arXiv:2601.07026v1 [math.AG] 11 Jan 2026

高阶佩特里轨迹。

MONTSERRAT TEIXIDOR I BIGAS

Abstract. 记 $\mathcal{P}^r_{,g\ d}^{\ k}$,为 $\mathcal{M}_g$ 中由这样的曲线组成的子集：这些曲线具有次数为 d 、维数为 r 的线性级数，且其佩特里映射的核维数至少为 k。我们证明存在余维为 k 的不可约分支，其属于 $\mathcal{P}^r_{,g\ d}^{\ k}$,。

设 L 是亏格为 g 的曲线 C 上的线丛，且 W 是 L的截面空间 $W \subseteq H^0(C, L)$的一个子空间。佩特里映射是自然的杯积映射

$$\mu_0 : W \otimes H^0(C, K \otimes L^*) \to H^0(C, K \otimes L \otimes L^*) \simeq H^0(C, K)$$

已知，对于模空间 $\mathcal{M}_g$ 中亏格为 g的一般曲线 C ，无论如何选取 L 和 $W \subseteq H^0(C, L)$，佩特里映射都是单射。

记 $\mathcal{P}^r_{,g\ d}^{\ k}$,为 $\mathcal{M}_g$ 中由这样的曲线组成的真子集：这些曲线具有次数为 d 、维数为 r 的线性级数，且其佩特里映射的核维数至少为 k。当 $k = 1$时，也就是佩特里映射非单射时，人们研究过这些轨迹空间。当 $\mathcal{P}^r_{,g\ d}^{\ 1}$,对于给定的 r， d非空时，它们预期是除子。事实上，已知当 Brill–Noether数 $\rho \geq 0$为正，且 $\mathcal{P}^r_{,g\ d}^{\ 1}$,不包含于 $\mathcal{P}^{r+1}_{,g\ d}{}^{\ 1}$，

（参见 [BS]）。这一结果的证明基于 $\mathcal{P}^r_{,\ g\ d}^{\ 1}$， 的自然行列式结构：记 $\mathcal{G}^r_{g,\ d}$ 为参数化次数为 d 、维数为 r 的线性级数的概形，它可以在曲线和线丛的邻域内局部定义。根据布里尔–诺特定理，对于一般的 C，在某个 (C, L, W) 的邻域内，$\mathcal{G}^r_{g,\ d}$ 的维数为 dim $\mathcal{M}_g + \rho$。佩特里轨迹可由 μ_0 矩阵的高阶子式消失来描述。因此，佩特里映射不具单射性的三元组 (C, L, W) 集合的预期余维为$g - [(r + 1)(g - d + r) - 1] = \rho + 1$。如果到 $\mathcal{M}_g$ 的投影是横截的，那么 $\mathcal{P}^r_{,\ g\ d}^{\ 1}$， 在 $\mathcal{M}_g$ 中的余维为 1。对于较小的亏格值，特设方法可以证明 $\mathcal{P}^r_{,\ g\ d}^{\ 1}$， 的每个不可约分支的余维均为一（参见 [C], [LC1]）。

人们曾猜想， $\mathcal{P}^r$、$_{g\ d}^{\ 1}$的任何不可约分支都应当是 $\mathcal{M}_g$中的一个除子。[LC2] 中的结果否定了这一点：该结果展示了一个余维二轨迹 $\mathcal{P}^2$、1 18、$_{16} \subseteq \mathcal{M}_{18}$，并且它不包含于 $\mathcal{P}^r$、1 18、$_d \subseteq \mathcal{M}_{18}$ 的任何余维一轨迹中（即使允许 d、r取其他值）。在此情形下， $\mathcal{P}^2$、1 18、$_{16} = \mathcal{P}^2$、2 18、16，也就是说，佩特里映射的核维数为 2，这也等于 $-\rho$。我们预计这才是规则，而非例外：当 ρ 为负时，我们用$\mathcal{M}^r_g$、$_d$ 表示 $\mathcal{M}_g$的真子集，该子集由具有次数为 d 且秩为 r的线性级数的曲线组成。由于布里尔-诺特数可以写成 $\rho = \dim H^0(C、\ K)\ - \dim(H^0(C、\ L)\ \otimes H^0(C、\ KL^*))$，如果一条曲线具有某个 r、d 取值对应的线丛，且 ρ为负，那么佩特里映射必然不是单射；更准确地说，$\mathcal{M}^r_g$、$_d \subseteq \mathcal{P}^r$、$_{g\ d}^{\ -\rho}$。当然，这并不能排除$\mathcal{M}^r_g$、$_d$ 可能包含于 $\mathcal{P}^{r'}$、$_{g\ d'}^{\ 1}$ 的某个除子分支中，其中 d'、r'取某些值的可能性。

我们在 [T3], 定理 2.1 中证明了，当布里尔-诺特数 ρ 为负但 $\rho \geq r+1-g$ 时， $\mathcal{M}_g$ 中存在一个余维为 $-\rho$ 的子集，其中的曲线具有 g^r_d。此外，该轨迹的一般曲线上的佩特里映射是满射的，因此佩特里映射的核维数恰好为 $-\rho$。特别地，具有这些线性级数的轨迹的余维等于佩特里映射的核维数。

对于具有许多截面的塞尔特征的曲线，也有类似结论。我们称曲线 C 具有维数为 r 的塞尔特征，若它具有一个线丛 L，使得 $L^2 = K_C$ 且 $\dim H^0(C, L) = r+1$。预计维数为 r 的塞尔特征的Petri映射的核具有维数 $\binom{r+1}{2}$，并由形如 $s_i \otimes s_j - s_j \otimes s_i$ 的元素张成，其中 s_i、s_j 是 L的不同截面。具有维数至少为 r 的塞尔特征的曲线所形成的轨迹空间，可以表示为一个对称二次型的退化轨迹（见 [H]）。因此，其预期余维为$\binom{r+1}{2}$。在许多情况下， $\mathcal{M}_g$ 中具有塞尔特征的曲线轨迹空间的余维与 Petri映射的核的维数相等（见 [T1],[B], [HT]）。

负值 ρ 对应的布里尔-诺特轨迹空间，以及具有 r维塞尔特征的曲线轨迹空间，分别提供了两类 $\mathcal{P}^r_{g,d}$、$\mathcal{P}^k_{g,d}$ 的例子，其余维为 k，位于 $\mathcal{M}_g$中。将 $\mathcal{P}^r_{g,d}$、$\mathcal{P}^k_{g,d}$ 自然地描述为$\mathcal{G}^r_{g,d}$、$\mathcal{G}^k_{g,d}$ 中关于 $k>1$ 的行列式簇，这似乎意味着其在 $\mathcal{M}_g$中的余维远大于 k。不过，另一个理由也支持余维为 k 这一选择：回想一下，佩特里映射像的正交补可视为 W^r_d的切空间，也就是说，它参数化了这样一些线丛的变形：其截面空间可以沿这些变形延拓。还有一个第二佩特里映射 μ_1，从 μ_0的核映射到 H^1（C，T_C）。其像的正交补参数化了这样一些曲线的变形：佩特里映射的核可沿这些变形延拓（见第1节）。若 μ_1 是单射，且 $\mathcal{P}^r_{g,d}$、$\mathcal{P}^k_{g,d}$ 在 $\mathcal{M}_g$ 中的余维为 k，则可得到关于 $\mathcal{P}^r_{g,d}$、$\mathcal{P}^k_{g,d}$ 的光滑性结果。我们将证明存在余维为 k 的光滑分支 $\mathcal{P}^r_{g,d}$、$\mathcal{P}^k_{g,d}$，它们超出了负值ρ 时的$\mathcal{M}^r_{g,d}$范围（见定理3.5）。我们采用与证明 $\mathcal{P}^r_{g,d}$、$\mathcal{P}^1_{g,d}$ 在 [F1], [CT] [F2]中非空性时类似的构造方法和退化方法。

另一方面，还存在余维小于 k 的轨迹空间 $\mathcal{P}^r_{g,d}$、$\mathcal{P}^k_{g,d}$。例如取 $\mathcal{P}^2_{g,4}$、$\mathcal{P}^k_{g,4}$，$1 \leq k \leq 2g-6$。那么 $\mathcal{P}^2_{g,4} = \mathcal{M}^1_{g2}$ 的余维为 $g-2$，位于 $\mathcal{M}_g$ 中。

1. Deformation of curves and line bundle

设 C 为一条曲线， L 为 C 上的一个线丛。记导子层为 T_C。作用于 L 上的一阶微分算子 σ 满足 $\sigma(fx) = \nu(f)s + f\sigma(s)$，其中某个导子为 ν。记作用于 L 上的一阶微分算子层为 Σ_L。存在一个正合序列

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \Sigma_L \to T_C \to 0$$

其中 $i: \mathcal{O}_C \to \Sigma_L$ 将函数 f 映射为“与 f 相乘”的微分算子，而 $\pi: \Sigma_L \to T_C$ 则将微分算子 σ 对应到相应的导子 ν。

空间 $H^1(C, O_C) = H^1(C, L \otimes L^*)$ 参数化线丛 L 的一阶变形，空间 $H^1(C, T_C)$ 参数化曲线的一阶变形，而空间 $H^1(C, \Sigma_L)$ 参数化由曲线和线丛组成的对的一阶变形。上面的正合序列导出一个正合序列

$$0 \to H^1(C, \mathcal{O}_C) \to H^1(C, \Sigma_L) \to H^1(C, T_C) \to 0$$

在将这些空间识别为变形空间后，第一个映射会将线丛的变形映射到对的变形，同时保持曲线不变。第二个映射是遗忘映射，它忽略丛的变形，只保留曲线的变形。

考虑 $L, W \subseteq H^0(C, L)$ 的截面空间的一个子空间 W。如果 L 的变形属于佩特里映射像的正交补，那么 W 中的截面就有扩张。

$$\mu_0 : W \otimes H^0(C, K \otimes L^*) \to H^0(C, K \otimes L \otimes L^*)$$

根据对偶性，这就变为

$$H^1(C, L \otimes L^*) \to Hom(W, H^1(C, L))$$

保持某个子空间 $W \subseteq H^0(C, L)$ 不变的数对 (C, L) 的变形，类似地，正是杯积映射 P_1^*: $H^1(C, \Sigma_L) \to Hom(W, H^1(C, L))$ 的核中的元素。

存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^1(C, \mathcal{O}_C) & \to & H^1(C, \Sigma_L) & \to & H^1(C, T_C) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & Hom(W, H^1(C, L)) & = & Hom(W, H^1(C, L)) & \to & (Ker\mu_0)^* & & \end{array}$$

最后一个垂直映射的对偶映射通常称为瓦尔映射，实际上由阿巴雷洛和科纳尔巴引入 [AC]:

$$\begin{array}{rccc} \mu_1 : & Ker\mu_0 & \to & H^0(C, 2K) \\ & \sum w_i \otimes v_i & \to & \sum w_i d(v_i) \end{array}$$

μ_1 的像的正交补参数化了那些使 Petri 映射的核得以延拓的曲线变形。因此，它可以解释为 $\mathcal{P}^r_{g,d}$ 的切空间。如果 $\mathcal{P}^r_{g,d}$ 在 $\mathcal{M}_g$ 中的余维与 μ_1 的像的维数相同，那么 $\mathcal{P}^r_{g,d}$ 在 $\mathcal{M}_g$ 中是余维为该数值的光滑子空间。

当 $\dim W = 2$ 且由截面 s_1、s_2 张成的 g^1_k 没有不动点时，映射 μ_1 可以明确描述（见 [T1] 的引理 2.12）：根据无基点铅笔技巧，佩特里映射的核可以如下识别为 $H^0(C, K-2L)$

$$\begin{array}{ccc} H^0(C, K-2L) & \to & H^0(C, L) \otimes H^0(C, K-L) \\ t & \to & s_1 \otimes s_2 t - s_2 \otimes s_1 t \end{array}$$

$(\sigma_{ij}) \in H^1(C, \Sigma_L)$ 的作用为

$$\begin{array}{ccc} H^1(C, \Sigma_L) & \to & Hom(H^0(C, L), H^1(C, L)) \\ (\sigma_{ij}) & \to & (a_i) \to (\sigma_{ij}(a_i)) \end{array}$$

由于 s_1, s_2 是同一个线丛 L 的截面，存在一个函数 f 使得 $s_1 = f s_2$。于是

$$\sigma(s_1)ts_2 - \sigma(s_2)ts_1 = \sigma(fs_2)ts_1 - \sigma(s_1)tfs_1 = \nu(f)ts_1^2.$$

注意，条件 $s_1 = fs_2$ 意味着 f 给出了映射 $C \to \mathbb{P}^1$。于是 $\nu(f)$ 在 f 的分歧除子上消失。映射

$$\begin{array}{ccc} H^1(C, T_C) & \to & (KerP)^* = (H^0(C, K-2L))^* \\ (\nu_{ij}) & \to & t \to \nu_{ij}(f)ts_1^2 \end{array}$$

产生了在 R 上消失的截面。

特别地，我们得到以下结果:

引理 1.1。设 k、g 为整数，使得 $2d-g-2<0$，或者等价地，亏格为 g 的一般曲线不是 k-缆线曲线。设 C 为一条 k- 缆线曲线，并假设 g^1_k 完备且没有不动点，令 R 为其分歧除子。在 C 处， k- 缆线曲线轨迹的切空间可识别为 $H^0(C, 2K-R)$ 的正交补，其中我们考虑 $H^0(C, 2K-R) \subseteq H^0(C, 2K) \cong H^1(C, T_C)^*$。

2. Limit Linear series in a chain of elliptic curves.

给定椭圆曲线 C_1、.....、C_g 以及点 P_i、$Q_i \in C_i$，通过将Q_i与 P_{i+1}、$i = 1$、.....、$g-1$识别，构造一条亏格为 g 的节点曲线。假设这些曲线和选取的点均为一般情形，但有少数曲线 C_{i_1}、.....、C_{i_e} 除外；对于这些曲线，存在整数 l_j，使得 $P_{i_j} - Q_{i_j}$ 是具有 l_j 挠的椭圆曲线上的一个点。在 [T3]，命题 1.4 中，我们描述了此类链上的可平滑极限线性级数：

链上可平滑极限线性级数空间的不可约分支对应于一个带有索引 $1, \ldots, g$ 的 $(r+1) \times (g-d+r)$ 矩形的填充，其中行和列均按递增顺序排列；如果某个索引出现多次，例如出现在位置 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2)，则这两个 $(a_2 - a_1) + (b_1 - b_2)$ 之间的网格距离可被 l_i 整除，并且不存在可由另一个索引替换、同时仍满足这些条件且使重复次数减少的索引。我们称这种填充为矩形的容许填充。为简化记号，我们通常写作 $\alpha = r+1, \beta = g-d+r$。

给定链上的一个极限线性级数，它对应于线丛 L_i 和截面空间V_i，极限级数的一个截面是截面的集合 (s^i) $i = 1, \ldots, g, s^i \in Vi$，满足$ord_{Q^i} s^i + ord_{P^{i+1}} s^{i+1} \geq d$。选取与$\alpha \times \beta$矩形的填充相对应的线性级数后，线性级数有截面 $s_1, \ldots, s_\alpha$，而 Serre 对偶有截面 $t_1, \ldots, t_\beta$；这些截面均按如下方式典范地定义（见 [T2] 定理 3.4）：

引理 2.1。设 d, g, r 为满足 $r+1-g \leq \rho \leq 0$的正整数。选取一个由指标 $1, 2, \ldots, g$填充的 $(r+1) \times (g-d+r)$-矩形的容许填充。考虑由 g条椭圆曲线$C_1, \ldots, C_g$组成的链，其中 $Q_i \in C_i$与 $P_{i+1} \in C_{i+1}$粘合，且这些曲线和点均为一般的，唯一例外是：当某个指标 i在位置 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2) 各出现一次时，$P_i - Q_i$恰为挠点$l_i = |a_2 - a_1| + |b_1 - b_2|$。那么存在唯一确定的极限截面 s_a，$a = 1, \ldots, r+1$，它们消失

- 在 P_1处的阶为 $a-1$
- 在 $P_i, i > 1$处的阶为 $\begin{cases} d - \bar{ord}_{P_i} s_a & \text{若 } i \text{ 位于第 a 列，则令} \\ d - ord_{P_i} s_a - 1 & \text{阶；若 } i \text{ 不在第 a 列，则令其在 } Q_i \end{cases}$
- 若 i 位于第 a 列，则令 $d - \bar{ord}_{P_i} s_a$ 阶；若 i 不在第 a 列，则令其在 Q_i 处为 $d - ord_{P_i} s_a - 1$ 阶。

$\bar{}$ t_b 的定义类似，只需将 d 替换为 $d = 2g-2-d$，并将 r 替换为 $\bar{r} = g-d+r-1$。

引理 2.2. 采用引理 2.1 中的记号，选取 g 对 (a, b)，使得在 $\alpha \times \beta$ 矩形中，对应坐标 (a, b) 的位置所填入的数各不相同。则，$s_a \otimes t_b$ 在典范丛的截面空间中的像线性无关。特别地，若填充中用到了所有指标 $1, \ldots, g$，则佩特里映射是满射。

证明。参见 [T2] 中的命题 1.8 □

稍后我们将需要以下结果：

引理 2.3. 设 C为一条椭圆曲线，$P, Q \in C, L$为 C 上次数为 d 的线丛，且 $s_1, \ldots, s_{k+1}, k \geq$个 L 的截面在 P 处至少消失 a 阶，在 Q 处至少消失 b 阶，其中 $a+b \geq d-k$。那么，$s_1, \ldots, s_{k+1}$ 是线性相关的截面。

证明。根据假设，s_1、s_{k+1}给出了 $H^0(C, L(-aP-bQ))$的截面。由黎曼-罗赫定理，$h^0(C, L(-aP-bQ))$ $= d-a-b \leq k$ □

3. Existence of smooth Petri loci of codimension k.

我们在 [T3], 定理 2.1 中证明，当布里尔-诺特数 $\rho(g,r,d) = \rho$ 为负但$\rho \geq r+1-g$时，在适当的椭圆曲线链上存在可平滑极限线性级数。此外，该链上的佩特里映射是满射，因此佩特里映射的核具有预期维数 $-\rho$。

我们希望证明，对于 $k < \min\{r+1, g-d+r\}, g \geq (r+1)(g-d+r) - k$，存在余维为 k 且第二佩特里映射为单射的子集$\mathcal{P}^r_{g,d}$ $\subseteq \mathcal{M}_g$ 。

我们将使用上述所述的椭圆曲线链上的极限线性级数与一个 $(r+1)\times(g-d+r)$ 矩形的填充之间的对应关系。

我们首先假设 $k = (r+1)(g-d+r) - g = -\rho$。

我们如下定义该 $\alpha\times\beta$ 矩形的一个适当填充：首先，用互不相同的数字完全填充 $(\alpha-1)\times(\beta-1)$-矩形，以及最后一行的前 $\alpha-k-1$ 个位置和最后一列的前 $\beta-k-1$ 个位置。当然有许多种填法，我们任意选择一种。然后，将最后一行末尾出现的项与最后一列底部的项相匹配，填入 k 个位置。最后，在剩下的最后一个位置填入索引 g。由于根据假设，$k = (r+1)(g-d+r) - g$，这是可能的，并且该填充使用了所有索引 $1,\ldots,g$。此外，索引 $i(l) = g-l, l = 1,\ldots,k$ 在该矩形中各出现于两个位置，即 $(\alpha-l,\beta)$ 和 $(\alpha,\beta-l)$。图 1 展示了几个例子。

1	7	13	19	25
2	8	14	20	26
3	9	15	21	27
4	10	16	22	28
5	11	17	23	29
6	12	18	24	30
27	28	29	30	31

1	9	17	25	33	41
2	10	18	26	34	42
3	11	19	27	35	43
4	12	20	28	36	44
5	13	21	29	37	46
6	14	22	30	38	47
7	15	23	31	39	48
8	16	24	32	40	49
45	46	47	48	49	50

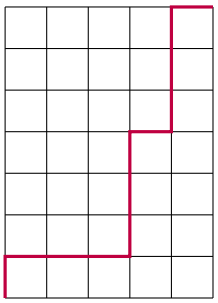

Figure 1.

现在我们考察 Petri 映射的核中的截面。截面 $s_{\alpha-l}\otimes t_\beta - s_\alpha \otimes t_{\beta-l}$ 属于 Petri 映射在 $C_{i(l)}$上的限制的核。我们检查以下内容

引理 3.1. 沿用引理 2.1 中的记号，$s_{\alpha-l}\otimes t_\beta - s_\alpha\otimes t_{\beta-l}$在 $C_{i(l)}$ 中的限制与每个椭圆分支上 Petri 映射的核中的截面粘合，从而在链上的 Petri 映射的核中得到截面 $\bar{x}_l$ 。

证明。根据引理 2.1 中对 s_a 的描述，截面 s_a 在 P_i 处的消失阶为 $a-1+i-1-h(i-1,a)$，其中 $h(i-1,a)$ 表示列 a 中小于 i 的指标个数。截面 t_b 在 P_i 处的消失阶为 $b-1+i-1-h'(i-1,b)$，其中 $h'(i-1,b)$ 表示行 b 中小于 i 的指标个数。因此，截面 $s_a\otimes t_b$ 在 P_i 处的消失阶为 $(a-h'(i-1,b)) + (b-h(i-1,a)) + 2i - 2$。

考虑索引不超过 $i-1$ 的矩形的填充区域边界折线（图 1 的最后一个窗格显示了第一个窗格中填充区域的这一轮廓，以及 $i=22$）。数量 $(a-h'(i-1,b))+(b-h(i-1,a))$ 表示矩形中从点 (a,b) 到这条折线的有符号网格距离。在图 1 的示例中，方格 (5, 6)（最后一列，倒数第二行）到这条折线的

水平距离为 1，垂直距离为 5。方格 (3,3)（第三行、第三列）到这条折线的水平距离为 -1，垂直距离为 -3。

截面 $s_a \otimes t_b$ 在 Q_i 处的消失阶为 $2g-2-ord_{P_i} s_a \otimes t_b$，如果 i 同时位于第 a 列和第 b 行；如果只位于其中一处，则少一阶；如果两处都不在，则少两阶。

特别地，如果到对应于 $i-1$ 的折线的网格距离相同，那么两个截面 $s_{a_1} \otimes t_{b_1}$ 和 $s_{a_2} \otimes t_{b_2}$ 在 P_i 处的消失阶相同。如果到对应于 i 的折线的网格距离相同，那么它们在 Q_i 处的消失阶也相同。

注意，椭圆曲线上的线丛至多有与其次数相同数量的线性无关截面；但当次数为 0 时，若它是平凡线丛，则可以有一个截面。因此，对于次数为 $2g-2$ 的线丛，如果两个截面在点 P_i、Q_i 处的消失阶之和为 $2g-2$ 或 $2g-3$，那么它们必定线性相关；当三个截面的消失阶之和为 $2g-4$ 时，结论也成立（见引理 2.3）。如果其中一个截面在 P_i 或 Q_i 处的消失阶比其他截面多一阶，这一结论仍然成立。

因此，要在限制于曲线 C_i 的佩特里映射的核中找到一个元素，只需找到三个截面，使它们到分别对应于 $i-1$ 和 i 的折线的距离相同。如果在矩形填充 i 中，a_1 位于第 b_1 行或第 a_2 列，同时也位于第 b_2 行或第 $i-1$ 列，那么只需找到两个截面 $s_a \otimes t_b$，使它们到分别对应于 $i-1$ 和 i 的两条折线的距离相同，也同样足够。或者，即使只能找到三个截面，其中两个截面到对应于 i 的折线的距离相同，而到对应于 的折线的距离少一，也足够了。

现在我们想证明，限制于 $C_{i(l)}$ 的佩特里映射的核中的截面 x_l，可以与曲线 C_i、$i \neq i$（l）上佩特里映射的核中的截面粘合。

在曲线 $C_{i(l')}$ 上，对于 $1 \leq l' \leq k$，分别在最后一行和最后一列添加（如果 $l' > l$ 则移除）两个方格。从方格（$\alpha - l$，β）到索引 i（l'）所对应折线的距离，与方格（α，$\beta - l$）的距离相同。因此，$s_{\alpha-l} \otimes t_\beta - s_\alpha \otimes t_{\beta-l}$ 属于限制于 $C_{i(l')}$ $l' = 1$、.....、k 的佩特里映射的核，并且对于固定的 l，这些截面彼此粘合，从而得到链上佩特里映射核中的一个截面 $\bar{x}_l$，其取值为 $i \geq g-k$。

从 C_{i+1} 到 C_i 时，对于 $i_0 < i < i$（k），最后一行或最后一列分别会移除一个方格。若在曲线 C_{i+1}上，涉及 $s_\alpha \otimes t_j$、$s_j \otimes t_\alpha$ 的映射的核中的元素满足条件，且从最后一行移除方格，那么 $s_\alpha \otimes t_j$、$s_\alpha \otimes t_{j-1}$、$s_{j'} \otimes t_\alpha$ 线性相关。同样，每次移除一个方格，我们都会得到一个相关关系，其中涉及 C_{i+1} 上出现的两个截面，以及同一行或同一列上另一个对（方格正从该行或列移除）。

从 C_{i_0+1} 到 C_{i_0} 时，截面 $s_\alpha \otimes t_1$、$s_{\alpha-1} \otimes t_{\beta-1}$、$s_1 \otimes t_\beta$ 的像线性相关，并与 $x_{i(l)}$ 的扩张粘合；该扩张属于 C_{i_0+1} 对应的佩特里映射的核。截面 $s_\alpha \otimes t_j$、$s_j \otimes t_\beta$ 在 P_{i_0}、Q_{i_0} 上以相同阶数消失。因此，这两个截面的一个线性组合在 P_{i_0} 处的消失阶数会再高一阶。由此可知，$s_\alpha \otimes t_j$、$s_j \otimes t_\beta$、$s_\alpha \otimes t_{j-1}$、$s_{j-1} \otimes t_\beta$ 的一个线性组合属于佩特里映射的核，并与 $x_{i(1)}$ 的扩张粘合；该扩张属于 C_{i_0+1} 对应的佩特里映射的核。

从 C_{i+1} 到 C_i 时，如果我们从矩形中移除的方格并未出现在 C_{i+1} 中构成Petri映射的核的元素所涉及截面的任何行或列中，那么在 C_i 上，Petri映射的核仍将涉及相同的截面。如果我们移除的方格出现在 C_{i+1} 中构成Petri映射的核的元素所涉及的两个截面的行或列中，那么在 C_i 上，Petri映射的核仍将涉及相同的截面。如果我们移除的方格出现在 C_{i+1} 中构成Petri映射的核的元素所涉及的两个截面之一的某行或某列中，那么在 C_i 上，Petri映射的核仍将涉及相同的截面。如果我们移除的方格出现在 $s_a \otimes t_b$ 中某个截面（构成

Petri映射的核的元素所涉及的截面）的行中，但不在其他截面的行或列中，那么在 C_i上，我们可以将 $s_a \otimes t_b$ 和 $s_a \otimes t_{b-1}$ 与 C_{i+1} 中使用的其他截面一起使用，从而得到Petri映射的核中的元素。□

引理3.2. 采用上述记号，截面 $\bar{x}_l, i = 1, \ldots, k$ 在双典范线性系中经第二佩特里映射所得的像线性无关。

证明。注意，在曲线 $C_{i(1)} = C_{g-k}, \ldots, C_{i(k)} = C_{g-1}, C_g$ 上，截面

$$s_{\alpha-l} \otimes t_\beta - s_\alpha \otimes t_{\beta-l}, l = 1, \ldots, k$$

属于佩特里映射的核。只需验证这些截面在 C_g 上的双典范像线性无关。

在 C_g 上，截面 s_a 在 P_g 处的消失阶为 $a + g - \beta - 2$（若 $a \neq \alpha$），若 $a = \alpha$ 则还多消失一阶；在 Q_g 处的消失阶为 $d - a - g + \beta + 1$。
因此，两个截面 $s_{\alpha-l}, s_\alpha$ 张成一个带有固定部分的线性级数

$$(\alpha - l - \beta - 1)P_g + (d - \alpha - g + \beta + 1)Q_g = (d - 1 - l)P_g$$

（这里我们使用了 $\alpha = r + 1, \beta = g - d + r$）。活动部分由 $(l+1)P_g$ 的两个截面张成：其中一个在 P_g 处的消失阶为 $l+1$，在 Q_g 处为 0；另一个在 Q_g 处的消失阶为 l，在 P_g 处为 0。记 e 为固定部分的一个截面，则 $s_\alpha = es'_\alpha, s_{\alpha-l} = es'_{\alpha-l}$。记 f 为满足 $s'_{\alpha-l} = fs'_\alpha$ 的函数。

类似地，一个截面 t_a 在 P_g 处的消失阶为 $a + g - \alpha - 2$，如果 $a \neq \beta$，若 $a = \beta$ 则再增加一阶；并且在 Q_g 处的消失阶为 $d - a - g + \alpha + 1$，其中 $d = 2g - 2 - d$。因此，两个截面 $t_{\beta-l}, t_\beta$ 张成一个具有固定部分 $(d-1-l)P_g$ 的线性系，而活动部分由 $(l+1)P_g$ 的两个截面张成：其中一个在 P_g 处的消失阶为 $l+1$，在 Q_g 处为 0；另一个在 Q_g 处的消失阶为 l，在 P_g 处为 0（正如无基点铅笔技巧所预期的那样）。记 $\bar{e}$ 为固定部分的一个截面，则 $t_\beta = \bar{e}t'_\beta, t_{\beta-l} = \bar{e}t'_{\beta-l}$。于是，对于之前的同一个函数 f，也有 $t'_{\beta-l} = ft'_\beta$。

$s_{\alpha-l} \otimes t_\beta - s_\alpha \otimes t_{\beta-l} = efs'_\alpha \otimes \bar{e}t'_\beta - es'_\alpha \otimes \bar{e}ft'_\beta$在双正则级数中的像是除子为 $[(d-1-l)+(\bar{d}-1-l)]P_g + R_f$的截面，其中 R_f是由 f 定义的函数 $C \to \mathbb{P}^1$的分歧除子（参见第1节末尾关于 g^1_k 的论证，或 [T1]中的引理2.12）。在这种情况下，移动部分的分歧除子为 $lP_g + (l-1)Q_g + R'$，其中 R' 是一个不以 P_g, Q_g为支撑的除子。因此，双典范级数中的像是一个除子为 $(2g-4-l)P_g + lQ_g + R$的截面。对于不同的 l取值，这些截面在 P_g, Q_g处具有不同的消失阶，因此它们线性无关。□

引理3.3. 采用上述记号，截面 $\bar{x}_l, l = 1, \ldots, k$ 在 Q_g 处的消失阶为 l。

证明. 已在上文证明。 □

现在，我们利用上述结果，为 Brill–Noether数较大的曲线构造佩特里映射核中的极限截面。该构造类似于 [F2] 中定理1.3的证明所采用的方法，后者通过归纳法证明了 Petri除子的存在性。

引理3.4. 设 g, r, d, k 为满足 $-\rho \leq k \leq r, r + 1 \leq g - d + r$ 的整数。于是，在椭圆曲线链空间中存在一个余维为 k 的族，其上带有一个极限线性级数，且其佩特里映射的核恰为 k。

证明。定义 $t = \rho + k, g_0 = g - t, d_0 = d - t$。则 $\rho(g_0, d_0, r) = \rho(g, d, r) - t = -k$。由引理3.2可知，在由 g_0 条椭圆曲线构成的链中，存在一个余维为 k 的子集，其极限线性级数为 (L_i, V_i) $i = 1, \ldots, g_0$，次数为 $d - t$，维数为 r，且 Petri映射的核的维数为 k。

取这样一条链及一个极限线性级数。通过将 $Q_i \in C_i$ 附加到 $P_{i+1} \in C_{i+1}, i = g_0, \ldots, g-1$ 上，在该链上添加 t 条一般椭圆曲线$C_{g_0+1}, \ldots, C_g$，其一般点为 $P_i, Q_i \in C_i, i = g_0+1, \ldots, g$。

在曲线 C_i、$i = 1$、……、g_0 上取具有方面 $(L_i(tQ_i)\ V_i + tQ_i)$ 的极限线性级数。在每条曲线 C_i、$i = g_0+1$、……、g 上，选取次数为 $r+1$ 的线丛 L'_i，使得 $L'^2_i = \mathcal{O}(2(r+1)P_i)$，但 $L'_i \neq \mathcal{O}((r+1)P_i)$。取

$$L_i = L'_i((d-r-g+i-1)P_i + (g-i)Q_i),\ V_i = |L'_i| + (d-r-g+i-1)P_i + (g-i)Q_i.$$

曲线 C_i、$i = 1$、……、g_0 上的 Serre 对偶线性级数为 $(\overline{L_i}(tP_i)\ \overline{V_i} + tP_i)$，其中 $(\overline{L_i}, \overline{V_i})$ 是原先由 g_0 条曲线组成的链上的原线性级数的 Serre 对偶。在 C_i、$i = g_0+1$、……、g 上，Serre 对偶丛和截面空间为

$$L'_i((g-d+i-r-3)P_i + (g-i)Q_i),\ W_i \text{ such that } |L'_i| + (g-d+i-r-3)P_i + (g-i)Q_i \subseteq W_i$$

由引理3.3，极限线性级数在前 g_0 个分支上的限制有 k 个截面属于 Petri 映射的核，并在 Q_{g_0} 处的消失阶为 $l + 2(g-g_0) = l + 2t$、$l = 0$、……、k。

线性级数 $|L'_i|$ 有截面 $s_j, j = 0, \ldots, r$，它们在 P_i 处的消失阶为 $r-j$，在 Q_i 处的消失阶为j。若 e 表示一个在 P_i 处的消失阶为 $d-r-g+i-1$、在 Q_i 处的消失阶为 $g-i$ 的截面，则 es_j 是线性级数 $|L'_i| + (d-r-g+i-1)P_i + (g-i)Q_i$的一个截面。类似地，若 $\bar{e}$ 表示一个在 P_i 处的消失阶为 $g-d+i-r-3$、在 Q_i 处的消失阶为 $g-i$ 的截面，则 $\bar{e}s_j$ 是线性级数$|L'_i| + (g-d+i-r-3)P_i + (g-i)Q_i \subseteq W_i$的一个截面。

曲线 C_i 上的截面 $es_r \otimes \bar{e}s_{r-l} - es_{r-l} \otimes \bar{e}s_r$ 属于佩特里映射的核，并且在 P_i 处的消失阶为

$$(d-r-g+i-1) + ((g-d+i-r-3) + r + (r-l) = 2i-4-l.$$

曲线 C_{i-1} 上的截面 $es_r \otimes \bar{e}s_{r-l} - es_{r-l} \otimes \bar{e}s_r$ 在 Q_{i-1} 处消失，阶数为

$$(g-(i-1)) + (g-(i-1)) + l = 2g-2i+2+l.$$

由于$(2i-4-l) + (2g-2i+2+l) = 2g-2 =$度数 K_C，截面 $es_j \otimes \bar{e}s_{j'} - es_{j'} \otimes \bar{e}s_j$ 可以粘合成链 $g_0+1 \leq i \leq g$中的一个截面$\hat{}x_l$。根据引理3.3，将 tQ_i、$i = 1$、……、g_0 分别添加到 $\bar{x}_l$ 的每个分支上后得到的截面，可以与$\hat{}x_l$粘合，从而得到整个链上佩特里映射的核中的一个截面 $\tilde{x}_l$。根据构造，$\tilde{x}_l$ 在 C_{g_0} 上的限制是 $\bar{x}_l + tQ_{g_0}$，因此根据引理3.2，它们在双典范丛中的像线性无关。□

定理3.5. 设 g, r, d, k 为整数，且 $-\rho \leq k \leq r, r+1 \leq g-d+r$。因此存在一个 $\mathcal{P}^r,\ _g{}^k_d,$ 的不可约分支，其余维为 k，位于 $\mathcal{M}_g$中。

证明。令 C_o 为引理3.5中构造的椭圆曲线链。记 $\pi\colon\ \mathcal{C} \to B$ 为 C_0 的万有变形空间，其中 $b_0 \in B$ 对应于 b_{0}。由 [F2], 的定理1.2可知，存在一个拟射影簇 $\mathcal{Q}^r,\ _g{}^1_d,$ 它参数化了 π 的纤维上的极限线性级数，以及这些极限截面的一个截面，该截面属于Petri映射的核。此外，$\mathcal{Q}^r,\ _g{}^1_d,$ 的每个不可约分支的维数至少为$\dim B - 1$。根据构造，$p\colon\ \mathcal{Q}^r,\ _g{}^1,\ _d \to B$在 b_0 上的纤维维数为 k，且 $(C_0,\ g^r_d,\ \tilde{x}_l)$ 张成该纤维。b_0 处 p 像的切空间，是 μ_1 作用于 $\tilde{x}_l$ 张成空间的像所得像的正交补，其余维为k。因此，所有 k 截面都能变形的空间在 $\mathcal{M}_g$中的余维为 k。

□

References

[AC] E. 阿巴雷洛，，M. Cornalba， *Su una congettura di Petri*《评论数学赫尔维蒂》56（1981），第1期，1–38。[B] L. Benzo， *Components of moduli spaces of spin curves with the expected codimension*，《数学年刊》363（2015），第1–2期，385–392。[BS] A. Bruno，E. Sernesi *A note on the Petri loci*《曼努斯数学》136，（2011）439–443。[C] A. Castorena， *Remarks on the Gieseker-Petri divisor in genus eight*《巴勒莫数学环志》（2）59（2010），第1期，143–150。[CT] A. Castorena，M. Teixidor， *Divisorial components of the Petri locus for pencils*《纯粹与应用代数杂志》212（2008），第6期，1500–1508。[E] D. Edidin，
The monodromy of certain families of linear series is at least the alternating group.，《美国数学会会刊》113（1991），第4期，911–922。[EH] D. Eisenbud，J. Harris，
Irreducibility of some families of linear series with Brill-Noether number -1，《高等师范学校科学年刊》（4）22（1989），第1期，33–53。[F1] G. Farkas。*Gaussian maps*， *Gieseker–Petri loci and large theta-characteristics.*《克雷尔数学杂志》581，151–173（2005）[F2] G. Farkas。
Rational maps between moduli spaces of curves and Gieseker–Petri divisors.《代数几何杂志》19（2010），243–284。[ ] *Some reducible and irreducible Brill-Noether loci* 2503 16255 HT
[ ] *Theta-characteristics on algebraic curves* 271 1982
R. Haburcak，M. Teixidor，arXiv：。H J. Harris，。《美国数学会汇刊》（），第2期，611–638。[LC1] M. Lelli-Chiesa， *The Gieseker-Petri divisor in $\mathcal{M}_g$ for $g \leq 13$*《几何奉献》158（2012），149–165。[LC2] M. Lelli-Chiesa， *A codimension 2 component of the Gieseker-Petri locus.*《代数几何杂志》31（2022），第4期，751–771。[T1] M. Teixidor， *Half-canonical series on algebraic curves*，《美国数学会汇刊》302，第1期（1987），9–115。[T2] M. Teixidor。 *Brill-Noether loci with ramification at two points*。《纯粹与应用数学年刊》202（2023）第3期，1217–1232。[T3] M. Teixidor。 *Brill-Noether Loci*，《数学手稿》176（2025），第1期，即将出版。

Mathematics Department, Tufts University, 177 College Ave, Medford, MA 02155, USA, ORCiD 0000-0003-3747-3330*Email address*: mteixido@tufts.edu