arXiv:2601.07000v1 [math.CO] 11 Jan 2026

完全幂的乘积表示

´Péter Pál Pach 和 CSABA SANDOR

Abstract. 令 $\rho_k(N)$ 表示集合 $A \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ 的最大大小，使得其中任意 k 个不同元素的乘积都不是完全 d 次幂。在这篇短文中，我们证明$\rho_d(N) = \sum \pi\left(\frac{N}{k}\right) + O_d(\pi(N^{1/2}))$；此外，对于素数幂 d 以及充分大的 N，有 $\rho_d(N) = \sum \pi\left(\frac{N}{k}\right)$。这回答了 Verstra¨ete 提出的问题。

1. Introduction

令 $\rho_d(N)$ 表示集合 $[N] := \{1, 2, \ldots, N\}$ 的子集的最大大小，使其不存在多项式 $f(x) = x^d$ 的乘积表示；也就是说，对于任意互不相同的a_1，a_2，……，$a_k \in A$以及整数 x，均有 $a_1 a_2 \ldots a_k \neq x^d$。显然，对于每个正整数 N，$\rho_2(N) = \pi(N)$，即不超过 N 的素数个数。（事实上，这类集合中元素标准形式的指数向量在二元域 $\mathbb{F}_2$ 上构成一个线性无关系系统。）

2006 年，Verstra¨ete [5]证明了以下界。

定理 1.1 (Verstra¨ete)。 设 d为素数。则

$$\rho_d(N) = \sum_{k=1}^{d-1} \pi\left(\frac{N}{k}\right) + O(\pi(N^{1/2})).$$

He 写道，确定.....的数量级将会很有趣 f

$$\rho_d(N) - \sum_{k=1}^{d-1} \pi\left(\frac{N}{k}\right)$$

在上述定理中，并且还提到它或许总是不超过某个常数。

我们以下述更强的形式回答这个问题。

定理 1.2。 设 $d \geq 2$ 为素数幂。对于 $N \geq 2^d p_d$,

$$\rho_d(N) = \sum_{k=1}^{d-1} \pi\left(\frac{N}{k}\right),$$

其中， p_d 表示第 d个素数。

注释 1.3. 当 N 的值非常小时，上述等式可能不成立 .

2计算表明，对于 $d = 3$，有 $\rho_3(N) = \sum \pi\left(\frac{N}{k}\right)$，若 $N \geq 15$成立；但 $9 = \rho_3(14) < \sum_{k=1}^{2} \pi\left(\frac{14}{k}\right) = 10$，因此对于 $d = 3$，最强的结论是 $\rho_3(N) = \sum \pi\left(\frac{N}{k}\right)$，其中 $N \geq 15$。

日期：2026年1月13日。

显然，

$$\sum_{k=1}^{d-1}\pi\left(\frac{2d-2}{k}\right)=\sum_{k=1}^{d-1}\sum_{p\le\frac{2d-2}{k}}1=\sum_{p\le 2d-2}\sum_{k\le\frac{2d-2}{p}}1=\sum_{p\le 2d-2}\left\lfloor\frac{2d-2}{p}\right\rfloor=\sum_{n\le 2d-2}\omega(n),$$

其中， $\omega(n)$ 是正整数 n 的不同素因子个数。对于 $d\ge 4$，我们$_{d-1}$可以通过对 d 进行归纳证明 $\sum_{k=1}\pi\left(\binom{2d-2}{k}\right)\ge 2d-2$。

如果 $A\subseteq N$ 没有多项式 $f(x)=x^d$的乘积表示，那么 $1\notin A$。由此$_{d-1}$可得，对每个正整数 N，都有 $\rho_d(N)<N$。因此，对$_{k=1}$每个 $d\ge 4$，都有 $\rho_d(2d-2)<\sum\pi\left(\binom{2d-2}{k}\right)$。

$_{d-1}$因此，对每个 $d\ge 3$，都存在一个整数 N_d，使得 $\rho_d(N_d)<\sum_{k=1}\pi\left(\binom{N_d}{k}\right)$。

对于一般的整数 d，我们可以证明一个具有与 Verstra¨ete 针对素数所得结果相同误差项的界。

定理 1.4。设 $d\ge 2$ 是一个整数。那么

$$\rho_d(N)=\sum_{k=1}^{d-1}\pi\left(\frac{N}{k}\right)+O_d(\pi(N^{1/2})).$$

在我们的证明中将使用 Davenport 常数。

设 G 是一个有限阿贝尔群。Davenport 常数 $D(G)$ 定义为满足以下条件的最小正整数 ℓ：每个包含 ℓ 个元素的序列都含有一个非空子序列，其元素之和为 0。

Davenport 常数的确切值仅对少数几类阿贝尔群已知，但对于 p 群，我们可以精确地知道其值。设 p 是一个素数。1969年，Olson [4] 证明了，如果 $G=\oplus_{i=1}^{r}\mathbb{Z}_{p^{e_i}}$，那么

$$D(G)=1+\sum_{i=1}^{r}(p^{e_i}-1).$$

设 $\exp(G)$ 为阿贝尔群 G 的指数。对于任意有限阿贝尔群，我们有（见 [1, 2, 3]）

$$D(G)\le\exp(G)\left(1+\log\frac{|G|}{\exp(G)}\right).\qquad(*)$$

对于一般整数 d，我们证明以下估计。

定理 1.5. 设 $d\ge 2$。对于每个正整数 N，

$$\rho_d(N)\le\left[\sum_{k=1}^{d-1}\pi\left(\frac{N}{k}\right)\right]+D(\mathbb{Z}_d^{\pi(N/d)})-(d-1)\pi\left(N/d\right)-1.$$

定理 1.6。设 $d\ge 2$。对于每个正整数 N，

$$\rho_d(N)\le\left[\sum_{k=1}^{d-1}\pi\left(\frac{N}{k}\right)\right]+dD\left(\mathbb{Z}_d^{\pi\left(\sqrt{N}\right)}\right).$$

利用界 $(*)$，定理 1.6 得出以下推论，从而验证定理 1.4。

推论 1.7。对于 $d \geq 2$，我们有

$$\rho_d(N) \leq \sum_{k=1}^{d-1} \pi\left(\frac{N}{k}\right) + d\log d \cdot \pi(\sqrt{N}).$$

记号。本文中，我们用 $[N]$ 表示集合 $\{1, 2, \ldots, N\}$。正数采用标准记号 O，其含义如下：$Y = O(X)$表示$X \geq cY$，其中 $c > 0$是某个绝对常数。如果常数 c 依赖于量 t，则记为 $Y = O_t(Y)$。

本文中，素数记为 $p_1 = 2$，$p_2 = 3$，.....。

2. Proofs

定理 *1.5* 的证明。设 $A \subseteq [N]$ 是一个不含 x^d的乘积表示的集合。对于$1 \leq k \leq d-1$，定义

$$A_k = \left\{a \in A : \exists \text{ prime } p : p|a,\ \frac{N}{k+1} < p \leq \frac{N}{k}\right\},$$

注意到$|A_k| \leq k\left(\pi\left(\binom{N}{k}\right) - \pi\left(\binom{N}{k+1}\right)\right)$，因为每个素数 $p \in \left(\binom{N}{k+1},\ \left[\frac{N}{k}\right]\right]$ 在 $[N]$ 中只有 k 个倍数。

最后，设 A_d 为这样一个集合，其中的 $a \in A$ 的所有素因子都不超过 $\frac{N}{d}$。设 $a \in A_d$ 的标准形式（允许指数为 0）为

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_{\pi(N/d)}^{\alpha_{\pi(N/d)}},$$

我们将向量赋给 a

$$(\alpha_1 \pmod d, \alpha_2 \pmod d, \ldots, \alpha_{\pi(N/d)} \pmod d) \in \mathbb{Z}_d^{\pi(N/d)}.$$

由于这些向量构成一个在 $\mathbb{Z}_d^{\pi(N/d)}$ 中不含零和的多重集，我们有 $|A_d| \leq D(\mathbb{Z}_d^{\pi(N/d)}) - 1$。因此，

$$|A| \leq \sum_{k=1}^{d} |A_k| \leq \sum_{k=1}^{d-1} k\left(\pi\left(\frac{N}{k}\right) - \pi\left(\frac{N}{k+1}\right)\right) + D(\mathbb{Z}_d^{\pi(N/d)}) - 1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{d-1} \pi\left(\frac{N}{k}\right) + D(\mathbb{Z}_d^{\pi(N/d)}) - 1 - (d-1)\pi\left(N/d\right).$$

□

定理 *1.6* 的证明。设 $A \subseteq [N]$ 为一个不含 x^d 的乘积表示的集合。将 A 的元素划分为三部分：$A = Q \cup R \cup S$，其中

- $Q \cup R$ 中的每个元素都有一个大于$\sqrt{N}$的素因子，
  S 中元素的每个素因子都不大于 $\sqrt{N}$，
  对于每个素数 $p > \sqrt{N}$，R 中包含的 p 的倍数个数都能被d整除，
- 对于每个素数 $p > \sqrt{N}$，Q 中包含的 p 的倍数至多有 $d-1$ 个。

也就是说，我们将 A 中的 $\sqrt{N}$-光滑元素放入 S；对于每个素数 $p > \sqrt{N}$，如果 A 中 p 的倍数个数为 k_p，那么我们将 $k_p \bmod d$ 个 p 的倍数放入 Q，其余倍数放入 R。（注意，$A \subseteq [N]$ 中的每个元素至多只有一个这样的素因子。）

与定理 1.5 的证明中类似的计算表明

$$|Q| \leq \left[\sum_{k=1}^{d-1} \pi\left(\frac{N}{k}\right)\right] - (d-1)\pi(\sqrt{N}),$$

从而得到估计的主项。

为了界定集合 $R \cup S$ 的大小，对于每个素数 $p > \sqrt{N}$，我们将集合 R 中 p 的倍数划分成大小为 d 的组。在这样的组中，d 个元素的乘积形式为 $p^d t$，其中 t 是 $\sqrt{N}$-光滑部分：t 的素因子都不大于 $\sqrt{N}$。令 T 为包含这些 $\sqrt{N}$-光滑部分以及 S 中元素的多重集。注意，多重集 T 中元素的素因子都不大于 $\sqrt{N}$。令 $t \in T$ 的标准形式（允许指数为 0）为

$$t = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{\pi(\sqrt{N})}^{\alpha_{\pi(\sqrt{N})}},$$

我们给 t 赋予向量

$$(\alpha_1 \pmod d, \alpha_2 \pmod d, \dots, \alpha_{\pi(\sqrt{N})} \pmod d) \in \mathbb{Z}_d^{\pi(\sqrt{N})}.$$

由于这些向量构成的多重集在 $\mathbb{Z}_d^{\pi(\sqrt{N})}$ 中不含零和，因此我们有

$$|T| \leq D(\mathbb{Z}_d^{\pi(\sqrt{N})}) - 1.$$

因此，

$$|A| = |Q| + |R| + |S| \leq |Q| + d|T| \leq \left[\sum_{k=1}^{d-1} \pi\left(\frac{N}{k}\right)\right] + dD(\mathbb{Z}_d^{\pi(\sqrt{N})}).$$

□

定理 *1.2* 的证明。首先，由于对于素数幂 d，我们有

$$D\left(\mathbb{Z}_d^{\pi(N/d)}\right) = (d-1)\pi\left(N/d\right) + 1,$$

由定理 1.5，我们立即得到所需的上界

$$\rho_d(N) \leq \sum_{k=1}^{d-1} \pi\left(\frac{N}{k}\right).$$

为了完成证明，我们给出一个匹配的下界构造。

对于 $1 \leq k \leq d-2$，令

$$A_k = \left\{ip : \frac{N}{k+1} < p \leq \frac{N}{k},\ p \text{ prime},\ 1 \leq i \leq k\right\},$$

并令

$$A_{d-1} = \left\{ip : p_d < p \leq \frac{N}{d-1},\ p \text{ prime}, \quad 1 \leq i \leq d-1\right\}.$$

选择满足 $j_1 + \dots + j_d \equiv 1$（模 d）的整数 $0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_d \leq d$。

对于 $2 \le s \le d$，令我们设

$$B_{p_s} = \{2^{j_t} p_s : 1 \le t \le d\}.$$

最后，令

$$A := \bigcup_{1 \le k \le d-1} A_k \cup \left(\bigcup_{s=2}^{d} B_{p_s} \right).$$

现在，我们证明集合A中不存在完全 d次幂的乘积表示。为导出矛盾，假设 $a_1 a_2 \dots a_\ell = x^d$，其中 $a_i \in A$、$a_1 < a_2 < \cdots < a_\ell$和 $x \in \mathbb{Z}^+$。

如果对于某个 $1 \le k \le d-1$有 $a_j \in A_k$，那么 $a_j = ip$，其中 $1 \le i \le d-1$，则 p在乘积 $a_1 a_2 \dots a_\ell$中的指数介于1和 $d-1$之间，这就产生了矛盾。

因此，我们可以假设对于每个 $1 \le j \le \ell$，都有 $a_j \in \bigcup B_{p_s}$。如果 $a_j \in B_{p_s}$，那么 $2 \le s \le d$，于是$s=2$中 p_s的指数介于1和 d之间，因此它只能恰好等于 d，这意味着集合 $\{a_1, \dots, a_\ell\}$中选取了 p_d的所有 d倍数。

如果这种情况对 u个这样的素数成立，例如，对于 p_{s_1}、.....、 p_{s_u}，其中 $2 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_u \le d$，那么根据集合 B_{p_s}的定义， $a_1 a_2 \dots a_\ell = 2^v p_{s_1}^d \dots p_{s_u}^d$，且 $v \equiv u \pmod d$。然而， $1 \le u \le d-1$，这就产生了矛盾。

显然， $\bigcup_{s=2} B_{p_s}$ 中的每个元素都不大于 $2^d p_d$。因此

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{k=1}^{d-1} |A_k| + \sum_{2 \le s \le d} |B_{p_s}| \\
&= \sum_{k=1}^{d-2} k \left(\pi\left(\frac{n}{k}\right) - \pi\left(\frac{n}{k+1}\right) \right) + (d-1)\left(\pi\left(\frac{n}{d-1}\right) - d \right) + d(d-1) \\
&= \sum_{k=1}^{d-2} k \left(\pi\left(\frac{n}{k}\right) - \pi\left(\frac{n}{k+1}\right) \right) + (d-1)\pi\left(\frac{n}{d-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{d-1} \pi\left(\frac{N}{k}\right).
\end{aligned}$$

□

3. Concluding remarks and open questions

本文证明，对于素数幂 $d \ge 2$ 和 $N \ge 2^d p_d$，有 $\rho_d(N) = \sum_{k=1}^{d-1} \pi\left(\frac{N}{k}\right)$. 阈值 $2^d p_d \sim 2^d d \log d$能否改进仍是一个开放问题。

对于任意整数 d，我们证明了界 $\rho_d(N) = \sum \pi\left(\frac{N}{k}\right) + O_d(\pi(N^{1/2}))$。然而，我们认为误差项 $O_d(\pi(N^{1/2}))$ 还可以进一步改进。

4. Acknowledgements

两位作者均获得国家研究、发展与创新办公室 NKFIH 的资助（资助编号 K146387）。PPP 还获得了国家研究、

发展与创新办公室 NKFIH 的资助（卓越计划，资助编号 153829），以及基础科学研究院（IBS-R029-C4）的资助。

References

[1] W. R. Alford、A. Granville 和 C. Pomerance，存在无穷多个卡迈克尔数，《数学年刊》(2) **139**(3) (1994) 703–722。[2] P. van EmdeBoasand D.Kruyswijk，有限阿贝尔群上的一个组合问题 *III*，数学中心，阿姆斯特丹，纯数学部 **69-8** (1969年)[3] R. Meshulam，不确定性不等式与零子和，《离散数学》**84** (2) (1990) 197–200。[4] J. E. Olson，有限阿贝尔群上的一个组合问题 *I*，《数论杂志》**1** (1969年) 8–10。[5] J. Verstra¨ete，多项式的乘积表示，《欧洲组合学杂志》**27** (8) (2006) 1350–1361。

电子邮箱地址: pachpp@renyi.hu

HUN-REN Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Reáltanoda utca 13–15., H-1053 Bu-dapest, Hungary;
MTA–HUN-REN RI Lendület "Momentum" Arithmetic Combinatorics Research Group, Reáltanoda utca 13–15., H-1053 Budapest, Hungary;
Department of Computer Science and Information Theory, Budapest University of Technology and Economics, Műegyetem rkp. 3., H-1111 Budapest, Hungary;
Extremal Combinatorics and Probability Group (ECOPRO), Institute for Basic Science (IBS), Daejeon, South Korea.

电子邮箱地址: sandor.csaba@ttk.bme.hu

Department of Stochastics, Institute of Mathemetics, Budapest University of Technology and Economics, Műegyetem rkp. 3., H-1111 Budapest, Hungary;
HUN-REN Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Reáltanoda utca 13–15., H-1053 Bu-dapest, Hungary;
MTA–HUN-REN RI Lendület "Momentum" Arithmetic Combinatorics Research Group, Reáltanoda utca 13–15., H-1053 Budapest, Hungary.