arXiv:2601.07029v1 [math.NT] 11 Jan 2026

首一多项式族

Danil Krotkov

Abstract。本文推导了二项式型首一多项式族的不同性质的推广，即满足二项式定理的首一多项式族

$$p_n(\alpha+\beta)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(\alpha)p_{n-k}(\beta)$$

推导出一般“乘法”算子和“导数”算子的一些平凡表示。此外，我们还推导了一般首一多项式 $p_n(x)$的对数导数公式，该公式化为

$$\frac{1}{n}\frac{p_n'(x)}{p_n(x)}=\left(x+\frac{1}{\varphi'(y)}\left(\frac{d}{dy}-n\mathrm{L}\right)\right)^{-1}\cdot\frac{\varphi(y)}{y\varphi'(y)}\Big|_{y=0}$$

作者在二项式情形下推导出的公式，此时 $p_n(x)$的生成函数等于 $e^{x\varphi(y)}$。

定义。若多项式序列 $\mathrm{P}=\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足 $\deg\ p_n(x)=n$，且每个多项式的首项系数均等于 1，则称其为首一多项式族。本文中，我们始终假设所有多项式和形式幂级数均定义在 $\mathbb{C}$上。

对于给定的首一多项式族 P，存在一个线性算子 $\mathrm{G_P}$，它按以下规则作用于多项式

$$\mathrm{G_P}\cdot x^n=p_n(x)$$

这个算子可逆，因为每个首一多项式都可以唯一地表示为 $p_k(x)$的线性组合。本文将研究多项式上的算子如何表示为其他算子的线性组合。举例来说，在以下定义之后，我们给出算子 $\mathrm{G_P}$ 及其逆算子的最简单表示。

定义。对于给定的序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，定义算子 a_θ：$a_\theta\cdot x^n=a_nx^n$。若对于某个多项式 $h(x)$，有 $a_n=h(n)$，则以下关系成立：$a_\theta=h(\theta)=h(x\mathrm{D})$，其中 $\mathrm{D}=\frac{d}{dx}$。 —

那么，假设多项式 $p_n(x)$ 具有以下系数，并且我们有如下表示：将单项式 x^n 表示为 $p_k(x)$ 的线性组合

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\xi_k^n x^{n-k}\qquad\qquad x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}{}^*\xi_k^n\,p_{n-k}(x)$$

Then 以下表示成立（注意，$\xi_0^n={}^*\xi_0^n=1$，因为多项式是首一的 c)

$$\mathrm{G_P}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{D}^k}{k!}\xi_k^\theta\qquad\qquad\mathrm{G_P^{-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{D}^k}{k!}{}^*\xi_k^\theta$$

因此，自然可以考虑以下“乘法”和“微分”算子

$$\begin{aligned}\mathrm{U_P}&\coloneqq\mathrm{G_P}x\mathrm{G_P^{-1}}\quad\Rightarrow\quad\mathrm{U_P}\cdot p_n(x)=p_{n+1}(x)\\ \mathrm{D_P}&\coloneqq\mathrm{G_P}\mathrm{D}\mathrm{G_P^{-1}}\quad\Rightarrow\quad\mathrm{D_P}\cdot p_n(x)=np_{n-1}(x)\end{aligned}$$

它们之间有显而易见的关系

$$\mathrm{D_P}\mathrm{U_P}-\mathrm{U_P}\mathrm{D_P}=1$$

此外，对于给定的序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，定义算子 $a_{\mathrm{U_PD_P}}\coloneqq\mathsf{G}_\mathrm{P}a_\theta\mathsf{G}^{-1}{}_\mathrm{P}$。接下来，我们作如下观察。对于给定的族 P，存在一个形式幂级数族 $\mathrm{F}=\{f_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，使得 $f_n(y)\in y^n+y^{n+1}\mathbb{C}[[y]]$，并且满足以下关系

$$e^{xy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(x)f_n(y)}{n!}$$

该级数 f_n 可通过使用多项式显式写出，这些多项式属于由关系 $p_n^*(x)\coloneqq\mathsf{G}^{-1}{}_\mathrm{P}\cdot x^n$定义的多项式对偶族 $\mathrm{P}^*=\{p_n^*(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$。

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}{}^{*}\xi_k^n\,p_{n-k}(x)\quad\Rightarrow\quad p_n^*(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}{}^{*}\xi_k^n\,x^{n-k}\quad\Rightarrow\quad f_n(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{n+k}}{k!}{}^{*}\xi_k^{n+k}$$

注意，对于二项式首一族，总存在这样一个级数 $f(y)\in y+y^2\mathbb{C}[[y]]$，使得$f_n(y)=f(y)^n$。本文关注算子 $\mathrm{U_P}$、$\mathrm{D_P}$的不同表示，以及它们与标准算子 x、D 之间的混合关系。例如，在二项式情形下，当 $\mathrm{P}^{\mathrm{binom}}$ 满足 $\mathrm{F}^{\mathrm{binom}}=\{f(y)^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$时，有如下关系（见 [Dlt]）：

$$\mathrm{U_P}=x\frac{1}{f'(\mathrm{D})}\qquad\qquad\mathrm{D_P}=f(\mathrm{D})$$

对于一般正交多项式，还存在一种有趣的情形：存在序列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，并且存在一个混合关系（见 [Gdsl]）

$$\mathrm{U_P}=x-a_{\mathrm{U_PD_P}}-\mathrm{D_P}b_{\mathrm{U_PD_P}}\quad\Longleftrightarrow\quad\mathrm{U}_{\mathrm{P}^*}=x+a_\theta+\mathrm{D}b_\theta$$

但本文不讨论这种情形。现在我们证明以下引理，以便在一般情形下推导出关于 $\mathrm{U_P}$、$\mathrm{D_P}$ 的一些基本公式。

引理。 $f_0(y)=1\quad\Longleftrightarrow\quad\forall n>0,\quad p_n(0)=0$。

证明。设 $\forall n>0\ p_n(0)=0$。那么

$$e^{xy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(x)f_n(y)}{n!}\quad\Rightarrow\quad 1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(0)f_n(y)}{n!}=f_0(y)$$

设 $f_0(y)=1$。我们有 $f_n(y)\in y^n+y^{n+1}\mathbb{C}[[y]]$，因此

$$e^{xy}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n(x)f_n(y)}{n!}\quad\Rightarrow\quad\forall k\geqslant 1,\ \ x^k=\sum_{n=1}^{k}\frac{p_n(x)}{n!}f_n^{(k)}(0).$$

这意味着 $p_1(x)=x$，并且 $\forall k\geqslant 2$ 我们有如下关系

$$p_k(x)=\frac{p_k(x)}{k!}f_k^{(k)}(0)=x^k-\sum_{n=1}^{k-1}\frac{p_n(x)}{n!}f_n^{(k)}(0)$$

现在 $p_1(0)=0$，因此根据归纳法，我们还得到 $\forall n\geqslant 2,\quad p_n(0)=0$。 □

由此可知，只要$f_0(y)=1$，序列 $\mathrm{P}=\{{}^{p_{n+1}(x)}\!/_{x}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 就是一个首一多项式族。此外，对于任意首一多项式族 $\mathrm{P}=\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，都存在另一个族 $\widetilde{\mathrm{P}}=\{\widetilde{p}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}=\{{}^{f_0(\mathrm{D})\cdot p_{n+1}(x)}\!/_{x}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$。后者成立是因为我们有

$$f_0(y)e^{xy}=f_0(\mathrm{D})\cdot e^{xy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[f_0(\mathrm{D})\cdot p_n(x)]f_n(y)}{n!}\quad\Rightarrow\quad e^{xy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[f_0(\mathrm{D})\cdot p_n(x)]}{n!}\frac{f_n(y)}{f_0(y)}$$

因此，由上述引理可知，多项式 $f_0(\mathrm{D})\cdot p_n(x)$ 在 $x=0$ 处对所有 $n\geqslant 1$ 都取零。在等式两边作用 $\frac{\partial}{\partial y}$，得到

$$e^{xy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{f_0(\mathrm{D})\cdot p_{n+1}(x)}{x}\frac{1}{n+1}\left(\frac{f_{n+1}(y)}{f_0(y)}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{p}_n(x)\widetilde{f}_n(y)}{n!}$$

引理。 设我们有两个首一多项式族 $\mathrm{P}=\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$、$\mathrm{Q}=\{q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，以及相应的族 $\mathrm{F}=\{f_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$、$\mathrm{E}=\{e_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$e^{xy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(x)f_n(y)}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n(x)e_n(y)}{n!}$$

那么，下列公式成立

$$\mathrm{G_P}\mathrm{G_Q^{-1}}=(x)\frac{p_{\mathrm{U_QD_Q}}}{q_{\mathrm{U_QD_Q}}}=\frac{e_{\mathrm{U_PD_P}}}{f_{\mathrm{U_PD_P}}}(\mathrm{D})$$

证明。算子的第一个等式显然成立

$$(x)\frac{p_{\mathrm{U_Q D_Q}}}{q_{\mathrm{U_Q D_Q}}}\cdot q_n(x)=(x)\frac{p_n}{q_n}\ q_n(x)=p_n(x)=\mathrm{G_P G_Q^{-1}}\cdot q_n(x)$$

因此，这些算子在任意多项式上都相同。对于第二个等式，我们有

$$\frac{e_{\mathrm{U_P D_P}}}{f_{\mathrm{U_P D_P}}}(\mathrm{D})\cdot e^{xy}=\frac{e_{\mathrm{U_P D_P}}}{f_{\mathrm{U_P D_P}}}(y)\cdot e^{xy}=\frac{e_{\mathrm{U_P D_P}}}{f_{\mathrm{U_P D_P}}}(y)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(x)f_n(y)}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e_n}{f_n}(y)\frac{p_n(x)f_n(y)}{n!}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(x)e_n(y)}{n!}=\mathrm{G_P G_Q^{-1}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n(x)e_n(y)}{n!}=\mathrm{G_P G_Q^{-1}}\cdot e^{xy}\qquad\square$$

现在我们可以推导出 $\mathrm{U_P}$、$\mathrm{D_P}$ 的以下表示。

命题。算子 $\mathrm{U_P}$、$\mathrm{D_P}$ 具有以下混合表示

$$\mathrm{D_P}=\frac{f_{\mathrm{U_P D_P}+1}}{f_{\mathrm{U_P D_P}}}(\mathrm{D});\qquad\mathrm{U_P}=f_0(\mathrm{D})^{-1}x\mathrm{G_{\widetilde{P}}G_P^{-1}}\quad\Rightarrow\quad x=f_0(\mathrm{D})\mathrm{U_P}\frac{\widetilde{f}_{\mathrm{U_P D_P}}}{f_{\mathrm{U_P D_P}}}(\mathrm{D})$$

证明。我们有

$$\mathrm{D_P}\cdot e^{xy}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{np_{n-1}(x)f_n(y)}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(x)f_n(y)}{n!}\frac{f_{n+1}}{f_n}(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_{\mathrm{U_P D_P}+1}}{f_{\mathrm{U_P D_P}}}(y)\cdot\frac{p_n(x)f_n(y)}{n!}=$$
$$=\frac{f_{\mathrm{U_P D_P}+1}}{f_{\mathrm{U_P D_P}}}(y)\cdot e^{xy}=\frac{f_{\mathrm{U_P D_P}+1}}{f_{\mathrm{U_P D_P}}}(\mathrm{D})\cdot e^{xy}$$

and

$$\mathrm{U_P}\cdot p_n(x)=p_{n+1}(x)=f_0(\mathrm{D})^{-1}x\frac{f_0(\mathrm{D})\cdot p_{n+1}(x)}{x}=f_0(\mathrm{D})^{-1}x\mathrm{G_{\widetilde{P}}G_P^{-1}}\cdot p_n(x)\quad\Rightarrow$$
$$\mathrm{U_P}=f_0(\mathrm{D})^{-1}x\mathrm{G_{\widetilde{P}}G_P^{-1}}\quad\Rightarrow\quad x=f_0(\mathrm{D})\mathrm{U_P G_P G_{\widetilde{P}}^{-1}}=f_0(\mathrm{D})\mathrm{U_P}\frac{\widetilde{f}_{\mathrm{U_P D_P}}}{f_{\mathrm{U_P D_P}}}(\mathrm{D})\qquad\square$$

请注意，这些平凡恒等式实际上可能很有用，因为有时无需了解 $\mathrm{G_P}$ 或其逆，就能理解 $\mathrm{U_P}$ 或 $\mathrm{D_P}$ 。例如，在最简单的二项式情形下，我们有 $f_{n+1}(y)f_n(y)^{-1}=f(y)$，其中某个 $f(y)$，因此我们得到 $\mathrm{D_P}=f(\mathrm{D})$ 确实成立。并且 $\widetilde{f}_n=(1+n)^{-1}(f^{n+1})'=f'f^n$，于是 $\widetilde{f}_n(y)f_n(y)^{-1}=f'(y)$，进而得到 $\mathrm{U_P}f'(\mathrm{D})$，正如预期的那样。一般而言，这种方法会给出混合恒等式。例如，考虑情形 $f_n(y)=y^n\exp(n(n-1)y/2)$。那么以下结论成立

$$\frac{f_{n+1}(y)}{f_n(y)}=ye^{ny}\quad\Rightarrow\quad\mathrm{D_P}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{U_P D_P})^k\mathrm{D}^{k+1}}{k!}$$

采用相同的方法，可以推导出类似的恒等式，例如

$$\mathrm{D_P^k}=\frac{f_{\mathrm{U_P D_P}+k}}{f_{\mathrm{U_P D_P}}}(\mathrm{D})$$

通过用 $\mathrm{G}(\cdot)\mathrm{G}^{-1}$ 进行共轭运算，还可以得到其他恒等式，例如

$$\mathrm{D_P}=\frac{f_{\mathrm{U_P D_P}+1}}{f_{\mathrm{U_P D_P}}}(\mathrm{D})\quad\Rightarrow\quad\mathrm{D}=\frac{f_{\theta+1}}{f_\theta}(\mathrm{D_{P^*}})=\frac{f^*_{\theta+1}}{f^*_\theta}(\mathrm{D_P})$$

The 后一命题可以自然地推广到多项式上的任意算子。 In orde为此，我们必须引入以下定义。

定义。对于任意作用于 $\mathbb{C}[x]$ 的算子 T_x，我们定义一个作用于 $\mathbb{C}[[y]]$ 的算子 T_y，使得

$$\mathrm{T}_x \cdot e^{xy} = \overline{\mathrm{T}}_y \cdot e^{xy}$$

这样的算子总是存在，并且由其在单项式上的像完全确定，因为对于任意的 $\ell(y) \in \mathbb{C}[[y]]$ 成立

$$\overline{\mathrm{T}}_y \cdot \ell(y) = \overline{\mathrm{T}}_y \cdot \ell(y) e^{xy}\big|_{x=0} = \overline{\mathrm{T}}_y \ell(\mathrm{D}) \cdot e^{xy}\big|_{x=0} = \ell(\mathrm{D})\overline{\mathrm{T}}_y \cdot e^{xy}\big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} [\ell(\mathrm{D})\mathrm{T}_x \cdot x^n]\big|_{x=0}$$

由于 T_x 将多项式映射为多项式，$\ell(\mathrm{D})$ 的作用是良定义的，因此 T_y 的作用也是良定义的。注意，T_x 的作用可以由 T_y的作用重构。我们将 U_P 记为 $\mathfrak{d}_\mathrm{P}$，将 D_P 记为 $\mathfrak{u}_\mathrm{P}$。注意，对于满足 $\mathrm{F}^{\mathrm{binom}} = \{f(y)^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$的二项式首一族 $\mathrm{P}^{\mathrm{binom}}$，有 $\mathrm{D}_\mathrm{P} = f(\mathrm{D})$，因此 $\mathfrak{u}_\mathrm{P} = f(y)$，且 $\mathrm{U}_\mathrm{P} = xf'(\mathrm{D})^{-1}$，因此 $\mathfrak{d}_\mathrm{P} = \frac{d}{df}$。现在我们可以陈述以下关于复数域 $\mathbb{C}[x]$上算子表示的定理。对于任意首一多项式族 P，考虑其生成函数

$$Q_y^{\mathrm{P}}(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x) y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n f_n^*(y)}{n!} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{D}_\mathrm{P} \cdot Q_y^{\mathrm{P}}(x) = y Q_y^{\mathrm{P}}(x); \qquad \mathfrak{d}_{\mathrm{P}^*} \cdot Q_y^{\mathrm{P}}(x) = x Q_y^{\mathrm{P}}(x)$$

定理。任意算子 T_x 在 $\mathbb{C}[x]$ 上都有如下表示

$$\mathrm{T}_x = (x)\frac{\mathrm{T} \cdot Q_y^{\mathrm{P}}}{Q_y^{\mathrm{P}}}\bigg|_{y=\mathrm{D}_\mathrm{P}} = (x)\frac{\mathrm{T} \cdot p_n}{p_n}\bigg|_{n=\mathrm{U}_\mathrm{P}\mathrm{D}_\mathrm{P}} = (\mathrm{U}_\mathrm{P})\frac{\overline{\mathrm{T}} \cdot Q_y^{\mathrm{P}^*}}{Q_y^{\mathrm{P}^*}}\bigg|_{y=\mathrm{D}} = \frac{\overline{\mathrm{T}} \cdot f_n}{f_n}\bigg|_{n=\mathrm{U}_\mathrm{P}\mathrm{D}_\mathrm{P}} (\mathrm{D})$$

证明。对于任意 t，下述结论成立，因此对于 中的任意多项式也成立 x

$$(x)\frac{\mathrm{T} \cdot Q_y^{\mathrm{P}}}{Q_y^{\mathrm{P}}}\bigg|_{y=\mathrm{D}_\mathrm{P}} \cdot Q_t^{\mathrm{P}}(x) = (x)\frac{\mathrm{T} \cdot Q_y^{\mathrm{P}}}{Q_y^{\mathrm{P}}}\bigg|_{y=t} \cdot Q_t^{\mathrm{P}}(x) = \frac{\mathrm{T} \cdot Q_t^{\mathrm{P}}(x)}{Q_t^{\mathrm{P}}(x)} Q_t^{\mathrm{P}}(x) = \mathrm{T} \cdot Q_t^{\mathrm{P}}(x)$$

第二个等式显然成立，因为

$$(x)\frac{\mathrm{T} \cdot p_n}{p_n}\bigg|_{n=\mathrm{U}_\mathrm{P}\mathrm{D}_\mathrm{P}} \cdot p_m(x) = (x)\frac{\mathrm{T} \cdot p_n}{p_n}\bigg|_{n=m} \cdot p_m(x) = \frac{\mathrm{T} \cdot p_m(x)}{p_m(x)} p_m(x) = \mathrm{T} \cdot p_m(x)$$

在第三种情况下，我们有

$$\overline{\left((\mathrm{U}_\mathrm{P})\frac{\overline{\mathrm{T}} \cdot Q_y^{\mathrm{P}^*}}{Q_y^{\mathrm{P}^*}}\bigg|_{y=\mathrm{D}}\right)} = \frac{\overline{\mathrm{T}} \cdot Q_y^{\mathrm{P}^*}}{Q_y^{\mathrm{P}^*}}(\mathfrak{d}_\mathrm{P})$$

现在，由于 $\mathfrak{d}_{\mathrm{P}^*} \cdot Q_y^{\mathrm{P}}(t) = tQ_y^{\mathrm{P}}(t)$，有如下结论

$$\frac{\overline{\mathrm{T}} \cdot Q_y^{\mathrm{P}^*}}{Q_y^{\mathrm{P}^*}}(\mathfrak{d}_\mathrm{P}) \cdot Q_y^{\mathrm{P}^*}(t) = \frac{\overline{\mathrm{T}} \cdot Q_y^{\mathrm{P}^*}}{Q_y^{\mathrm{P}^*}}(t) \cdot Q_y^{\mathrm{P}^*}(t) = \overline{\mathrm{T}} \cdot Q_y^{\mathrm{P}^*}(t)$$

因此

$$\overline{\mathrm{T}} = \overline{\left((\mathrm{U}_\mathrm{P})\frac{\overline{\mathrm{T}} \cdot Q_y^{\mathrm{P}^*}}{Q_y^{\mathrm{P}^*}}\bigg|_{y=\mathrm{D}}\right)} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{T} = (\mathrm{U}_\mathrm{P})\frac{\overline{\mathrm{T}} \cdot Q_y^{\mathrm{P}^*}}{Q_y^{\mathrm{P}^*}}\bigg|_{y=\mathrm{D}}$$

最后

$$\frac{\overline{\mathrm{T}} \cdot f_n}{f_n}\bigg|_{n=\mathrm{U}_\mathrm{P}\mathrm{D}_\mathrm{P}} (\mathrm{D}) \cdot e^{xy} = \frac{\overline{\mathrm{T}} \cdot f_n}{f_n}\bigg|_{n=\mathrm{U}_\mathrm{P}\mathrm{D}_\mathrm{P}} (y) \cdot e^{xy} = \frac{\overline{\mathrm{T}} \cdot f_n}{f_n}\bigg|_{n=\mathrm{U}_\mathrm{P}\mathrm{D}_\mathrm{P}} (y) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x) f_n(y)}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{\mathrm{T}} \cdot f_n}{f_n}(y) \frac{p_n(x) f_n(y)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x) \overline{\mathrm{T}} \cdot f_n(y)}{n!} = \overline{\mathrm{T}} \cdot e^{xy} = \mathrm{T} \cdot e^{xy}$$

■

在上述推理中，人们可能会注意到一个隐蔽之处。当然，当处理多项式上的算子时，这种推理完全成立。但人们通常很自然地会尝试将这些算子的作用扩展到形如 $x^s\mathbb{C}[[x^{-1}]]$ 的任意级数，其中任意 $s \in \mathbb{C}$。而在进行此类变换时，就必须格外谨慎。考虑最简单的算子 a_θ。现在取首一族 $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，其中 $Q_y(x) = e^{xy}$。那么，后一个定理意味着

$$a_\theta = (x)\frac{a_\theta \cdot e^{xy}}{e^{xy}}\bigg|_{y=\mathrm{D}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\mathrm{D}^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}a_k = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\theta}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}a_k$$

当然，若将等式两边都视为作用于 $\mathbb{C}[x]$上的算子，则后一等式成立，因为对于任意单项式，右侧的和都收敛，且两边的作用结果相同。但若将其扩张到 $x^s\mathbb{C}[[x^{-1}]]$，只要广义数列 $\{a_s\}_{s\in\mathbb{C}}$ 确定，左侧的算子就可以任意扩张。另一方面，这种扩张不一定由其子数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$唯一确定。此外，级数

$$a_s \neq \sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}a_k$$

一般而言并不一定收敛。这意味着，该定理对于作用于 $x^s\mathbb{C}[[x^{-1}]]$ 上的算子，仅对某个特定算子类成立（例如，对于某些多项式$a(s) = a_s$，该定理成立）。现在考虑该定理的以下推论。

推论。对于任意首一族 P，其生成函数为 $Q_y^{\mathrm{P}}(x) = Q_y(x)$，对偶生成函数为 $Q_y^{\mathrm{P}^*}(x) = Q_y^*(x)$，算子 θ 有如下表示：

$$\theta = x(x)\frac{Q'_{\mathrm{D_P}}}{Q_{\mathrm{D_P}}} = (\mathrm{U_P})\left(y\frac{\partial}{\partial y}\ln Q_y^*\right)\bigg|_{y=\mathrm{D}} = x(x)\frac{p'_{\mathrm{U_PD_P}}}{p_{\mathrm{U_PD_P}}} = \frac{f'_{\mathrm{U_PD_P}}}{f_{\mathrm{U_PD_P}}}(\mathrm{D})\mathrm{D}$$

如果族 P 是二项式的，那么 $Q_y^*(x) = \exp(xf(y))$，$Q_y(x) = \exp(x\varphi(y))$，其中 $\varphi(y) = f^{inv}(y)$ 是 $f(y)$ 的函数反演。在这种情况下，上述陈述退化为以下等式：

$$\frac{Q'_y}{Q_y}(x) = \varphi(y) \qquad \Rightarrow \qquad \theta = x\varphi(\mathrm{D_P}),\ \text{and that is indeed true, since } \mathrm{D_P} = f(\mathrm{D}) \ \Rightarrow\ \varphi(\mathrm{D_P}) = \mathrm{D}$$

$$\left(y\frac{\partial}{\partial y}\ln Q_y^*\right)(x) = xyf'(y) \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \mathrm{U_P}\mathrm{D}f'(\mathrm{D}),\ \text{and that is indeed true, since } \mathrm{U_P} = x\frac{1}{f'(\mathrm{D})}$$

$$f_n(y) = f^n(y),\ \text{hence}\ \ \frac{f'_n}{f_n}(y) = n\frac{f'(y)}{f(y)} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \mathrm{U_P}\mathrm{D_P}\frac{f'(\mathrm{D})\mathrm{D}}{f(\mathrm{D})}$$

在其他情况下，该推论会导出不同的混合恒等式。回到我们的例子 $f_n(y) = y^n\exp(n(n-1)y/2)$，此时我们得到

$$\frac{f'_n}{f_n}(y)y = n + \frac{n(n-1)}{2}y \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \mathrm{U_P}\mathrm{D_P} + \frac{1}{2}\mathrm{U_P^2}\mathrm{D_P^2}\mathrm{D}$$

如果想要理解首一多项式的行为，这些恒等式实际上可能会有所帮助。算子等式

$$x(x)\frac{Q'_{\mathrm{D_P}}}{Q_{\mathrm{D_P}}} = x(x)\frac{p'_{\mathrm{U_PD_P}}}{p_{\mathrm{U_PD_P}}}$$

实际上告诉我们，当生成函数已知时，如何以自然的方式计算对数导数的展开。这里的主要问题是理解如何构造形如以下形式的算子的展开

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^{-k}\mu_k^{\mathrm{U_PD_P}}$$

由以下形式的展开

$$\sum_{k=0}^{\infty}\ell_k(x)\mathrm{D_P^k}$$

注意，使用符号计算即可轻松地形式化完成这一点。我们记 $\frac{d}{dy} = \mathfrak{d}$ —

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \ell_k(x)\mathrm{D}_{\mathrm{P}}^k = \ell_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k(x)\mathrm{D}_{\mathrm{P}}^k = \ell_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k(x)\mathrm{D}_{\mathrm{P}}^{k-1}\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^{-1}(\mathrm{U}_{\mathrm{P}}\mathrm{D}_{\mathrm{P}}) = \\ = \ell_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k(x)(x)\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{P}}^{k-1}\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^{-1}\cdot Q_y}{Q_y}\bigg|_{y=\mathrm{D}_{\mathrm{P}}}(\mathrm{U}_{\mathrm{P}}\mathrm{D}_{\mathrm{P}}) = \\ = \ell_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k(x)(x)\frac{\mathfrak{d}^{-1}y^{k-1}\cdot Q_y}{Q_y}\bigg|_{y=\mathrm{D}_{\mathrm{P}}}(\mathrm{U}_{\mathrm{P}}\mathrm{D}_{\mathrm{P}})\end{aligned}$$

现在引入零阶导数 L：$\mathrm{L}\cdot g(y) = {}^{g}{}_{(y)-g(0)\,y} = (1+\theta)^{-1}\mathfrak{d}\cdot g(y)$。然后，如果在 $\mathbb{C}[[x,y]]$ 上定义两个辅助算子，

$$\mathrm{A}F(x,y) = F(x,0); \qquad \mathrm{B}F(x,y) = Q_y(x)^{-1}\mathfrak{d}^{-1}Q_y(x)\mathrm{L}F(x,y)$$

形式上可得到

$$F(x,\mathrm{D}_{\mathrm{P}}) = (\mathrm{A}F)(x,\mathrm{D}_{\mathrm{P}}) + (\mathrm{B}F)(x,\mathrm{D}_{\mathrm{P}})\mathrm{U}_{\mathrm{P}}\mathrm{D}_{\mathrm{P}}$$

继续这一过程，我们得到以下展开成立

$$F(x,\mathrm{D}_{\mathrm{P}}) = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathrm{B}^k\cdot F(x,y))\bigg|_{y=0}(\mathrm{U}_{\mathrm{P}}\mathrm{D}_{\mathrm{P}})^k$$

现在对 $p_n(x)$ 作用这个算子，并注意到等比数列，即可形式上得到

$$\begin{aligned}\frac{F(x,\mathrm{D}_{\mathrm{P}})\cdot p_n(x)}{p_n(x)} &= (1-nQ_y(x)^{-1}\mathfrak{d}^{-1}Q_y(x)\mathrm{L})^{-1}\cdot F(x,y)\bigg|_{y=0} = \\ &= (Q_y(x)^{-1}\mathfrak{d}Q_y(x) - n\mathrm{L})^{-1}Q_y(x)^{-1}\mathfrak{d}Q_y(x)\cdot F(x,y)\bigg|_{y=0}\end{aligned}$$

上述推理中的主要问题在于，我们以某种方式定义了 $\mathfrak{d}^{-1}$ 的作用。另一个问题是，我们推测实际上可以将分式 $(F(x,\mathrm{D}_{\mathrm{P}})\cdot p_n(x))/p_n(x)$ 作为 n 的函数展开为等比数列。因此，上述公式实际上可能是正确的，但要证明这一点，我们必须更加严谨和具体。这里还可以注意到第三个问题：我们应如何解释 $(Q_y(x)^{-1}\mathfrak{d}Q_y(x) - n\mathrm{L})^{-1}$ 的作用?

定理。假设我们有一个首一族 P，使得 $p_n(0) = 0$ 对所有 $n \geqslant 1$均成立。考虑生成函数 $Q_y(x)$，并定义 $Q_y'(x) := \partial_x Q_y(x) = \mathrm{D}\cdot Q_y(x)$，$Q_y(x) := \partial_y Q_y(x) = \mathfrak{d}\cdot Q_y(x)$。那么，以下公式成立

$$\boxed{\frac{x}{n}\frac{p_n'(x)}{p_n(x)} = \left(1 + \frac{Q_y(x)}{\dot{Q}_y(x)}(\partial_y - n\mathrm{L})\right)^{-1}\cdot\frac{x}{y}\frac{Q_y'(x)}{\dot{Q}_y(x)}\bigg|_{y=0}}$$

其中，算子 $(1+W)^{-1}$ 的作用解释为 $\hat{1} - W + W^2 - .$ 的作用 ...

在给出定理的证明之前，我们先指出，上述符号计算并不像看起来那么毫无用处，因为有一种特定情形下它完全适用，那就是二项式情形。这种情形使我们无需解释 $\mathfrak{d}^{-1}$ 的作用。虽然它仍未被良好定义，但在这种情形下，$Q_y(x)^{-1}\mathfrak{d}^{-1}Q_y(x)$ 的作用是良好定义的：因为 $Q_y(x) = \exp(x\varphi(y))$，所以有 $Q_y(x)^{-1}\mathfrak{d}^{-1}Q_y(x) = x^{-1}(1+x^{-1}\frac{d}{d\varphi})^{-1}\varphi'(y)^{-1}$。第二个问题实际上也不成其为问题，因为在二项式情形下，我们可以将 $p_n(x)$ 自然地推广到任意复数指标，这是因为展开 $p_s(x) \in x^s + x^{s-1}\mathbb{C}[[x^{-1}]]$ 中的系数是关于 s 的多项式。现在我们将使用以下关于二项式型多项式及其延拓的事实，该事实由作者在前一篇论文中推导得出。

命题。对于任意算子 T_α 和二项式族 $\mathrm{P}^{\mathrm{binom}} = \{p_n(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$，以下公式成立

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(\alpha)y^n}{n!} = e^{\alpha\varphi(y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{T}\cdot p_{n-1}(\alpha)}{p_n(\alpha)} = \left(\alpha + \frac{1}{\varphi'(y)}\left(\partial_y - n\mathrm{L}\right)\right)^{-1}\frac{1}{\varphi'(y)}e^{-\alpha\varphi(y)}\mathrm{T}\cdot e^{\alpha\varphi(y)}\Big|_{y=0}$$

证明。参见 [LB] 中的公式 (1.8)。 □

现在我们可以证明该定理了。对于满足 $p_n(0) = 0$ 对所有 $n \geqslant 1$ 的首一族 P，考虑生成函数 $Q_y(x)$，并定义

$$\Phi_x(y) \coloneqq \frac{1}{x}\ln Q_y(x) \in y + y^2\mathbb{C}[x][[y]]$$

另定义 $f_x(y)$： $f_x(\Phi_x(y)) = y$。现在考虑生成函数为下式的二项式族 $\{\nu_n^x(\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$e^{\alpha\Phi_x(y)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu_n^x(\alpha)y^n}{n!} = (Q_y(x))^{\frac{\alpha}{x}}$$

另考虑以下多项式族

$$Q_y'(x)Q_y(x)^{-1}e^{\alpha\Phi_x(y)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_n^x(\alpha)y^n}{n!} = [\partial_x x\cdot\Phi_x(y)]e^{\alpha\Phi_x(y)}$$

现在注意到 $\Phi_x(y) \in y + y^2\mathbb{C}[x][[y]] \Rightarrow [\partial_x x\cdot\Phi_x(y)] \in y + y^2\mathbb{C}[x][[y]]$，因此有$[\partial_x x\cdot\Phi_x(y)]/y \in 1 + y\mathbb{C}[x][[y]]$。于是我们可以定义作用在 α 中多项式上的算子 T

$$\mathrm{T} \coloneqq \frac{\partial_x x\cdot\Phi_x(t)}{t}\Big|_{t=f_x(\partial/\partial\alpha)} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{T}\cdot e^{\alpha\Phi_x(y)} = \frac{1}{y}\frac{Q_y'(x)}{Q_y(x)}e^{\alpha\Phi_x(y)}$$

根据 $\nu_n^x(\alpha)$ 的定义、 $\tau_n^x(\alpha)$ 以及命题，可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\frac{\tau_n^x(\alpha)}{\nu_n^x(\alpha)} &= \frac{1}{n}\frac{\mathrm{T}f_x(\partial/\partial\alpha)\cdot\nu_n^x(\alpha)}{\nu_n^x(\alpha)} = \frac{\mathrm{T}\cdot\nu_{n-1}^x(\alpha)}{\nu_n^x(\alpha)} = \\
&= \left(\alpha + \frac{xQ_y(x)}{\dot{Q}_y(x)}\left(\partial_y - n\mathrm{L}\right)\right)^{-1}\frac{xQ_y(x)}{\dot{Q}_y(x)}e^{-\alpha\Phi_x(y)}\mathrm{T}\cdot e^{\alpha\Phi_x(y)}\Big|_{y=0} = \\
&= \left(\alpha + \frac{xQ_y(x)}{\dot{Q}_y(x)}\left(\partial_y - n\mathrm{L}\right)\right)^{-1}\cdot\frac{xQ_y(x)}{\dot{Q}_y(x)}\frac{1}{y}\frac{Q_y'(x)}{Q_y(x)}\Big|_{y=0} = \\
&= \left(\alpha + \frac{xQ_y(x)}{\dot{Q}_y(x)}\left(\partial_y - n\mathrm{L}\right)\right)^{-1}\cdot\frac{x}{y}\frac{Q_y'(x)}{\dot{Q}_y(x)}\Big|_{y=0}
\end{aligned}$$

后一个等式实质上意味着我们有如下展开

$$\frac{\alpha}{n}\frac{\tau_n^x(\alpha)}{\nu_n^x(\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-\alpha)^{-k}\left(\frac{xQ_y(x)}{\dot{Q}_y(x)}\left(\partial_y - n\mathrm{L}\right)\right)^{k}\cdot\frac{x}{y}\frac{Q_y'(x)}{\dot{Q}_y(x)}\Big|_{y=0} = \sum_{k=0}^{\infty}(-\alpha)^{-k}\xi_k(x)$$

因此，要证明该定理，只需验证我们可以设定 $\alpha = x$，因为 $\tau_n^x(x) = p_n'(x)$ 且 $\nu_n^x(x) = p_n(x)$。为此，请注意， $Q_y(x)e^{-xy}$ 的展开中， y^k的系数是关于 x 的次数为 $k-1$ 的多项式，因为多项式 $p_n(x)$ 是首一的。后者意味着，$\ln Q_y(x) - xy$的展开也具有相同的性质。此外， $p_{n>0}(0) = 0$。因此有如下结果

$$\frac{1}{x}\frac{\dot{Q}_y(x)}{Q_y(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}y^k h_k(x) \quad \& \quad \deg h_k = k-1; \qquad \frac{1}{y}\frac{Q_y'(x)}{Q_y(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}y^k d_k(x) \quad \& \quad \deg d_k = k-1$$

$$\frac{xQ_y(x)}{\dot{Q}_y(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}y^k \ell_k(x) \quad \& \quad \deg \ell_k = k-1; \qquad \frac{x}{y}\frac{Q_y'(x)}{\dot{Q}_y(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}y^k m_k(x) \quad \& \quad \deg m_k = k-1$$

现在进一步设 $\ell_0(x) = m_0(x) = 1$。我们有 $\xi_M(x)$ 的如下公式

$$\xi_M(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \ell_k(x) y^k (\partial_y - n\mathrm{L})\right)^M \cdot \sum_{k=0}^{\infty} m_k(x) y^k \Big|_{y=0} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \ell_k(x) y^k (\partial_y - n\mathrm{L})\right)^{M-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \ell_k(x) y^k \sum_{k=0}^{\infty} (k+1-n) m_{k+1}(x) y^k \Big|_{y=0} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \ell_k(x) y^k (\partial_y - n\mathrm{L})\right)^{M-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} y^k \sum_{q_1=0}^{k} (q_1+1-n) m_{q_1+1}(x) \ell_{k-q_1}(x) \Big|_{y=0} = \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} y^k \sum_{q_M=0}^{k} \sum_{q_{M-1}=0}^{q_M+1} \ldots \sum_{q_1=0}^{q_2+1} (q_M+1-n) \ell_{k-q_M} \left[\prod_{i=1}^{M-1} (q_i+1-n) \ell_{q_{i+1}-q_i+1}\right] m_{q_1+1} \Big|_{y=0} =$$

$$= \sum_{q_M=0}^{0} \sum_{q_{M-1}=0}^{q_M+1} \sum_{q_{M-2}=0}^{q_{M-1}+1} \ldots \sum_{q_1=0}^{q_2+1} m_{q_1+1}(x) \prod_{i=1}^{M} (q_i+1-n) \prod_{i=1}^{M-1} \ell_{q_{i+1}-q_i+1}(x)$$

注意，在 $n=1$ 的情况下，所有非平凡的 $\xi_M(x)$ 都为零，因为它们与 $(1-n)$ 成比例。因此，我们可以假设 $n>1$。现在取一个指标固定为 $(q_M,\ q_{M-1},\ \ldots\ldots,\ q_1)$ 的任意求和项。为方便起见，记 σ，若 $q_{i-1} = q_i + 1$；若 $q_{i-1} = q_i - k$，则记 ε_k，$(k \geqslant 0)$。由此得到如下形式的一个字

$$\underbrace{\sigma\sigma\ldots\sigma}_{A_1}\varepsilon_{i_1}\underbrace{\sigma\sigma\ldots\sigma}_{A_2}\varepsilon_{i_2}\ldots\underbrace{\sigma\sigma\ldots\sigma}_{A_{\ell-1}}\varepsilon_{i_{\ell-1}}\underbrace{\sigma\sigma\ldots\sigma}_{A_\ell}$$

其中 $A_1 + 1 + A_2 + 1 + \ldots + A_{\ell-1} + 1 + A_\ell = M-1$ 且 $i_1 \leqslant A_1$，$\ldots\ldots$，$i_{\ell-1} \leqslant A_1 - i_1 + \ldots + A_{\ell-1}$。这个字表示指标为 $(q_M,\ q_{M-1},\ \ldots\ldots,\ q_1)$ 的求和项，其具有如下 q_i

$q_M = 0$；$q_{M-1} = 1$；$\ldots$ $q_{M-A_1} = A_1$；$q_{M-A_1-1} = A_1 - i_1$；$q_{M-A_1-2} = A_1 - i_1 + 1$；
$\ldots$ $q_{M-A_1-1-A_2} = A_1 - i_1 + A_2$；$q_{M-A_1-A_2-2} = A_1 - i_1 + A_2 - i_2$；$\ldots\ldots$ $\ldots\ldots$
$q_{M-A_1-A_2-\ldots-A_{\ell-1}-\ell+1} = A_1 - i_1 + \ldots + A_{\ell-1} - i_{\ell-1}$；$\ldots$ $q_1 = A_1 - i_1 + \ldots + A_{\ell-1} - i_{\ell-1} + A_\ell$.

因此，系数等于

$$\prod_{i=1}^{M}(q_i+1-n) = (-1)^M \prod_{i=0}^{M-1}(n-1-q_{M-i}) = (-1)^M \prod_{k=0}^{\ell-1} \prod_{j=A_1+\ldots+A_{k+1}+k}^{A_1+\ldots+A_k+k} (n-1-q_{M-j}) =$$

$$= (-1)^M \prod_{k=0}^{\ell-1} \prod_{j=0}^{A_{k+1}} (n-1-j-(A_1-i_1)-\ldots-(A_k-i_k))$$

而多项式为

$$(\ell_{i_1+1}\ell_{i_2+1}\ldots\ell_{i_{\ell-1}+1})(x)\ m_{A_1-i_1+\ldots+A_{\ell-1}-i_{\ell-1}+A_\ell+1}(x)$$

现在，由于 $\deg\ \ell_{k+1} = k$ and $\deg m_{k+1} = k$，非零系数对应的求和项的次数通常等于 $\deg S_{(q_M,\ldots,q_1)}$ $= i_1 + i_2 + \ldots + i_{\ell-1} + A_1 - i_1 + \ldots + A_{\ell-1} - i_{\ell-1} + A_\ell = M - \ell$。现在我们写出系数非零的条件。对于任意 $0 \leqslant k \leqslant \ell - 1$:

$$A_{k+1} + 1 \leqslant n - 1 - \sum_{m=1}^{k} (A_m - i_m) \quad \Rightarrow \quad A_{k+1} + 1 \leqslant n - 1$$

将所得不等式相加，我们得到 $M \leqslant (n-1)\ell$。因此，任意非零求和项的次数都有上界

$$\deg S_{(q_M,\ldots,q_1)} = M - \ell \leqslant M\frac{n-2}{n-1} \qquad \Rightarrow \qquad \deg \xi_M(x) \leqslant M\frac{n-2}{n-1}$$

因此，该级数在 $\alpha = x$ 处有定义，定理得证。 ■

结论

由该定理可知，可以从生成函数中求出 $f_n(x)$ 的对数导数，因为在这种结构中，每个定理都有一个对偶定理。只需注意，我们仍需将 $f_0^*(y)$ 设为 $=1$。公式如下

$$Q_y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(x)y^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n f_n^*(y)}{n!}\qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{y}{n}\frac{(f_n^*(y))'}{f_n^*(y)}=\left(1+\frac{Q_y(x)}{Q_y'(x)}(\partial_x-n\mathrm{L}_x)\right)^{-1}\cdot\frac{y}{x}\frac{\dot{Q}_y(x)}{Q_y'(x)}\Big|_{x=0}$$

上述推理仍然适用，可以证明该级数的收敛性。不过目前我们应检查形式幂级数的最低次系数，而不是多项式的最高次系数。因此，重新定义 $\mathbb{C}[[y]]$的“deg”，即可得到如下展开

$$\frac{y}{n}\frac{(f_n^*(y))'}{f_n^*(y)}=\sum_{k\geqslant 0}(-y)^{-k}\psi_k(y)$$

此时 $\deg\ \psi_M(y)=M+\ell\geqslant M\binom{n}{n-1}$，因此该级数不含任何 y的负幂，并且 y^h 的任意系数都有明确定义。换言之，展开中的系数$g_n(x)$

$$F(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n(x)y^n}{n!}$$

是首一多项式，还是形如 $x^n+x^{n+1}\mathbb{C}[[x]]$的级数，其实并不重要。只要 $g_0(x)=1$，该定理在这两种情况下都为 n次系数的对数导数给出了正确公式。不过，除了二项式情形之外，这样的一般公式是否还有其他有用的应用，倒是值得探讨。

参考文献

[Dlt] G.-C. Rota、D. Kahaner 和 A. Odlyzko，《有限算子演算》，《数学分析及其应用杂志》，第 42 卷第 3 期，1973 年 6 月。后收入同名著作，Academic Press，纽约，1975 年。

[Gdsl] C. D. Godsil，《代数组合学》，Chapman & Hall，纽约，1993 年。第 9 章 .

[LB] D. Krotkov，“二项式型序列取对数：线性方法” https://arxiv.org/abs/1910.07100