arXiv:2601.07027v1 [math.GT] 11 Jan 2026

G- G-ANR 空间与逆极限的刻画

´SERGEY A. ANTONYAN、AURA LUCINA KANTUN-MONTIEL、´ JESUS EDUARDO MATA-CANO 和 ARMANDO MATA-ROMERO

Abstract. 本文证明，对于紧群 G，在以下假设下，一个可度量的 G-空间是 G-ANR：（1）它通过一个精细的 G-同伦等价支配某个 G-ANR 空间；（2）它在某个 G-ANR 中是 G-同伦稠密的；（3）它包含一个 G-ANR，且该空间是一个 G-同伦稠密子集；（4）它是由 G-ANR 空间构成的逆序列的逆极限，且粘合映射是精细的 G-同伦等价。

1. Introduction

本文从收缩子的等变理论视角考察可度量 G-空间的等变拓扑（即配备紧拓扑群 G 连续作用的可度量空间）。

我们引入并分析了这类概念的等变版本，包括同伦稠密子集（见 [6] 和 [7]）、细同伦等价以及 h-加细。我们的方法建立在收缩子理论中的经典结果之上，将其推广到等变情形，并为理解 G-ANR空间在细 G-同伦等价下的行为提供了新的见解。

本文的主要结果确立了可度量 G-空间继承 G-ANR 性质的充分条件。定理4.3证明，若一个可度量的 G-空间通过精细的 G-同伦等价支配一个 G-ANR 空间，那么它本身就是 G-ANR。此外，定理5.4刻画了 G-同伦稠密子集，指出它们等价于包含映射为精细 G-同伦等价的子集。另一项重要成果是定理6.1，它将Curtis定理 [9] 推广到等变情形；该结果表明

2020 数学主题分类。54C55, 55M15, 55P10, 55P91, 54H15。关键词和短语。G-ANR，细 G-同伦等价，逆极限，G-同伦稠密子集。本文部分得到 PAPIIT-DGAPA（UNAM）项目 IN-107426 资助。

若一个由完全可度量的 G-ANR 空间组成的逆序列，其粘合映射是精细的 G-同伦等价，那么该逆序列的极限本身就是 G-ANR。此外，若逆序列中的空间是 G-AR，则逆极限也继承 G-AR 性质。这些发现不仅推广了经典定理，也为理解 G-空间范畴中逆极限的结构提供了一个框架。

关于 G-空间理论的基本概念和结果取自 [8] 和 [14]。关于收缩空间的等变理论，主要参考文献包括 [2], [3], [4] 和 [5]。

2. Basic notations

除非另有说明，本文始终用 G 表示一个紧豪斯多夫拓扑群。G 的单位元记为 e。所有拓扑空间均假定为完全正则且豪斯多夫的。所有映射均假定为连续的。

G 在空间 X 上的一个作用是一个映射 $G \times X \to X$，$(g,\ x) \mapsto gx$，满足对所有 $x \in X$，$ex = x$；并且对所有 $g,\ h \in G$，$x \in X$，$h(gx) = (hg)x$。我们称配备了 G 的连续作用的拓扑空间 X 为一个 G-空间。

设 X 为一个 G-空间，且设 $x \in X$。G-空间 $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$ 称为 x的**G-轨道**。X 的所有 G-轨道组成的集合记作 X/G。子集 $S \subset X$称为 G-不变，如果 $S = G(S) = \{gs \mid g \in G,\ s \in S\}$。

设 X 和 Y 为 G-空间。连续映射 $f : X \to Y$ 称为一个G-映射 或等变映射，如果对于每个 $(g, x) \in G\times X$，都有 $f(gx) = gf(x)$。如果 G 在 Y 上的作用是平凡的，则称 f 为不变映射。

同伦 $F\colon X\times I \to Y$，其中 $I = [0, 1]$，称为 G-同伦，如果它是一个 G-映射，且 $X\times I$ 承载对角作用 $g(x, t) = (gx, t)$。对于每个 $t \in I$，我们将其诱导的 G-映射 $F_t : X \to Y$ 记作 F_t，其定义为 $F_t(x) = F(x, t)$。如果存在一个 G-同伦 $F\colon X \times I \to Y$，使得 $F_0 = f_0$ 和$F_1 = f_1$，则称两个 G-映射 $f_0, f_1\colon X \to Y$为 G-同伦。在此情形下，记作 $f_0 \underset{G}{\simeq} f_1$。

令 G-$\mathcal{M}$ 表示所有可度量化 G-空间的类。众所周知，每个空间 $X \in G$-$\mathcal{M}$ 都存在一个相容不变度量，即一个度量 $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$，使得对于所有 $g \in G$ 和 $x,\ y \in X$，都有 $\rho(gx,\ gy) = \rho(x,\ y)$（参见 [14, 命题 1.1.12]）。

一个可度量的 G-空间 Y 称为 G-等变绝对邻域收缩体（对于类 G-$\mathcal{M}$），如果对于任意闭

G-嵌入 $Y \hookrightarrow X$ 到一个可度量的 G-空间 X中，都存在一个 G-收缩映射 $r\colon U \to Y$，其中 U是 Y在 X 中的不变邻域（记作：$Y \in G$-ANR）。此外，如果总可以取$U = X$，则称 Y 为 G-等变绝对收缩体（记作：$Y \in G$-AR）。

若一个 G-空间 Y 对于类 G-$\mathcal{M}$ 是 G-等变绝对邻域延拓子（记作 $Y \in G$-ANE），则称其为 G-等变绝对邻域延拓子：对于任意度量 G-空间 X 的闭不变子集 A，以及任意 G-映射 $f\colon A \to Y$，都存在 A 在 X 中的不变邻域 U，以及一个将 f 延拓的 G- 映射 $\psi\colon U \to Y$。此外，若总能取 $U = X$，则称 Y 是类 G-$\mathcal{M}$ 的 G-等变绝对延拓子（记作 $Y \in G$-AE）。映射 ψ 称为 f 的 G-延拓。

我们注意到（见 [2]），度量 G-空间是 G-ANR（分别地，是 G-AR）当且仅当它是 G-ANE（分别地，是 G-AE）。

3. G-$\mathcal{U}$-HOMOTOPIES

我们关注由某种邻近程度控制的同伦性质。下文将介绍有关 G-ANR 与由开覆盖控制的 G-同伦之间关系的概念和结果。

设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是空间 X 的两个开覆盖。若对每个 $U \in \mathcal{U}$，都存在某个 $V \in \mathcal{V}$ 使得$U \subset V$，则称 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{V}$ 的加细。

对于子集 $A \subset X$，我们将 A 关于 $\mathcal{U}$ 的星记为

$$\mathrm{St}(A,\mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap A \neq \emptyset\}.$$

若开覆盖 $\mathcal{U}$ 是 X 的星形加细，则

$$\mathrm{St}(\mathcal{U}) = \{\mathrm{St}(U,\mathcal{U}) \mid U \in \mathcal{U}\}$$

构成 $\mathcal{V}$ 的一个加细。

注意，对于 G-空间 X 的任意两个开覆盖 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$，总存在一个公共加细，可通过取覆盖 $\mathcal{W} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V}\}$ 得到。

设 X 和 Y 是拓扑空间，且 $\mathcal{U}$ 是 Y的一个开覆盖。若对于每个 $x \in X$，都存在 $U \in \mathcal{U}$使得 $f(x)$ $g(x) \in U$，则称两个映射 $f, g\colon X \to Y$是 $\mathcal{U}$-邻近 的。

引理 3.1。设 $f\colon X \to Y$ 是一个 G-映射，使得 $f(X)$ 在 Y 中稠密。设 $\mathcal{U}$ 是 Y 的一个开覆盖，且 $\varphi\colon Y \to X$ 是一个 G-映射，使得 φf 与恒等映射 id_X $f^{-1}(\mathcal{U})$-接近。那么 $f\varphi$ 与 id_Y $St(\mathcal{U})$-接近。

证明。设 $y \in Y$。设 U_1、$U_2 \in \mathcal{U}$，使得 $y \in U_1$ 且 $f\varphi(y) \in U_2$。那么 $y \in U_1 \cap (f\varphi)^{-1}(U_2)$。由于 $f(X)$ 在 Y 中稠密，存在 $x \in X$ 使得 $f(x) \in U_1 \cap (f\varphi)^{-1}(U_2)$，从而 $f\varphi f(x) \in U_2$。此外，由于 φf 与 id_X $f^{-1}(\mathcal{U})$-接近，存在 $U_3 \in \mathcal{U}$ 使得 x、$\varphi f(x) \in f^{-1}(U_3)$，即 $f(x)$ $f\varphi f(x) \in U_3$。因此，$U_1 \cap U_3 \neq \emptyset$ 且 $U_2 \cap U_3 \neq \emptyset$。所以 y、$f\varphi(y) \in \mathrm{St}(U_3, \mathcal{U})$，证毕。□

我们称 $\mathcal{U}$ 为 G-空间 X 的开覆盖，若它是一个 G-覆盖，当且仅当对每个 $U \in \mathcal{U}$ 和 $g \in G$，都有 $gU \in \mathcal{U}$。

在仿紧 G-空间中，存在任意小的 G-覆盖，即有如下命题。

命题 3.2 ([5, 引理4。5])。设 X 是一个仿紧 G-空间。那么，对其任意开覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个 G-覆盖 $\mathcal{V}$，使得 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{U}$ 的星形加细。

设 $\mathcal{U}$ 是 G-空间 Y 的一个开覆盖。若对每个 $x \in X$，都存在 $U \in \mathcal{U}$，使得对所有 $t \in I$，$F_t(x) \in U$，则称同伦 $F\colon X \times I \to Y$ 被 $\mathcal{U}$ 限定，或简称为 G-$\mathcal{U}$-同伦。在这种情况下，我们称 F_0 和 F_1 是 G-$\mathcal{U}$-同伦映射，并记作 $F_0 \underset{G\text{-}\mathcal{U}}{\simeq} F_1$。

显然，若 $\mathcal{V}$ 是 G-空间 Y 的一个开覆盖，且 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{V}$的加细，那么每个 G-$\mathcal{U}$-同伦 $F\colon X \times I \to Y$也是一个 G-$\mathcal{V}$-同伦。

设 $\mathcal{U}$ 是 X的一个开覆盖。若存在 G-映射 $f\colon X \to Y$ 和 $\varphi\colon Y \to X$，使得 φf与恒等映射 id_X是 G-$\mathcal{U}$-同伦的，则称 G-空间 X 被 G-空间 Y 以 G-$\mathcal{U}$-支配。

与非等变情形一样，G-ANR 空间具有 G-同伦延拓性质。此外，它们还具有 G-$\mathcal{U}$-同伦的等变延拓性质，如 [1]中所述。

定理 3.3 ([1, 定理 5。1])。设 Y 是一个 G-ANR，且 $\mathcal{U}$ 是 Y的一个 G-覆盖。设 A 是可度量 G-空间 X 的一个闭不变子集，并设 $H_t\colon A \to Y, t \in [0,1]$是一个 G-$\mathcal{U}$-同伦。若 H_0 可延拓为一个 G-映射 $f\colon X \to Y$，则存在一个 G-$\mathcal{U}$-同伦 $\sim$ $\sim$ $\sim H_t\colon X \to Y$，使得对于所有 $t \in [0,1]$，$H_0 = f$ 且 $H_t|_A = H_t$。

设 X 和 Y 是 G-空间，且 $\mathcal{U}$ 是 Y的一个开覆盖。若存在一个 G-映射 $\varphi\colon Y \to X$，使得 $\varphi f \underset{G}{\simeq} f^{-1}(\mathcal{U})\, id_X$ 且 $f\varphi \underset{G\text{-}\mathcal{U}}{\simeq} id_Y$，则称 G-映射 $f\colon X \to Y$为一个 G-$\mathcal{U}$-同伦等价。此时，称 φ为 f的一个 G-$\mathcal{U}$-同伦逆。

设 X 和 Y 是 G-空间。若对于 Y的每个开覆盖 $\mathcal{U}$， f 都是一个 G-$\mathcal{U}$-同伦等价，则称 G-映射 $f\colon X \to Y$ 为一个细 G-同伦等价。

定理 3.4 ([3, 定理 7])。设 Y 是一个可度量的 G-空间。若对于 Y 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个 G-ANR 空间 X，使得 Y 被 X 做 G-$\mathcal{U}$- 同伦支配，则 Y 是一个 G-ANR。

由此定理可知， G-ANR 在细 G-同伦等价下的像也是 G-ANR。

推论 3.5。设 $f\colon X \to Y$ 是一个细 G-同伦等价。若 X 是一个 G-ANR，则 Y 是一个 G-ANR。

4. G-ANR spaces and fine G-homotopy equivalences

现在，我们通过在定理 4.3 中证明 Kozlowski 定理（[16,定理 6.7。5]）的等变类比，来推广推论 3.5 中的结果。实现这一目标的一个重要步骤是，G-ANR 具有以下关键细化。

设 Y 是一个 G-空间，且 $\mathcal{U}$ 是 Y的一个开 G-覆盖。如果开G-覆盖 $\mathcal{V}$ 是 Y的一个 h-G-加细 $\mathcal{U}$，那么 $\mathcal{V}$ 是$\mathcal{U}$的加细，并且定义在可度量化G-空间 X 上的任意两个 $\mathcal{V}$- 接近的 G- 映射 f， $\kappa\colon X \to Y$ 都是 G-$\mathcal{U}$- 同伦的。

定理 4.1 ([1, 定理 4.2])。每个 G-ANR空间的开 G-覆盖都有一个 h-G-加细。

引理 4.2。设 $X \in G\text{-ANR}$， Y 是一个仿紧 G-空间，且 $f\colon X \to Y$ 是一个 G- 映射。假设对于 Y 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个 G- 映射 $\varphi\colon Y \to X$，使得 $\varphi f \overset{\simeq}{}_{G\text{-}f^{-1}(\mathcal{U})} id_X$。那么，对于 Y 的每个开 G-覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个开 G-覆盖 $\mathcal{V}$，它是 $\mathcal{U}$的加细，并且 $f^{-1}(\mathcal{V})$ 是 $f^{-1}(\mathcal{U})$的一个 h-G-加细。

证明。 </style}设 $\mathcal{U}$ 是 Y的一个开 G覆盖。由命题 3.2，存在 Y 的一个开 G覆盖 $\mathcal{W}$，它是 $\mathcal{U}$的星形加细。

设 $\varphi\colon Y \to X$ 是一个 G-映射，使得 $\varphi f \overset{\simeq}{}_{G\ f^{-1}\text{-}(\mathcal{W})} id_X$。

由于 $X \in G$-ANR，由定理 4.1，存在 X的一个 G覆盖 $\mathcal{W}'$，它是 $f^{-1}(\mathcal{W})$ 的一个 h-G 加细。

设 $\mathcal{V} = \{U \cap W \mid U \in \mathcal{U},\ W \in \varphi^{-1}(\mathcal{W}')\}$.

那么 $\mathcal{V}$ 是一个 G覆盖，同时也是 $\varphi^{-1}(\mathcal{W}')$ 和 $\mathcal{U}$的加细。

接下来，我们证明 $f^{-1}(\mathcal{V})$ 是 h-G- $f^{-1}(\mathcal{U})$ 的加细。

显然， $f^{-1}(\mathcal{V})$ 是 $(\varphi f)^{-1}(\mathcal{W}')$ 和 $f^{-1}(\mathcal{U})$ 的加细。

设 Z 是一个可度量的 G-空间，且 κ、$\kappa' : Z \to X$ 是两个 $f^{-1}(\mathcal{V})$-近 G-映射。则 κ 和 κ' 也分别是 $(\varphi f)^{-1}(\mathcal{W}')$-近的，这意味着 $\varphi f\kappa$ 和 $\varphi f\kappa'$ 是 $\mathcal{W}'$-近的。

由于 $\mathcal{W}'$ 是 $f^{-1}(\mathcal{W})$ 的一个 h-G-加细，我们有 $\varphi f\kappa \underset{G\text{-}f^{-1}(\mathcal{W})}{\simeq} \varphi f\kappa'$。此外，由于 $\varphi f \underset{G\text{-}f^{-1}(\mathcal{W})}{\simeq} id_X$，我们得到 $\varphi f\kappa \underset{G\text{-}f^{-1}(\mathcal{W})}{\simeq} \kappa$ 和 $\varphi f\kappa' \underset{G\text{-}f^{-1}(\mathcal{W})}{\simeq} \kappa'$，这意味着 $\kappa \underset{G\text{-}St(f^{-1}(\mathcal{W}))}{\simeq} \kappa'$。

最后，由于 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{U}$ 的星形加细，因此 $St(f^{-1}(\mathcal{W}))$ 是 $f^{-1}(\mathcal{U})$ 的一个加细。因此 κ'，如所要求。□ $\kappa \underset{G\text{-}f^{-1}(\mathcal{U})}{\simeq}$

定理4.3。设 $f : X \to Y$ 是一个 G-映射，其中 $X \in G\text{-ANR}$，且 Y 是一个可度量化的 G-空间。假设 $f(X)$ 在 Y 中稠密，并且对于 Y 的每个开覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个 G-映射 $\varphi : Y \to X$，使得 $\varphi f \underset{G\text{-}f^{-1}(\mathcal{U})}{\simeq} id_X$。那么 f 是一个细 G-同伦等价，且 Y 是一个 G-ANR。

证明。设 $\mathcal{U}$ 是 Y 的一个开覆盖。由于 Y 是一个可度量化的 G-空间，存在 Y 上的一个相容不变度量 ρ，使得 $\mathcal{B} = \{B_\rho(y, 1) \mid y \in Y\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个加细，其中我们用 $B_\rho(y, r)$ 表示以点 y 为中心、半径为 r 的开球。

我们将通过归纳法构造一个 Y 的开 G-覆盖序列 $\{\mathcal{U}_n\}_{n\geq 0}$，使其满足以下条件：

(1) $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}_n$ 是 $\mathcal{U}_{n-1}$的星形加细，(2) $f^{-1}(\mathcal{U}_n)$ 是 $f^{-1}(\mathcal{U}_{n-1})$ 的 h-G-加细，(3) $\text{mesh}_\rho(\mathcal{U}_n) < 2^{-n-1}$，

对所有 $n \in \mathbb{N}$。

设 $\mathcal{B}_1 = \{B_\rho(y, 2^{-4}) \mid y \in Y\}$。显然，$\text{mesh}_\rho(\mathcal{B}_1) < 2^{-2}$。由命题 3.2，存在 Y 的一个 G-覆盖 $\mathcal{V}_1$，它是 $\mathcal{B}_1$ 的星形加细。利用引理 4.2，我们构造一个 G-覆盖 $\mathcal{U}_1$，它是 $\mathcal{V}_1$ 的加细，并且 $f^{-1}(\mathcal{U}_1)$ 是 $f^{-1}(\mathcal{V}_1)$ 的 h-G-加细。

现在，假设 G-覆盖 $\mathcal{U}_1$、$\mathcal{U}_2$、.....、$\mathcal{U}_{n-1}$ 已经构造完毕。令 $\mathcal{B}_n = \{B_\rho(y、 2^{-n-3}) \mid y \in Y\}$，并令 $\mathcal{W}_n$ 为 $\mathcal{B}_n$ 和 $\mathcal{U}_{n-1}$的一个公共加细。注意，$\text{mesh}_\rho(B_n) < 2^{-n-1}$。根据命题 3.2，存在一个开 G-覆盖 $\mathcal{V}_n$，它是 $\mathcal{W}_n$的星形加细。应用引理 4.2，我们构造 $\mathcal{U}_n$，它是 $\mathcal{V}_n$ 的加细，并且 $f^{-1}(\mathcal{U}_n)$ 是 $f^{-1}(\mathcal{V}_n)$ 的一个 h-G-加细。

根据假设，对于每个 $\mathcal{U}_n$，存在一个 G-映射 $\varphi_n : Y \to X$，使得

$$(*) \qquad \varphi_n f \underset{G\text{-}f^{-1}(\mathcal{U}_{n+2})}{\simeq} id_X.$$

利用引理 3.1，我们可知 $f\varphi_n$ 与 id_Y 是 $St(\mathcal{U}_{n+2})$-近的。由于 $\mathcal{U}_{n+2}$ 是 $\mathcal{U}_{n+1}$ 的星形加细，因此 $f\varphi_n$ 与 id_Y 是 $\mathcal{U}_{n+1}$-近的。此外，$f\varphi_n$ 与 $f\varphi_{n+1}$ 是 $\mathcal{U}_n$-近的，所以 φ_n 与 φ_{n+1} 是 $f^{-1}(\mathcal{U}_n)$-近的。

因此，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个 G-$f^{-1}(\mathcal{U}_{n-1})$-同伦 $F_n : Y \times [0,1] \to X$，使得

$$F_n(y,0) = \varphi_n(y) \qquad \text{and} \qquad F_n(y,1) = \varphi_{n+1}(y), \qquad \forall y \in Y.$$

定义 $H : Y \times [0,1] \to Y$ 如下：

$$H(y,t) = \begin{cases} f(F_n(y, 2-2^n t)), & \text{if } 2^{-n} \le t \le 2^{-n+1} \\ y, & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

我们来验证 H 在 $Y \times \{0\}$ 上是连续的。

固定 $t > 0$。那么，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $2^{-n} \le t \le 2^{-n+1}$。由于 $\mathrm{mesh}_\rho(\mathcal{U}_n) < 2^{-n}$，对每个 $y \in Y$，我们有：

$$\begin{aligned} \rho(H(y,t), y) =& \rho(fF_n(y, 2-2^n t), y) \\ \le& \rho(fF_n(y, 2-2^n t), f\varphi_n(y)) + \rho(f\varphi_n(y), y) \\ <& 2^{-n} + 2^{-n-2} < 2^{-n} 2 \le 2t. \end{aligned}$$

这证明了 H 在 $Y \times \{0\}$ 处的连续性。此外，由于 f 和 F_n 是等变的，H 也继承了这一性质。

此外，由于

$$\begin{aligned} \mathrm{diam}_\rho(H(\{y\} \times [0,1])) &= \mathrm{diam}_\rho(H(\{y\} \times (0,1]) \\ &= \mathrm{diam}_\rho \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} fF_n(\{y\} \times (0,1]) \right) \\ &\le \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{mesh}_\rho(\mathcal{U}_{n-1}) < \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 1, \end{aligned}$$

我们得出 H 是一个 G-$\mathcal{U}$-同伦。

此外，由于对于所有 $y \in Y$，$H(y,0) = y$ 且 $H(y,1) = f\varphi_1(y)$，因此可知 $f\varphi_1 \underset{G\text{-}\mathcal{U}}{\simeq} id_Y$。

由 (*) 可知，$\varphi_1 f$ 与 id_X 是 G-$f^{-1}(\mathcal{U}_3)$-同伦的。

因此，φ_1 是 f 的一个 G-$\mathcal{U}$-同伦逆，从而，f 是一个细 G-$\mathcal{U}$-同伦等价。

最后，应用推论 3.5，我们得出 $Y \in G\text{-ANR}$，从而完成证明。□

5. G-HOMOTOPY DENSE SUBSETS AND G-ANR SPACES

G-同伦稠密子集特别值得关注，因为它们具有 G-ANR 的性质。此外，如果一个 G-空间包含一个作为 G-ANR 的 G-同伦稠密子集，那么该 G-空间本身也是 G-ANR。这种关系将在命题5.2和5.5中得到证明。

定义5.1。设 A是 X这个 G-空间的一个不变子集。若存在一个 G-同伦$F: X \times I \to X$，其中 $F_0 = id_X$ 且 $F_t(X) \subset A$ 对每个 $t \in (0,1]$均成立，则称 A 在 X 中是 G-同伦稠密的 。

命题5.2。设 A是 G-空间X中的一个 G-同伦稠密子集。若 X 是一个 G-ANR，则 A 也是一个 G-ANR。

证明。由于 A是 G-同伦稠密的，存在一个 G-同伦 $F: X \times I \to X$，使得 $F_0(x) = x$ 且 $F_t(x) \in A$ 对所有 $x \in X$ 和$t \in (0,1]$均成立。

设 Y 是一个可度量的 G-空间，B 是 Y 的不变闭子集，且 $f: B \to A$ 是一个 G-映射。由于 X 是一个 G-ANR，存在 Y 中包含 B 的不变邻域 U，以及一个 G-映射 $f: U \to X$，使得 $f|_B = f$。

设 d 是 Y 上的一个不变度量，满足 $\operatorname{diam} Y < 1$。定义$\sim f: U \to A$ 如下：

$$\widetilde{f}(x) = F_{d(x,B)}\big(\overline{f}(x)\big)$$

对所有 $x \in U$.

首先，我们验证 $\widetilde{f}(U) \subset A$。设 $x \in U$。若 $x \in B$，则 $d(x, B) = 0$，因此 $\widetilde{f}(x) = \overline{F}_0(f(x)) = f(x) = f(x) \in A$。

若 $x \notin B$，则 $d(x,B) > 0$ 并且 $\widetilde{f}(x) = F_{d(x,B)}(\overline{f}(x)) \in A$。因此，$\sim f(U) \subset A$。

此外，f 是连续的，因为它是连续映射的复合。

为验证 f 是等变映射，我们利用以下事实：F 和f 是等变映射，且 d 是不变度量。

令 $g \in G$ 和 $x \in U$。于是，

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(gx) &= F_{d(gx,B)}\big(\overline{f}(gx)\big) = F_{d(gx,gB)}\big(g\overline{f}(x)\big) = F_{d(x,B)}\big(g\overline{f}(x)\big)\\ &= gF_{d(x,B)}\big(\overline{f}(x)\big) = g\widetilde{f}(x).\end{aligned}$$

因此，f 就是所需的 G-延拓 f。 □

正如我们将在定理5.4中看到的，G-同伦稠密子集可以通过细 G-同伦等价来刻画。为此，我们先证明以下引理。

引理 5.3. 设 X 是一个仿紧 G-空间，且 $s, h : X \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的不变映射： s 是上半连续的， h是下半连续的，并且对每个 $x \in X$，都有 $s(x) < h(x)$ 。则存在一个不变连续映射 $f : X \to \mathbb{R}$ ，使得对每个 $x \in X$，都有 $s(x) < f(x) < h(x)$ 。

证明。 由于 G 的紧性，轨道映射 $\pi : X \to X/G$, $x \mapsto G(x)$ 是一个完美映射（参见 [8, 第一章，定理 3.1]）。这意味着 X/G 是一个仿紧空间。不变映射 h 和 s 诱导出˜连续映射 $\tilde{s}$， $h : X/G \to \mathbb{R}$ ，定义为

$$\tilde{s}(G(x)) = s(x) \quad \text{and} \quad \tilde{h}(G(x)) = h(x) \quad \text{for every} \quad G(x) \in X/G.$$

注意，由于 π 是一个开映射， $\tilde{s}$ 是一个上半连续映射， $\tilde{s}^{-1}(-\infty, t) = \pi(s^{-1}(-\infty, t))$，并且由于˜ s的上半连续性， $s^{-1}(-\infty, t)$ 在 X 中是开集。同样， h 是一个下半连续映射。

根据 Katˇetov–Tong 插入定理（[12, 定理 1]），存在˜一个连续映射 $f : X/G \to \mathbb{R}$ ，使得对于每个 $x \in X$,

$$\tilde{s}(G(x)) < \tilde{f}(G(x)) < \tilde{h}(G(x)).$$

˜定义 $f = f \circ \pi : X \to \mathbb{R}$。映射 f 连续且不变，并且对于每个 $x \in X$ ，都有

$$s(x) = \tilde{s}(G(x)) < \tilde{f}(G(x)) = \tilde{f}(\pi(x)) = f(x)$$

and

$$f(x) = \tilde{f}(\pi(x)) = \tilde{f}(G(x)) < \tilde{h}(G(x)) = h(x).$$

因此， f 满足所需的性质。 □

定理5.4。 设 X 是一个可度量化的 G-空间，且 A 是 X的一个不变子集。那么，当且仅当包含映射 $i : A \hookrightarrow X$ 是一个细 G-同伦等价时， A 在 X 中是 G-同伦稠密的。

证明。（⇒）假设 A 在 X中是 G-同伦稠密的。那么存在一个 G-同伦 $F : X \times I \to X$ ，使得 $F_0(x) = x$ 且 $F_t(x) \in A$，对每个 $x \in X$ 及 $t \in (0, 1]$均成立。

设 $\mathcal{U}$ 是 X的一个开覆盖。根据命题 3.2，我们可以假设 $\mathcal{U}$ 是一个 G-覆盖。

定义 $\gamma : X \to (0, 1]$ 为

$$\gamma(x) = \sup\{t \in I \mid \exists U \in \mathcal{U} \text{ such that } F(\{x\} \times [0, t]) \subset U\}$$

对每个 $x \in X$。

函数 γ 定义良好，这是由于 F的连续性。此外，由于 $\mathcal{U}$ 是一个 G-覆盖，因此对所有 $x \in X$ 和$g \in G$，都有 $\gamma(gx) = \gamma(x$。

接下来，我们将证明 γ 是下半连续的。

设 $r > 0$ 和 $x \in \gamma^{-1}(r, \infty)$。则 $\gamma(x) > r$。存在 $t \in I$，使得 $r < t < \gamma(x)$ 且 $F(\{x\} \times [0,t]) \subset U$，其中某个 $U \in \mathcal{U}$。

由 F 的连续性和 $[0,t]$的紧性，存在 X中 x的一个开邻域 V，使得 $F(V \times [0,t]) \subset U$。

因此，对于所有 $y \in V$， $\gamma(y) \geq t > r$，这意味着 $V \subset \gamma^{-1}(r, \infty)$。于是， $\gamma^{-1}(r, \infty)$ 在 X 中是开集，从而证明 γ 是下半连续的。

利用引理 5.3，我们可以找到一个不变连续映射 $\alpha : X \to (0,1]$，使得对于所有 $x \in X$， $\alpha(x) < \gamma(x)$。

现在定义

$$F^\alpha : X \times [0,1] \to X \quad \text{by} \quad F^\alpha(x,t) = F\big(x, t\alpha(x)\big)$$

对每个 $x \in X$ 和 $t \in I$。

映射 F^α 是连续的，因为它是连续映射的复合；它也是等变的，因为 F 和 α 都是 G-映射。

现在验证 F^α 是一个 G-$\mathcal{U}$-同伦。由于 $\alpha(x) < \gamma(x)$，对每个 $x \in X$，都存在 $t_0 \in [0,1]$，使得 $\alpha(x) < t_0 < \gamma(x)$ 且$F(\{x\} \times [0,t_0]) \subset U$，其中某个 $U \in \mathcal{U}$满足此条件。由于对每个 $t \in I$， $t\alpha(x) \leq \alpha(x) < t_0$，因此有 $F^\alpha(x,t) = F\big(x, t\alpha(x)\big) \in F\big(\{x\} \times [0,t_0]\big) \subset U$，如所需。

此外，由于 $\alpha(x) > 0$，因此对每个 $x \in X$， $F^\alpha(x,1) = F\big(x, \alpha(x)\big) \in A$。

定义 $h : X \to A$ 由 $h(x) = F^\alpha(x, 1)$ 给出。由此可得 $i \circ h \underset{G\text{-}\mathcal{U}}{\simeq} id_X$ 和 $h \circ i \overset{\simeq}{}_{G\text{-}i^{-1}(\mathcal{U})} id_A$，从而证明 $i : A \hookrightarrow X$ 是一个细 G-同伦等价。

($\Leftarrow$) 假设包含映射 $i : A \hookrightarrow X$ 是一个细 G-同伦等价。设 d 是 X 的相容度量，并对每个$n \in \mathbb{N}$ 定义开覆盖 $\mathcal{U}_n = \{B_d(x, 3^{-n+1}2^{-1}) \mid x \in X\}$，显然它满足网格 $\mathcal{U}_n < 3^{-n}$。

根据假设，对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 G-映射 $f_n : X \to A$、G-$\mathcal{U}_n$-同伦 $F_n : X \times I \to X$ 以及 G-$i^{-1}(\mathcal{U}_n)$-同伦 $T_n : A \times I \to A$，满足:

$$F_n(x,0) = x \text{ and } F_n(x,1) = f_n(x) \text{ for all } x \in X$$

and

$$T_n(a,0) = a \text{ and } T_n(a,1) = f_n(a) \text{ for all } a \in A.$$

定义 $F : X \times I \to X$ 如下:

$$F(x,t)=\begin{cases} f_nF_{n+1}(x,3-3^nt), & \text{if } 3^{-n}2\le t\le 3^{-n+1},\\ T_n\big(f_{n+1}(x),3^nt-1\big), & \text{if } 3^{-n}\le t\le 3^{-n}2,\\ x, & \text{if } t=0.\end{cases}$$

我们来验证 F 在 $X\times\{0\}$处的连续性。设 $t>0$。那么存在 $n\ge 1$，使得 $3^{-n}\le t\le 3^{-n+1}$。

我们将考虑两种情形： $3^{-n}2\le t$ 和 $t\le 3^{-n}2$。

情形 1。若 $3^{-n}2\le t$，则对每个 $x\in X$，我们有

$$\begin{aligned} d\big(F(x,t),x\big) &= d\big(f_nF_{n+1}(x,3-3^nt),x\big)\\ &\le d\big(f_nF_{n+1}(x,3-3^nt),F_{n+1}(x,3-3^nt)\big)+d\big(F_{n+1}(x,3-3^nt),x\big)\\ &< 3^{-n}+3^{-n+1}<3^{-n}2\le 2t. \end{aligned}$$

情形 2。若 $t\le 3^{-n}2$，类似的论证表明，对于每个 $x\in X$， $d(F(x,t)\ x)<2t$。

现在，固定 $\varepsilon>0$ 和 $x_0\in X$。定义 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，并令 $x\in X$ 满足 $d(x,x_0)<\delta$。那么对于每个 $0<t<\frac{\varepsilon}{2}$，我们有

$$d\big(F(x,t),x_0\big)\le d\big(F(x,t),x\big)+d(x,x_0)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

若 $t=0$，则 $d(F(x,0)\ x_0)=d(x,x_0)<\delta<\varepsilon$。因此，

$$F\big(B_d(x_0,\delta)\times[0,\varepsilon/2)\big)\subset B_d(x_0,\varepsilon).$$

这证明了 F 在 $X\times\{0\}$ 处的连续性。

根据 F 的定义，显然它是一个等变映射，并且 $F(X\times(0,1])\subset A$。因此， A 在 X 中是 G-同伦稠密的。□

由定理5.4和推论 3.5可直接得到命题5.2的逆命题。

命题 5.5。设 X 是一个可度量的 G-空间， $A\subset X$ 是一个 G-同伦稠密子集。若 A 是一个 G-ANR，那么 X 也是一个 G-ANR。

此外，定理5.4使我们能够推出定理4.3的以下直接推论。

命题5.6。设 X 是一个可度量的 G-空间，且 A是 X的一个不变子集。假设 A 是 X 中的一个稠密 G-ANR，并且对于 X 的每个开覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个 G-映射 $\varphi:X\to A$，使得$\varphi|_A\underset{G\text{-}\mathcal{U}}{\simeq} id_A$。那么， A 在 X 中是 G-同伦稠密的，并且 X 是一个 G-。

6. Equivariant inverse sequences and G-ANR spaces

在 G-空间与 G-映射范畴中的一个逆序列，记作 $X = \{X_i, p_i^j\}$，由每个 $i \in \mathbb{N}$ 对应的 G-空间 X_i 以及对所有 $i, j \in \mathbb{N}$ 均成立的G-映射 $p_i^j : X_j \to X_i$ 组成，其中 $i \leq j$。这些 G-映射称为粘合映射，并满足性质 $p_j^j = 1_{X_j} : X_j \to X_j$，且当 $i \leq j \leq k$时， $p_i^j \circ p_j^k = p_i^k$。

给定一个逆序列 $X = \{X_i, p_i^j\}$ 和一个 G-空间 Y，一族 G-映射 $\{q_i : Y \to X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，称为投影，如果它满足关于 X 的锥条件： $p_i^j \circ q_j = q_i$ 对所有 $i \leq j$ 均成立。

$X_i\}$ 记作 $\varprojlim X$，是一个 G-空间 X，连同关于 X的一个锥 $\{p_i : X \to X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，并满足以下泛性质：

若 Y 是一个 G-空间，且 $\{q_i : Y \to X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是关于 X的一个锥，则存在唯一的 G-映射 $f : Y \to X$，使得对所有 $i \in \mathbb{N}$，均有 $p_i \circ f = q_i$。

逆极限可明确描述为

$$\varprojlim X = \Big\{x \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \mid p_i(x) = p_i^j p_j(x),\, i \leq j\Big\},$$

其中 p_j 是到第 j个因子的投影。

该空间赋予诱导拓扑和 G 的对角作用，从而成为一个 G-空间。

现在我们可以给出 D.W. Curtis 的一项重要结果 [9, 定理3.2]的等变延拓。该结果给出了充分条件，使得 G-ANR 空间的逆极限是一个 G-ANR。

定理6.1。 设$X = \{X_i, p_i^j\}$ 是一个完全可度量 G-空间的逆序列，且 $X = \varprojlim X$ 是其逆极限。假设每个 X_i 都是一个 G-ANR，并且每个粘合映射 p_i^{i+1}： $X_{i+1} \to X_i$ 都是细 G-同伦等价。那么 X 是一个 G-ANR。此外，若每个X_i 都是一个 G-AR，那么 X 也是一个 G-AR。

证明。 设 A 是一个可度量 G-空间 Y的不变闭子集，且 $f : A \to X$ 是一个 G-映射。

令 $\{p_i : X \to X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为逆极限投影。由于 X_1 是一个 G-ANR， G-映射 $p_1 f : A \to X_1$ 存在等变延拓$f_1 : V \to X_1$，其定义在 Y 中 A 的某个不变邻域 V 上。

我们将为每个 n 构造一个 G-映射 $f_n : V \to X_n$，使得 $p_n f_n = f_{n-1}$ 且 $f_n|_A = f$。

这将通过对 n进行归纳来完成。假设给定了 f_n 。

对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令 d_i 为X_i上的完备不变相容度量。对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，由于 d_i 是不变度量，集合 $\mathcal{V}_i = \{B_{d_i}(x,\ 2^{-n-3}) \mid x \in X_i\}$ 是 X_i 的一个开 G-覆盖。此外，网格$_{d_i}\mathcal{V}_i < 2^{-n-1}$。

设 $\mathcal{U}_n$ 是 X_n 的一个 G-覆盖，它是对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 的 $(p_i^n)^{-1}(\mathcal{V}_i)$ 的公共加细。因此，

$$\mathrm{mesh}_{d_i}\, p_i^n(\mathcal{U}_n) < 2^{-n-1}.$$

由于 $p_n^{n+1}\colon X_{n+1} \to X_n$ 是一个细 G-同伦等价，存在一个 G-映射 $\psi_n : X_n \to X_{n+1}$，使得

$$\psi_n p_n^{n+1} \underset{G\text{-}(p_n^{n+1})^{-1}(\mathcal{U}_n)}{\simeq} id_{X_{n+1}} \quad \text{and} \quad p_n^{n+1}\psi_n \underset{G\text{-}\mathcal{U}_n}{\simeq} id_{X_n}.$$

于是，

$$\psi_n p_n f = \psi_n p_n^{n+1} p_{n+1} f \underset{G\text{-}(p_n^{n+1})^{-1}(\mathcal{U}_n)}{\simeq} id_{X_{n+1}} p_{n+1} f = p_{n+1} f,$$

这意味着存在一个 G-$(p_n^{n+1})^{-1}(\mathcal{U}_n)$-同伦 $H_t : A \to X_{n+1}$，使得 $H_0 = \psi_n p_n f$ 且 $H_1 = p_{n+1} f$。

由于 $f_n : V \to X_n$ 是一个 G-ANR，H_0 是 $\psi_n p_n f$ 的延拓，应用定理 3.3，可得一个 G-$(p_n^{n+1})^{-1}(\mathcal{U}_n)$-同伦 $\widetilde{H}_t : V \to X_{n+1}$，使得 $\widetilde{H}_0 = \psi_n f_n$ 且对所有 $t \in I$，均有 $\widetilde{H}_t|_A = H_t$。定义 $f_{n+1} = \widetilde{H}_1 : V \to X_{n+1}$。此映射满足 $f_{n+1}|_A = p_{n+1} f$。

此外，由于 f_{n+1} 和 $\psi_n f_n$ 是 G-$(p_n^{n+1})^{-1}(\mathcal{U}_n)$-同伦的，因此存在一个 $U \in \mathcal{U}_n$，使得对每个 $v \in V$，

$$\widetilde{f}_{n+1}(v),\ \psi_n \widetilde{f}_n(v) \in (p_n^{n+1})^{-1}(U).$$

因此，

$$p_n^{n+1}\widetilde{f}_{n+1}(v),\ p_n^{n+1}\psi_n \widetilde{f}_n(v) \in U,$$

从而，

$$p_i^n p_n^{n+1}\widetilde{f}_{n+1}(v),\ p_i^n p_n^{n+1}\psi_n \widetilde{f}_n(v) \in p_i^n(U),$$

这意味着

$$p_i^{n+1}\widetilde{f}_{n+1}(v),\ p_i^{n+1}\psi_n \widetilde{f}_n(v) \in p_i^n(U),$$

对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 均成立。

另一方面，由于 $p_n^{n+1}\psi_n \underset{G\text{-}\mathcal{U}_n}{\simeq} id_{X_n}$，存在 $U' \in \mathcal{U}_n$，使得对于每个 $x \in X_n$，

$$p_n^{n+1}\psi_n(x),\ x \in U'.$$

因此，对于每个 $v \in V$,

$$p_n^{n+1}\psi_n\widetilde{f}_n(v),\ \widetilde{f}_n(v) \in U',$$

因此,

$$p_i^n p_n^{n+1}\psi_n\widetilde{f}_n(v),\ p_i^n\widetilde{f}_n(v) \in p_i^n(U'),$$

这意味着

$$p_i^{n+1}\psi_n\widetilde{f}_n(v),\ p_i^n\widetilde{f}_n(v) \in p_i^n(U')$$

对每个 $i \in \{1,\dots,n\}$。

由于网格$_{d_i}$ $p_i^n(\mathcal{U}_n) < 2^{-n-1}$，根据三角不等式，可得

$$d_i(p_i^{n+1}\widetilde{f}_{n+1}(v), p_i^n\widetilde{f}_n(v)) < 2^{-n}$$

对每个 $v \in V$ 和 $i \in \{1,\dots,n\}$。

这表明，对于固定的 $i \in \{1,\dots,n\}$，泛函序列

$$\left\{p_i^n\widetilde{f}_n(v)\right\}_{n=1}^{\infty},\quad v \in V$$

是一致的（关于 $v \in V$）柯西序列。

因此，由于度量 d_i的完备性，序列$\left\{p_i^n\widetilde{f}_n(v)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 $v \in V$一致收敛于连续映射 $q_i(v)$, $v \in V$。

换言之，我们可以定义一个连续映射

$$q_i = \lim_{n\to\infty} p_i^n\widetilde{f}_n : V \to X_i.$$

˜映射 p_i^n 和 f_n 的等变性很容易推出 q_i的等变性。

注意，对于每个 $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} p_i^{i+1}q_{i+1} &= p_i^{i+1}\left(\lim_{n\to\infty} p_{i+1}^n\widetilde{f}_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} p_i^{i+1}p_{i+1}^n\widetilde{f}_n \\ &= \lim_{n\to\infty} p_i^n\widetilde{f}_n \\ &= q_i. \end{aligned}$$

因此，根据逆极限的泛性质，存在唯一的 G-映射 $h\colon V \to X$，使得对所有 $i \in \mathbb{N}$, $p_i h = q_i$。

最后，由于$p_n f_n = \widetilde{p}_i f$，可得 $q_i|_A = p_i f$。因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $p_n h|_A = q_n|_A = p_n f$，这意味着 $h|_A = f$。所以， h 就是所需的 G-扩张 f。

如果每个 X_i 都是 G-AR，我们可以取 $V = Y$，使 f 在整个 Y 上有定义的等变延拓。□

References

[1] N. Antonyan、S. Antonyan 和 A. Soria-P´erez，《G-ANR 的同伦刻画》，Glas. Mat. 42 (62) (2007) 69-82。[2] S. A. Antonian，《嵌入 G-AR 的等变嵌入》，Glas. Mat. Ser. III, 22 (42) (1987) 503-533。[3] S. A. Antonyan，《轨道空间的收缩性质》，Matem. Sbornik 137 (1988) 300-318，英文译本见：Math. USSR Sbornik 65 (1990) 305-321。[4] S. Antonyan、E. Elfving 和 A. Mata-Romero，《 G-ANE 的黏着空间与并》，Topology Proc. 26 (2001/02) 1-28。[5] S. Antonyan，《轨道空间与等变绝对邻域延拓子的并》，Topology Appl. 146-147 (2005) 289-315。[6] T. Banakh、T. Radul 和 M. Zarichnyi，《无限维流形中的吸收集》，VNTL Publishers，利沃夫，1996。[7] T. Banakh，《具有到希尔伯特流形的同伦稠密嵌入的空间的刻画》，Topology Appl. 86 (1998) 123-131。[8] G. Bredon，《紧变换群导论》，Academic Press，1972。[9] D. W. Curtis，《局部等连通性及其特化的一些定理与例子》，Fund. Math. 72 (1971) 101-113。[10] R. Engelking，《一般拓扑学》，纯数学 Sigma 丛书，第 6 卷，Heldermann，柏林，1989。[11] S. T. Hu，《收缩子理论》，Wayne State University Press，1965。[12] M. Katˇetov，《拓扑空间上的实值函数》，Fund. Math. 38.1 (1951) 85-91。[13] D. Montgomery 和 L. Zippin，《拓扑变换群》，Robert E. Krieger Publ. Company，Huntington-New York，1974。[14] R. Palais，《 G-空间的分类》，Memoirs of the Amer. Math. Soc. 第 36 号，1960。[15] L. S. Pontrjagin，《连续群》（俄文），Nauka，莫斯科，1973。[16] K. Sakai，《一般拓扑学的几何方面》，Springer Verlag，2013。[17] J. van Mill，《无限维拓扑学导论：预备知识与导言》，North Holland Mathematical Library，阿姆斯特丹，1989。

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510, Ciudad de México, México电子邮箱地址: antonyan@unam.mx

Instituto de Agroingeniería, Universidad del Papaloapan, Av. Ferrocarril S/N, Ciudad Universitaria, CP 68400, Loma Bonita, Oaxaca,México.

电子邮箱地址: alkantun@unpa.edu.mx

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Du-rango, Lic. Héctor García Calderón 210, CP 34113, SARH, Durango,México.

电子邮箱地址: eduardo.mata@ujed.mx

Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Du-rango, Lic. Héctor García Calderón 210, CP 34113, SARH, DurangoMéxico.

电子邮件地址: armandomr@ujed.mx