau} + \frac{2\kappa_1\mu^2}{\kappa^2\tau} + \frac{3\tau_1\mu^2}{\kappa\tau^2} - \frac{2\kappa_1^2\tau_1}{\kappa^3\tau^2} + \frac{\kappa_2\tau_1}{\kappa^2\tau^2} - \frac{4\kappa_1\tau_1^2}{\kappa^2\tau^3}\right.\\ &\quad\left. + \frac{2\kappa_1\tau_2}{\kappa^2\tau^2} + \frac{6\tau_1\tau_2}{\kappa\tau^3} + \frac{\kappa_1}{\tau}\right)D_s + \left(-\frac{\mu^2\tau}{\kappa} + \frac{2\kappa_1^2\tau}{\kappa^3} - \frac{\tau\kappa_2}{\kappa^2} - \frac{2\kappa_1\tau_1}{\kappa^2} + \frac{\tau_2}{\kappa}\right)\end{aligned} \tag{87}$$

最后，通过计算 $d_{\mathcal{V}}\varpi$，我们得到

$$\mathcal{B}_y = -\kappa, \mathcal{B}_z = 0, \mathcal{B}_u = 0, \tag{88}$$

因此，我们得到 $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^T$。

不变欧拉–拉格朗日方程由向量方程 $\mathcal{A}^*\mathcal{E}(L) - \mathcal{B}^*\mathcal{H}(L) = 0$ 给出，其中$\mathcal{E}(L)$ $\mathcal{H}(L)$ 是不变欧拉量和不变哈密顿量（22）。矩阵相对不变量 W 可由其定义直接计算得到，并满足 $\det W = \ell^2$。因此，在欧几里得度规符号下不存在奇异极值曲线；而在洛伦兹度规符号下，奇异极值曲线必为零曲线。

一些 SE(4)不变欧拉-拉格朗日方程列于下表。

拉格朗日量	欧拉量	哈密顿不变欧拉–拉格朗日方程	
ds	$(0,\ 0,\ 0)^T$	-1	$\kappa = 0$
$\kappa\, ds$	$(1,\ 0,\ 0)^T$	$-\kappa$	$\tau = 0$
$\tau\, ds$	$(0,1,0)^T$	$-\tau$	$\mu^2 = \kappa^2$
$\mu\, ds$	$(0,\ 0,\ 1)^T$	$-\mu$	$\begin{cases} \mu = 0 \\ \tau_2 = \dfrac{\left(2\kappa\kappa_1\tau_1 + \kappa\kappa_2\tau - 2\kappa_1^2\tau\right)}{\kappa^2} \end{cases}$
$\kappa^2\, ds$	$(2\kappa,\ 0,\ 0)^T$	$-\kappa^2$	$\begin{cases} \kappa_2 = \kappa\tau^2 - \dfrac{1}{2}\kappa^3 \\ \kappa\tau_1 + 2\kappa_1\tau = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$
$(1+\kappa)\ ds$	$(1,\ 0,\ 0)^T$	$-(1+\kappa)$	$\begin{cases} \kappa = -\tau^2 \\ \tau_1 = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$

下面我们对其中几项作些说明。

对于 $L = 1$，结果可由 $E_{\text{inv}} = (-\kappa, 0, 0)$ 得出。对于 $L = \kappa$，我们得到 $E_{\text{inv}} = (-\tau^2, \tau_1, \tau\mu)$，因此欧拉–拉格朗日方程等价于一个方程 $\tau = 0$。对于 $L = 1 + \kappa$，我们得到叠加$E_{\text{inv}}(1+\kappa) = E_{\text{inv}}(1) + E_{\text{inv}}(\kappa) = (-\kappa - \tau^2, \tau_1, \tau\mu)$，由此得出结果。（我们指出，形式上还可以得到分支 $\kappa = 0, \tau = 0$，但只要 $\kappa = 0$，τ 就没有定义，因此这个分支应予排除。）请注意，这些方程并未表现出叠加性质，尽管相应的不变欧拉–拉格朗日算子确实表现出这种性质。

对于不变变分问题 $\int \tau\, ds$，欧拉–拉格朗日方程等价于 $\mu = \pm\kappa$ 或 $\tau = 0$。（对应于 z，u 的方程由微分推论 $\mu_1 = \pm\kappa_1$ 和 $\mu_2 = \pm\kappa_2$ 组成。由于当 $\tau = 0$ 时 μ 未定义，因此解释欧拉–拉格朗日方程时必须格外谨慎。）

在 $4D$ 中，弹性曲线的方程，也就是不变变分问题 $\int \kappa^2\, ds$ 的解曲线，与 $3D$ 中的基本相同。事实上，方程 $\mu = 0$ 意味着解曲线位于 $\mathbb{R}^4$ 中的一个超平面上，在该超平面上我们再次得到方程 $\kappa_2 = \kappa\tau^2 - \dfrac{1}{2}\kappa^3$ 和 $\kappa\tau_1 + 2\kappa_1\tau = 0$。

3.5.3. 全局不变变分问题的一个例子。考虑与 $\nabla = \kappa\kappa_1 D_s$ 对偶的全局不变拉格朗日量 $\lambda = \kappa^{-1}\kappa_1^{-1}\, ds$。我们依据注 8 和第 2.7 小节来计算极值曲线。因此，对于 $L = \kappa^{-1}\kappa_1^{-1}$，欧拉量由 $\mathcal{E}(L) = -\dfrac{2}{\kappa^2\kappa_1} - \dfrac{2\kappa_2}{\kappa\kappa_1^3}$ 给出，而哈密顿量由 $\mathcal{H}(L) = -\dfrac{2}{\kappa\kappa_1}$ 给出。由此我们通过局部微分不变量得到不变欧拉–拉格朗日方程，不过这些方程很容易用全局不变量来表达。

令 $P := \kappa^2$, $R := \tau^2$ 和 $S := \kappa^3\tau^2\mu$ 为全局微分不变量的一组基；我们用下标表示关于 ∇ 的导数阶数。由此得到三个方程，可用于求解 κ_4,

τ_1, $\mu_\circ$ 通过表达 用全局不变量表示局部不变量，可得以下方程 s:

$$\begin{cases} P_4 = \dfrac{P_1^3 P_2 R + P_1^5 + 16 P_1 P_2 P_3 - 20 P_2^3}{2P_1^2} + \dfrac{9PP_2^2 - 2P^3 P_1 P_2 - 4PP_1 P_3 + P_1^2 P_2}{4P^2}, \\ R_1 = -\dfrac{2R(2PP_1 P_3 - 5PP_2^2 + P_1^2 P_2)}{PP_1 P_2}, \\ S = 0. \end{cases} \tag{89}$$

4. Outlook: theory vs symbolic challenges

在本文中，我们探讨如何利用不变微积分计算不变拉格朗日量的欧拉–拉格朗日方程。许多专家此前已研究过这一问题。我们的方法与之互补，既使用全局不变量，也发展了计算相对因子 W 的实用技巧。借助后者，我们得以计算共形挠率泛函的欧拉–拉格朗日方程；该泛函的极值曲线（即共形测地线）全都是奇异的。

一种直接用不变量计算欧拉–拉格朗日方程的方法，是先在喷射坐标中计算，再用微分不变量表达结果。这种方法的计算复杂度很高。例如，对于二维欧几里得运动群的一般不变问题，我们可以有效地求解；但在三维、尤其是四维中，计算则过于困难。

我们可以依赖经典的移动标架法，利用显式的李群作用； [12] 已有效地解决了三维欧几里得运动群的这一问题。然而，在四维的类似问题中，我们遇到了计算困难，也就是说，符号系统（我们使用的是 Maple 中的微分几何软件包）无法在合理时间内完成计算。即使在二维情况下，对于射影群，作用的延拓在 8 阶喷射及更高阶时也无法终止。

在后一种情况下，相应李代数的射影作用的延拓可以直接计算，几乎不费时间。以李代数作用和局部截面取代李群作用与移动标架的方法，效果更佳。Kogan–Olver及其合作者的研究中早已注意到这一点：不变微分的递归公式并不依赖于李群作用。

值得指出的是，对于 G 在局部自由作用且只允许局部横截的情形，全局不变变分问题仍可采用 Kogan– Olver所阐述的移动标架方法处理。为此，可以将全局有理不变量在该截面上的限制输入他们的不变化映射，由此得到的欧拉–拉格朗日方程是全局不变的。

我们进一步拓展这一方法，并将其应用于移动标架技术之外。事实上，我们的方法不依赖于微分不变量代数的生成元的计算方式。

在本文中，我们讨论了如何通过对称性的思想，运用我们的方法克服在对高阶欧拉–拉格朗日方程进行符号运算时遇到的计算困难。尤其是，这使我们得以完成本文所列举示例的计算。

References

[1] S. Adams, P. Olver, *Prolonged analytic connected group actions are generically free*, Transformation Groups**23** (4), 893-913 (2018年).[2] I. M. Anderson, *Introduction to the variational bicomplex*, 当代数学. **132**, 51–73 (1992年).[3] T. F. Banchoff, J. H. White, *The behavior of the total twist and self-linking number of a closed space curve under inversions*, Mathematica Scandinavica**36** (2), 254-262 (1975年).[4] G. Cairns, R. Sharpe, L. Webb, *Conformal invariants for curves and surfaces in three dimensional space forms*, Rocky Mountain J. Math.**24**, 933–59 (1994年).[5] ´E. Cartan, *La Méthode du Repère Mobile, la Théorie des Groupes Continus, et les Espaces Généralisés*, Expos´es de G´eom´etrie **5**, Hermann, 巴黎 (1935年).[6] M. Fels, P. J. Olver, *Moving coframes*: I. *A practical algorithm*, 应用数学学报. **51**, 161–213 (1998年); II. *Regularizationand theoretical foundations*, 应用数学学报. **55**, 127–208 (1999年).[7] A. Fialkow, *The conformal theory of curves*, 美国数学会汇刊 **51**, 435-501 (1942年).

[8] P.A. Griffiths, *Exterior Differential Systems and the Calculus of Variations*, 数学进展 25, Birkh¨auser, 波士顿 (1983年).[9] G.-H. Halphen, *Sur les invariants différentiels*, Gauthier-Villars, 巴黎 (1878年).[10] V. Itskov, *Orbit reduction of exterior differential systems and group-invariant variational problems*, 当代数学 285, 171–181 (2001年).[11] I.A. Kogan, P.J. Olver, *The invariant variational bicomplex*, 当代数学, 285, 131-144 (2001年).[12] I.A. Kogan, P.J. Olver, *Invariant Euler–Lagrange equations and the invariant variational bicomplex*, 应用数学学报 76 (2), 137-193 (2003年).[13] N. Konovenko, V. Lychagin, *On projective classification of plane curves*, 整体与随机分析 1 (2), 241-264 (2011年).[14] B. Kruglikov, V. Lychagin, *Geometry of Differential Equations*, In: *Handbook on Global Analysis*, D. Krupka and D. Saunders Eds., 725–771, 1214, Elsevier Sci. (2008年).[15] B. Kruglikov, V. Lychagin, *Global Lie–Tresse theorem*, 数学精选 22 (3), 1357-1411 (2016年).[16] B. Kruglikov, V. S. Matveev, W. Steneker, *Variationality of conformal geodesics in dimension 3*, 分析、数学与物理 15, 123 (2025年).[17] B. Kruglikov, E. Schneider, *ODEs whose Symmetry Groups are not Fiber-Preserving*, 李理论杂志 33 (4), 1045- 1086 (2023年).[18] B. Kruglikov, E. Schneider, *Invariant divisors and equivariant line bundles*, 数学论坛：西格玛 13:e68 (2025年).[19] M. Magliaro, L. Mari, M. Rigoli, *On the geometry of curves and conformal geodesics in the Möbius space*, 整体分析与几何年刊 40 (2), 133-165 (2011年).[20] T. Marugame, *The Fefferman metric for twistor CR manifolds and conformal geodesics in dimension three*, SIGMA 21, 090, 26 pp (2025年).[21] E. Musso, *The Conformal Arclength Functional*, 数学通讯 165, 107–131 (1994年).[22] D. A. Singer, *Lectures on elastic curves and rods*, AIP会议论文集 1002, no.1 (2008年).[23] J.H. White, *Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions*, 美国数学杂志 91 (3), 693-728 (1969年).[24] A.M. Vinogradov, *Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus*, 数学专著译丛, vol. 204, 美国数学会, 普罗维登斯 (2001年).[25] A.M. Vinogradov, *The C–spectral sequence, Lagrangian formalism and conservation laws, I. The linear theory* & *II. Thenonlinear theory*, 数学分析与应用杂志 100, 1–40 & 41–129 (1984年).[26] E.J. Wilczynski, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, B.G. Teubner, 莱比锡 (1906年).

Department of Mathematics and Statistics, UiT the Arctic University of Norway, Tromsø 9037, Norway. E-mail: boris.kruglikov@uit.no.

Department of Mathematics and Statistics, UiT the Arctic University of Norway, Tromsø 9037, Norway.E-mail: eivind.schneider@uit.no.

Department of Mathematics and Statistics, UiT the Arctic University of Norway, Tromsø 9037, Norway.E-mail: wijnand.s.steneker@uit.no.